Muligheter i multiplikasjon

Masteroppgave SKUT5911

Kandidat601

1 INNHOLD

Sammendrag

Denne oppgaven handler om multiplikasjon ved 4. trinn i barneskolen.

Min problemstilling:
Hvilken rolle kan rike oppgaver spille for utvikling av forståelse i multiplikasjon?
Den nye læreplanen LK20 viser at elevene må kunne mer enn bare algoritmer, og at de skal kunne utforske og finne fram til metoder selv. En utforskende matematikkundervisning legger vekt på at elevene får muligheten til å forstå matematiske sammenhenger, begreper og begrepsstrukturer. Målet er at de skal utvikle en relasjonell forståelse (Skemp, 2006). Tradisjonelt kan matematikk være et fag preget av pugging av algoritmer. Oppgaver er et av lærerens viktigste verktøy i å veilede elevene i deres læring, og typen oppgave er derfor av betydning for elevenes læring. Rike oppgaver er oppgaver som tillater ulike løsningsstrategier. De skal støtte kreativitet, resonnering og kommunikasjon. Rike oppgaver er en oppgavetype som kan benyttes i arbeidet med den nye læreplanen.
I min studie vil jeg presentere teori og tidligere forskning om utforskende matematikk, multiplikasjon, strategier og rike oppgaver. I tillegg ser oppgaven på forskjellige typer forståelse i matematikk.

I metoden vil jeg velge ut rike oppgaver og sette de inn i en kontekst som danner et undervisningsforløp. Dette skal gjennomføres som en klasseromsstudie. Empirien vil være elevenes løsninger, feltnotater og video. Disse metodene er typiske metoder i forbindelse med kvalitativ forskning i klasserommet. Når det gjelder å kategorisere elevløsningene, vil jeg benytte et rammeverk basert på Sherin og Fuson (2005).

Jeg har identifisert flere problemløsningsstrategier som elevene benyttet gjennom fire problemløsningsoppgaver. I denne studien varierer elevenes valg av strategier fra å benytte en intuitiv metode som å telle alt, til avansert utnyttelse av den distributive lov. Resultatene av studien viser at elever i denne studien benytter et rikt utvalg av strategier, og kan løse multiplikasjonsoppgaver de ikke har automatisert.

2 INNLEDNING

2.1 BAKGRUNN FOR STUDIEN

Når jeg nå skal avslutte mine studier med å skrive en master i matematikkdidaktikk har jeg med mine egne erfaringer både som elev og flere års erfaring som lærer på barnetrinnet, og etter hvert lærerspesialist i matematikk. Jeg har i min yrkeskarriere vært med på intet mindre enn fire reformer av planverket. Som nyutdannet forholdt vi oss til Mønsterplanen av 87. Så kom Hernes og ledet innføringen av reform 97, der 6-åringene ble inkludert i skolen. I 2006 ble Kunnskapsløftet iverksatt. Og nå har vi akkurat innført Fagfornyelsen (2020).

Som elev likte jeg matematikkfaget godt opp til og med ungdomsskolen. Ved allmennfag på videregående opplevde jeg at algebra var helt uforståelig, og jeg mistet all selvtillit i faget. Hadde jeg med min karakter i matematikk fra videregående søkt lærerutdanning i dag, hadde jeg ikke kommet inn.

I forbindelse med kunnskapsløftet i 2006 gjennomførte jeg min første etterutdanning og ble presentert for matematikkteorier som bygde på forståelse og elevaktivitet. Etter det har jeg fortsatt å utdanne meg i matematikk, og har erfart i praksis at å benytte forskningsbaserte metoder i klasserommet faktisk virker.

Gjennom mine 2 studieår ved lærerspesialistutdanningen ved OsloMet, har jeg lært mye. Det jeg i størst grad sitter igjen med, er hvor viktig og hvor vanskelig det er å legge forskning til grunn for min undervisning. Jeg har opplevd å bli begeistret etter å ha lest Skemp (Richard R, 2006) om relasjonell forståelse, og tenkt at dette skal jeg gjennomføre, til å oppleve at å endre praksis i det virkelige liv er en stor utfordring. Det samme opplever jeg i forhold til prosessaspektene i kjerneelementene i fagfornyelsen (Udir.no). Kompetansebegrepet som Niss(Niss & Højgaard, 2019) diskuterer gir mening, når man tenker på langsiktig læring. Selvfølgelig er dette riktige og viktige arbeidsmåter som øker kvaliteten på elevenes undervisning, men å innføre «*best practise*» krever målrettet arbeid over tid.

Som en hoved overskrift vil jeg si at det ikke er lettere å være matematikklærer etter lærerspesialiststudiet, men det er mer interessant og morsomt.

Som lærer er det et ønske å kunne legge til rette slik at alle kan inkluderes i klasserommet. Å se hvordan elevene lykkes i matematikk, og blir motiverte for faget, har vært en viktig drivkraft for meg. Når eleven sier: «Nå forstår jeg matematikk», har vært en motivasjon for å utvikle meg som matematikklærer gjennom videreutdanning.

«Det er en myte at noen ikke har hjerne for å lære matematikk» sier Bjørn Smestad (referert i Balci, 2019). Det er en kontroversiell uttalelse, men som matematikklærer blir jeg inspirert av uttalelsen til å utvikle min praksis i klasserommet.

Nå skal jeg som en avslutning på disse to årene skrive en masteroppgave der jeg forsker videre på bakgrunn av det jeg har lært disse to årene. Mitt ønske er å forske på et tema som kan ha direkte nytte i egen praksis. Jeg ønsker også å bidra til at matematikklærerne ved min skole skal ha nytte av min kompetanse.

2.2 Problemstilling

For å koble mitt arbeide nært opp til praksis på barnetrinnet, vil jeg fordype meg i temaet multiplikasjon. Multiplikasjon er et sentralt tema i matematikkundervisning. Elevene møter det i dag i 3.klasse. Min studie vil være en klasseromsstudie i en 4.klasse.

Min problemstilling vil være:

Hvilken rolle kan rike oppgaver spille for utvikling av forståelse i multiplikasjon?

3 Teoretisk utgangspunkt

I mitt forord uttrykker jeg et ønske eller en visjon om at alle kan lære matematikk. I dette kapitlet vil jeg si noe om hvordan man kan legge til rette matematikkundervisning, slik at alle elever kan inkluderes i klasserommet. De matematikkdidaktiske teoriene vil jeg se i sammenheng med kjerneelementene i fagfornyelsen (udir.no). Avslutningsvis vil jeg sette rike oppgaver inn i denne sammenhengen.

3.1 Hvordan står det til i matematikkundervisning i dag?

Ostad (Ostad, 2013) henviser til det han karakteriserer som et paradigmeskifte innenfor læringsforskning. Han viser til *den kognitive revolusjon* som startet på midten av 1950-årene. Læring ble betraktet som resultat av en aktiv prosess fra det enkelte individs side, og ikke som resultat av passiv mottaking av viten fra omverdenen. Videre på 1970-tallet befestet *kognitiv aritmetikk* seg som et enhetlig uttrykk i faglitteraturen. Ostad viser til Ashcrafts «*how do* *people do arithmetic in their heads»* (1972, referert Ostad, 2008), og at forskning i denne perioden resulterte i at det ble fokus på strategier i matematikk både teoretisk og empirisk.

Gjennom deler av 2000-tallet har Norge kommet dårlig ut av undersøkelser som viser elevers kompetanse i matematikk. Den nasjonale PISA rapporten (Programme for International Student Assesment), i 2006 konkluderte med skuffende resultater; «norske elever skårer signifikant lavere enn gjennomsnittet i OECD». De siste resultatene fra PISA og TIMMS viser at norske barns matematikkferdigheter har blitt bedre, og er over OECD-gjennomsnittet. Likevel viser tall fra Statistikk fra Statistisk Sentralbyrå (2019) at 23,1% av elevene på 5.trinn skårer på laveste mestringsnivå på nasjonale prøver i regning. I praksis betyr det at nesten hver 4. elev på 5.trinn mestrer bare enkle løsningsstrategier i de fire regneartene.

Forskning for å finne årsaker til dette, kan se en tendens til at norske klasserom har vært preget av tradisjonelle arbeidsmåter. Skorpen (2009) trekker fram som et av hovedfunn at undervisningen er preget av «taus oppgaveløysing» (s 7). Wæge, Nosrati (2018) sier at dagens undervisning fortsatt befinner seg i oppgaveparadigmet med mye tradisjonell undervisning, og individuell skriftlig oppgaveløsning.

3.2 Forståelse og kompetanse

For å si noe om hvordan man best kan undervise i matematikk ønsker jeg her å si noe om hva det betyr å ha matematikkforståelse eller kompetanse.

Som nevnt i min innledning vises det i litteraturen ofte til Skemps (Richard, 2006) artikkel når det gjelder undervisningsmetoder i matematikk. I denne artikkelen diskuterer han hva vi skal legge i forståelse. For at elevene skal oppnå forståelse skiller Skemp (2006) mellom instrumentell og relasjonell forståelse. Ofte vil tradisjonell undervisning knyttes opp mot instrumentell forståelse, mens relasjonell forståelse gjerne forbindes med undersøkende metoder i faget.

«Learning relational mathematics consists of building up a conceptual structure, (schema) from which its possessor can (in principle) produce an unlimited number of plans for getting from any starting point within his schema to any finishing point»(Skemp 2006 s 14)

Instrumentell forståelse innebærer i følge Skemp å lære et økende antall regler og formler for at elevene skal finne løsningen på oppgaven. Undervisningen bygger på at eleven skal lære en rekke bestemte instrukser som de kan bruke for å løse oppgaver. Elevene har ikke utviklet en forståelse av de underliggende relasjonene og sammenhengene i matematikken.

Elever som utvikler relasjonell forståelse, har mentale strukturer slik at de kan lage nærmest uendelig mange forskjellige planer for å løse oppgavene.

Et annet begrep som er mye benyttet i andre forskningstradisjoner er kompetanse. Det kommer også til uttrykk i læreplanen som ble innført i 2020 (Udir.no).

Utdanningsdirektoratet definerer kompetanse som det å tilegne og bruke kunnskaper og ferdigheter for å mestre utfordringer i kjente og ukjente situasjoner (U.dir)

Jeg vil her presentere 2 rammeverk som ofte blir tatt i bruk i diskusjon og forskning rundt matematisk kompetanse. Det første rammeverket er Kilpatrick, Swafford og Findell (2001). Selv om begrepet kompetanse ikke benyttes i dette rammeverket, ble Kilpatrick et al (2001) brukt til å beskrive matematisk kompetanse i Ludvigsens-utvalgets rapport «Framtidens skole (Ludvigsen et al., 2015, s 57). Fagfornyelsen 2020 bygger på denne rapporten.

«Trådmodellen» i Kilpatri/ck, Swafford og Findell, (2001) er et rammeverk som beskriver hva en legger i å mestre matematikk. I stedet for begrepet matematisk kompetanse bruker de «*mathematical profiency*», som de mener dekker begreper som ekspertise, kompetanse og kunnskap som er nødvendig for å mestre matematikk. Kilpatrick et al. (2001) deler *mathematical proficency* i fem komponenter: Forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement. Alle komponentene er tett sammenflettet og avhengige av hverandre. Ved å arbeide med alle fem komponentene, vil elevene utvikle en solid, varig, fleksibel og relevant kompetanse i matematikk (Kilpatrick et al., 2001).

Begrepsmessig forståelse (*conceptual understanding*) innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer, og se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer. Et nøkkelbegrep ved denne kompetansen er læring ved forståelse. Læring ved forståelse innebærer ifølge Kilpatrick, at man har et bedre grunnlag i møte med ukjente problemer og ny kunnskap.

Komponenten beregning (*procedural fluency*) innebærer å ha kjennskap til, og ferdigheter til å utføre og velge bruken av matematiske prosedyrer. Denne kompetansen handler om matematiske strategier, når og hvordan de kan brukes, og å kunne utføre dem nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig (Valenta 2015).

Anvendelse eller strategisk tankegang (*Strategic competence*) innebærer å gjenkjenne og formulere matematiske problemer, representere dem på en hensiktsmessig måte, utvikle en løsningsstrategi, og vurdere hvor rimelig løsningene er.

Resonnering (*adaptiv reasoning*) handler ifølge Valenta (2015) om å kunne forklare hvordan man tenker, se etter mønster og sammenhenger. Kilpatrick et al (2001) mener at resonnering i dette tilfelle omhandler formelle og uformelle bevis, i tillegg til intuitive og induktive resonnement.

Den femte og siste tråden handler om engasjement (*productive disposition*). Engasjement handler om å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifull. Dette aspektet innebærer også å ha tro på at det er mulig å bli kompetent i matematikk, lære å streve og ikke gi opp. En slik holdning til faget vil ifølge Kilpatrick gi en økt motivasjon, da en har forståelse for faget og ser viktige matematiske sammenhenger.

Det andre rammeverket jeg ønsker å presentere, er KOM rammeverket som ble utarbeidet av en komité i Danmark for å besvare hva det vil si å mestre matematikk. Niss og Jensen (Niss & Højgaard, 2019) ledet et arbeid for å prøve å skape en felles forståelse for hva det vil si å beherske matematikk, og hvordan undervisningen best skal gjøres. Begrepet kompetanse blir ofte brukt når en beskriver det å beherske et område med gjennomslag, oversikt og dømmekraft (Niss & Højgaard, 2019), og begrepet matematisk kompetanse brukes som et faglig uttrykk for det å mestre matematikk.. Fra dette ser vi at det å ha kompetanse i matematikk ikke bare innebærer bruk av kunnskaper og ferdigheter, men også omhandler forståelse. På lignende måte definerer Niss (Niss & Højgaard, 2019) matematisk kompetanse som det å ha kunnskap om, forståelse for, og kunne ta i bruk matematikk i ulike sammenhenger (Niss & Højgaard, 2019).

Prosjektet utarbeidet åtte ulike delkompetanser som man da mener til sammen utgjør matematisk kompetanse. Selv om delkompetansene er unike og har hver sin identitet, er de sterkt forankret med hverandre, og man kan ikke redusere en kompetanse fra de øvrige (Niss & Højgaard, 2019). Delkompetansene er samlet i to grupperinger. Den første er «å stille og svare på spørsmål i, med og om matematikk, og inkluderer tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse, modelleringskompetanse og resonnementskompetanse. Den andre grupperingen er å kunne håndtere matematisk språk og redskaper, og inkluderer representasjonskompetanse, symbol-og formalismekompetanse, kommunikasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse (Niss & Højgaard, 2019). Rammeverket blir ofte framstilt som en rose, der hver delkompetanse er et roseblad. Denne rosen framstiller at kompetansene overlapper hverandre og vokser i takt med hverandre (Niss & Højgaard, 2019).

KOM rameverket beskriver i tillegg at hver kompetanse har en undersøkende og en produktiv side. Den undersøkende siden innebærer forståelse, analyse og kritisk bedømmelse av utførte prosesser og produkter, og den produktive siden består av å gjennomføre de prosessene som kompetansen inneholder (Niss & Højgaard, 2019).

3.3 KJERNEELEMENTER

Ny læreplan som kom i 2006 (LK06), pekte på å utvikle elevens kompetanse, og viktigheten av utforskning og problemløsning (Udir.no). Dette blir videreført i den siste læreplan som er gjeldende fra høsten 2020.

Læreplanens overordnet del bygger på denne definisjonen av kompetanse:

*Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer, og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning» (*Utdanningsdirektoratet, 2020d)

I arbeidet med denne planen (2020) har utdanningsdirektoratet utviklet 6 kjerneelementer som defineres som det viktigste elever skal lære i matematikk. Arbeidsmåter, metoder og tenkemåter har fått større fokus og beskrives i de 5 første kjerneelementene. Læreren skal legge til rette for at elevene skal på å utforske, diskutere, resonnere, argumentere, vurdere, utvikle strategier og generalisere (Utdanningsdirektoratet, 2020). Elevene skal møte det sjette kjerneelementet, matematiske kunnskapsområder, gjennom de de 5 første (Regjeringen.no, 2028b).

Kjerneelementene defineres som det elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget. Målet med kjerneelementene er at de skal bidra til at elevene over tid utvikler forståelse av innhold og sammenhenger i faget (u.dir.no, 2019)

Dette er kjerneelementene:

- Utforsking og problemløsning
- Modellering og anvendelse
- Resonnering og argumentasjon
- Representasjon og kommunikasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kunnskapsområder
  (udir.no)

Disse kjerneelementene har helt klare prosessaspekter som tydeliggjør at elevene skal være aktive i egen læring. Dette understrekes ved at kjerneelementene inneholder verb som utforske, lete, finne, vurdere, bruke, anvende, forklare osv. Kjerneelementene tar utgangspunkt i viktige kompetanser elevene skal utvikle.

Jeg vil derfor også prøve å knytte forbindelse mellom relasjonell forståelse, de fem komponentene i trådmodellen og KOM rammeverket, opp mot kjerneelementene i læreplanen, LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2020). I drøftinga vil dette danne basis for å analysere bruken av rike oppgaver.

3.4 Undersøkende matematikkundervisning

Gjennom undervisning i matematikk er det skolens oppgave at elevene oppnår best mulig matematisk kompetanse. Skorpen (2009), viser i sin forskning at norske matematikklasserom er preget av taus oppgaveløsing. Dette i kontrast til det konstruktivistiske læringssynet som vokste fram på 70 og 80-tallet, og som satte søkelys på prosessaspektet. Han viser til Björkquist: «Kunnskap vert konstruert aktivt av subjektet, den vert ikkje passivt moteken frå omgjevnadane» (Björkquist 2005, referert i Skorpen, 2009 s 8)

I følge Goose og Sherin (2004 og 2002, referert i Wæge, 2017) kan en alternativ undervisningsform være undersøkende matematikkundervisning (inquiry based teaching).

I teorien om *inquiry based teaching* vil jeg støtte meg på Artigue og Blomhøjs artikkel (Artigue & Blomhøj, 2013). De diskuterer bakgrunnen for dette pedagogiske konseptet basert på Dewey, og hvordan dette er sett i forhold til etablerte teoretiske rammeverk i matematikkundervisning (s 797).

Ifølge Artigue og Blomhøj (2013) skal elevene i *inquiry based learning* ha den vitenskapelige arbeidsformen som utgangspunkt, de skal arbeide på samme måte som matematikere eller forskere. Gjennom egen utforsking skal de komme fram til løsninger på matematiske problemer. Forfatterne tilskriver John Dewey (1859-1958) som grunnlegger av *inquiry based -education*. Deweys grunntanke var at utdanning skulle være for alle, det skulle stimulere for læring og utvikle deres autonomi. Målet skulle også være å legge grunnlaget for aktive borgere som skulle bygge samfunnet. Artigue og Blomhøj (2013) viser også til tekster der Dewey avviste tradisjonell undervisning fokusert på instruksjon og drill. De filosofene Dewey refererte til, var bidragsytere i skifte i epistomologien, synet på kunnskap. Deres syn på kunnskap var basert på tenkning, refleksjon, eksperimentering og vitenskap (Artigue &

Blomhøj, 2013). I følge Dewey var målet for undervisning at den lærende skulle utvikle kunnskap for å løse realistiske problemer og *making sense of the world*. Dewey er også kjent for uttrykket *learning by doing* i forbindelse med etableringen av laboratorieskole i Chicago. Dewey poengterte at aktivitet måtte være inkludert i en prosess av *reflektiv inquiry* og verdien i den generaliseringen som kan komme ut av det.

Å arbeide etter prinsipper fra undersøkende matematikkundervisning kan bidra til at elevene utvikler relasjonell forståelse i matematikk. Wæge sin studie (2007) viste at undersøkende matematikkundervisning bidro til at flere elever endret fokus fra instrumentell til relasjonell forståelse (Wæge, 2007). Skemp (2006) hevder at med en relasjonell forståelse er elevene mer adaptive til nye oppgaver (s 8). I sin artikkel hevder Skemp også at relasjonell forståelse er enklere å huske for elevene, selv om det er mer utfordrende å lære (s 9). Han sier det er et paradoks at det er enklere for elevene å lære formelen for arealet av en trekant, enn å lære hvorfor det er slik: «*There os more to learn- the connections as well as the seperate rules- but the result, once learnt, is more lasting. So there is less re-learning to do, and long-term the taken may well be less alltogether*» *(s 9)*

3.5 Problemløsning

Høsten 2020 ble ny læreplan; LK20, innført i norsk skole, også kalt fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2020). I matematikkfaget er fokuset på problemløsning og problemløsningskompetanse økt. Dette i tråd med at matematikkdidaktiske forskere utviklet gode beskrivelser av prosessaspektet ved matematisk kunnskap. I et samfunnsperspektiv er det også ønskelig med tanke på fremtidens arbeidsliv at ansatte kan tenke kritisk og løse problemer på en kreativ måte. Den nye læreplanen legger mer vekt på det å kunne bruke matematikk videre og i dagliglivet. Det å kunne løse praktiske oppgaver, kunne takle nye og ukjente problemer er viktig kompetanse for livslang læring. Problemløsning er en av de 6 kjerneelementene som sier hvilke kompetanser det er viktig at elevene utvikler. «Problemløsing i matematikk handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før» (udir.no).

I litteraturen er det i hovedsak to ulike definisjoner på problemløsning. Den ene hovedretningen tar perspektivet til den som skal løse problemet, mens den andre setter fokuset på oppgaven.

Niss et al. definerer begrepet «problem» som relativt i forhold til personen som skal løse problemet. En oppgave som kan oppleves som et problem for en elev kan oppleves som en rutineoppgave for en annen (Niss & Højgaard, 2019). Schoenfeld (2016) definerer at problemløsning skal være et problem for den som prøver å løse oppgaven. Schoenfeld har fokuset på løseren av problemet, og at det kun er en problemløsningsoppgave dersom løseren ikke vet nøyaktig hvordan den den skal løses.

Problemløsning i matematikk kan også fokusere på oppgaven. Polya (1957) definerer at problemløsningsoppgaver skal utfordre elevenes nysgjerrighet. I følge Schoenfeld (1992) finnes det ikke en enkel standardalgoritme for å løse en problemløsningsoppgave.

Stedøy og Torkildsen bygger på Johnson, Herr og Kysh 2003; Leer 2009, og definerer et problem som «en oppgave der eleven ikke umiddelbart ser hvordan han kan komme videre i løsningsprosessen, og ingen kjent løsningsmetode kan brukes».

Ved å arbeide med problemløsning benytter elevene kompetanser innenfor de andre kjerneelementene.

I Kilpatrick et al.(2001) kommer problemløsning inn under anvendelse. Problemløsning bør være arenaen der alle trådene av matematisk kunnskap konvergerer. Det bør gi muligheter for elevene til å veve sammen kunnskapstrådene, og for lærere til å vurdere elevenes arbeid med alle trådene (Kilpatrick et al., 2001).

(Solem et al., 2018) viser til den amerikanske matematikklærerforeningen, NCTM og deres bok: Principles and Standards for School Mathematics (2000) som beskriver det matematiske lærestoffet i form av seks standarder. De fem første inneholder de matematiske områdene, mens den sjette beskriver matematiske prosesser: problemløsning, resonnement og bevis, kommunikasjon, sammenhenger og representasjon. NCTM beskriver problemløsning på denne måten: «Elevene skal kunne løse oppgaver, både matematiske og praktiske, hvor de på forhånd ikke har en metode eller faktakunnskap som umiddelbart gir et svar. De skal kunne bruke og tilpasse et bredt spekter av passende strategier, og reflektere over løsningsprosessen. De skal også utvikle ny matematisk kunnskap gjennom problemløsning».

I drøftinga vil jeg forsøke å trekke linjene mellom Dewey (Artigue & Blomhøj, 2013) og betydning av elevenes motivasjon i matematikk (Wæge & Nosrati, 2018).

3.6 RIKE OPPGAVER

For å legge til rette for undersøkende matematikkundervisning er det vesentlig hvilke oppgaver man presenterer for elevene.

Det finnes mange ulike navn på typer av matematikkoppgaver; åpne oppgaver, rike oppgaver problemløsningsoppgaver og prosedyreoppgaver. Her vil jeg si hva jeg mener med rike oppgaver og diskutere det fra flere forskeres hold, og se på hva det innebærer å legge til rette for undervisning med rike oppgaver. For å kunne klassifisere oppgaver som rik i matematikk må det være en del kriterier som blir oppfylt. Piggott (2018) diskuterer i sin artikkel hva rike oppgaver er, og hvorfor de er viktige. Det blir listet disse fellestrekkene:

De skal være tilgjengelige for en stor variasjon av elever, her benytter hun begrepet «low treshold- high celiling»

- Være engasjerende fra starten
- Gi eleven mulighet til refleksjon og kritisk tenkning
- Oppmuntre til kreativitet
- Støtte kommunikasjon og diskusjon
- Støtte elevens autonomi i arbeidet

Piggott (2018) understreker også at oppgavens rikhet blir påvirket av miljøet, og hvordan oppgaven blir presentert. Læreren har en viktig rolle i hvilken støtte elevene får, og hvilke forventninger som blir signalisert.

Videre sier hun det er viktig at læreren kjenner til elevenes kompetanse i temaet. Ha et klart mål for undervisningen, og ha det for øyet at det kan være ulike mål for elevene. Være forberedt på å oppmuntre elevene til å være utholdende. Dette kan være krevende i klasser der elevene ikke er vant til å ta ansvar for egen læring. Det er viktig at ikke læreren med små hint forenkler oppgaven, eller leder elevene mot ønsket løsning. Derfor er det viktig hvilke spørsmål læreren stiller når det undervises med rike oppgaver. Elever lærer mer fra oppgaver de har eieforhold til. Til slutt trekker hun fram at elever noen ganger kan lære mer fra medelever enn fra læreren.

Hedrén, Hagland og Taflin (2005) presenterte følgende kriterier for rike oppgaver:

1. Problemet skal introdusere viktige matematiske ideer eller løsningsstrategier.
2. Problemet skal være lett å forstå. Alle skal kunne komme i gang og ha muligheter til å arbeide med det.

3. Problemet skal være utfordrende, anstrengende og kunne ta tid.
4. Problemet skal kunne løses på ulike måter, med ulike strategier og representasjoner.
5. Problemet skal kunne initiere en matematisk diskusjon som omfatter ulike strategier, representasjoner og matematiske ideer.
6. Problemet skal fungere som brobygger mellom ulike matematiske områder.
7. Problemet skal kunne lede elever og lærere til å formulere nye interessante problemer.

I rike oppgaver er oppfølgingsspørsmål eller videreutvikling av problemet en naturlig del av arbeidet. Spørsmålene kan formuleres enten av elevene, læreren eller elevene og læreren i fellesskap.

I boka Motivasjon i matematikk(Wæge & Nosrati, 2018) identifiserer de hva slags oppgaver som skal danne grunnlaget for å fremme elevenes motivasjon, metakognisjon og læring. De viser til at oppgaver som er kognitiv krevende og oppnåelig for elever på ulike nivåer, vil være oppgaver som fremmer dette. Oppgaver som har denne egenskapen, kaller de rike oppgaver. Oppgavene er karakterisert med lav inngangsterskel og stor takhøyde, eller «*low treshold, high ceiling activities*» tilsvarende fra Piggotts kriterier. (Piggott,NRICH). Som eksempel på rike oppgaver viser de til LIST oppgaver som ble utviklet hos NRICH 1996. På bakgrunn av at Wæge Nosrati definerer LIST oppgaver som rike, vil jeg her ta med deres tre egenskaper ved LIST-oppgaver som teoribakgrunn for rike oppgaver.

For det første vil det utvikle og fremme en positiv klasseromskultur når elevene arbeider med rike oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde. Diskusjonene blir mer meningsfulle fordi alle kan bidra på sitt vis, og lærer og blir inspirert av hverandres fremgangsmåter og resonneringer. For det andre vil elever i arbeid med slike oppgaver ofte overraske læreren med hvor mye de forstår og behersker i matematikk. De får muligheten til å vise hva de kan, snarere enn det de ikke kan.

Den tredje egenskapen Wæge Nosrati trekker fram ved denne oppgavetypen, er at det vil gi elevene muligheter til å tenke på sofistikerte måter. Det matematiske temaet og innholdet i oppgaven kan ofte være forholdsvis enkelt, men nivået på tenkningen som kreves for å løse dem, er sofistikert.

Arbeid med rike oppgaver (LIST-oppgaver) kan bidra til å fremme elevenes indre motivasjon gjennom å tilfredsstille de behovene de har for kompetanse, autonomi og tilhørighet (Wæge, Nosrati, 2018, s 84).

I artikkelen Matematiske aktiviteter med lav inngangsterskel og stor takhøyde (Klaveness et al., 2019) argumenterer videre Nosrati for at LIST oppgaver er av typen rike oppgaver. Nosrati viser til Karlsen (2014, referert i Klaveness et al., 2019) som definerer rike oppgaver med fokus på lav inngangsterskel, problemløsning, utforskning, ulike representasjoner, mulighet for kommunikasjon og for å utvide oppgavene. Disse kategoriene mener Nosrati (2019) LIST-oppgaver har til felles med rike oppgaver.

Rike oppgaver kan kalles problemløsningsoppgaver i følge Utdanningsdirektoratet (2015). Dette hvis de legger opp til at matematiske ideer til løsningen og forståelsen av matematiske begrep skal kunne diskuteres med andre. En rik oppgave skal innvie ideer eller strategier, og være lett å forstå. En rik oppgave krever anstrengelse over tid, og oppleves anstrengende. Det skal være mulig å løse oppgaven på flere måter.

Ved å arbeide med rike oppgaver kan man operasjonalisere kjerneelementene. Her vil jeg sette rike oppgaver inn i noen sammenhenger fra kjerneelementene (udir). Det første kjerneelementet beskriver utforsking og problemløsning. Der beskrives det at elevene skal lete etter mønster og finne sammenhenger, de skal selv være aktive i læringsprosessen, og utvikle egne løsningsmetoder. Kjerneelementet resonnering og argumentasjon legger vekt på at elevene skal lære å utforme sine egne resonnementer, og kunne argumentere for sine framgangsmåter og løsninger. Det tredje kjerneelementet heter representasjon og kommunikasjon og har fokus på matematiske samtaler der elevene skal være aktive og kunne forklare framgangsmåten og begrunne svarene sine. I tillegg skal de kunne veksle mellom ulike representasjoner. Til slutt vil jeg trekke fram en god begrunnelse for at elevene skal arbeide med rike oppgaver: For at elevene skal kunne abstrahere og generalisere matematikk, er det viktig at de oppdager sammenhenger og strukturer selv, og ikke blir presentert for ferdige løsninger. Dette blir understreket i det fjerde kjerneelementet.

3.7 Kontekst

I tillegg diskuterer Pigott at rike oppgaver i stedet kan kalles for rike kontekster. Hun beskriver en serie med oppgaver som er relatert til hverandre i en kontekst. Enge, Valenta diskuterer i sin artikkel (2012) verdien av regnehistorier og tekstoppgaver i matematikkundervisningen. De trekker fram motsetningen mellom de tradisjonelle tekstoppgavene som ble gitt for at elevene skal anvende spesifikke prosedyrer og betydningen av regnehistorier Fosnot og Dolk legger til grunn. De fremhever at regnehistorier skal gi elevene mulighet for å organisere, legge merke til og utforske mønstre, og til å utvikle regnestrategier og argumentere for disse. Som jeg har nevnt tidligere er RME innenfor undersøkende matematikk, og disse forskerne er innen den tradisjonen. I følge Fosnot og Dolk må en god regnehistorie gi mulighet til å utforske egenskaper ved en matematisk operasjon, til å utvikle varierte regnestrategier, og til å utvikle et bilde av situasjonen. I RME metodikken kalles dette å lage en *modell for tanken,* og at eleven kan støtte seg på denne modellen i arbeidet med den gitt operasjonen (Adendorff, 2019).

Enge og Valenta sier at elever som utvikler egne modeller for tanken, ikke er avhengige av å huske prosedyrer, man har noe å falle tilbake på og komme i gang med oppgaveløsning. Modellen gir også større muligheter til å utvikle mer avanserte og effektive strategier, vurdere rimeligheten av svar, og generalisere.

Kaufmann (Kaufmann & Universitetet i, 2010) peker i sin avhandling på at å bruke realistiske oppgaver fra dagliglivet vil gjøre det lettere for elever å lære multiplikasjon.

3.8 Multiplikasjon

Det matematiske temaet for denne studien er multiplikasjon. I dette kapitlet vil jeg se på multiplikasjon som fenomen. Forskning på multiplikasjon vil jeg velge ut fra problemstilling og fokusere på teori rettet mot hvilke typer strategier elevene bruker når de løser multiplikasjonsoppgaver. Jeg vil diskutere det matematiske temaet multiplikasjon i forhold til kompetansemålene i fagplan for 4.klasse.

Kaufmann (2010) problematiserer i sin avhandling utviklingen av matematikkundervisningen. Han viser til Smith og Smith (2006) og O’Brien og Casey(1983) som hevder at multiplikasjonsundervisningen har en overvekt av fakta og øvelse, og at det hevdes at mange elever som har erfart denne undervisningsformen ikke vet hva multiplikasjon er (s 86)

Carpenter (Carpenter, Fennema, Franke,Levi og Empson, 1999) hevder at barn har en uformell eller intuitiv kunnskap om matematikk som danner grunnlag for deres videre utvikling av forståelse i matematikk. Når elevene møter multiplikasjon i 3.klasse har de mange erfaringer i matematikk og naturlig i sin hverdag, der de egentlig ganger. En femåring løste denne praktiske oppgaven som krever multiplikativ tenkning ved bruk av direkte modell og konkreter: «I en tyggegummipakke er det seks biter. Hvor mange biter er det i tre slike pakker?»(Solem et al., 2018). Eleven kan her bruke additiv tenkning ved å legge sammen 6 3 ganger: 6 + 6 + 6.

Kaufmann (2010) hevder at den additive forståelsen utvikles ganske naturlig gjennom additive situasjoner både på skolen og i dagliglivet. Utviklingen av den multiplikative forståelsen utvikles ikke så naturlig. Han peker på skolens oppgave for å utvikle forståelse for multiplikative situasjoner og strategier (s 18). Overgangen fra addisjon til multiplikasjon krever at eleven oppretter er forståelse av begrepet enhet, mengde eller gruppe. For å forstå den multiplikative strukturen i oppgaven med antallet tyggegummibiter, må elevene forstå at det er 3 enheter som hver har 6 biter. Oppgaven vår bli å utnytte og bygge videre på kunnskapen elevene bringer med seg inn i klasserommet (Solem, Alseth, Nordberg, 2018).

Elever i norsk skole møter multiplikasjon som matematisk innhold i 3.klasse. Etter innføringen av de nye fagplanene i 2020(Utdanningsdirektoratet, 2020), er disse kompetansemålene gjeldene for temaet multiplikasjon:

- Utforske multiplikasjon ved telling
- Eksperimentere med multiplikasjon og divisjon i hverdagssituasjoner
- Representere multiplikasjon på ulike måter og oversette mellom de ulike representasjonene
- Bruke kommutative, assosiative og distributive egenskaper til å utforske og beskrive strategier i multiplikasjon (Udir.no)

Jeg vil drøfte hvordan elevenes ulike forkunnskaper kommer til uttrykk i arbeidet med multiplikasjon. Videre vil jeg undersøke hvordan elevene utnytter de kommutative, assosiative og distributive egenskapene til multiplikasjon i sine strategier for å løse multiplikative problemer.

I dagligtale blir ordet multiplikasjon ofte erstattet med ganging. I litteraturen finner jeg ulike definisjoner og syn på hva multiplikasjon er.

Store norske leksikon har denne definisjonen: «Multiplikasjon er det å gange to eller flere tall med hverandre. Det er en av de fire regneartene i aritmetikken, sammen med addisjon, subtraksjon og divisjon. Som symbol for multiplikasjon brukes vanligvis · eller x. Resultatet av en multiplikasjon kalles produktet. Tallene som multipliseres med hverandre, kalles faktorer. Hvis man for eksempel multipliserer 5 med 2, skrives dette 5 · 2, som leses «5 ganger 2», og resultatet er 10. Her er 5 og 2 faktorer, og 10 er produktet».

I Building the Foundation (Bartolini Bussi & Sun, 2018) presenteres denne definisjonen:

«The product of two numbers is a third number which contains as many units as one number taken as many times as the units in the other». The operation of finding the product of two numbers is called multiplication».

I multiplikasjon er prosessen for å finne et tall som er produktet av ett tall som inneholder antallet i gruppen og et annet tall som forteller hvor mange ganger man tar de. På papiret vil et multiplikasjonsstykke se slik ut: $3 \cdot 4 = 12$. 3 og 4 kalles faktorer og 12 kalles produktet. Ved å sette tallene i en kontekst får de ulike funksjoner.

Solem et al. viser til to ulike situasjoner som endrer tallenes funksjoner: I «Tre bord med fire barn på hvert» er 3 multiplikatoren (mangfoldiggjøreren) og 4 er multiplikand (det som skal mangfoldiggjøres) og 12 er produktet. Situasjonen: «tre jenter, fire ganger så mange gutter», her er det 4 som er multiplikatoren, mens 3 er multiplikand. (Solem et al., 2017).

Smith og Smith (Smith & Smith, 2006) viser til tidligere forskning om hva det vil si å forstå multiplikasjon. Det første er å forstå hva kvantitet er, det vil si at elever må forstå forskjellen mellom diskret og kontinuerlig kvantitet, gjenkjenne deres bruk både som forskjellige enheter (diskret versus kontinuerlig), og forskjellige prosesser (telling kontra måling). Det andre er å forstå ulike typer situasjoner som er multiplikative, å gjenkjenne de i tekstoppgaver. Det tredje punktet er å gjenkjenne like grupper, å forstå rollen like grupper har i multiplikasjon. Og for det fjerde må elever forstå relevante enheter knyttet til multiplikasjon, at to faktorer i multiplikasjon kan referere til to forskjellige enheter.

Tvete problematiserer tankemodellen «gjentatt addisjon», og kaller det en primitiv modell basert på Fischbeins teori. Gjentatt addisjon passer ifølge Tvete, bra til situasjoner med like grupper eller like mål, dvs hvor multiplikator er et helt tall, og multiplikanden et visst antall objekter, eller også en bestemt målt størrelse. I litteratur om undervisning i multiplikasjon ser jeg i mindre grad søkelys på multiplikasjon som regneoperasjon. I stedet ser jeg at både Tvete og Solem et al., bruker multiplikative strukturer og multiplikativ tenkning som sentrale begreper i arbeid med multiplikasjon.

Tvete drøfter i «Multiplikative strukturer» hvordan vi i skolearbeidet ikke bør skille de rene matematikkbegrepene fra de praktiske situasjonene som de er relevante for. I sin analyse av begrepet multiplikasjon utdyper han dette med å se på multiplikasjon som praktiske, virkelighetstilknyttete regneoperasjoner, ikke som rent matematiske operasjoner. Matematikkbegrepene hører sammen i et kunnskapsmessig hele. Multiplikasjon hører sammen med divisjon i et stort kunnskapsområde som blir kalt multiplikative strukturer.

Greer (1992) argumenterer for at elever bør lære mer om de ulike situasjonene som brukes under multiplikasjon. Han hevder dette burde gjøres innenfor problemløsning for å øke elevers forståelse for multiplikasjon.

Begrepet multiplikative strukturer og multiplikativ tenkning presenteres i Tall og tanke 2 (Solem et al., 2017). I kapitlet Multiplikasjon og divisjon kommer de ikke med en definisjon av regneartene. De viser til multiplikasjon og divisjon i ulike kontekster og oppgavetyper som løses praktisk på ulike måter. Disse representerer ulike multiplikative strukturer, som krever ulik multiplikativ tenkning.

Solem et al. (2018) formulerer fire nivå for å utvikle multiplikativ tenkning (2018). Denne utviklingen går i ulikt tempo for alle elevene. Den enkleste formen for multiplikativ tenkning skjer gjennom direkte modellering (s 149). På dette nivået er det stort fokus på hvert enkelt objekt. Det neste trinnet er additiv tenkning der elevene ikke lenger behøver å telle hvert objekt for å finne svaret, de forholder seg til hver enkelt gruppe. Her vil elevene benytte seg av f eks dobling og gjentatt addisjon. Videre i utviklingen går fra at elevene ikke fokuserer på antallet i hver gruppe, hver gruppe er oppfattet som en enhet. For å illustrere dette utviklingsnivået benytter Solem et al til et rutenett med 8 kolonner med 6 rader i hver kolonne. Her vil elevene telle at det er 8 ruter i en av radene, antallet i raden er etablert som en fast størrelse. Det er 6 rader med 8 i hver, da er antallet ruter: $6 \cdot 8 = 48$. På det fjerde utviklingstrinnet er elevene fortrolige med tallsymbolene (s 150) og deler av gangetabellen. De kan få enklere gangestykker med å dele opp den ene eller begge faktorene.

For å kunne utnytte egenskapene til multiplikasjon i arbeidet med å utvikle elevenes potensiale, er det tre sentrale regnelover som gjelder: den kommutative, den assosiative og den distributive lov.

I heftet «Dagligvarer» (Galen et al., 2017) hevdes det at den distributive loven for multiplikasjon er en av de viktigste ideene knyttet til multiplikasjon.(s 8). Denne loven er et grunnlag for standardalgoritmene for multiplikasjon og divisjon, og fungerer svært godt for hoderegning. Regelen presenteres på algebraisk form på denne måten: $a\,(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

(Solem et al., 2017). Sagt med ord går regelen på at en eller flere faktorer i et produkt kan deles opp slik at man ender opp med å summere delprodukter (delproduktene er enklere å regne ut enn det opprinnelige produktet) (Galen et al., 2017). For at elevene skal tilegne seg denne regneloven, må de oppdage og utnytte den gjennom utvikling av egen tallforståelse. Dette gjennom å få utfordringer som hjelper dem å oppdage lovene, og med at klassen deler strategier og metoder med hverandre (Solem et al., 2017). Den distributive loven danner også grunnlaget for å benytte strategien ved multiplikasjon ved grunntallet 10 (Galen et al., 2017). Dette er nyttig ved bruk av strategien delvise produkter. 10-gangen er også nyttig ved for å komme fram til svarene i 9-gangen: subtraher bare en gruppe fra 10-gangen.

Den kommutative loven sier at faktorenes orden er likegyldig. Den kan representeres algebraisk slik: a · b = b · a (Solem et al., 2017). Solem et al. sider videre at oppgaver av typen du tjener 100 kr i timen på en jobb som tar 10 timer og du får 10 kr timen for en jobb som tar 100 timer. Svaret blir det samme, men konteksten er veldig ulik. For å utvikle elevenes tenkning for at de kan oppdage den kommutative egenskapen i multiplikasjon, foreslår de konteksten: «På et brett er det fire rader med fem boller i hver rad». Fordi: 4 ·5 = 5 · 4.

Den assosiative egenskapen til multiplikasjon kan uttrykkes på denne måten: (a · b) · c = a·(b·c). Når vi multipliserer tre tall, gir det samme svar uansett hvilke to vi multipliserer først (Solem et al.2018). Dette kan vi utnytte når vi skal multiplisere 18 · 4. Da kan 18 faktoriseres i 9 · 2, slik at regnestykket blir 9 · 2 · 4. Den assosiative loven sier da at vi kan regne 2 · 4 først, og vi står igjen med 9 · 8 = 72 (s 150). Etter hvert som elevenes multiplikative tenkning blir mer omfattende, kan de benytte denne assosiative egenskapen. Den kommer til uttrykk i evnen til å se grupper (van Galen, 2017) og utnytte det i utregning. Elevene begynner å forstå at hvis de dobler antallet grupper vil det totalt være like mange. De må halvere antallet i hver gruppe: 4 · 6 = 8 · 3.

Dette er lover som elevene kanskje ikke kjenner navnet til og ikke har kjennskap til som de likevel utnytter (Solem et al, 2017, s 97). De viser til at regnelovene også ofte kombineres.

3.9 MULTIPLIKASJONSSTRATEGIER

I multiplikasjon vil det være spesifikke regnestrategier som er aktuelle for elevene. Det finnes en del forskningslitteratur på generelle strategier i regning, og noe for multiplikasjon.

Sherin og Fuson (2005) deler forskning på multiplikasjonsstrategier i 4 deler. Den første er forskning som legger vekt på semantisk type, modeller av oppgaver, den andre delen er intuitive modeller, det tredje forskningsområdet tar for seg løsningsmetode/strategier, og den siste hente fram «retrieval» modeller.

3.9.1 Semantisk type; multiplikative strukturer

I semantisk type legges det vekt på oppgavetypen, og hvilke multiplikative situasjoner som blir presentert i oppgaven. For min studie vil det være nyttig å vise til forskning på dette området i sammenheng med valg av oppgaver til gjennomføring i klasserommet. Disse kategoriene kan være lik gruppering, forhold, kartesisk produkt osv (Sherin, Fuson, 2005).

Vergnaud (1983) introduserte et spesielt rammeverk for bedre å forstå hvordan elever tilegnet seg, og utviklet spesielle kunnskaper og ferdigheter tilknyttet ulike multiplikative situasjoner. Hans forskning førte fram til det han kalte begrepsområder: A conceptual field is definded as a set of situations, the mastering of which requires mastery of several concepts of different natures. For instance, the conceptual field of multiplicative structures consists of all situations that can be analyzed as simple and multiple proportion problems and for which one usually needs to multiply or divide (s 141). Begrepsområder vil i følge Vergnaud, støtte forståelsen av opphav og sprang i elevers tilegnelse av kunnskap.

Vergnaud (1983) så på multiplikative strukturer som en klasse av problemer og identifiserte tre undertyper; isomorfi av mål, produkt av mål og multippel proporsjon. Her vil jeg kort presentere de tre typene, og diskuterer opp mot andre forskere og trekke sammenlikninger til oppgavene jeg bruker i min studie.

Strukturen til isomorfi av mål inneholder en enkel direkte proporsjon mellom to målte verdier, M1 og M2. Vergnaud definerer 2 tilfeller av multiplikasjon innen målingsisomorfi. Oppgave 2 i min studie kan være et eksempel på : *Anton pakker peppernøtter i 24 poser med 10 peppernøtter i hver*. *Hvor mange peppernøtter har han til sammen*?

M1	M2
1	a
b	x

Figur: Isomorfi av mål (Vergnaud, 1983, s 129)

Oppgaven blir illustrert på denne måten: a vil representere 10, b representere 24, M1 vil være antall poser mens M2 vil være antall pepperkaker.

poser	Peppernøtter
1	10
24	?

Figur: Eksempel fra studien på isomorfi av mål

Denne typen multiplikasjon mente Vergnaud inneholder fire ledd hvor elevene må trekke ut forbindelsen mellom tre av leddene, og i tillegg gjenkjenne situasjonen som multiplikativ. De må se hvorfor 24 kaker multiplisert med 10 poser resulterer i antall kaker, og ikke poser.

Greer (1992) har sammenfattet forskning på multiplikative situasjoner og deriblant Vergnaud sitt arbeid. Han har delt situasjoner i multiplikasjon i 11 klasser, og hevder at de fire viktigste gruppene er: like grupper, multiplikativ sammenlikning, kartesisk produkt og rektangulære arealer. Oppgaven med peppernøttene faller i følge Greer i klassen like grupper.

Oppgavene med antallet peppernøtter på brettet og antallet flis på veggen, oppleves ikke så lett å klassifisere i type multiplikativ situasjon. I følge Vergnaud kan oppgaven være av typen produkt av mål. I forhold til Greer vil det si rektangulære areal. Oppgavens illustrasjon med antallet i et rektangulært rutenett oppfordrer til at man kan se dette som produkt av mål og rektangulært areal. Men man kan også argumentere med at situasjon kan sees om isomorfi av mål eller like grupper:

Den andre gruppen multiplikasjonssituasjoner er produkt av mål. Denne inneholder kartesisk produkt av to mengder. Dette er situasjoner som omfatter oppgaver om areal, volum, kartesiske produkt osv. Ved å benytte Greer sin klasser, ser jeg at han skiller mellom kartesisk produkt og rektangulære mål.

Den siste multiplikative strukturen til Vergnaud får en ved å kombinere isomorfi av mål og produkt av mål, denne gruppen kalles multippel proporsjon. Eksempel på en slik situasjoner er: en familie på 4 personer skal tilbringe 13 dager på et hotell. Prisen pr person er 250 kroner dagen. Hva blir den totale kostnaden? (Kaufman 2010). Ingen av oppgavene i studien består av en slik situasjon og vil derfor ikke bli mer utdypet.

3.9.2 Intuitive modeller

Det andre forskningsområdet jeg vil ta med i teoridelen er primitive, intuitive modeller.

Fischbein (1994) beskriver to aspekter ved matematikk; matematikk som en formell, deduktiv og rigid konstruksjon av kunnskap slik den fremstilles i teori og i læreverk for avansert matematikk, og matematikk som en menneskelig aktivitet. Matematikk som en menneskelig aktivitet kan sees på som et samspill mellom tre komponenter (Fischbein, s 231-232)

- Det formelle aspektet
- Den algoritmiske komponenten
- Det intuitive aspektet

Det intuitive aspektet ved matematikk består av tre deler: intuitiv kognisjon, intuitiv forståelse og intuitive løsninger. Den intuitive kognisjon, en type mental aktivitet som ikke krever bekreftelse, medfører intuitiv forståelse av en matematisk situasjon. Elevens intuitive forståelse kan gi intuitive løsninger som stemmer overens med, eller motsier den formelle matematikken (Fischbein, 1994)

Tvete viser til Fischbeins teori (1985, referert i Tvete) som sier at når barn skal arbeide med tekstoppgaver, som krever bruk av de fire regneartene, så er de styrt av visse primitive tankemodeller for hver av regneoperasjonene. Disse tankemodellene, som dannes tidlig, vil være implisitt og ubevisst tilstede, og gi føringer og begrensninger når barnet søker etter rett regneoperasjon (s 5).

I møte med elever i undervisningssituasjon er det viktig å være bevisst på og ta hensyn til elevenes intuitive modeller. Det kan oppstå et misforhold mellom elevenes intuisjon, og at de ukritisk bruke en algoritme som ikke forståes, og dermed føre til feil løsning. Denne tause ukontrollerte intuitive forståelsen kan forklare hvorfor elever kan møte utfordringer i møte med formell algoritmestruktur.

Tvete hevder at den intuitive modellen i multiplikasjon som baseres på gjentatt addisjon, passer bra til situasjoner med like grupper eller like mål, *hvor multiplikator er et helt tall og multiplikanden et visst antall objekter*. Elever kan gjenkjenne oppgaver der multiplikanden er et desimaltall. Problemet oppstår når multiplikator er et desimaltall. Tvete kaller dette multiplikatorproblemet, og han viser til funn som viser fall i antall riktige svar faller med 40-50% når multiplikator skiftes fra heltall til desimaltall mindre enn 1. Dette er en vanlig misoppfatning som bygger på den primitive modellen gjentatt addisjon, og deres intuitive modell for multiplikasjon som tilsier at «ganging gjør større».

3.10 LØSNINGSSTRATEGI

Forskning på løsningsstrategier er interessert i å beskrive rekkefølgen av operasjoner som elever utfører for å komme fram til svaret (Kaufmann, 2010).

Før jeg viser til ulik forskning på strategier i matematikk, vil jeg si litt om hvordan synet på strategier har endret seg i matematikkfaget.

Matematikkfaget har endret seg fra undervisningen der faget i større grad blir sett på som en problemløsningsaktivitet, der elevene selv skal komme fram til løsningen. Dette ble et skifte fra der matematikk ble sett på som et fagområde der elevene skulle motta instruksjon av algoritmer og enkle utregningsferdigheter og pugging. I 2020 ble det innført kjerneelementer og der får problemløsning en stor rolle. (Utdanningsdirektoratet). Det sammen får strategibegrepet. Dette skifte innebærer at opplæringen må inkludere fokus på strategier for oppgaveløsning.

Wood og Turner-Vorbeck (2001, referert i Kaufmann, 2010) hevder at utfordringen for undervisningen er å bli klar over elevenes strategier og hvordan de tenker matematisk. Dette betyr at læreren ikke bare må vite om variasjoner i elevenes tankemåter og hvordan de forstår matematiske idéer, men også hvordan elevenes tanker omkring disse idéer utvikles over tid. Dette krever å forstå elevenes strategier eller forståelse og deretter bruke denne kunnskapen og forståelsen i å velge oppgaver og interagere med elevene (s 59).

Innføringen av LK2020 peker tydelig på at undervisningen skal bygge på forståelse. Derfor trenger elevene strategiforståelse for å organisere og prosessere stadig større mengder og mer kompleks informasjon.

Ostad (1997) peker også på endringen innen matematikkfaget fra å omhandle bestemte prosedyrer for innøving eller repetisjon til mer fokus på løsningsprosessen, hva som foregår når eleven løser en oppgave. Ostad skiller prosedyre fra strategi ved å se på en prosedyre som en fremgangsmåte, mens en strategi er en fremgangsmåte som benyttes for å nå et visst mål.

Siegler og Jenkins (1989) tilføyer i sin definisjon på strategi at hvis en målrettet fremgangsmåte skal være en strategi, må den være ikke-obligatorisk. De viser til at når en elev skal løse en oppgave ev typen 3 · 7 =, kan de benytte seg av ulike framgangsmåter. De må ta et valg i forhold til prosedyren de vil benytte seg av for å nå målet, som er å løse oppgaven. Dette medfører at fremgangsmåten kalles en strategi.

Innen forskning av matematikkstrategier har det tradisjonelt vært mer forskning på strategier i addisjon og subtraksjon. Anghileri (1989) fant at mange elever på småskoletrinnet brukte mer enkle metoder i multiplikasjon som var relatert til addisjonsprosesser som for eksempel telling i grupper og å lese opp tallmønster. Sjeldnere brukte elevene egenskaper som var relatert til en forståelse av multiplikasjon. Under halvparten av elevene mellom 6 og 12 år løste oppgavene, som var med småtall og det største 5 · 4, ved å bruke multiplikasjon, ennå denne kan sies å være den mest effektive strategien. Anghileri deler opp operasjonen i enhetstelling, rytmisk telling og tallmønster som de meste enkle og den siste som bruk av kjent multiplikasjon.

Når det gjelder forskning på kvaliteten på elevenes matematikkunnskaper er det de senere år kommet resultater som indikerer en nær sammenheng med elevenes strategibruk (Ostad, 2008). Elevenes utvikling av strategibruk, innebærer både et gradvis skifte fra backupstrategier til retrivalstrategier, og mengden av strategikunnskap som eleven har tilgjengelig i sitt repertoar (Ostad, 2008). I følge Ostad kan dette representere en kristisk faktor for normal utvikling (s 32).

Til min analyse vil jeg benytte Sherin og Fuson (Sherin & Fuson, 2005) som rammeverk og vil her presentere deres beskrivelse av løsningsmetode.

Strategier blir av Sherin og Fuson sett på som mønstre i beregningsstrategien, et mønster i stegene mot å produsere et tallmessig resultat.

To be clear, when we speak of a computational strategy, we refer to patterns in computational activity, viewed at a certain level of abstraction. This is in contrast to an alternative stance that view strategies as knowledge (cognitiv structures) possessed by individuals. Computational strategies as vi speak of them, are not knowledge; rather, a computational strategy is a pattern in computational strategy- a pattern in the steps taken toward producing a numerical result. Sometimes, in our view, there is a simple relationship between a specific computational strategy and knowledge possessed by an individual student, but his need not always to be the case. (s 350)

De ser ikke på strategier som kunnskap, men de hevder at i noen situasjoner kan det være en enkel relasjon mellom kunnskap og en spesiell strategi utført av en elev. I strategien gjentatt addisjon finner man eksempel på slike mønstre og strukturer, der multiplikanden blir addert like mange ganger som multiplikatoren viser.

Løsningsstrategiene identifisert av Sherin og Fuson (2005) er kategorisert på grunnlag av intervju med elever i 3.klasse, både før, underveis og etter at de har lært multiplikasjon. Forskningen er basert på intervjuer foretatt en til en og elevene fikk varierte oppgaver fra tekstoppgaver til enkle multiplikasjonsoppgaver. Hver strategi ble kategorisert etter hvilke tallspesifikke regneressurser elevene brukte.

Sherin og Fuson (2005) (tabell) har seks hovedkategorier av løsningsstrategier. Alle hovedkategoriene har underkategorier. I denne tabellen vil jeg presentere deres kategorier.

Tabell : Løsningsstrategier Sherin og Fuson (2005)

Telle alt	**Denne strategien er karakterisert av at alle verdiene er representert fra 1 til totalen. Krever ingen ny beregningskompetanse Denne strategien er tidskrevende og vanskelig å finne rett svar når tallene blir store.**
Eksempeloppgave	Det er tre bord i klasserommet. Det sitter 4 barn ved hvert bord. Hvor mange barn er det til sammen i klasserommet
Telle alt- etter en situasjonsbetinget tegning	Eleven tegner situasjonen konkret med bord og elever og teller fra en til totalen
Telle alt-etter en matematikktegning	Lignende strategi som over, men tegning er utviklet til en matematikktegning som representerer figuren: tegning av bord er erstattet med tegning av mengdering
Telle alt med fingrene	Elev teller høyt fra en til total med fingre som støtte. Teller 1-2-3-4, en gruppe, 5-6-7-8-to grupper, 9-10-11-12- tre grupper
Rytmisk telling med fingrene	Teller høyt 1-2-3-4, 5-6-7-8, 9-10-11-12 og markere med fingre for å holde orden på antall grupper

Additiv beregning	**Ikke alle verdiene er representert mellom en og totalen. Eleven kan skrive addisjon med standard notasjon. Ingen ny beregningskompetanse**
Gjentatt addisjon	Problemet er gjort om til sekvenser av addisjonsproblemer, og gruppestørrelsen er gjentatt flere ganger. Eks: 4 + 4 = 8, 8 +4 =12
Slå sammen grupper og addere	Eksempel: multiplikativ situasjon: 4 · 8. Eleven adderer først 8 +8 = 16 to ganger og adderer så 16 +16 = 32

Gruppetelling	**Denne strategien består av gruppetellingssekvenser som f eks: 4-8-12-16-20 osv. De kan gruppetelle for hvert tall som n, 2n,3n,4n, osv**
Gruppetelling med full tegning	Lager en fullstendig tegning, men finner produktet med en rekketelling. Eks $4 \cdot 3 = 12$
Gruppetelling med skrevne tallgrupper	Skriver tallsymbol for hver gruppe og sier rekketelling og peker på hvert tall for hver gruppe: 4-4-4 Sier: 4-8-12
Gruppetelling med fingrene	Sier rekketelling høyt og holder orden på antall grupper med fingre: kan starte med tommel/lillefinger: 4-8-12

Mønsterbasert	**Her finner eleven løsningen raskt. Noen multiplikasjoner har faste mønster som 1 og 0 gangen, og ulike teknikker på 9-gangen. Det skilles mellom mønsterbaserte strategier og lært produkt.**
Regler for 0-, 1- og 10-gangen	Ingen synlig bruk av fingre eller tegning:
Fingerteknikk ved 9-gangen	For å multiplisere 9n holder eleven opp begge hender og bøyer ned sin n'te finger fra venstre. Tieren vil være representert som antall fingre til venstre for den bøyde og enere vi være antall fingre for den bøyde.

Lært produkt	**Dette er en strategi som gjør at eleven kommer fram til løsningen raskt. Innholdet er en stor samling tallspesifikke ressurser. Svaret er det eneste muntlige respons** **Ny beregningskompetanse: Lært faktorer og deres produkter**
Lært produkt	Ingen synlig bruk av fingre eller notasjon. Hurtig respons

Hybrid	**I denne gruppen finnes det kombinasjoner fra alle kategorier ovenfra.**
Gruppetelling + telle alt	Bruker gruppetelling for å komme nesten til totalen, og teller alt for å komme helt til sluttproduktet. F eks: 6-12-18-24-30-36,37,38,39,40,41,42
Lært produkt + telle alt	Eleven starter med et lært produkt som er under totalen, og teller deretter alt for å komme helt fram til sluttproduktet. F eks: $6 \cdot 6 = 36$,37,38,39,40,41,42
Lært produkt + additiv beregning	$6 \cdot 7 = 42$, $42 + 7 = 49$, $49 + 7 = 56$

Dele faktorer+ lært produkt +additiv beregning	En av faktorene deles opp, så problemet er dekomprimert til to deler. De to delproduktene kan så finnes ved lært produkt. Tilslutt adderes delproduktene. 7 · 8 = (7 · 4) + (7 · 4) = 28 + 28 = 56

3.10.1 Hente fram modeller

Denne strategien blir også kalt retrival strategi. Når svaret på matematikkoppgaver fremkalles raskt og automatisk, uten omveien via en utregningsprosedyre, omtales det som retrival strategi. Eleven kan svaret utenat gjennom erfaring med lignende oppgaver tidligere eller å ha automatisert svar i multiplikasjonstabellen.

Sherin og Fuson (2005) sier at forskning på forståelsen av og utviklingen av retrivalstrategier har hatt fokus på hvordan personer kan gi svaret på multiplikasjonsstykker. Et av målene i instruksjon av ensifret multiplikasjon er å hjelpe elevene til å finne produktet på to gitte faktorer. En del forskere har vært opptatt av å bygge kognitive modeller av denne evnen og hvordan den utvikles, blant annet Heege (Heege, 1985; Sherin & Fuson, 2005) identifiserer seks uformelle strategier når elever skal beregne faktorer fra den lille multiplikasjonstabellen. Jeg ønsker å ta med disse kategoriene her fordi det er aktuelt i min studie.

1. Bruk av den kommutative lov. At 6 · 7 = 7 · 6. Mange elever er så kjent med bruken av denne loven at de ikke tenker over det.
2. Bruker det at å multiplisere med 10 er ganske enkelt: 10 · 7 er det samme som 7 lagt til en null; 70. De bruker dette som støtte i andre oppgaver, som for eksempel 9 · 8, hvor de tenker at 10 · 8 er 80 og deretter trekker fra 8.
3. Dobling. Elever kan bruke 2 · 7 = 14 som støtte når de skal regne ut 4 · 7 ved å doble 14.
4. Halvere Når de skal løse for eksempel 5 · ? =, bruker de at 5 er halvparten av 10. For eksempel ved 5 · 6, så er det halvparten av 10 · 6.
5. Øker et kjent produkt ved å addere multiplikanden en gang. For eksempel ved 6 · 7, kan 5 · 7 = 35 være kjent, slik at 6 · 7 blir 35 + 7.
6. Minsker et kjent produkt ved å subtrahere multiplikanden en gang. For eksempel 9 · 7 = 10 · 7 = 70 – 7.

Dette er kunnskap elevene kan benytte seg av når de forstår strukturen i multiplikasjonstabellen og har lagret en del produkter i langtidsminnet. Heege (Heege, 1985) mente at skille mellom å kunne svaret og beregne var et viktig kognitivt skille.

4 METODE

Min metode for å forske på dette vil være å velge ut rike oppgaver i en kontekst som blir gjennomført i en 4.klasse. Disse undervisningsøktene vil jeg ta opp lyd og bilde fra. Jeg vil selv være ikke- deltakende observatør. I tillegg vil jeg ha feltnotater fra observasjon.

I dette prosjektet har jeg valgt en kvalitativ metode. En kvalitativ metode tar for seg få forekomster, men studerer forekomsten nøye. Jeg ønsker å studere elever i en naturlig setting i en klasseromssituasjon i samarbeid om løsningen av rike oppgaver i kontekst, og undersøke hvilke strategier de velger og hvordan de representerer tenkningen. Intensjonen i kvalitativ metode er i følge Postholm og Jacobsen (Postholm et al., 2018) å beskrive og forstå hva spesifikke mennesker gjør i sitt hverdagsliv, og hvilken mening disse handlingene har for dem (s 95). For å oppnå dette må jeg inn i klasserommet for å observere det som skjer der. Postholm og Jacobsen hevder at for å få en virkelig forståelse av elevenes løsningsstrategier må metoden være å observere dem: «Hva de gjør og sier- og la dem snakke med egne ord» (s 99).

4.1 OBSERVASJON

Som forsker vil jeg være tilstede i klasserommet. Dette er forbundet med en del farer for at forskeren skal forstyrre og påvirke virkeligheten i klasserommet slik at det ikke dannes et objektivt forskningsresultat. Disse farene beskriver Postholm og Jacobsen (Postholm et al., 2018) ved at forskeren må skape avstand til de som blir studert, slik at de ikke merker at de blir studert (s 106). Det skal være mulig for en annen forsker å gjennomføre et identisk forskningsopplegg uavhengig hvem forskeren er. Idealet er i følge Postholm og Jacobsen at forskningen er repliserbarhet.

Det finnes ulike metoder for å samle inn kvalitative data. På bakgrunn av at jeg ønsker å studere elever og hva de tenker og gjør i sitt naturlige miljø, vil mitt valg av datainnsamlingsmetode bli observasjon. Observasjon blir av Adler & Adler (1994, referert i Postholm og Jacobsen, 2018, s 113) sett på som den mest fundamentale måten å samle inn data på. Vi observerer hele tiden i dagliglivet for å oppfatte og forstå beskriver Postholm og Jacobsen (Postholm et al., 2018). I motsetning til i dagliglivet vil en forsker ha fokus for sine observasjoner. I forskning er dette i følge Angrosino & Pérez (2000, referert i Postholm og Jacobsen, 2018, s 114) fokusert observasjon. Fokus i min observasjon vil være på hvordan elevene arbeider med oppgavene og hvilke strategier de benytter.

Det er en del utfordringer i forhold til observasjon som metode i forskning. Som forsker vil man analysere og tolke med sin subjektivitet og antakelser. Det er ikke tilstrekkelig empirisk materiale hvis det bare er forskeren som observerer, analyserer og tolker i følge Postholm og Jacobsen (2018). Derfor vil min empiri i tillegg, bestå av elevenes løsning på papir og video av enkelte episoder.

Det finnes ulike observatørroller. Deltakerne i min studie vil være informert om hvem jeg er og hvorfor jeg er der. Det foregår ikke skjult observasjon. I denne rollen vil jeg være observatør-som -deltaker. Gold (1958, referert i Postholm og Jacobsen, 2018, s 115) sier at forskeren i observatør-som- deltakerrollen ikke er en del av prosessene som observeres.

4.2 CASESTUDIE

Postholm og Jacobsen (Postholm et al., 2018) beskriver at casestudier har til felles at man studerer «en case», som er avgrenset i tid og rom (sted). Oppmerksomheten rettes mot ett individ, flere individ, en gruppe, et fullstendig program, en aktivitet, en organisasjon eller et partnerskap (s 63). I min studie vil det være en klasse som er casen. I tillegg vil hver elev i klassen være en case i min analyse. Konteksten er sentral i casestudier (Postholm et al., 2018), derfor er det sentralt å vite hva som kjennetegner denne klassen for å forstå det som skjer der. Postholm (Postholm et al., 2018) betrakter casestudier som et forskningsdesign da det kan utføres ved hjelp av ulike metoder. Min studie er begrenset i tid og rom og har en definert start og slutt som også kjennetegner en casestudie.

I min casestudie har jeg et forskningsspørsmål jeg ønsker å finne svar på. Postholm og Jacobsen omtaler det som en «instrumental casestudie». I min studie går jeg inn i en spesiell klasse for å forstå hvordan akkurat disse elevene handler, hvordan de tenker og hvordan de skaper kunnskap i samhandling med hverandre. Som et utgangspunkt vil dette gi lokal kunnskap av interesse for læreren som arbeider i klassen. Den interne gyldigheten og validiteten er stor i forskningssammenheng (Postholm et al., 2018). Jeg vil også stille spørsmål om «ekstern gyldighet», kan mine funn være gyldig i en annen kontekst? Ved å sammenligne mine funn med forskning på samme område kan jeg i noen grad si noe om dette er relevant for andre lignende klasser.

4.2.1 Konteksten

Studiens empiri baserer seg på 3 arbeidsøkter, hver økt hadde en varighet på ca 90 minutter. Undervisningen forgikk i klassens faste klasserom.

4.2.2 Læreren

På forhånd spurte jeg klassens matematikklærer om å delta på studien. Læreren har undervist i klassen i to år. For at elevenes rammer skulle være så lik som en vanlig matematikktime valgte jeg at den faste læreren hadde ansvaret og jeg var observerende forsker. Dette for å få mest mulig normale reaksjoner fra klassen.

4.2.3 Klassen

Studien ble gjennomført i en 4.klasse på en barneskole som består av ca 490 elever. Klassen består av 21 elever. I min studie ønsket jeg alle elevene som deltakere. Det ble sendt ut informasjon og samtykkeskjema til alle, og alle ga samtykke til deltakelse. Læreren som kjenner klassen fortalte at det er, som i mange klasser, stor spredning i elevenes kompetanse i matematikk. I min studie med rike oppgaver opplevde jeg at det var et mål at alle elever deltok i undervisningen. På grunn av fravær av ulike årsaker er det ikke elevarbeid fra 21 elever til hver oppgave.

Klassen har i noen grad arbeidet med oppgaver med fokus på resonnering og problemløsning som en del av sin matematikkundervisning. De har utviklet en klasseromskultur der det er lov å gjøre feil. Som 4.klassinger har de allerede blitt introdusert for multiplikasjon som matematisk tema i 3.klasse.

4.2.4 Organisering i klasserommet

Klassen er plassert i grupper med noen par og noen som sitter tre og tre. Elevene er vant med å skifte læringspartner ofte. Ved hvert skifte av læringspartner blir elevene forespurt hvilke 2 gutter og 2 jenter de samarbeider godt med. I alle gruppene er det noen som er valgt av en annen elev.

4.3 EMPIRI

Empirien fra studien vil i stor grad bestå av video med lyd av klasseundervisning, dialogen mellom elevene i arbeid med oppgavene og lærerens kommunikasjon. I tillegg vil elevenes skriftlige arbeid og mine egne feltnotater utgjøre empirien.

4.4 INNSAMLING AV DATA OG DATAANALYSE

Jeg brukte tre forskjellige innsamlingsmetoder; feltnotater, observasjon, dokumentinnsamling og videokamera. Feltnotatene var til stor hjelp i det videre arbeidet med å analysere data. Det ble benyttet et videokamera av typen Sony Handycam 9.2 som stod på et kamerastativ. Det var jeg som styrte videokamera. I oppstarten av hver økt ble kamera plassert i front av klasserommet for å få oversikt over hele klasen. Etter hvert som elevene kom i gang med arbeidet ble det flyttet til ulike grupper. Kameraet stod ubemannet på opptak i neon perioder. Jeg hadde bare ett kamera og for å få med elevenes strategier måtte det stå på en gruppe i litt lengre tid for å dokumentere hele løsningen deres. Dette gjorde at det ble begrenset antall grupper der det ble gjort opptak, derfor gikk jeg nok glipp av en del interessante samtaler. Ved gjennomgang av elevenes skriftlige oppgaver hadde det vært en styrke å hatt observasjoner, feltnotater eller video av alle. Det var ikke alltid lett å trekke konklusjoner av hvordan de hadde tenkt med utgangspunkt kun i det skriftlige arbeidet. I analysen var det lettere å se på det skriftlige arbeidet til elever som ble filmet. Jeg oppdaget også at plassering av kamera ved gruppene hadde betydning. Plasserte jeg kameraet i ansiktshøyde fikk jeg med elevenes forklaringer, men gikk glipp av hvordan de representerte løsningene på arbeidsarket. De ville ofte peke, tegne og skrive for å forklare hvordan de tenkte. Derfor flyttet jeg kameraet noen ganger slik at det fanget opp pulten der arbeidsarket lå.

Å benytte video kan påvirke elevene og læreren. Thagaard (2003, referert i Kaufmann s 111) sier man må vurdere hvilken virkning det har på informanten. Læreren innrømte at det var litt uvant i starten, men at det gikk over etter hvert. Elevene viste kamera en del oppmerksomhet i starten ved f eks å vinke til det og snakke inn i det. Jeg kunne ikke se noen som ikke deltok i klasseromsaktiviteten på grunn av kameraet. De elevene som ble filmet i sin forklaring forklarte veldig naturlig og tydelig.

Neste steg var å transkribere materialet. Transkripsjon kan skje på mange forskjellige måter. Fokuset er å få fram innholdet og informasjon som er relevant for forskningen.

I følge Linell (1998, referert i Kaufmann, 2010, s 122) menes transkripsjon at videomaterialet blir overført til skriftlig notasjon (vedlegg). Hele materialet ble transkribert først, bare med hva som ble sagt og eventuelle andre observasjoner av interesse. For å få bedre oversikt og innsyn over videomaterialet merket jeg i transkripsjonen av episoder som var av interesse knyttet opp mot problemstilling og forskningsspørsmål.

Så valgte jeg ut de episodene jeg ønsket å gå mer grundig inn på. De episodene ble satt inn i et slikt system: De ble markert med linjenummer og hvert utsagn ble markert med tid for hvor langt ut i undervisningsøkta man er. Elevene fikk det samme elevnummeret som i elevarbeid som ble samlet inn på papir. Kaufmann(2010) viser til at dette er en multimodalform fordi det kan forekomme kommentarer eller bilder for å gi leseren et bedre innblikk i selve situasjonen.

Jeg bestemte meg for å skrive alt i bokmål, for å bevare elevenes anonymitet. Etter å ha valgt ut de episodene jeg ønsket å bruke laget jeg en ramme for transkripsjon. Første kolonne inneholder linjenummer, andre kolonne tid, tredje kolonne hvem som snakker og hva som blir sagt. Jeg har i min transkripsjon valgt å transkribere alt av det verbale elevene sier. I den siste kolonnen tar jeg med gester, pauser, handlinger og andre ting jeg observerte og som er av interesse. Video fanger opp elevenes samtaler og hva som skjer av annen aktivitet. Ved å kunne studere video i etterkant ved flere gjennomganger observerte jeg ulike aktiviteter og elevers bevegelser. Dette kan forklare samtaler og samhandling. Ansiktsuttrykk viser om en elev er enig, uenig eller likegyldig.

4.5 PLANLEGGING AV UNDERVISNING

4.5.1 Oppgavene

På bakgrunn av Piggott( ) sin artikkel *«Rich Tasks and Contexts»*, ønsket jeg å velge ut oppgaver som jeg satte inn i en kontekst. Konteksten er inspirert fra heftet: Dagligvarer (Galen et al., 2017). Å velge oppgaver som er virkelige for elevene er også i tråd med RME som er basert på Freudenthal sin idé om at matematikk. For at matematikken skal være av menneskelig verdi, må være knyttet til en realitet, være nært for barnet og bør ha relevans for samfunnet (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Jeg ønsket å velge oppgaver og kontekst for å skape et godt grunnlag for muntlig aktivitet, både matematikkfaglig og i forhold til å leve seg inn i kontekst.

Oppstartsoppgaven ønsket jeg å være av typen lav inngangsterskel (Piggott, 2018) slik at alle elevene hadde muligheter til å løse oppgaven. Konteksten ble bygd rundt at elevene skal hjelpe bakerlærlingen Anton. Jeg fikk også laget illustrasjoner som forsterket konteksten. Tallene og hensikten med oppgavene ble valgt slik at det skal være mulig å benytte ulike strategier. Det ble også laget en Power-point presentasjon med kontekst og oppgaver i tillegg til arbeidsark for elevene.

For å kunne arbeide i tråd med prinsippene i undersøkende matematikk finnes det ulike hjelpemidler og verktøy i planleggingsarbeidet. En modell (Smith & Stein, 2018): 5 Practices for Orchastrating Productive Mathematics Discussion(5P) gir læreren et rammeverk for å planlegge og gjennomføre undervisning på en utforskende måte. Modellen presenterer 5 praksiser som skal fremme elevsentrert undervisning. For å kunne respondere på elevers bidrag og inkludere dem i undervisningen er det viktig å kunne forutse hvordan elevene kan komme til å løse problemene. De 5 praksisene skal hjelpe læreren å utvikle elevenes forståelse av matematiske konsepter og ideer(Smith & Stein, 2018)

De 5 praksiser for produktive matematiske diskusjoner er:

1. Forutsi sannsynlige elevresponser på kognitivt krevende oppgaver (Anticipating)
2. Observere nøye elevenes respons på oppgaven mens de arbeider seg gjennom den (Monitoring)
3. Velge ut elever til presentasjon av løsning i diskusjonsfasen (Selecting)
4. Hensiktsmessig valg av rekkefølgen på studentpresentasjonene som brukes (Secuencing)
5. Hjelpe klassen til å knytte sammen matematikken i de ulike elevpresentasjonene og knytte sammen studentenes presentasjoner med de sentrale matematiske ideer i oppgaven (Connecting).
   (Oversettelse hentet fra Gulaker)

Her vil jeg sette mine oppgaver inn i modellen til Smith og Stein (2018). I min studie vil det være de to første punktene som er aktuelle.

For å sikre at oppgavene jeg velger stiller passende kognitive krav til elevene, vil jeg benytte meg av rammeverket til Smith og Stein. De kategoriserer oppgavene i fire nivåer. Oppgavene med lavest kognitive krav kaller de memoriserende oppgaver. På dette nivået vil det innebære for elevene å reprodusere regler, fakta, definisjoner eller formler som en ha lært tidligere.

Det neste kognitive nivået innebærer å arbeide med oppgaver som omfatter bruk av prosedyrer eller algoritmer for å finne rett svar, uten å utvikle forståelse og se på sammenhenger. Det tredje nivået inneholder oppgaver der det er prosedyrer med forbindelse. Oppgavene krever en dypere forståelse av konseptene og ideene. Det høyeste kognitive kravet til oppgaver er oppgaver som heter å gjøre matematikk. Elevene må utforske og forstå matematiske konsepter, prosesser eller forhold. Det stilles større krav til selvregulering og kritisk tenkning.

De kognitivt krevende oppgavene kan fremme resonnering og problemløsning, og høye kognitive krav kan bidra til relasjonell forståelse og mange løsninger (Wæge & Nosrati, 2018).

> «Rike oppgaver som er kognitivt krevende skal kunne gjøre elevene nysgjerrige på matematikk. Det kan i tillegg fremme en positiv klasseromskultur når alle arbeider med samme oppgave, men på sin måte og nivå» (Wæge & Nosrati, 2018).

På bakgrunn av Piggott(2018) sin artikkel *«Rich Tasks and Contexts»*, ønsket jeg å velge ut oppgaver som jeg satte inn i en kontekst. Konteksten er inspirert fra heftet: Dagligvarer (Galen et al., 2017). Å velge oppgaver som er virkelige for elevene er også i tråd med RME som er basert på Freudenthal sin idé om at matematikk. For at matematikken skal være av menneskelig verdi, må være knyttet til en realitet, være nært for barnet og bør ha relevans for samfunnet (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Jeg ønsket å velge oppgaver og kontekst for å skape et godt grunnlag for muntlig aktivitet, både matematikkfaglig og i forhold til å leve seg inn i kontekst. Oppstartsoppgaven ønsket jeg å være av typen lav inngangsterskel (Piggott, 2018) slik at alle elevene hadde muligheter til å løse oppgaven. Konteksten ble bygd rundt at elevene skal hjelpe bakerlærlingen Anton. Jeg fikk også laget illustrasjoner som forsterket konteksten. Tallene og hensikten med oppgavene ble valgt slik at det skal være mulig å benytte ulike strategier. Det ble også laget en Power-point presentasjon med kontekst og oppgaver i tillegg til arbeidsark for elevene.

Jeg ønsket selv å velge ut oppgaver i tråd med problemstillingen, og sette de i en kontekst. Målet med oppgavene var å få kunnskap om elevenes strategier i multiplikasjon. Hvilken strategi de benytter seg av avhenger av kontekst, vanskegrad og problem. Konteksten er felles for alle oppgavene, men oppgavene er ment å kunne løses uavhengig av hverandre.

Kriterier for oppgavene:

- Oppgavene skal kunne gi svar på problemstillingen
- Konteksten skal være lett for elevene å leve seg inn i, de må oppfatte problemet som realistisk
- Oppgaveteksten skal ikke inneholde ord som multiplikasjon eller gange
- Språket må være presist
- Vanskegraden på være tilpasset slik at alle elevene har noe forutsetning for å mestre oppgavene

Oppgave 1 (Vedlegg 8.2.)

Den første oppgaven er bevisst valgt for å være en lav inngangsterskel slik at alle elevene kommer i gang og klarer å delta. For elever uten erfaring med multiplikasjon er det mulig å bruke metoden «telle alt», mens elever som har multiplikativ forståelse kan gruppere pepperkakene på brettet i multiplikasjon; enten $9 \cdot 6$ eller $6 \cdot 9$.

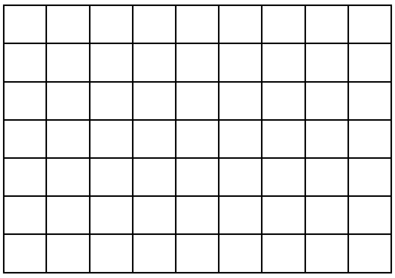
Oppgaven er valgt for at elevene skal kunne tenke på en gruppe som en enhet. De kan enten se at det er 9 kolonner med 6 peppernøtter i hver kolonne, eller 6 rader med 9 peppernøtter i hver rad. Galen et al (2018) sier at ved at elevene kan se at ved å rotere bakebrettet 90° kan de erfare at den kommutative regelen gjelder for multiplikasjon; $a \cdot b = b \cdot a$

Ved å betrakte er rad med peppernøtter som en enhet får de erfaring med en annen grunnleggende idé i multiplikasjon, de må tenke på en gruppe som en enhet. De må reorganisere sin tenkning på tall fra det å telle hver enhet til å se på det som 6 enheter med 9 i hver eller 9 enheter med 6 i hver. For en del elever vil skifte fra at noe er 6 peppernøtter som blir kategorisert som en enhet være veldig krevende (Galen et al., 2017). I denne prosessen må de selv se etter hvordan de vil strukturere peppernøttene og hvordan telle antall grupper. For å oppmuntre elevene til å utvikle sin tenkning fra telling av enkelt objekter til å finne andre mønstret er oppdraget til elevene å gi bakerlærlingen tips om hvordan hen kan komme fram til antallet på en rask og korrekt måte uten å telle en og en. Mange elever vil benytte addisjon i sin løsning av dette problemet. Brettet med peppernøtter vil innby til mange ulike kombinasjoner av grupper. Etter hvert som det kommer mange ulike løsninger for å finne riktig antall kan elevene oppdage et det finnes mange kombinasjoner som kommer fram til riktig antall. Dette krever forståelse for en type antallskonservasjon. Det totale antallet objekter forblir det samme etter oppdeling i mindre mengder som kombineres på ulike måter (Galen et al., 2017). Her har jeg laget ulike løsninger jeg kan forutse at elevene kan komme fram til.

Målet er at elevene skal komme fra til strategier som bygger på egenskapene til multiplikasjon. I teoridelen presenterte jeg den distributive egenskapen for multiplikasjon. Ved å utforske oppgaven med peppernøtter på brettet kan elevene oppdage at man kan dele opp en eller flere faktorer i et produkt slik at man ender opp med å summere delprodukter. På grunn av at antallet peppernøtter er så stort vil de lage delprodukter som er enklere å regne med (Galen et al., 2017). Dette er en viktig ide i multiplikasjon. Den distributive egenskapen ved multiplikasjon kan være vanskelig for elever å forstå. Det er et viktig grunnlag at elevene forstår enhetstenkningen. Ved å utnytte den distributive egenskapen ved multiplikasjon kan elevene nå lage grupper av grupper for å komme fram til antallet. Tallene i oppgaven er slik at det kan være aktuelt å benytte delprodukter for å komme fram til 9-gangen. Det kan utnyttes på denne måten: $9 \cdot 6 = (10 \cdot 6) – 6$. det kan også benyttes på denne måten: for å finne $6 \cdot 9$ kan man bruke delproduktet: $5 \cdot 9$, for å finne $5 \cdot 9$, benytter man $(5 \cdot 10) – 5$.

Brettet med peppernøtter kan også benyttes for å vise den kommutative egenskapen til multiplikasjon. Brettet er organisert slik at det kan oppfattes som et rutenett med $9 \cdot 6$ ruter. Dette kan ses på som 9 rekker med seks i hver. Snus rutenettet 90°, får vi et $6 \cdot 9$ rutenett, 6 rekker med 9 i hver.

Bakebrettet er utformet som et rutenett, en rektangulær form. Denne formen kan legge til rette for å introdusere det vi kaller rutenett/arealmodellen for multiplikasjon (Enge, Valenta 2012) (figur 1)



Figur 1 Rutenett for 6 gange 9

Oppgave 2 (Vedlegg 8.2.)

Anton pakker peppernøttene i 24 poser med 10 peppernøtter i hver. Prisen på hver pose er 105 kr. Hvor mye tjener han hvis han selger alle peppernøttene? Hvor mange peppernøtter hadde han til sammen?

Dette er en todelt oppgave. Tallene som er valgt er ganske store slik at elevene skal streve litt for å komme fra til svaret slik at telling og addisjon blir mindre aktuelle strategier. Ønsket er at de skal komme fram til mer effektive strategier. Tallene er også store slik at 4.klassinger skal oppleve det som et problem.

Tallene er valgt tall slik at de kan dele opp enere og hundrere og regne de ut separat. $(100 \cdot 24) + (5 \cdot 24)$. Konkret kan elevene tenke seg 105 kr som en 100-lapp og en 5-krone. Da blir en effektiv strategi å tenke det som 24 hundrelapper og 24 femkroninger (Enge, Valenta 2012) og addere hundrelapper og femmerne for seg selv. Denne strategien viser også til distributive egenskapen ved multiplikasjon, man kan regne ut $24 \cdot 105$ ved å dele 105 i 100 +

5 og så gange ledd for ledd med 24. I følge Enge, Valenta (2012) er denne egenskapen grunnlaget for mange regnestrategier i multiplikasjon

Når det gjelder å regne ut 24 · 100 åpner det opp for ulike strategier. Her ligger det til rette for å diskutere hva som skjer når man multipliserer med 100, hvorfor kan man legge til to nuller til 24 når man multipliserer med 100?

Konkret kan man også se på 24 hundrelapper som ti pluss ti pluss fire hundrelapper.

Enge; Valenta (2012) viser også til at dobling og halvering kan benyttes for å regne ut hvor mye 24 femkroninger er. Ved å slå sammen to og to femkroninger, får vi 12 tikroninger i stedet for 24 femkroninger. Dermed ser vi at 24 · 5 = 12 · 10.

Oppgaven med å finne ut hvor mange pepperkaker Anton har, legger til rette for å diskutere hva som skjer når man multipliserer med 10.

4.5.2 Oppgave 3 (Vedlegg 8.2.)

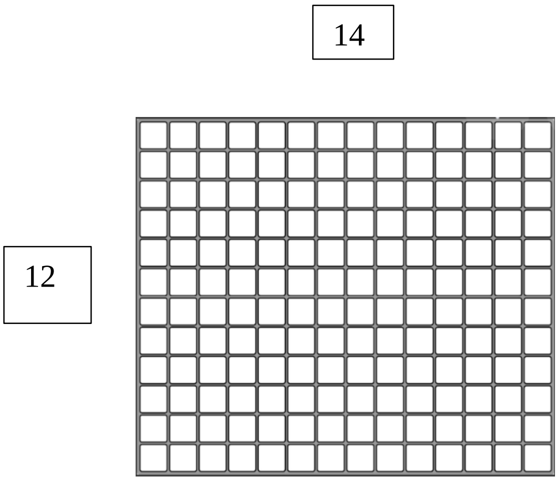
Hvor mange flis?

Som inngang til konteksten med flis, fant jeg et bilde av en lignende flisvegg slik at elevene forstår hva flis er.

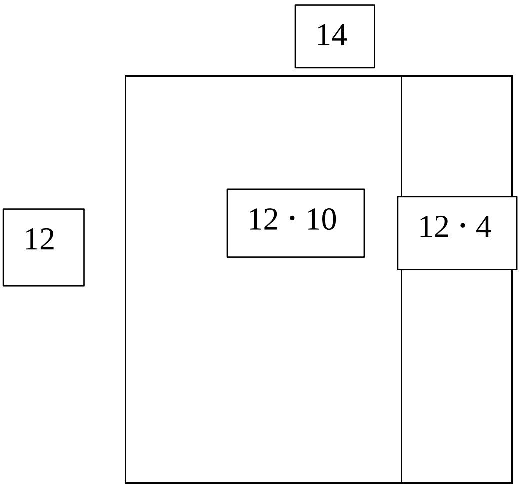
For en visuell støtte laget jeg en modell av flisveggen. Den laget jeg slik at størrelsen passer med centikuber. Modellen av flisveggen ble valgt for å legge til rette for at de kan benytte rutenett/ arealmodellen (Enge, Valenta 2012).

Multiplikasjonstykket er 14 · 12.

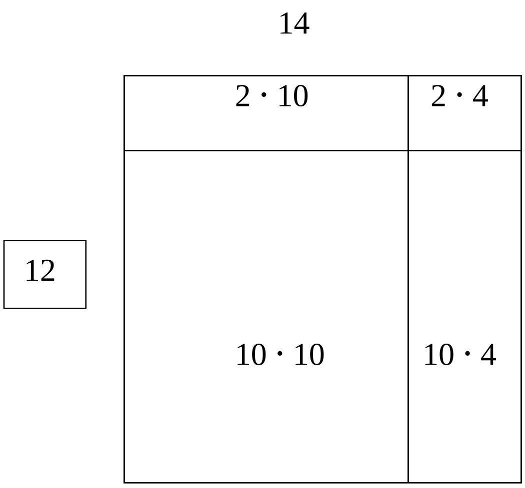
Tallene er valgt ut slik at elevene kan bygge videre på strategier de har gjort erfaringer med i de første oppgavene. De er også valgt fordi elevene skal gjøre erfaringer med den distributive egenskapen til multiplikasjon. Hvordan kan 14 · 12 deles opp og hvordan henger de ulike delene sammen med det hele?



Figur 2 Viser rutenett med 12 gange 14 ruter



Figur 3 Viser tomt rutenett med multiplikasjon



Figur 4 Viser tomt rutenett med 14 gange 12

Figur 3 viser mulig oppdeling som viser til denne utregningen:

$(12 \cdot 4) + (12 \cdot 10)$

Figur 4 viser muligheter for å multiplisere $(2 \cdot 4) + (10 \cdot 4) + (10 \cdot 10) + (2 \cdot 10)$.

Begge disse strategiene viser fram mot arealmodellen eller rutenett (Solem et al.,2018, s 155)

4.6 OVERSIKT OVER UNDERVISNINGSØKTENE MED TEMA

For å legge til rette for undersøkende matematikkundervisning ble det avtalt med lærer at gjennomføringen fulgte samme struktur for hver økt. I begynnelsen av timen presenterte læreren en ny oppgave for elevene. Deretter fikk elevene god tid til å jobbe med denne aktiviteten. Oppgaven til læreren blir å observere arbeidet deres og oppmuntre dem til å finne nye løsninger eller til å beskrive hvordan de tenker (Nosrati, Wæge, 2018)

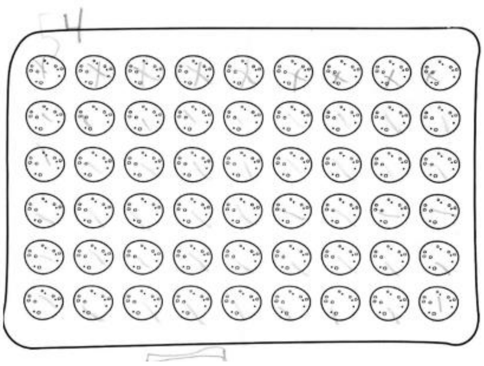
Tabell 1 Viser oversikt over undervisningsøktene med tema

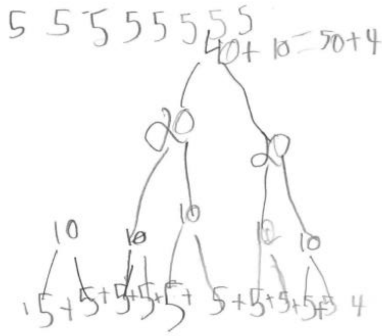
Økt	Tema
1	1. Læreren introduserer konteksten om bakerlærling Anton og oppgaven med peppernøtter på stekebrettet og hva oppdraget til elevene går ut på. Elevene ble spurt om de vet hva en lærling er for å komme inn i kontekst. 2. Det blir kort presentert ulike måter elevene kan representere arbeidet sitt: tegning, tall, utregninger, centikuber. De blir oppfordret til å samarbeide med læringspartner og forklare hvordan de finner løsningene og hvordan de har tenkt. 3. Klassen arbeider med oppdraget
2	1. Læreren repeterer kontekst med bakerlæring Anton. Så blir oppgaven med antall peppernøtter og hvor mye Anton kan tjene presentert for klassen. Det blir kort presentert ulike måter elevene kan representere arbeidet sitt: tegning, tall, utregninger, centikuber. De blir oppfordret til å samarbeide med læringspartner og forklare hvordan de finner løsningene og hvordan de har tenkt. 2. Klassen arbeider med oppdraget
3	1. Læreren repeterer kontekst med bakerlæring Anton. Så blir oppgaven med antall flis presentert for klassen. For å sette elevene inn i kontekst blir det vist og forklart hva flis er. 2. Det blir kort presentert ulike måter elevene kan representere arbeidet sitt: tegning, tall, utregninger, centikuber. De blir oppfordret til å samarbeide med læringspartner og forklare hvordan de finner løsningene og hvordan de har tenkt. 3. Klassen arbeider med oppdraget

4.6.1 Metode for kategorisering av elevenes skriftlige løsningsstrategier

Her vil jeg vise utvalgte eksempler på hvordan de skriftlige løsningsstrategiene ble sortert og plassert inn i Sherin og Fusons rammeverk. En del av løsningene inneholdt spor av flere strategier og var ikke lett å kategorisere. Jeg vil vise noen eksempler med begrunnelse av hvorfor de ble plassert i de ulike kategoriene.

Først vil jeg presentere et eksempel fra kategorien telle alt (figur 1). Løsningen er til oppgave 1 som gikk ut på å finne ut hvor mange peppernøtter det er til sammen på stekebrettet. Eleven har bare skrevet svaret: 54 og det er blyanttegn på hver pepperkake som tyder på at eleven har telt hver enhet. Kategorien i rammeverket er telle alt etter en situasjonsbetinget tegning.



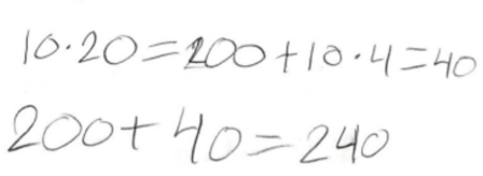


Figur 5Eksempel på kategorien Telle alt

Figur 2 Eksempel på kategorien Additiv strategi

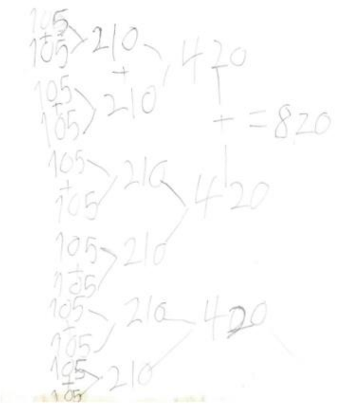
Det andre eksemplet jeg vil vise, er fra kategorien additiv strategi. Denne løsningen er også til oppgave 1. Her har eleven (figur 2) gruppert peppernøttene i grupper av 10 5ere + 1 4er. Grunnen til at denne løsningen er plassert i additiv strategi er at løsningsstrategien er veldig tydelig additiv med kun bruk av gruppering og addisjon. Løsningen går ut på at eleven slår sammen grupper og adderer. Man kan også si at strategien dobling er benyttet ved at 2 og 2 5ere blir addert og 2 og 10ere blir addert.

En del av løsningsstrategiene inneholdt spor av flere løsninger, og var utfordrende å kategorisere. I eksempel 3 viser jeg en elevs løsning på $24 \cdot 10$. Her benytter eleven seg av regler for 10-gangen ved å ta $10 \cdot 20 = 200$ og $10 \cdot 4 = 40$, som er en kategori i Sherin og Fusons (2005) rammeverk. Samtidig benytter eleven seg av den distributive lov, der en eller flere faktorer i et produkt kan deles opp slik at man summerer delproduktene. Eleven multipliserer først 10erne med 10 også 1erne med 10 og summerer etterpå. Den distributive lov er en sentral idé for vår standardalgoritme (Galen et al., 2017) i multiplikasjon og divisjon. Løsningen kunne også vært kategorisert i hybrid (Sherin og Fuson, 2005) i undergruppen dele faktor + lært produkt + additiv beregning. Da ville man gått glipp av at eleven har benyttet den distributive loven.



Figur 3 Elevstrategi: gruppering og benytte den distributive egenskapen ved multiplikasjon

Til slutt vil jeg ta med to eksempler fra kategorien feilsvar og ikke fullført. En del av løsningene i denne kategorien, var på vei til rett svar og hadde benyttet fine strategier som i eksempel 4 der eleven har benyttet dobling for å komme fram til 105 · 24. Eleven har startet med 105 +105 = 210, så gått videre med dobling med 210 + 210 = 420, helt til slutt har eleven doblet 420 og fått 840. Det kan være ulike grunner til at eleven har stanset uten å legge 420 til 840. Men strategien har fungert fram til det siste steget.



Figur 4 Eksempel på strategi uten sluttsvar

I kategorien feilsvar vil jeg til slutt vise en løsning som ser ut til å bero på en misoppfatning av multiplikasjon. I eksempel 5 har eleven satt opp 105   24, der det kan se ut som det eleven videre har gjort, er å flytte 5er fra enerplass i 105 og lagt den til på enerplass på 24 og så fått 29. Deretter er det benyttet 100 · 29 = 2900. Slik det ser ut for meg har ikke eleven forståelse for multiplikasjon og funnet en måte for å multiplisere med 100. For å endre på faktorene må forholdet mellom de opprettholdes. Til denne løsningen har jeg også video i episode 5 der lærer er ved de og diskuterer. Det er 5.04 ut i økta. Lærer spør de hvordan de har tenkt. Her sier elev 3: «Vi tar femmeren over til 24 så tar vi 29 · 100» Ved spørsmål fra læreren sier begge at det de finner ut er 2900. Læreren spør flere ganger hva det er de finner ut og de svarer at det er et tall og at svaret er 2900.

Figur 5 Eksempel på feilsvar

Dette vurderer jeg som et veldig tydelig eksempel på misoppfatning av multiplikasjon i forhold til eksempel 4 der eleven har valgt en strategi som viser en større grad av forståelse.

4.7 Forskningens kvalitet

Forskningens kvalitet bestemmes i følge Postholm og Jacobsen (2018, s 219) ut fra hvordan kunnskapen er produsert. Videre sier Postholm et.,al at ved å beskrive hvordan funnene er innhentet og behandlet kan man vurdere forskningens kvalitet. For å tydeliggjøre dette har jeg beskrevet bakgrunn for studien, hva målet har vært. I metodekapitlet har jeg beskrevet rammeverket som lå til grunn for analysen og på hvilket grunnlag jeg valgte ut og kategoriserte elevenes strategier. Jeg har diskutert min rolle som observatør- som -deltaker. Dette beskriver Postholm et.,al som den metodologiske tolkningen der forskeren stiller spørsmålet: «Hvordan kan jeg som forsker har påvirket data og funn?»(s220). I teoridelen har jeg presentert forskning på tema som er aktuelle for min studie. Bakgrunnen for valg og tilrettelegging av oppgavene og kontekst er begrunnet i matematikkdidaktisk teori og forskning. I drøftingsdelen vil jeg se på om mine resultater er i tråd med det andre har funnet. Man må i tillegg stille seg spørsmål om utvalg, kontekst eller oppgavevalg ha ført til andre resultater. I denne studien vil dette være spørsmål knyttet til hvilket strategier ville man oppnådd i en annen klasse. Hvilken rolle spiller oppgavene med kontekst inn på resultatene? Dette kaller Postholm et., al den substansielle tolkingen (s 220) og benytter spørsmålet: «Hvordan står mine funn i forhold til andre som har forsket på det samme eller lignende problemstillinger»?

4.7.1 Gyldighet og pålitelighet

Videre er det to andre forhold man som forsker må reflektere over: forskningens gyldighet og pålitelighet (Postholm et al., 2018). Gyldighet vil si hvilke konklusjoner jeg som forsker har dekning for å trekke ut fra mine funn. Pålitelighet viser til om vi kan stole på funnene(Postholm et al., 2018) Pålitelighet også kalt relabilitet går ut på hvor pålitelig dataen som blir samlet inn er, og blir definert som forskningsresultatenes konsistens og dermed om resultatene kan reproduseres på andre tidspunkt av andre forskere (Postholm og Jacobsen, 2018, s. 223). Ved refleksjon av egen påvirkning, og ved synliggjøring av forskningsprosessen slik at andre kan reflektere over det en har gjort, er viktig for å bygge påliteligheten til studie (Postholm og Jacobsen, 2018, s. 224).

Pålitelighet, også kalt relabilitet, går ut på hvor pålitelig dataen som blir samlet inn er, og blir definert som forskningsresultatenes konsistens og dermed om resultatene kan reproduseres på andre tidspunkt av andre forskere (Postholm og Jacobsen, 2018, s. 223). Ved refleksjon av egen påvirkning, og ved synliggjøring av forskningsprosessen slik at andre kan reflektere over det en har gjort, er viktig for å bygge påliteligheten til studie (Postholm og Jacobsen, 2018, s. 224). Påliteligheten handler i større grad om refleksjon over sin egen påvirkning av subjektet, i tillegg til å gjøre forskningsmetoden synlig for andre (Postholm og Jacobsen, 2018, s. 224)

I følge Postholm (2018) er det fem kulepunkt innenfor relabilitet. Det første er forholdet mellom forsker og forskningsdeltaker, som viser til at den meste forskningen på samfunns- og atferds-vitenskapelige forskning vil være relasjon mellom mennesker, som i observasjon (Postholm og Jacobsen, 2018, s. 225). Hvordan vil det påvirke undervisningen til læreren når jeg er til stede i klasserommet? Vil elevene prøve å finne ut hva jeg forventer i min studie? Eller vil min tilstedeværelse lage en kunstig undervisningssituasjon i klasserommet?

Det går også på hvordan observatøren tolker og transkriberer i etterkant av observasjon. Forskning på transkripsjon viser at to personer kan forstå samme dialog på forskjellig måte (Kvale et al., 2015). Dette er prosesser som jeg har beskrevet hvordan jeg har gått frem i metoden.

Det andre punktet er forholdet mellom problemstilling og forskningsdeltaker. I min casestudie skal jeg undersøke hvilke strategier elevene benytter til løsning av rike oppgaver. Jeg skrev tydelig i informasjon og fortalte til elevene at jeg var ute etter å se hva de fikk til, dette var ikke en test.

Forskningens kontekst er det tredje punktet som går ut på hvordan kontekst, fenomenet eller begrepet har i samfunnet og dens betydning (Postholm et al., 2018). I min studie kan jeg ikke se noe som kan påvirke dette.

Det fjerde punktet handler om hvem deltar, og hvem vil eller kan ikke delta (Postholm et al., 2018). Å delta er frivillig. I min studie samtykket alle elevene til å delta. I perioden for min undersøkelse var det en del sykdom som gjorde at ikke alle elevene deltok på alle undervisningsøktene. Hadde min studie fokusert på utviklingen av enkeltelevers strategibruk, ville dette vært mer utfordrende. Men mengden empiri tilsier at det er representativt for denne 4.klassen.

Det siste punktet handler om at vi har fått registrert alt det viktigste.

I min studie hadde jeg tillatelse NSD til å benytte video. Jeg kunne se et opptak flere ganger for å forsikre meg om at jeg fikk med alt. Når det gjelder pålitelighet kan andre gå inn og sjekke om konklusjonen er riktig ut fra de episodene jeg har rådata på (Postholm et al.,2018)

Ulempen med ett kamera er at jeg ikke har video fra alle elevene. Postholm et al., (2018) sier det er en enkel men viktig innsikt at vi aldri får bedre data enn det vi klarer å registrere. Uten andre data enn elevenes skriftlige løsninger for en del av elevene i klassen kan jeg ikke si noe mer om elevenes tankemåte enn det som kom fram i den skriftlige løsningen.

Det er jeg som gjennomførte intervjuene og transkriberingen. I analysemetoden ble det brukt et rammeverk (Sherin & Fuson, 2005) hvor det er laget kategorier på forhånd ut fra teorien. Ved å gjøre alt selv er det mindre sannsynlighet for at det oppsto noen mistolkninger under arbeidet. Under transkriberingen prøvde jeg å være så objektiv og detaljert som mulig, slik at formuleringen og utsagnene ble riktig fremstilt, og leseren kan se hvordan reliabiliteten har blitt ivaretatt.

Gyldighet, også kalt validitet, blir i teorien delt i indre og ytre validitet. Som en hovedsak dreier validitet seg til hvilke konklusjoner en forsker egentlig har dekning for å trekke ut fra de data som er samlet inn (Postholm et.,al, 2018, s 229).

Indre validitet deles i årsaksvaliditet og begrepsmessig validitet (Postholm et al., 2018). Årsaksvaliditet sier Postholm et al. dreier seg om hvor sikre vi kan være på at noe er årsak og noe er virkning, hvorvidt vi har grunnlag for å uttale oss om kausalitet (årsak og virkning).

Validitet stiller spørsmål om metoden egner seg til å undersøke det den skal undersøke (Kvale & Brinkmann, 2015). Oppgavene ble satt sammen av 3 forskjellige oppgaver, med hensikt om å kunne fremstille elevenes løsnings strategier i regning med multiplikasjon. Jeg forsøkte i oppgaveformuleringene å åpne opp for at elevene fritt kunne velge hvordan de ønsket å løse oppgavene ved å si at de selv velger hvordan de arbeider og løser oppgavene. Oppgavesettet gav rom for å kunne skrive, tegne, regne og kladde. Selv om oppgavene er inspirert fra eksisterende oppgaver, har jeg ikke fått testet oppgavene før jeg gjennomførte datainnsamlingen. I ettertid opplever jeg at jeg fikk veldig stort utvalg av løsningsstrategier. Studien ble bare gjennomført i en klasse. For å ha et større utvalg kunne det blitt gjennomført i flere klasser.

Det ble brukt flere kilder i datainnsamlingen. Ved å bruke både video, innsamling av elevarbeid og feltnotater styrkes både pålitelighet og gyldighet. Creswell (2013, referert i Postholm et.,al, 2018, s 236) sier at å ta i bruk en kombinasjon av flere former for datainnsamling kalles triangulering.

4.7.2 Etiske prinsipper

I forskning burde etiske prinsipper ivaretas før forskningen tar til, i løpet av forskningsprosessen og i teksten som skrives med utgangspunkt i forskningen (Postholm og Jacobsen, 2018, s. 246). Hele datainnsamlingsprosessen- og situasjonen er fylt med etiske og moralske spørsmål. Moralske spørsmål angående undersøkelsens mål og midler, det menneskelige samspillet i intervjuet og påvirkningen av intervjupersonene, kunnskapen som produseres i intervjuene som videre påvirker vårt syn på mennesket situasjon (Kvale og Brinkmann, 2015, s. 95).

For å ivareta forskningsetiske normene meldte jeg inn forskingsprosjektet til Sikt og fikk det godkjent. Ved å få forskningsprosjektet godtatt av Sikt, var det retningslinjer man måtte gjennom, som gjorde meg enda mere bevisst på de etiske dilemmaene som kunne oppstå under denne forskningsprosessen. Dette ble gjort under planleggingen før prosjektet startet. Her er det flere implikasjoner jeg kunne trekket fram, men på grunn av oppgavens omfang velger jeg å trekke frem de viktigste for denne studien som er informert samtykke og forskerrollen. Informert samtykke er at den som undersøkes skal delta frivillig i undersøkelsen, i tillegg til at deltakeren vet om hvilke farer og gevinster som en slik deltakelse kan medføre (Postholm og Jacobsen, 2018, s. 247). Informantene fikk tilsendt et dokument hvor de kunne lese om studiets hensikt og tema, og informasjon om hva det vil innebære å delta som informant i studien. Det ble utrykket eksplisitt at deltakelse var valgfritt, og at man kunne trekke seg til enhver tid før innleveringsfristen. Det var også informasjon om hva slags utstyr som skulle brukes, hvor dataen skulle oppbevares, at de skulle bli anonymisert, og etter transkripsjonen skulle lydopptaket slettes. Alle elevene fikk tildelt et nummer for å anonymisere de, og alle elevarbeid jeg har benyttet har jeg passet på at ingen kan gjenkjenne.

Jeg var åpen i kommunikasjonen med mine informanter om at de kunne spørre meg spørsmål om studien, databehandling og lignende (Vedlegg 8.3)

5 ANALYSE AV DATA

I analysen vil jeg se i detalj på elevenes løsninger og potensiale som ligger i disse for at elevene skal utvikle sin multiplikasjonsforståelse.

Analysen av casestudie, skal i følge Postholm og Jacobsen (Postholm et al., 2018) bidra til detaljert beskrivelse av kasuset og til å utvikle en forståelse av kasuset som er studert. For at forskning på dette kasuset kan få betydning for andre lignende kasus, må jeg forstå individuelle situasjoner eller handlinger i min studie.

Postholm og Jacobsen (2018, s 139) sier at: «hensikten med kvalitative analysemetoder er å sortere datamateriale». Denne fase kalles også en deskriptiv analyse. Det handler om å lete etter mønster og sortere data i kategorier og ulike tema. Min forskningsmetode er kvalitativ og skal svare på denne problemstillingen: Hvordan kan rike oppgaver legge til rette for utvikling av multiplikativ forståelse.

Selv om min forskning er kvalitativ vil jeg beskrive og sette inn i rammeverket til Sherin og Fuson (2005) antallet forekomster av de ulike strategiene, som kan si noe om hva er typisk for elevenes valg av strategier og hva er typisk valg av strategi i en spesiell oppgave. I tillegg vil jeg trekke fram noen spesielle funn og sette de inn i teorien. Dette for å belyse min problemstilling.

5.1.1 Deskriptiv analyse

Først i analysen må datamaterialet beskrives. Postholm (2010, referert i Postholm og Jacobsen, 2018, s 260) sier at denne fasen handler om å få struktur på materialet.

Empirien i denne studien består av videoopptak av elevenes arbeid i klasserommet og elev-besvarelser på papir. For å få en oversikt er datamaterialet gjennomgått i helhet og satt inn en tabell som viser kort innholdet i hver økt.

5.1.1.1 Analyse av video

I den deskriptive analysen, studerte jeg først hele materialet for å få et helhetsinntrykk. Video består av 3 90 minutters økter. Jeg oppdaget at det er krevende å få med både elevenes diskusjoner, ansiktsuttrykk, gester og kroppsspråk og hvordan de arbeidet på oppgavearket med å tegne og bruke andre representasjoner.

5.1.2 Teoretisk analyse

I den teoretiske analysen settes studien inn i en teoretisk sammenheng og analyseres. Denne prosessen er næranalysen innenfor hver kategori bidrar i følge Postholm (2010, referert i Postholm og Jacobsen, 2018, s261) til å kunne gi en fyldig beskrivelse og analyse av deler som til sammen kan utfylle hverandre i helhetsbeskrivelsen.
Alt elevarbeid som hørte til de enkelte oppgavene, ble gjennomgått og sortert i forhold til strategivalg. Elevene fikk nummer for å anonymisere de, og resultatet ble satt inni Sherin og Fusons rammeverk (Sherin & Fuson, 2005).

Dette for å se hvilke strategier elevene benyttet til de ulike oppgavene og følge enkeltelevers valg av strategi.

Etter at jeg fikk bedre oversikt over elevarbeidet, tilføyde jeg en egen kategori: ikke svar/feil svar/misoppfatning/liten regnefeil. Dette for å registrere alle elevarbeidene og for å kunne fordype meg i feiltyper/misoppfatninger som er veldig viktig for å forstå hvordan man skal legge til rette for matematisk utvikling hos elevene.

5.1.2.1 Elevenes løsningsstrategier satt inn i Sherin og Fusons rammeverk

		Elev		
Oppgave		**1**	**2**	**3**
Telle alt	**Denne strategien er karakterisert av at alle verdiene er representert fra 1 til totalen.** **Krever ingen ny beregningskompetanse** **Denne strategien er tidskrevende og vanskelig å finne rett svar når tallene blir store**			
Eksempeloppgave	Det er tre bord i klasserommet. Det sitter 4 barn ved hvert bord. Hvor mange barn er det til sammen i klasserommet			
Telle alt- etter en situasjonsbetinget tegning	Eleven tegner situasjonen konkret med bord og elever og teller fra en til totalen	1 og 4		4
Telle alt-etter en matematikktegning	Lignende strategi som over, men tegning er utviklet til en matematikktegning som representerer figuren: tegning av bord er erstattet med tegning av mengdering			
Telle alt med fingrene	Elev teller høyt fra en til total med fingre som støtte. Teller 1-2-3-4, en gruppe, 5-6-7-8-to grupper, 9-10-11-12- tre grupper			
Rytmisk telling med fingrene	Teller høyt 1-2-3-4, 5-6-7-8, 9-10-11-12 og markere med fingre for å holde orden på antall grupper			

Figur 6 Sherin og Fuson Telle alt, antall elever på de tre oppgavene

		Elev		
Oppgave		**1**	**2**	**3**
Additiv beregning	**Ikke alle verdiene er representert mellom en og totalen. Eleven kan skrive addisjon med standard notasjon. Ingen ny beregningskompetanse**			
Gjentatt addisjon	Problemet er gjort om til sekvenser av addisjonsproblemer, og gruppestørrelsen er gjentatt flere ganger. Eks: 4 + 4 = 8, 8 +4 =12			
Slå sammen grupper og addere	Eksempel: multiplikativ situasjon: 4 · 8. Eleven adderer først 8 +8 = 16 to ganger og adderer så 16 +16 = 32	**7, 3,16 og 15**	**13**	**1,13 og 11**

Figur 7Sherin og Fuson additiv beregning, antall elever på de tre oppgavene

		Elev		
Oppgave		**1**	**2**	**3**
Gruppetelling	**Denne strategien består av gruppetellingssekvenser som f eks: 4-8-12-16-20 osv. De kan gruppetelle for hvert tall som n, 2n,3n,4n, osv**			
Gruppetelling med full tegning	Lager en fullstendig tegning, men finner produktet med en rekketelling. Eks 4 · 3 = 12			
Gruppetelling med skrevne tallgrupper	Skriver tallsymbol for hver gruppe og sier rekketelling og peker på hvert tall for hver gruppe: 4-4-4 Sier: 4-8-12			
Gruppetelling med fingrene	Sier rekketelling høyt og holder orden på antall grupper med fingre: kan starte med tommel/lillefinger: 4-8-12			

Figur 8Sherin og Fuson gruppetelling, antall elever på de tre oppgavene

		Elev		
Oppgave		**1**	**2**	**3**
Mønsterbasert	**Her finner eleven løsningen raskt. Noen multiplikasjoner har faste mønster som 1 og 0 gangen, og ulike teknikker**			

	på 9-gangen. Det skilles mellom mønsterbaserte strategier og lært produkt.			
Regler for 0-, 1- og 10-gangen	Ingen synlig bruk av fingre eller tegning:	**6,2,9,10,2**		**10,9,2,5, 14,12**
Fingerteknikk ved 9-gangen	For å multiplisere 9n holder eleven opp begge hender og bøyer ned sin n'te finger fra venstre. Tieren vil være representert som antall fingre til venstre for den bøyde og enere vi være antall fingre for den bøyde.			

Figur 9Sherin og Fuson, Mønsterbasert, antall elever på de tre oppgavene

		Elev		
Oppgave		**1**	**2**	**3**
Lært produkt	**Dette er en strategi som gjør at eleven kommer fram til løsningen raskt. Innholdet er en stor samling tallspesifikke ressurser. Svaret er det eneste muntlige respons Ny beregningskompetanse: Lært faktorer og deres produkter**			
Lært produkt	Ingen synlig bruk av fingre eller notasjon. Hurtig respons	17, 8, 5, 15	2	

Figur 10Sherin og Fuson, Lært produkt, antall elever på de tre oppgavene

		Elev		
Oppgave		**1**	**2**	**3**
Hybrid	**I denne gruppen finnes det kombinasjoner fra alle kategorier ovenfra.**			
Gruppetelling + telle alt	Bruker gruppetelling for å komme nesten til totalen, og teller alt for å komme helt til sluttproduktet. F eks: 6-12-18-24-30-36,37,38,39,40,41,42			
Lært produkt + telle alt	Eleven starter med et lært produkt som er under totalen, og teller deretter alt for å komme helt fram til sluttproduktet. F eks: $6 \cdot 6 =$ 36,37,38,39,40,41,42			12

Lært produkt + additiv beregning	6 · 7 = 42, 42 + 7 = 49, 49 +7 = 56			
Dele faktorer+ lært produkt +additiv beregning	En av faktorene deles opp, så problemet er dekomprimert til to deler. De to delproduktene kan så finnes ved lært produkt. Tilslutt adderes delproduktene. 7 · 8 = (7 · 4) + (7 · 4) = 28 + 28 = 56	17,15,16,8, 5,09,03,10,7		17,8,16,15, 3

Figur 11 Sherin og Fuson, Hybrid, Antall elever på de tre oppgavene

	Elev		
Oppgave	**1**	**2**	**3**
Feilsvar			
Feil svar, ingen tydelig strategi			
Ikke svar- ikke prøvd			
Dele faktorer +lært produkt+additiv beregning. Ikke fullført		12,6	12
Feil svar, tellefeil			6
Feil svar misoppfatning multiplikasjon		5,3	
Gruppetelling, ikke fullført	12,14,11		
Liten regnefeil/rett tenkt			
SUM			

Figur 12 Feil svar, egen kategori, antall elever på de tre oppgavene

Denne formen for analyse kaller Stake (1995, referert i Postholm og Jacobsen, 2018,s 158 for kategorisk opphopning. Denne analysen er avhengig av leting etter mønster, og mønsteret i min analyse vil være hvilke strategier elevene benyttet, og hvilke strategier som ble benyttet mest. Mønsteret kom frem etter at jeg kategoriserte elevenes strategier og satte de inn i Sherin og Fusons (2005) rammeverk.

5.1.3 Oppsummering av antall elevsvar i hver kategori

Det første jeg legger merke til er at det få elever som benytter strategien: Telle alt, og alle 3 etter situasjonsbetinget tegning (figur 3). Den neste hovedkategorien en del elever har benyttet seg av er Additiv beregning. Og slik jeg vurderer det har de alle 8 valgt: Slå sammen grupper og addere (figur 4). Videre er det 11 elever som har valgt kategorien Mønsterbasert og underkategorien: Regler for 0-, 1- og 10 gangen (figur 6). Lært produkt (figur 7) er det 5 elever som har benyttet seg av, men bare på de to første oppgavene. Ingen har benyttet lært produkt på oppgave 3, noe som kan komme av at multiplikasjonen er $12 \cdot 14$. Dele faktorer + lært produkt + additiv beregning (figur 8) er det 14 elever som har benyttet. Dette karakteriserer Sherin og Fuson som en hybrid kategori med kombinasjoner av alle de foregående strategiene. Når det gjelder feil er antallet (figur 9) delt mellom å dele faktorer + lært produkt + additiv beregning, ikke fullført:3. Feil svar, tellefeil: 1. Feil svar misoppfatning multiplikasjon: 2. Og den siste: Gruppetelling, ikke fullført: 3. Jeg legger merke til at det er færre som har feil på den 3.oppgaven som var den vanskeligste. Det ser også ut til at innenfor hver hovedkategori er det noe opphopning av antall innenfor samme underkategori. Dette kan komme av at elevene har samarbeidet to og to, og at de i tillegg har gått rundt og snakket med flere elever om løsningene. I det neste kapitlet vil jeg velge ut strategier fra de ulike hovedkategoriene for å belyse i hvilken grad strategiene kan føre til at elevene utvikler multiplikativ forståelse.

5.1.4 Antall strategier i den enkelte oppgave

Her vil jeg analysere hvilke strategier elevene benyttet ved løsningen av de ulike oppgavene. Her har jeg regnet med feilkategori i tillegg, da dette også må regnes som en strategi, selv om svaret er feil eller løsningen ikke gjennomført. Når det gjelder antall strategier finner jeg flest ulike strategier i oppgave 4, som er den vanskeligste oppgaven og den som kom til slutt i undervisningsløpet.

Oppgave 1	
	Antall elever
Telle alt	2
Gruppere og addere	4
Regler for 0-, 1- og 10-gangen	5
Lært produkt	4
Gruppetelling, ikke fullført	3

Figur 13 Antall strategier benyttet i oppgave 1

Oppgave 2	
	Antall elever
Regler for 0-, 1- og 10-gangen	5
Dele faktorer+ lært produkt +additiv beregning	6
Skrevet bare svar på arket	4
Oppgave 3	
Telle alt	2
Slå sammen grupper og addere	1
Dele faktorer+ lært produkt +additiv beregning	9
Dele faktorer +lært produkt+additiv beregning. Ikke fullført	2

Feil svar misoppfatning multiplikasjon	2

Figur 14 Antall strategier benyttet i oppgave 2 og 3

Oppgave 4	
	Antall elever
Telle alt	1
Slå sammen grupper og addere	3
Regler for 0-, 1- og 10-gangen	6
Lært produkt +additiv beregning	1
Dele faktorer+ lært produkt +additiv beregning	5
Dele faktorer +lært produkt+additiv beregning. Ikke fullført	1
Feil svar, tellefeil	1

Figur 15 Antall strategier benyttet i oppgave 4

5.1.5 Analyse av spesielle funn

I følge Stake (1995, referert i Postholm og Jacobsen, 2018, s 157) har forskeren en spesiell interesse, der det handler om å forstå individuelle situasjoner eller handlinger. For å analysere individuelle hendelser innebærer det å benytte direkte analyse. I direkte analyse har ikke forskeren behov for å få bekreftet sin forståelse gjennom flere tilfeller, hendelser eller situasjoner, men bygger sin forståelse kun på en enkeltstående situasjon (Stake, 1995, referert i Postholm og Jacobsen, 2018, s 158).

Her vil jeg trekke fram funn i min analyse som belyser problemstillingen og mitt forskningsspørsmål. Jeg vil presentere funn som viser noe spesielt i spenningen når det gjelder å utvikle multiplikativ forståelse, hvilke strategier som kan støtte tankegangen og hvordan dette representeres. Jeg vil også se etter episoder der elevene kan utnytte regler og egenskaper ved multiplikasjon.

En utfordring ved analysen var at empirien bestod av veldig mange ulike strategier. Jeg måtte veie flere opp mot hverandre for velge hvilke som representerte noe spesielt. Helst hadde jeg lagt ved alle strategiene fordi det er så lærerikt å studere hvordan elevene tenker.

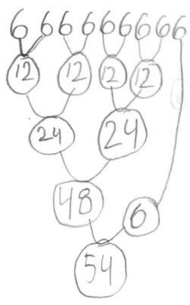
5.2 RESULTATER

Løsningsstrategiene i min studie er kategorisert i stor grad i kategoriene: Additiv beregning, regler for 0-, 1- og 10-gangen og i kategorien hybrid i underkategorien: lært produkt + additiv beregning, løsninger som ble feil og elevløsninger som benytter egenskapene ved multiplikasjon. I tillegg har jeg et avsnitt jeg har kalt: «muligheter i arbeid med rike oppgaver», der jeg tar med en episode som er spesielt i forhold til at alle kan lære matematikk.

5.2.1 Additiv beregning

I denne kategorien har jeg samlet strategier der elevene bruker ulike additive beregninger for å komme fra til svaret. I min empiri valgte elevene bare den underkategorien som heter slå sammen grupper og addere. I Sherin og Fusons (2005, s 358) rammeverk karakteriseres denne strategien på denne måten: Elevene adderer grupper, ofte to og to, og så adderes denne summen igjen. Denne strategien finner jeg i 8 løsninger og fra alle oppgavene. Så det ser ut som det er en ofte benyttet strategi. Ostad (2008) klassifiserer strategien gjentatt addisjon som en backupvariant. Backupstrategier er de strategiene som ikke er retrievalstrategier. Retrievalstrategier kjennetegnes ved at eleven henter fram kunnskapsenheter fra sitt lager av kunnskap (Ostad, 2008, s 16). Sherin og Fuson (2005) kategoriserer disse strategiene som «hente fram modeller», og hevder det er et mål å hjelpe elevene til å utvikle evnene til raskt å komme fram til produktene. Selv om gjentatt addisjon regnes som en backupstrategi viser forkere til at det er viktig å gjenkjenne grupper. For å forstå multiplikasjon viser Smith og Smith (Smith & Smith, 2006) til tidligere forskning. Et av punktene de nevner er å gjenkjenne like grupper, å forstå rollen like grupper har i multiplikasjon. Å kunne tenke på en gruppe som en enhet sier van Galen (2017) er viktig for å virkelig kunne forstå multiplikasjon. Her vil jeg presentere to ulike løsningsstrategier der elevene benytter gruppering og addering. Den første er representativ for flere løsninger på ulike oppgaver.

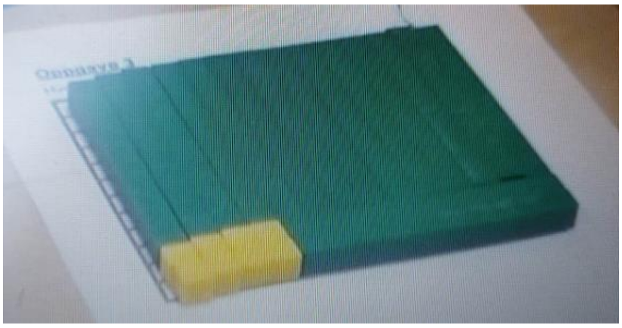
Jeg velger å vise elevarbeid i figur 13. Flere benyttet denne metoden på oppgave 1, og bestod av at elevene hadde funnet ut at det var 6 kaker nedover og 9 bortover. Etter det hadde de laget 9 grupper av 6-ere og summert. Elevene har doblet grupper av 6 så langt de har noen å doble med, og holdt den ene (odde) 6 eren igjen til slutt og addert den til slutt.



Figur 13 Additiv strategi med gruppering

I dette eksemplet har eleven benyttet gjentatt fordobling ved å kombinere 6erne i 4 par og utelatt den 9ende som ikke går opp i par. Ved at det er satt opp visuelt blir den siste 6eren addert etter at fordobling er fullført.

Den andre elevløsningen jeg ønsker å presentere er en elev som benytter gruppering og gjentatt addisjon for å regne ut 12 · 14. Denne skiller seg ut fra de andre løsningene ved at det kun benyttes addisjon. Eleven representerte løsningen sin med ti-base- materiell lagt oppå flisene (figur 14). Eleven har benyttet 10er staver og enerkuber. Den additive utregningen skjer ved at det er gruppert i 10ere og hver 10er stav blir addert; 10 + 10…. eleven adderer alle tierne helt opp til 160. Til slutt er enerne gruppert i 2 firere som blir summert og lagt til.



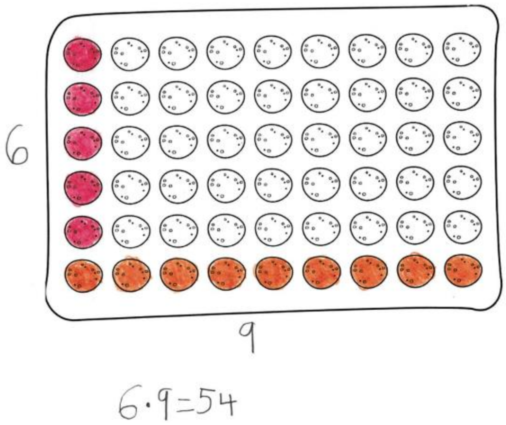
Figur 14 Elevløsning gruppering og gjentatt addisjon

Denne gruppering av tiere kan ligne litt på Sherin og Fusons (2005) kategori: Mønsterbasert. De har en underkategori som innebærer regler for 0-, 1- og 10-gangen, og det kan være nærliggende å tenke at eleven med å gruppere i 10er staver kunne brukt 10-gangen i utregningen. Men den kategorien tilsier at det ikke skal være synlig bruk av fingre eller tegning, mens denne eleven benytter 10basemateriell. Eleven benytter også kun addisjon i sin forklaring.

5.2.2 Lært produkt

I min studie er det 5 løsninger som kategoriseres som lært produkt. 4 av løsningene blir benyttet på oppgave 1 for løsningen av 6 · 9, og en ble benyttet på oppgave 2. I gruppen lært produkt er løsningene klassifisert som retrievalstrategier eller hente fram strategier. Ostad (2008) sier at elevene benytter retrievalstrategier når oppgaveløsningen kjennetegnes ved at eleven henter fram kunnskapsenheter fra kunnskapslageret.

Denne strategien var jeg i tvil i hvilken hovedkategori den skulle plasseres. Løsningen 6 · 9 = 54 (se figur 16) er representativ for kategorien lært produkt. Men i tillegg kunne den ha blitt plassert i kategorien hybrid. Årsaken til at den kunne blitt plassert i hybrid er at den viser mer enn bare utregning. Selv om løsningen er representativ for kategorien lært produkt, kommer det fram et interessant multiplikasjonsmoment. I denne episoden er det elev 15 som forklarer og elev sitter og lytter. Elev 15 innleder med å vise til at de har oppdaget at stekbrettet er strukturert i 6 rader med 9 i hver rad og har trukket den konklusjonen at det er 6 · 9. Elev 15: «Første så fant jeg at bortover her var det 9 pepperkaker» Eleven peker på illustrasjonen. «Også telte jeg nedover her (peker på illustrasjon) her var det 6. Så fant jeg ut at det var 6 gange 9, og det er 54».



Figur 16 Elev 15 viser lært produkt

Elevene har utviklet sin multiplikative tenkning til å forstå hva en kvantitet er (Smith & Smith, 2006). I løsningen gjenkjenner eleven situasjonen som er multiplikativ. Ved å peke på at her er det 9 pepperkaker på en rad bortover og 6 pepperkaker nedover, gjenkjenner eleven like grupper og forstår rollen like grupper har i multiplikasjon, og til sist at to faktorer refererer til to forskjellige enheter.

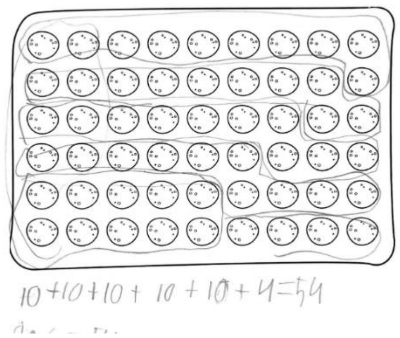
Når eleven forklarer løsningen med addisjon ser jeg det blir foretatt et bytte av multiplikator og multiplikand uten at det har noen betydning for løsningen. I multiplikasjon løsningen forklares det med at det blir 6 · 9 der 6 er multiplikatoren, mangfoldiggjøreren og 9 multiplikanden, det som skal mangfoldiggjøres (Solem et al., 2018). I sin løsning der oppgaven blir forklart med addisjon gjør eleven et bytte på multiplikator og multiplikand. I multiplikasjon er dette ingen betydning på grunn av multiplikasjon sin kommutative egenskap. Den kommutative egenskapen handler om at når man multipliserer to tall, så kan man forandre rekkefølgen på tallene og likevel få det samme svaret.

5.2.3 Mønsterbasert, regler for 0-, 1- og 10-gangen

Tallene i de tre første oppgavene ble valgt ut for å legge rette for å kunne benytte seg av løsninger basert på 10-gangen. I min studie fant jeg til sammen 11 løsninger der 10-gangen ble benyttet.

Tallene i oppgave 1 var valgt slik at det var mulig å velge strategien ved å legge til en gruppe med 6ere, fra at det er 9 til det er 10, for så å benytte seg av (10 · 5) – 6 = 54. Denne strategien var det ingen som benyttet seg av.

Jeg fant derimot flere varianter av at de telte opp tiere ved å ta en rad med 9 pluss en fra rekka nedenfor og kommet fra til 10er grupper på denne måten. På figur 17 viser eleven på stekebrettet hvordan peppernøttene blir gruppert i 10 ere til det blir igjen 4 peppernøtter til slutt. Eleven (figur 17) benytter gjentatt addisjon av 10 ere og adderer 4 tilslutt. Under er det skrevet 9 · 6 = 54. Det kan se ut som eleven ser sammenheng mellom disse to metodene.

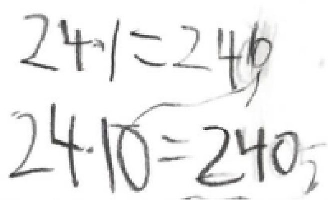


Figur 17 Elevløsning med 10-gangen

I figur 18 kan det se ut som eleven har sett en lignende løsning. Her er 10 + 10 + 10 + 10 + 10 uttrykt som en multiplikasjon. Strategien kan også bygge på den distributive egenskapen til multiplikasjon.

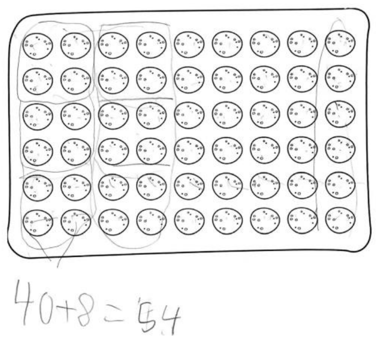
Figur 18 Elevløsning 6 gange 9

I oppgaven med å finne antallet pepperkaker til sammen i posene som kunne regnes med 24 · 10, var tallene lagt til rette for at de kunne benytte multiplikasjon med hele tiere. Denne eleven (figur 19) har satt opp denne forklaringen på hva skjer hvis man multipliserer med 10. Først står det 24 · 1 = 240. Under er det skrevet 24 · 10 = 240. Det kan se ut som eleven har tegnet et strek fra nullen i tieren og i etterkant satt på nullen bak 24. Det kan se ut som har en forståelse av plassverdisystemet som viser seg ved multiplikasjon med grunntallet 10(Galen et al., 2017). Løsningen kan tyde på at eleven har en noe annen forståelse av gange med 10 enn at man bare sett en null ekstra.



Figur 19 Elevstrategi multiplisere med 10

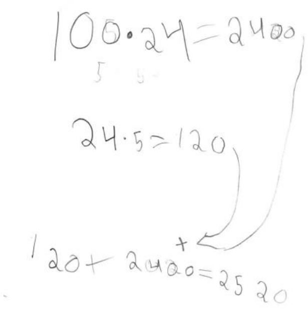
Figur 20 viser løsningen til en elev som har kommet fram til rett svar. Det kan se ut som en variant av gruppering og addisjon. Tegningene på stekebrettet viser ikke tydelig hvordan eleven har kommet fram til 40 eller 8. Jeg kan se at eleven har gruppert 6 4-ere til venstre på stekebrettet og satt ring rundt 6 nedover helt til høyre.



Figur 20Elevløsning usikker strategi

5.2.4 Hybrid

En del av mine funn ble kategorisert som hybrid. Metodene i hybrid er basert på kombinasjoner av de andre strategiene. Mine funn i denne kategorien ble plassert i underkategorien dele faktorer + lært produkt + additiv beregning. Sherin og Fuson (2005) viser til at denne inndelingen blir mer kompleks etter som eleven utvikler sin forståelse. Ved analyse av elevløsningene oppdaget jeg at det var en slik strategirikdom både innad i løsningene og med antallet løsninger at det var spor av flere underkategorier. Dette støttes av Sherin og Fuson som sier at etter som elevene lærer mer vil de individuelle tilfeller ikke lenger høre til en type kategori. Jeg ønsker å vise til løsningen i figur 21 som et eksempel på at en strategi inneholder flere metoder. I løsningen har eleven har delt opp faktorene 100 · 24 og 24 · 5 og benyttet lært produkt for å så å addere 120 + 2400. Og strategien kan kategoriseres i hybrid: dele faktorer + lært produkt + additiv beregning.



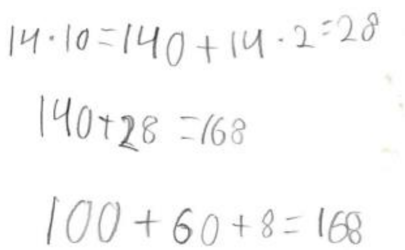
Figur 21Elevløsning Dele faktorer+ lært produkt + additiv beregning

I tillegg kan vi se at eleven har benyttet regler for gange med 100 ved 100 · 24. Eleven har også benyttet det distributive lov som sier at for å gjøre utregningen enklere, kan en eller flere faktorer deles opp slik at man summerer delproduktene (Galen et al., 2017).

Ved å plassere løsninger i hybrid opplevde jeg at man kunne gå glipp av en del strategivarianter.

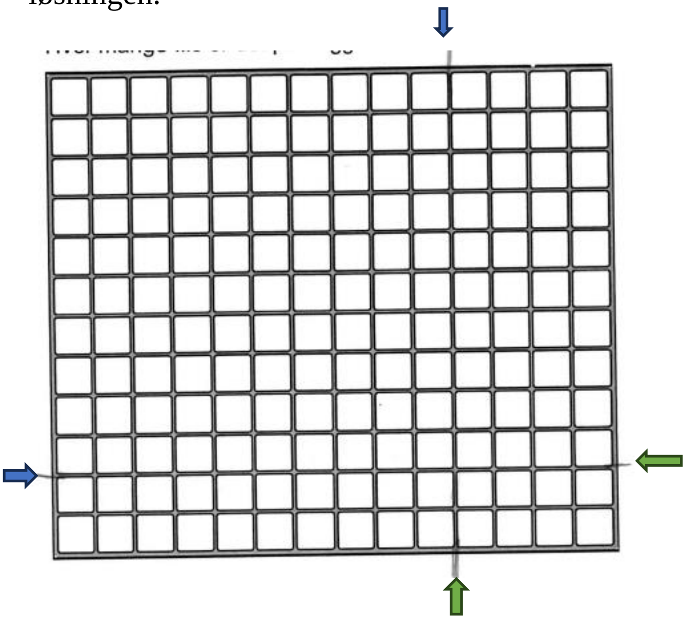
5.2.5 Egenskaper ved multiplikasjon

Den første elevløsningen jeg velger å ta med i denne kategorien er for utregning av 12 · 14. Denne eleven har vist to ulike løsninger (figur 23). Ingen av løsningene er markert på rutenettet, derfor vil analysen kun basere seg på utregningen eleven viser med tallsymbol. Disse løsningene inneholder flere ulike strategier, og kan plasseres i ulike kategorier. Jeg velger å ta den med som et eksempel på den distributive lov fordi den er sentral for multiplikasjon (Solem et.al, 2018)(Galen et al, 2017). I den første løsningen ser det ut til at eleven utnytter den distributive loven til å splitte opp faktoren 12 i en 10 er og en toer for å få til en 10-er som er enkel å regne med. Først regnes 14 · 10 = 140 ut, så viser eleven med + tegn at 14 · 2 = 28 skal adderes. Til slutt viser eleven utregning av addisjon som ble benyttet: 140 + 28 = 68. Det var bare denne eleven som hadde benyttet denne strategien i hele studien.



Figur 22 Elevløsning multiplikative egenskaper

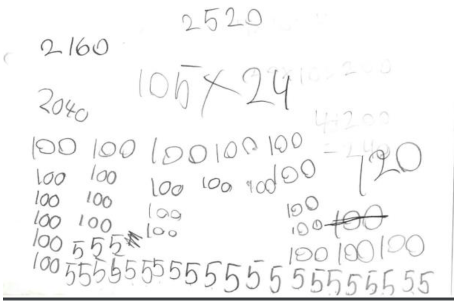
Flere elever hadde benyttet strategien: 100 + 60 + 8 = 168. Eleven over viste ikke noe på rutenettet hvordan tallene 100, 60 og 8 ble produsert. Jeg gikk til en elevløsning som hadde benyttet den samme løsningen, og kan ane blyantstreker på rutenettet som kommer fram til løsningen.



Figur 23 Elevløsning: 100 + 60 + 8

Man kan tolke blyantstrekene markert av meg med blå piler (figur 24) en del av rutenettet som inneholder 100. Så er det mulig å tenke at feltet mellom den blå pilen til venstre på rutenettet og den grønne pilen under rutenettet inneholder 20, som sammen med feltet fra den blå pilen øverst til den grønne pilen til høyre inneholder 40; altså 60 til sammen. Tilslutt kan det tyde på at 8 er i det feltet som er markert mellom de grønne pilene.

Jeg velger også å ta med i analysen en løsningsstrategi på 24 · 105 (figur 25). Eleven har forståelse for at dette er en multiplikativ situasjon ved å ha skrevet 105 · 24. For å løse oppgaven har eleven delt 105 opp i 24 100ere og 24 5ere. Det er notert 120 litt overfor der 5erne er skrevet opp. 120 er 24 5ere, men det vises ikke hvordan eleven har kommet fram til 120. Til venstre i løsningen er det notert 2040 og 2160. Tallet 2040 kan være feilskriving eller feilregning av 24 100ere og at 2160 er 2040 + 120. Svaret står riktig helt øverst på arbeidsarket.



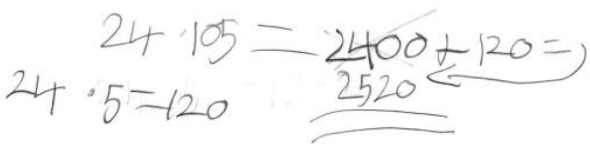
Figur 24 Elevløsning 105 gange 24

Elevens arbeid ser ut til å være bruk av den distributive lov. Med algebraisk notasjon kan denne løsningen framstilles slik:

$105 \cdot 24 = (24 \cdot 100) + (24 \cdot 5)$

Dette er en typisk måte å benytte seg av den distributive lov. Tallene blir behandlet som hele mengder og delproduktene blir utregnet hver for seg. Det kommer ikke tydelig fram i løsningen om det er benyttet addisjon eller multiplikasjon for å komme fram til sluttsvaret.

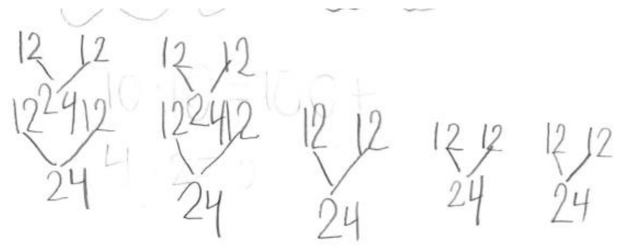
Løsningen i figur 26 viser en elev løsningen på den samme oppgaven. Eleven viser bare utregning av $24 \cdot 5 = 120$. 2400 blir notert uten at utregning blir vist. Til slutt adderes 2400 og 120. Denne eleven benytter også den distributive loven.



Figur 25 Elevløsning 105 gange 24

5.2.6 Feilsvar

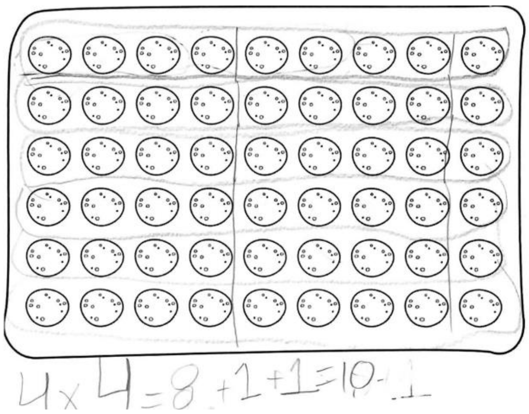
I mine funn fant jeg noen få løsninger som enten fikk feil svar, eller ikke fullført strategi. I kategorien feil var det noen som lignet på hverandre: Eleven hadde startet på gruppering, valgt riktige grupper, addert riktig og ikke gjennomført. Disse løsningene inneholdt doblinger. Hvis løsningen hadde vært gjennomført ville de ha kommet fra til rett svar. Jeg tar med et eksempel som er representativt for denne gruppen løsninger (figur 29).



Figur 26 Elevløsning 12 gange 14 ikke fullført

Her har eleven startet med å doble 14 12ere og kommet fram til at 12 + 12 = 24. Dette er en løsning som tyder på at eleven har forståelse for oppgaven og har en strategi som ville ført fram til riktig løsning.

For å vise en løsning der eleven har valgt en gruppering på en annen måte, tar jeg med løsningen i figur 30. Figur viser en løsning som ikke ble fullført. Ved å studere stekebrettet kan det se ut som det er foretatt gruppering av 4ere. Men ved å se tallene i sammenheng med dette er det ikke så lett å forstå hvilken strategi som blir benyttet. Her ser vi tallet 4 benyttet i $4 \cdot 4 = 8 + 1 + 1 = 10$. Ser man på grupperingen på stekebrettet viser eleven forståelse av gruppering, og ved å fullført $4 \cdot 4$ kunne eleven kommet fram til en slik løsning: $(4 \cdot 4) + (4 \cdot 4) + (4 \cdot 4) + 6 = 54$. Men gruppering av 4ere er ikke den beste måten, det hadde vært bedre å gruppert 4erne i 8ere og benyttet $(2 \cdot 8)3 + 6$.



Figur 27

Jeg fant 2 eksempler på misoppfatninger av multiplikasjon som førte frem til feil svar. Begge løsningene bestod kun av tallsymboler og ble vist i oppgaven $105 \cdot 24$. Den ene viste jeg i metodekapitlet i figur 5 der eleven flyttet 5er i 105 til 24 og fikk: $100 \cdot 29$. Den andre varianten(figur 31) kan det se ut som eleven har 24 gange 1 og lagt til 05 fra 105.

$24 \cdot 105 = 2405$

Figur 28 Elevløsning 25 gange 105

Vi kan ikke si noe klart om hvordan elevene har tenkt. Det vi kan si noe om er hvordan de har arbeidet med løsningen. Begge viser løsningen kun med tallsymboler, de viser ingen strategier som kunne laget en modell av situasjonen.

5.2.7 Muligheter i arbeid med rike oppgaver

Her vil jeg ta med en episode fordi den viser at alle kan lære matematikk. Jeg har både elevbesvarelse og video av nesten hele episoden. Episoden starter 3.23 ut i økta etter at oppgaven er presentert. Oppgaven er $105 \cdot 24$. Det er elev 1 og 4 som samarbeider. Det ligger 100 plater på pulten og elevene er utenfor kameravinkel ved bordet der tibasematerialet ligger, og vi hører de teller (figur 27).

Når de kommer tilbake til pultene sine ser vi at de har hundrerplater og enerkuber liggende. De blir enige om hvem som skal telle enere og hvem som skal telle hundrere.

Figur 29Elev teller og sjekker om det er 100 på plata

Elev 1 spør lærer: Er det 100 på plata? I stedet for å gi eleven svaret sier læreren: «sjekk det selv». Her velger læreren å få eleven til å finne det ut selv. Dette bidrar til at eleven etter hvert løser det på sin egen måte. Elev 1 viser her hvordan hen utnytter at det er ti i hver rekke og ti i hver rad: Viser med blyanten, og sier 10 og 10 og sier 100. Eleven viser her at produktet med $10 \cdot 10$ er lært.

Elev 4 sitter og teller enere, uten at det skjer gruppering. Dette blir gjennomført helt opp til 120. Elev 1 legger to hundreplater foran seg og sier: «200», og noterer samtidig på arket (figur 28). Elev 1 fortsetter å legge hundrerplater opp foran seg. Det kan se ut som platene blir telt fordi eleven beveger munnen mens platene legges opp og det noteres samtidig på arket.

Figur 30Elev teller opp 24 100 plater

Elev 1 har sluttet å telle hundrerplater og sier: «Det er 2400». Kroppsspråket kan tyde på at eleven er fornøyd med resultatet og vinker lærer til seg. Lærer: «Hva fant du ut? Elev 1: Jeg telte alle disse her og det er 2400, jeg fant ut at det er 100 på hver. Eleven peker på platene og viser hvordan hen kom fram til 100 med å ta $10 \cdot 10$. Lærer: Hvor fant du hundre fra? Elev 1 peker på smartboard der oppgaven står. Lærer: «To du vekk 5 erne?» Elev 1: Ja, også Elev 4 teller dem også legger vi dem i lag (Elev 1 bruker elev 4s navn). Når elev 4 er ferdig med telling blir svaret ropt ut: «120». Elev 1 noterer på arket. Og skriver ned svaret som er 2400 + 120. Elevene har benyttet den distributive egenskapen ved multiplikasjon. De har regnet ut $105 \cdot 24$ ved å dele 105 i hundreplater og enere. Videre har de benyttet metoden telle alt for å komme fram til svaret.

6 DRØFTING

I dette kapitlet vil jeg drøfte funnene i analysen og knytte det opp mot teori. Drøftingspunktene er valgt ut for å belyse problemstillingen

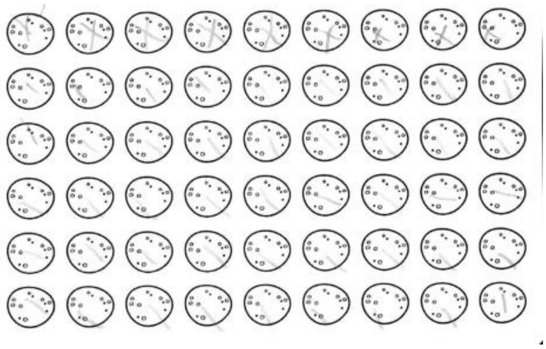
Hvordan kan rike oppgaver legge til rette for utvikling av forståelse i multiplikasjon?

6.1 TELLE ALT

Strategien telle alt ble bare benyttet i 3 ulike løsninger i studien. Jeg ønsker å drøfte denne strategien i forhold til mitt ønske om at alle elever skulle kunne finne en måte å løse oppgavene på. Det er også interessant å drøfte den ut i fra stadiene i elevenes utvikling av multiplikativ forståelse.

En av de måtene elevene bruker til å løse multiplikasjon, er gjennom å telle elementene en og en. Denne måten har lite med multiplikasjon å gjøre. Fischbein (1994) kalle det en intuitiv metode fordi eleven ikke har utviklet forståelse den multiplikative strukturen i oppgaven.

Elev 18 teller alle peppernøttene på arket og setter et blyantmerke på hver nøtt (figur 32). Denne metoden kaller Sherin og Fuson telle alt etter en situasjonsbetinget tegning.



Figur 31Elev 18 benytter strategien telle alt.

I litteraturen beskrives denne strategien som den mest tidkrevende og vanskeligste å komme fram til korrekt løsning med. Ved gjennomgang av videomaterialet registrerte jeg at Elev 18 måtte telle to ganger for å komme fram til korrekt svar. Slik det ser ut er denne metoden naturlig for denne eleven i og med at den benyttes to ganger. Eleven sier også i linje 17: “Ja, men vi vet svaret” og det er etter eleven har telt over alle 2 ganger. I følge Mulligan og Mitcelmore (1997, referert i Sherin og Fuson, 2005 s 354), bruker elever forskjellige intuitive modeller som direkte telling. Vanskelighetene øker med denne metoden etter som tallene blir større. Utfordringen ved å telle alle objektene en og en er; at for å utvikle multiplikativ forståelse er det å gjenkjenne passende gruppestørrelse et viktig vendepunkt. I følge Smith og Smith (Smith & Smith, 2006) er det å forstå hva kvantitet er, grunnleggende for å forstå multiplikasjon. Denne eleven gjenkjenner ikke i starten av arbeidet sitt, at peppernøttene er organisert i 9 grupper med 6 i hver eller 6 grupper med 9 i hver. Vergnaud (1983) hevder at multiplikasjon er en binær operasjon som krever to inndata før prosedyren med multiplikasjon kan starte. Denne eleven teller ett og ett objekt. Elev 18 har ikke skrevet ned noen tallsymboler på oppgavearket sitt annet enn svaret 54. Det er bare blyantmerker for å sjekke at alle er telt. Eleven bruker strategien «telle alt» med tegning (Sherin & Fuson, 2005).

(Solem et al., 2017) sier at den enkleste formen for multiplikativ tenkning er direkte modellering. For å veilede denne eleven videre kan oppgaver der strukturen er tydelig i forhold til enheter være en inngang. Det kan også være at eleven kunne oppdage strukturen av peppernøtter på stekebrettet ved å lytte til andre elever.

For å veilede denne eleven til å utvikle sin multiplikative tenkning fra å telle alt til å se mange som en gruppe, finner jeg et forslag til visualisering i Tall og tanke 1(Solem et al., 2018) med f eks kjente objekter som terninger: Man viser flere terninger som viser 2: Hvor mange 2 ere er det her? En oppgave kan også være: I en tyggegummipakke er det seks biter. Hvor mange biter er det i 3 pakker? Her kan oppgaven understøttes med å framstille pakkene med tegning. Dette vil gjøre eleven kjent med oppgavestrukturen og overføre dette til praktiske situasjoner. Det neste trinnet vil være at eleven ikke behøver å telle hvert enkelt objekt for å finne svar og kan utvikle sin multiplikative tenkning til å benytte addisjon av like grupper (Solem et al., 2018)

Det kan se ut som elev 18 til en viss grad oppdager at peppernøttene er organisert i grupper. I linje 32 og 33, etter at elev 13 (samarbeidspartner) har forklart sin løsningsmetode til lærer, som er basert på grupper av ti, kommenterer elev 18: "Det er jo 9 på her også tar man en, og da blir det 10".

Ut fra denne kommentaren og observasjon av samarbeidet mellom disse elevene, kan man kanskje trekke den konklusjonen at elev 18 gjennom å lytte til og se hvordan elev 13 har løst oppgaven, oppdager at peppernøttene er organisert i grupper. Det kan se ut som eleven har en begynnende form for forståelse av multiplikativ tenkning, hvor man legger vekt på telling i like grupper (Kaufmann & Universitetet i, 2010).

6.2 ADDITIV BEREGNING

Når elevene møter multiplikasjon har de erfaring med addisjon, og de behersker et grunnlag for fremgangsmåter som er mindre tidkrevende og lettere å gjennomføre enn å telle en og en. Smith og Smith (Smith & Smith, 2006), sier at elevene må gjenkjenne like grupper, og forstå rollen like grupper har i multiplikasjon.

Additiv beregning skiller på to ulike metoder: Gjentatt addisjon og slå sammen grupper og addere. Additiv beregning overføres til et additivt problem, og gruppestørrelsen blir gjentatt addert, mens gruppetelling adderer eleven grupper, ofte to og to, også adderes denne summen igjen (Sherin & Fuson, 2005).

Når det gjelder gjentatt addisjon adderer elevene det samme enheten flere ganger for så å komme fram til produktet (Sherin & Fuson, 2005). På en måte setter de multiplikanden opp som addend. Når elever slår sammen grupper og adderer, innbefatter det gruppering av ulike størrelser, og det kan settes opp mellomregninger for å regne videre. I mitt eleveksempel (figur 13), har eleven gruppert 6erne i 9 grupper. Kaufmann (2010) hevder at gjenkjennelse av grupper er sentralt når det gjelder multiplikasjon. Han sier videre at overgangen fra gjentatt addisjon til multiplikasjon kan være problematisk for elevene (s 162). De fleste av løsningsstrategiene i min studie tyder på at elevene benytter seg av gjentatt addisjon for å komme fram til svaret i en multiplikasjon de ikke har lært eller ikke husker produktet av. Sherin og Fuson (2005) ser ikke på strategier som kunnskap, men de hevder at i noen situasjoner kan det være en enkel relasjon mellom kunnskap og en spesiell strategi av en elev. Og de sier videre at i strategien gjentatt addisjon finner man eksempel på at slike mønstre og strukturer, der multiplikanden blir addert like mange ganger som multiplikator sier. Ostad (2008) sier at elevenes utvikling av strategibruk, innebærer både et gradvis skifte fra backupstrategier til retrivalstrategier, og mengden av strategikunnskap eleven har tilgjengelig i sitt repertoar. I dette tilfelle regnes additiv metode som en backupstrategi. Han hevder i tillegg at dette representerer en kritisk faktor for normal utvikling (s 32). I lys av teorien vil jeg si at denne elevenes løsningsstrategi ved å benytte seg av gjentatt addisjon som backupstrategi, er en naturlig del av utviklingen av multiplikativ forståelse. Ved å gruppere 6erne i 9 grupper, viser eleven at multiplikanden 6, blir addert like mange ganger som multiplikator sier, og eleven viser kunnskap om strategien.

Tvete hevder at den intuitive modellen i multiplikasjon som baseres på gjentatt addisjon, passer bra til situasjoner med like grupper eller like mål, hvor multiplikatoren er et helt tall og multiplikatoren et visst antall objekter. Problemet oppstår når elevene senere møter multiplikasjon der begge faktorene er desimaltall. Tvete sier at elevene har gjennom den primitive modellen gjentatt addisjon, en oppfatning av at «ganging gjør større».

Kaufmann (2010) sier i sin avhandling at utfordringene oppstår når elevene skal anvende multiplikasjon i ulike kontekster.

Mange elever i min studie benytter seg av fordobling og gjentatt fordobling. Elever som bruker fordobling i denne studien, kommer raskt fram til svaret. Kaufmann (2010) sier at elever som benytter denne metoden, har oversikt over tallrekka og viser god tallforståelse. I de løsningene jeg har sett der elever har benyttet fordobling er det sjeldent at utregning blir feil.

Problemet med gjentatt fordobling kan være når tallet de skal fordoble seg fram til ikke er en potens av 2. Da må de fordoble seg fram til nærmeste tall som er potens av to, og dette tallet kan være mindre eller større enn tallet de skal frem til. I tilfelle med $6 \cdot 9$ håndterer en elev dette med å holde igjen en gruppe 6ere og adderer den tilslutt.

6.3 LÆRT PRODUKT

Når det gjelder strategien lært produkt er et kjennetegn i følge Sherin og Fuson (2005), at løsningen kommer raskt. Kaufmann (2010) problematisere hva det er å beherske multiplikasjon (s 183). Han hevder at å beherske multiplikasjon ikke betyr å gjenta det andre har gjort. Å beherske multiplikasjon er i følge Moschovitch (2004, referert i Kaufmann 2010, s 183) å kunne bruke multiplikasjon i nye/andre sammenhenger. Smith og Smith (Smith og Smith, 2006) sier i tillegg at for forstå multiplikasjon må elevene forstå relevante enheter knyttet til multiplikasjon, at to faktorer i multiplikasjon kan refererer til to forskjellige enheter. Tvete sier i sin analyse av multiplikasjon at vi må se på multiplikasjon som praktiske, virkelighetstilknyttete regneoperasjoner, ikke som rent matematiske operasjoner. Han mener også at vi i skolearbeidet ikke bør skille de rene matematikkbegrepene fra de praktiske situasjonene de er relevante for. En lignende definisjon av multiplikasjon beskriver Solem et al., 2017. De viser til multiplikasjon i ulike kontekster og oppgavetyper som løses praktisk på ulike måter. Disse hevder de representerer ulike multiplikative strukturer, som krever ulik multiplikativ tenkning. På bakgrunn av det jeg nå har fremstilt av teori, kan man si at det er viktig å møte multiplikasjon knyttet opp mot praktiske situasjoner og ulike kontekster for at elevene på best mulig vis kan utvikle sin multiplikative forståelse.

6.4 HYBRID

Sherin og Fuson (2005) sier denne metoden er basert på kombinasjoner av strategiene ovenfor, og at inndelingen blir mer kompleks ettersom elevene utvikler sin forståelse.

Denne episoden er fra 2 elever som har samarbeidet og kommet fram til lik løsning og likt svar. Jeg observerte at de hadde benyttet både lært produkt ved at de multipliserte og at de forklarte ved å dele opp og addere i tillegg. Sherin og Fuson (2005) sier at denne metoden kjennetegnes ved at svaret kommer raskt. I litteraturen blir det benyttet ulike betegnelsen på dette (Sherin & Fuson, 2005). Mange viser til at her har eleven faktakunnskap om multiplikasjonstabellen som de har automatisert. Denne strategien blir også betegnet som retreival eller gjenhente.

Denne eleven knytter sammen gjentatt addisjon med multiplikasjon. I sin artikkel kommer Sherin og Fuson (2005), fram til en strategi de kaller hybrid; der eleven benytter kjente tallfakta i tillegg til å utlede løsninger fra kjente fakta. Slik jeg oppfatter disse elevenes løsning representerer de to ulike løsninger; en med bare multiplikasjon og en annen i tillegg for å kunne vise sammenhengen med gjentatt addisjon.

6.5 FEILSVAR

Dessverre har jeg bare en episode på video der elever løser feil. Det er fra episode 5. To elever arbeider sammen, elev 3 og elev. Løsningen er representert med $24 \cdot 105$ på arbeidsarket. De forklarer at for å regne ut det tar de 5 eren fra 105 og flytter over til 24 og får 29. Så tar de $29 \cdot 100$. Lærer spør 2 ganger hva de finner ut, og de svarer begge gangene med tall og at svaret er 2900. Det det ser ut som her er at elevene ønsker å finne svaret veldig fort og utfører en prosedyre uten forståelse. Det kan se ut som at de bruker en dekomposisjonsstrategi ved å flytte enerne fra multiplikator til multiplikand for å lage tallene enklere å regne med.

6.6 MULIGHETER I ARBEID MED RIKE OPPGAVER

Først vil jeg drøfte funn relatert til valget av rike oppgaver. Piggott, Wæge, Nosrati bruker alle begrepet low treshold, high cieling eller på norsk lav inngangsterskel og stor takhøyde når det gjelder å definere rike oppgaver. I min studie er det en stor variasjon for hvilke strategier elevene benyttet for å løse denne oppgaven, og det gjorde alle elevene i klassen i det samme klasserommet. Strategiene varierte fra å telle alt til å bruke lært produkt og benytte avanserte strategier bygd på multiplikative egenskaper. Piggott (2015) peker på at oppgavene må være engasjerende fra starten. Det kan virke som elevene kom inn i kontekst og fort i gang med den innledende oppgaven og alle klarte å komme med en løsning. Alle skal kunne komme i gang og ha muligheter til å arbeide med det.

Her vil jeg drøfte og komme med eksempel på 2 elever som samarbeider for å løse: $105 \cdot 24$. Ved observasjon og analyse av disse elevenes tidligere arbeid i studien, vil jeg kunne si at denne oppgaven er langt over deres kompetanse i multiplikasjon. Elev 4 har benyttet metoden telle alt på $6 \cdot 9$ og $12 \cdot 14$. For at disse elevene skal være motiverte for å prøve en slik løsning kan det være egenskapen til rike oppgaver at de skal ha lav inngangsterskel slik at alle kan starte med oppgaven. Disse elevene løser en avansert multiplikasjon på sin egen måte.

Elevene har valgt å bruke tibasemateriell. Det består av 100-plater, tier-staver og enekuber.

Metoden deres er å ta $(100 \cdot 24) + (5 \cdot 24)$. Den ene eleven benytter 100 plater, altså gruppering og adderer dette 24 ganger. Den andre eleven har i oppgave å telle enerkuber. Å telle en og en har liten sammenheng med multiplikasjon. Sherin og Fuson sier at telle alt kategorien inneholder 4 variasjoner. Ingen av variasjonene sier noe om å representere telling med tibasemateriell. De viser til Kouba (1989) som kaller det «direct representation». Kaufmann (2010) sier at denne strategien betyr at elevene teller alle elementene en og en, uten at man betrakter strukturen av de like store gruppene. Han sier videre at det er et kjennetegn at denne strategien krever en type hjelpemiddel eller konkret i form av tegning eller bruk av fingre. I hans studie viser han til en elev som bruker centikuber som konkreter. Selv om eleven legger centikubene i grupper benyttes strategien telle alt.

Her kunne eleven i stedet laget grupper på 5 og 5 og rekketelt med 5 i stedet for å telle alt. I følge Sherin og Fuson er denne strategien karakterisert av at alle verdiene er representert fra 1 til totalen.

Strategien å telle alt krever ingen ny beregningskompetanse og den er tidskrevende og vanskelig å finne rett svar når tallene blir store (Sherin, Fuson). Dette verbaliserer også elev 4 i samtalen med å utbryte: «Jeg gjorden den hardeste jobben».

Et annet kriterie for rike oppgaver er at problemet skal være anstrengende og ta tid.
Denne episoden varer i 12 minutter, og viser at elevene klarer å holde ut med en oppgave så lenge. I tråd med Wæge Nosrati (2018) kan episoder der elevene er fornøyd med arbeidet sitt, vise til at rike oppgaver kan fremme elevenes indre motivasjon ved at de opplever selv

løse oppgaver de opplever som litt krevende. Karlsen, Hedrén, Haglund og Taflin sier at rike oppgaver legger til rette for at elevene representere løsningene sin på ulike måter. Denne oppgaven opplever jeg som et godt eksempel på en rik oppgave når jeg ser de ulike løsningene som elevene kom fram til.

6.7 RIKE OPPGAVER OG UTVIKLING AV FORSTÅELSE I MULTIPLIKASJON

Til slutt vil jeg drøfte rike oppgaver inn i noen sammenhenger for å belyse betydningen i forhold til at elevene skal utvikle forståelse i multiplikasjon. Først vil jeg drøfte dette i forhold til noen utvalgte kjerneelementer (udir). Det første kjerneelementet beskriver utforsking og problemløsning. I denne studien kan det sies at elevene har vært aktive og utviklet egne løsningsmetoder. Elevene har selv funnet mønstre i oppgavene og tallene og funnet sammenhenger. De har løst oppgavene med total strategifrihet.

Elevene har gjennom utforsking og problemløsning kommet fram til å benytte den distributive loven ved multiplikasjon, og de har løst multiplikasjon på et nokså høyt nivå. De har oppdaget sammenhenger og strukturer selv. Dette kan bidra til at elevene kan utvikle sin forståelse i multiplikasjon ved å abstrahere og generalisere som understreket i det fjerde kjerneelementet.

Selv om ingen av oppgavene inneholdt ordet multiplikasjon ble elevene møtt med utfordrende utregninger i multiplikasjon: Bortsett fra den første oppgaven der multiplikasjon var to ensifrede faktorer: $6 \cdot 9$, bestod utregningen av $24 \cdot 10$, $105 \cdot 24$ og $14 \cdot 12$. Dette er store tall 4. klassinger ikke vanligvis blir møtt med. Dette er i tråd med et av kriteriene rike oppgaver: oppgavene skal være utfordrende, anstrengende og ta tid.

Konteksten og tallene ble forsøkt lagt til rette for å introdusere viktige matematiske ideer og løsningsstrategier. Her har elevene basert på egen tenkning kommet fram til løsninger der de har benyttet og utviklet multiplikativ tenkning. Dette har de gjort gjennom ulike strategier.

Det matematiske temaet og innholdet i oppgaven er forholdsvis enkelt, men nivået på tenkningen som kreves for å løse dem, er sofistikert (Wæge, Nosrati, 2018).

Et aktuelt drøftingspunkt er betydningen av kontekst. Piggott (2015) viser til at det er viktig at oppgavene er relatert til hverandre i en kontekst. Enge og Valenta (2012) trekker fram motsetningen mellom de tradisjonelle oppgavene der elevene skal anvende spesifikke prosedyrer og gode regnehistorier som skal gi elevene mulighet for å organisere, legge merke til og utforske mønstre, og til å utvikle regnestrategier og argumentere for disse (Enge, Valenta, (2012). I lys av dette kan valget av kontekst se ut til å ha betydning for variasjonsrikdommen av strategier og nivået på løsningene.

Rike oppgaver ser ut til å danne grunnlaget for å fremme elevenes motivasjon, metakognisjon og læring (Wæge & Nosrati, 2018). I denne oppgaven får elevene vise hva de kan på sitt vis. Selv om elev 1 og elev 4 benyttet ulike strategier, den ene telte alt mens den andre benyttet mer avanserte løsninger, kunne begge bidra med sitt og være med og diskutere oppgaven. Dette fører i følge Wæge, Nosrati (2018) til et positivt klassemiljø

I min studie har jeg sett mange eksempler på hvordan elever tar i bruk varierte strategier for å løse multiplikasjonsoppgaver de ikke har automatisert. Strategiene vil være en viktig bidragsyter til deres videre utvikling av forståelse i multiplikasjon. Skemp (2006) hevder at med relasjonell forståelse vil elevene kunne tilpasse strategiene til nye oppgaver og situasjoner. Selv om det tar lengre tid å lære multiplikasjon gjennom relasjonell forståelse, vil det være enklere å huske (Skemp, 2006).

Når det gjelder strategirikdommen og variasjonen i min studie vil jeg vise til Ostad(2008) som hevder at mengden av strategikunnskap som elevene har er kritisk for normal utvikling i matematikk.

Tilslutt vil jeg vise til Kilpatrick (2001) sin trådmodell, og den femte og siste tråden. Den tråden handler om engasjement (productive disposition). Gjennom undervisningsforløpet har elevene vist god innsats og alle har deltatt. Dette kan overføres til den femte tråden (Kilpatrick 2001) som omhandler engasjement, og handler om å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifull. Dette aspektet innebærer også å ha tro på at det er mulig å bli kompetent i matematikk, lære å streve og ikke gi opp. En slik holdning til faget vil ifølge Kilpatrick(2001) gi en økt motivasjon, da en har forståelse for faget og ser viktige matematiske sammenhenger.

.

7 AVSLUTNING

I denne studien har jeg undersøkt hvilken rolle rike oppgaver kan spille for utvikling av forståelse i multiplikasjon.

Jeg har identifisert flere problemløsningsstrategier som elevene benyttet gjennom fire problemløsningsoppgaver satt i kontekst. I denne studien varierer elevenes valg av strategier fra å benytte en intuitiv metode som å telle alt, til avansert utnyttelse av den distributive lov. Resultatene av studien viser at elever i denne studien benytter et rikt utvalg av strategier, og kan løse multiplikasjonsoppgaver de ikke har automatisert. Elevenes strategier kan gi et innblikk i hvilken forståelse de har i multiplikasjon.

Gjennom arbeidet med denne studien ser jeg flere aspekt som beriker mine matematikkdidaktiske kunnskaper, men også aspekter som får meg til å stille videre spørsmål om hvordan jeg vil at min matematikkundervisning skal være. Ved å benytte video i klasserommet og studert elevenes løsninger, har jeg fått kunnskap om elevenes tenkemåter og hvordan elevene kommer fram til løsninger. Ved å oppdage den rikdommen og variasjonen i deres løsningsstrategier, har jeg fått bekreftet hvor krevende jobben som lærer er.

Den nye læreplanen LK20 viser at elevene må kunne mer enn bare algoritmer, og at de skal kunne utforske og finne fram til metoder selv. En utforskende matematikkundervisning legger vekt på at elevene får muligheten til å forstå matematiske sammenhenger, begreper og begrepsstrukturer. Målet er at de skal utvikle en relasjonell forståelse (Skemp, 2006). Tradisjonelt kan matematikk være et fag preget av pugging av algoritmer. Oppgaver er et av lærerens viktigste verktøy i å veilede elevene i deres læring, og typen oppgave er derfor av betydning for elevenes læring. Rike oppgaver er oppgaver som tillater ulike løsningsstrategier. De skal støtte kreativitet, resonnering og kommunikasjon. Rike oppgaver er en oppgavetype som kan benyttes i arbeidet med den nye læreplanen.

Kan mine funn ha overføringsverdi? Min studie er basert på arbeidet til bare en klasse. Denne klassen har en del erfaring med å arbeide med problemløsning. Elevene har i noen grad arbeidet med oppgaver med fokus på resonnering og problemløsning som en del av utviklingen av matematikkforståelse. Klassen har hatt en klasseromskultur der det er lov å gjøre feil. Ville man oppnådd et lignende resultat i en annen klasse? Hvilken rolle spiller det at elevene har noe erfaring med problemløsning og at klasseromskulturen har aksept for å gjøre feil? For videre utforsking kunne oppgavene vært utprøvd i en klassen uten de samme erfaringene med problemløsning. For å undersøke om hvilken rolle konteksten har hatt kunne man presentere multiplikasjonstykkene for en annen 4 klasse uten kontekst.

REFERANSER

Adendorff, S. A. (2019). International reflections on Realistic Mathematics Education, International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education, Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Pythagoras (Pretoria, South Africa)*, *40*(1), 1-3. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v40i1.525

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Bartolini Bussi, M. G., & Sun, X. H. (2018). *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades : The 23rd ICMI Study* (1st 2018. ed.). Springer International Publishing : Imprint: Springer.

Balci, S. 2019: hentet fra: https://forskning.no/barn-og-ungdom-matematikk-oslomet/det-er-en-myte-at-noen-ikke-har-hjerne-for-matematikk/1290476

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M,L., Levi, L., Empson, S.B. (2015). *Children's Mathematics. Cognitivly Guided Instruction (*L. Peake Ed.). Portsmouth, NH: Heinemann.

Enge O, ValentaA (2012). *Varierte tenkemåter og strategier. Tangenten 1/2012*

Galen, F. v., Fosnot, C. T., Gulaker, D., Heggem, T., & Iversen, K. (2017). *Dagligvarer : multiplikasjon - en innføring*. Caspar forl.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. I D. Grouws (red.), Handbook of research in mathematics teaching and learning (s. 276–295). New York, NY: MacMillan.

Heege, H. T. (1985). The Acquisition of Basic Multiplication Skills. *Educational studies in mathematics*, *16*(4), 375-388. https://doi.org/10.1007/BF00417193

Hedrén, R., Taflin, E. og Hagland,K. (2005). *Rika matematiska problem*. Stockholm: Liber A

Kaufmann, O. T., & Universitetet i, A. (2010). *Elevenes f?rste m?te med multiplikasjon p? sm?skoletrinnet : en sosiokulturell tiln?rming til appropriering av multiplikasjon i klasserommet* Universitetet i Agder, Fakultet for teknologi og realfag]. Kristiansand.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., & National Research, C. (2001). *Adding it up : helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Kjærnsli, Lie, Olsen, Roe (2007) Tid for tunge løft Hentet fra:

https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/pisa/publikasjoner/publikasjoner/tid_for_tunge_loft.pdf

Klaveness, E., Karlsen, L., & Kverndokken, K. (2019). *101 grep for å aktivisere elever i matematikk : matematikkdidaktikk i teori og praksis* (1. utgave. ed.). Fagbokforlaget.

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational studies in mathematics*, *102*(1), 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Ostad, S. A. (2008). *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring : med fokus på elever med matematikkvansker*. Læreboka forl.

Ostad, S. A. (2013). *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring : med fokus på elever med matematikkvansker* (2. oppl. [i.e. rev.utg.]. ed.). Læreboka forl.

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I., & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Richard R, S. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics teaching in the middle school*, *12*(2), 88-95.

Richard, R. S. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding: Faux Amis. *Mathematics teaching*(77), 20.

Rowland, T., & Zazkis, R. (2013). Contingency in the Mathematics Classroom: Opportunities Taken and Opportunities Missed. *Canadian journal of science, mathematics and technology education*, *13*(2), 137-153. https://doi.org/10.1080/14926156.2013.784825

Sherin, B., & Fuson, K. (2005). Multiplication Strategies and the Appropriation of Computational Resources. *Journal for research in mathematics education*, *36*(4), 347-395. https://doi.org/10.2307/30035044

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions* (2nd ed.). National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, S. Z., & Smith, M. E. (2006). Assessing Elementary Understanding of Multiplication Concepts. *School Science and Mathematics*, *106*(3), 140-149. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18171.x

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E., Smestad, B., Ødegaard, E., Vetlesen, E., & Paiam, V. (2017). *Tall og tanke : matematikkundervisning på 5. til 7. trinn : 2* (Vol. 2 :). Gyldendal akademisk.

Solem, I. H., Alseth, B., Nordberg, G., Nordqvist, S., Vetlesen, E., & Paiam, V. (2018). *Tall og tanke 1 : matematikkundervisning på 1. til 4. trinn* (2. utg. ed.). Gyldendal.

Stedøy, I.M.,Torkildsen S., Hvorfor problemløsning? Hentet fra: https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/resources/Hvorfor%20probleml%C3%B8sing.pdf

Tvete, K. Fra heftet multiplikative strategier. Utdelt matematikk 2 NORD universietet. Kan forevises ved forespørsel

Ulleberg, I., & Solem, I. H. (2018). Which questions should be asked in classroom talk in mathematics?: presentation and discussion of a questioning model. *Acta didactica Norge*, *12*(1).

Utdanningsdirektoratet. (2020). Læreplanverket. In (Vol. yr:2006).

Utdanningsdirektoratet, internasjonale studier: Den internasjonal studien PISA. Hentet fra:

https://www.udir.no/tall-og-forskning/internasjonale-studier/pisa/

Utdanningsdirektoratet: Kompetanse i fagene, overordnet del. Hentet fra:

https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/kompetanse-i-fagene/?lang=nob

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education: An Example from a Longitudinal Trajectory on Percentage. *Educational studies in mathematics*, *54*(1), 9-35. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning* Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk].

Wæge, K., & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Universitetsforl.

8 VEDLEGG

8.1 EPISODER

Episode 1

1	5.04	Lærer: Hvordan tenker dere?	
2	5.10	Elev 3: Vi tar femmeren over til 24 så tar vi 29	
3		x100	
4	5.15	Lærer: Hva finner du ut da?	
5		Begge i kor: 2900	
6		Lærer: Hva er det ?	
7		Elev 3: Det er er tall	
8		Lærer: Ja, det er et tall	
9	5.27	Lærer: Hva finner dere ut når dere gjør dette?	
10		Elev 3: At svaret er 2900	
11	5.37	Lærer: Ja, og- kan dere finne ut hvor mange	
12		Peppernøtter han har?	

Episode 2

1	3.23		Vi hører de teller i bakgrunn, der
2			Konkretene ligger.
3			Det ligger 100-plater på pulten
4	6.13		De kommer tilbake til pulten
5	6.17	Elev 1: Jeg teller de småe	Holder 100 plate i hånda
6		du teller disse	
7		Ja, som er 100 på en da	
8		Elev 4: Fy søren!	Plukker opp en hundreplate
9		Elev 1: nei jeg teller de her.	Tar hundreplatene og gir enerne til
10			Elev 4
11	6.34	Elev 1: spør lærer det er 100 på	
12		plata,	
13		Lærer: Sjekk det selv	
14			Elev 4 tar blyant og og teller på plata
15	6.54	Elev 4: 100	teller 10 nedover og 10 bortover sier til seg selv 100
16			imens sitter Elev 4 og teller enere
17			1-2-3-4-5-6-7-8…………..
18			Elev 1 går og henter papir
19	7.05	Elev 4: Ikke snakk høyt	Elev 4 fortsetter å telle høyt
20			bare med en lyd for hvert tallet, sier

21			ikke tallet
22			Elev 1: sitter med 100 plater foran seg
23		Elev 4: 200	legger 2 plater og sier 200
24			og noterer samtidig på arket
25			Legger 100 plater foran seg i en haug
26			samtidig som eleven noterer,
28			jeg ser at munnen rører seg
29			så eleven teller når hundrerne legges
30			opp
31	8.19		Elev 4 teller enere fortsatt.
32			Har kommet tilbake til å si tallet 54- 55
33			Imens sitter Elev 1 og teller opp 20
34			100 plater og teller over på arket
35			Elev 4 teller videre 63- 64- 65
36			Elev 1 har sluttet å legge 100 plater
37			i haugen og sier det er 2400
38			, eleven smiler og ser rundt seg med
39			et kroppsspråk som sier at
40			svaret oppfattes om rett, vinker til lærer
41	8.51	Lærer: hva fant du ut?	
42		Elev 1: Jeg telte alle disse her	
43		og det er 2400 jeg fant ut at det	
44		var 100 på hver	Peker på platene og viser hvordan 100 ble funnet
45		Lærer: hvor fant du 100 fra ?	
46			Elev peker på smartboard der oppgaven
47			står
48		Lærer: Tok du vekk 5 ern her?	
49		Elev 1: Ja, og elev 4 teller dem	Elev 1 bruker elevens navn
50		Også plusser vi de i lag	
51		lærer hvor mange	Peker på haugen med plater
52	9.24	hundrerplater har du	
53		Elev 1: 24	
54		Elev 1: Vi venter bare på at	Hun peker på medelev som teller enere
55		Elev 4 blir ferdig	Elev 4 viser interesse for telling
56	9.42		Og sitter og venter
57	10.11	Elev 4: 120	Kommer til 120 Elev 1 noterere
58	10.16	Elev 4: roper: 120	
59			Elev 1 vinker til lærer
60	10.18	Elev til lærer: er det riktig?	Elev 1 rekker opp hånda
61	10.26	Elev 4: Jeg gjorde den hardeste	

62		jobben	
63		Elev 4:	Elev 4 snur seg til klassen og diskuterer
64			Med klassen og viser hvordan de løste
65			det
66	10.51	Elev 4: Jeg har skrevet svaret	
67		her	
68	11.17	Elev 4 til lærer: Vil du se	
69		Svaret vårt?	
70		Lærer: Ja, nå er jeg spent på	
71		Hvordan dere kom fram til	
72		Dette?	
73	11.25	Hvor mange blir det av de?	Peker mot enerene
74		Elev 1: det blir 120	
75		Elev 4: 120 sånn småe	

Episode 3

1	14.00	Lærer: Kan dere finne hvor mange peppernøtter	
2		Det er til sammen?	
3	11.47	Elev 1: Hvor mange er det i en?	
4		Lærer: Det er 10 i hver pose?	Peker på oppgaven
5		Elev 1: Vi må telle 10 ere	
6		Elev 4: Jeg har tatt hånda mi fram og tilbake	
7		Over hundre ganger	
8			De rydder bort enere
9			og 100rere
10			henter tierstaver
11	14.00		Kommer til bordet
12			med tierstaver
13			Det er 24
14	14.20	Elev 4: 10-20-30-40-50—60-	Elev 4 starter å telle og
15			Tar en og en stav
16		Elev 1: Det er ganske	Elev 1 bryter inn i
17			tellinga, jeg klarer ikke
18			Å tyde slutten av ytring
19		Elev 4: 70- 80-90- 100 101, nei jeg mener 110	Elev 4 fortsetter å telle
20	14.40	Elev 1: Jeg må gjøre noe, skal bare sjekke	
21		At det er 24	
22		Elev 1 og 4 teller i kor: 1-2-3…..	
23	15.39	Begge: Yes	
24	15.42	Begge teller 10-20-30…….	Nå er det elev 4 som
25		240 Yea	holder stavene
26		Elev 1: Nå må vi skrive 240	Smiler til hverandre

Episode 4

		Elev 17: kan vi samarbeide?	
		Elev 8: 100 x 20 er 2000.	Elev 17 skriver
		Elev 17: skriver og sier	
		100 x 20 er 2000 ja det er sant	
		Elev 17: altså 5 x 20.	De skriver.
		Elev 17: teller på fingrene	På den første handa regner hun
		5- 10- 15- 20-25-30 -35	en ekstra og kommer til 55 stopper opp
		på alle 10 fingrene.	og viser tegn til å bli usikker.
		Elev 8: holder opp 5 fingre:	
		dette er 50 og så tar vi	
		det ganger 2	
			Elevene sitter uten
			å gjøre noe
		Elev 17: nå må vi jobbe.	
		Elev 8: så var det dette,	
		det er dette som er vanskelig	I denne situasjonen er det vanskelig
			å se hva han tenker er vanskelig
		Elev 17: synes du det er vanskelig?	
		Elev 8: ja	
		Elev 17: men det er 5 her,	
		nei jeg tror ikke vi tar den	
		måten for jeg glemte av det	
			Elev 17 visker ut på arket
		Elev 8: 5 + 5 nei det er for vanskelig	
		Elev 17: men (sier navnet til	
		med elev) jeg gjorde det riktig isted	
			Elevene arbeider videre uten at det ble
			Fanget på kamera

Episode 5

1			Elev 13 har jobbet på egen hånd mens
2			de 2 andre har sittet og snakket om
3			andre ting
4		Elev 13: det jeg tenkte da at man	Lærer kommer bort til de
5		kan ta 10 x 10 tar vekk 4 en fireren	at man får han peker med blyanten på
6		og toeren og det blir jo 100 pluss at	tegningen

7		vi ganger	
8		Lærer: hvordan finner du de	
9		hundrerne?	
10		Elev 13: jo her er det 12 nedover	
11		og ta tar jeg vekk de 2 her og her	
12		er det 14 oppover og da tar	
13		jeg bort de 4 da blir det 10 x 10	
14		er 100 og så pluss 4 x 2 er 108	
15			De 2 andre på gruppen har ikke
16			vært involvert i arbeidet til elev 13.
17		Lærer: kan du diskutere med de andre?	
18			De sitter og synger og banker med
19			blyanten har ikke kommet i gang
20		Lærer: kan dere vise hvordan dere har	Elevene fremdeles i ufokus,
21		tenkt?	
22		Elev 12 sier: jeg setter en strek som en	viser det med å sette en strek
23		slange	diagonalt i flissystemet.
24			Elev 14 spør elev 12
25		Elev 14: jeg tenkte 12 x 4 det blir	
26		jo lik 48 og så blir det pluss 12	
27		så blir det 60 og så er det 12 x 14	eleven stopper opp og mister tråden
28		Lærer: kan dere diskutere hvordan	
29		dere skal ha finne ut hvor mange	
30		flis det er til sammen?	
31		Dere har en god start	
32		Elev 12: kanskje vi kan ta 14 14 14 14.	
33		Elev 14: eller 10 10 10 den gikk i 10	Peker på tegningen
34		Elev 13: kan vi ikke ta 10 x 10?	
35		Elev 12: litt klagende: nei	
36		Elev 13: så enkelt som det	
37		Elev 12: OK 10 x 10 da	
38		Elev 14: tegner på flisene jo da er	
39		det bare 2 igjen da er det enklere	
40		Elev 13: men du holder jo på å telle	
41		Elev 14: men vi må jo	
42		Elev 13: vi må finne en enklere	Eleven starter å nynne
43		måte å finne svaret på	
44		Elev 12: vi holder på å tenke	
45		Elev 14: her er det hundreogtretti	peker langs flisa arket
46		Elev 12: hvordan tenker du 130?	
47		hvorfor så 130	
48			Elev 14: viser på flisene og teller
49		Elev 13 bryter inn: men hør nå	
50		det er jo 12 oppover her og 14 her	peker på flisa arket
51		Elev 12: det blir jo hundreogførti se	Elev 12: teller selv, sier til elev 13:
52			en elev sitter og lager grimaser i
53			kameraet
54		Elev 12: peker: det er hundreogførti	

55		her og da må det være mer enn 140	
56		hvert fall	
57		Elev 13: nei	som på egen hånd har
58			kommet fram til hundreogåtte
59		Elev 13 ok jeg skal telle	Elev 13 starter å telle
60		Elev 14, hæ det var jo 140	teller en gang til:
61			Elev 13 fortsetter å telle
62			det er mye som foregår
63			en elev ligger med hodet på pulten
64		Elev 12: det er hundreogseksti	Eleven har sittet og jobbet en stund
65		Elev 14: det er vanskelig	
66		Elev 12: det kan ikke være	Elev 12 sitter og sier tall
67		hundreogåtte en gang.	
68			Elev 13 tenker og teller
69		Elev 12: det blir jo 10 x 10 og det	
70		blir jo 100 og så 2 x 4 det går ikke an	
71			Elev 12 og 13 arbeider med
72			hver sitt prosjekt,
73			Elev viser med kroppsspråk
74			at det er strevsomt, gjør andre ting.
75			Elev 13 tegner på arket
76			Elev 12 teller
77		Lærer: hvordan går det med dere?	
78		Elev 13: holder på å finne det ut	
79		120 her, peker på rutearket	
80		Lærer: jeg liker så godt at du	
81		tegner og viser hvordan du tenker	
82		Elev 13: 2044	
83		Elev 13: sier brått 168	stopper opp og tenker
2		Lærer: kan du si litt om	
85		hvordan du kom fram til det?	
86		Elev 13: jeg tok 24 24 24 24 ja du vet	
87		greia	peker på rutene
88		lærer hvorfor tenkte du på 24	
89		Elev 13: jeg bare sa at det var sånne	
90		greier at det var 2 og 2 og så	
91		sa jeg at det var 12 + 12 og 12 + 12	
92		og så ja peker bortover arket	

Episode 6

1	15.08	Lærer: Nå har du kommet fram til hvor	
2		Mange peppernøtter det er på brettet	
3		Forklar hvordan du har tenkt	
4	15.22	Elev 15: Først så fant jeg at det var 9	Peker på kakebrettet
5		peppernøtter bortover her og så	
6		fant jeg at det var 6 nedover her og da fant jeg	
7		ut at det blir 6 x 9 og det blir 54	
8	15.37	Lærer: og så har du gjort noe mer for å vise	Lærer peker på arket

9		hvordan du tenkte	
10	15.43	Elev 15: så har jeg vist noe her. Her har jeg seks	Peker på arket
11			Det det står flere sekstall
12		Lærer: Hvor mange seksere har du?	
13		Elev 15: 9	
14	15.53	Lærer: Hva gjorde du videre da?	
15		Elev 15: jeg plusser sammen 6 + 6 og det blir 12	
16		og det med den andre en som ikke blir 12	
17		da lar jeg den bare være her	Peker på arket
18		så tok jeg 12 + 12 er 24 og det gjorde jeg	
19		med de andre også	
20		og så tok jeg 24 + 24 , da fant jeg ut at det er 48	
21		for 2 + 2 er 4 og 4 + 4 er 8	
22		og så tok jeg og flyttet den sekseren helt ned	Peker på arket på den
23		så regner jeg sammen var 48 + 6 her og fant ut	Sekseren som fikk stå igjen
24		at det blir 54	
25	16.37	Lærer: det var en veldig fin måte å vise alt på	

Episode 7

01	5.23		2 elever sitter ved siden av hverandre og arbeider. Elev 18 og elev 13
02			Elev 18 teller alle peppernøttene
03			ved å bruke blyant og merke på
04			arbeidsarket
05			med tegning av peppernøtter. Elev
06			13 sitter rolig og kaster et blikk på
07			elev 18
08			
09	5.32	Elev 13: Jeg kan, jeg tar 5 x 10 + 4, det tenker jeg	
10	5.39	Elev 18: 55	
11		Elev 13: Nei, 54	De ser på hverandre ingen sier noe
12			Elev 18 starter å telle på nytt, elev
13	6.09		13 leter etter blyant
14	6.45	Elev 18: Ja, det var riktig med 54	
15		Elev 13: Da kan vi regne på en måte som dette.	Viser arket til medelev Medelev ser
16			ikke på arket
17		Elev 18: Ja, men vi vet svaret	
18		Elev 13: ja, men vi kan regne det ut sånn	Holder opp arket
19		som dette	
20	7.08		Elev 13 holder opp arket mot lærer
21			og søker kontakt med blikket

22	7.10	Lærer: Hva tenker dere?	Lærer kommer bort til de og bruker
23			elevens navn
24		Elev 13: Jeg tok 10 gange 5 og det er 50	
25		også skjønte jeg at 5 gange 9 er 45 også	
26		Legger jeg på en ny nier så blir det 54	
27	7.31	Lærer: Hvor fant du tieren? Du tok 10	
28		gange 5 først?	
29		Elev 13: da blir det femti	Elev 13 virker litt usikker
30		Lærer: HVor fant du tieren I fra da?	Elev 13 ler litt
31		Elev 13: Ingen anelse!	
32		Lærer: Du har jo tenkt veldig bra	Elev 18 har sittet og lyttet
33	8.01	Elev 18: det er jo 9 på her også tar man	
34		en, og da blir det 10	
		Lærer: Åja, 9 her også tar man en også	Gjentar det eleven sier
		Blir det 10, smart Så dere fant I 10 ere	Begge bekrefter dette
		Også la på etterpå	
		Elev 13: Ja	
		Lærer: HVordan kan man forklare dette?	
		Til Anton?	
35	8.18	Elev 13: Man vet jo hva 10 gange 5 er!	Smiler innforstått
36		Også har jeg gjort sånn at det blir pluss 4	
37		her	

Episode 8

01	0.14	Elev 11: Først så tok jeg 10+10+10+10+	Elev 7: Peker på arbeidet
02		10+10+10+10+10+10 og det ble 100	
03	0.20	Elev 11: 2-4-6-8-nei	Ler litt
04	0.23	Elev 11:10-20-30-40-50-60-70-80-90-100-	Elev 7: teller over og
05		101-110 mener jeg	hvisker
06		Elev 7: 140	
07		Elev 11: Det er 160	
08	0.51	Elev 11: Også la jeg bare på 2 4ere	
09		Og det blir 108	
10		Elev 7: hvisker: 168	
11		Elev 11: 168	
12	2.11	Elev 7: jeg tok 12 gangen og da fikk jeg	Viser på papiret at han har
13		hundreogsekstiåtte	Tegnet inn hver kolonne
14			Med 12
15			Elev 11 er veldig opptatt av
16			å få med på kamera og
17			forklare og vise hva som er
18			gjort med konkreter
19			Kamera blir flyttet slik at
20			det filmer konkretene
21	2.05	Lærer: Forklar hvordan du har tenkt	

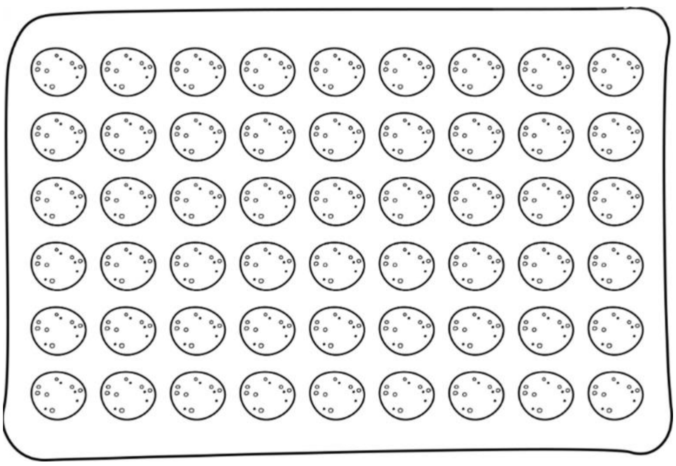
22		Elev 11: 10-20-30-40-50-60-70-80-90-100	Peker på 10 er staver
23		-110-120-130-140-150-160-170-180	Teller de 2 øverste igjen
24			Elev 7 peker og viser at
25			De er telt før
26		Elev 11: 160 mener jeg. Også la jeg på	
27		2 firere og det var 168	

8.2 OPPGAVENE MED KONTEKST OG ILLUSTRASJONER

Bakerlærlingen Anton får mange nye arbeidsoppgaver på jobben sin. To av oppgavene handler om at han må telle hvor mange det er av bakevarene og finne rett pris. Oppdraget deres er å forklare Anton hvordan han raskt og riktig kan gjøre dette.

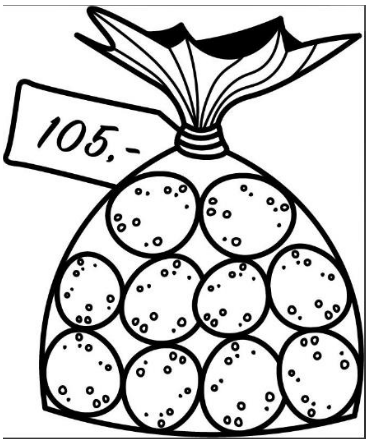
Oppgave 1 Antall peppernøtter

Anton har et helt brett med peppernøtter. Han står og teller en og en peppernøtt. Han trenger hjelp til å telle hvor mange peppernøtter det er til sammen på brettet. Forklar Anton hvordan han kan gjøre dette.



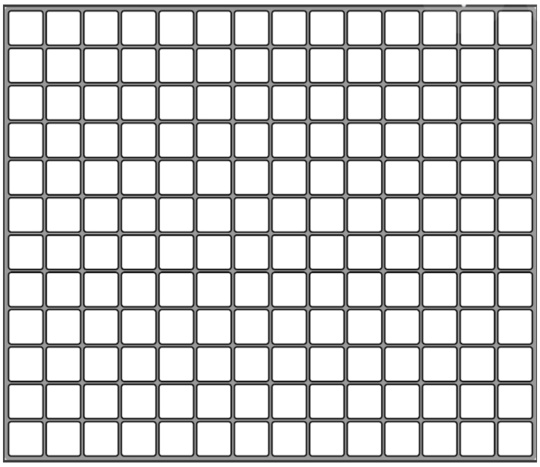
Oppgave 2

Anton pakker peppernøttene i 24 poser med 10 peppernøtter i hver. Prisen på hver pose er 105 kr. Hvor mye tjener han hvis han selger alle peppernøttene? Hvor mange peppernøtter hadde han til sammen?



Oppgave 3

I bakeriet er det en vegg med flis. Bakeren ønsker å legge samme type flis på en annen vegg. Det skal være like mange flis som på denne veggen. Anton får i oppgave å finne ut hvor mange flis det trengs til den nye veggen. Forklar Anton hvordan han skal få til dette.



8.3 Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Muligheter i multiplikasjon»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever på 4.trinn løser oppgaver med multiplikasjon. Prosjektet skal ikke si noe om ferdighetsnivået hos de enkelte elev. Studiets formål er å beskrive hvordan elevene løser oppgavene. Dette prosjektet er en del av undertegnedes masteroppgave ved OsloMet innen matematikkdidaktikk.

Gjennom å observere elever som arbeider med multiplikasjonsoppgaver vil jeg se hvilke strategier som benyttes og hvilket tenkesett som kommer til uttrykk. For å få sikre kvaliteten på undersøkelsen, blir det tatt opp lyd og bilde.

Konkret vil elevene oppholde seg i et klasserom på skolen sammen med andre elever fra 4.trinn i 2-4 økter på ca 60 minutter hver. Der vil de samarbeide om å løse oppgaver. Det vil være meg som leder undervisningen. En annen lærer fra skolen vil være til stede. Jeg har som intensjon at elevene kan lære noe og utvikle seg ved å delta i prosjektet.

Denne forespørselen går til alle elever på 4A ved [redacted]skole. Valg av tidspunkt vil skje i nært samarbeid med lærerne på trinnet.

Det er min veileder professor Georg Hitching ved OsloMet, som er ansvarlig for prosjektet.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er bare jeg og min veileder som vil ha tilgang til data som blir samlet inn.

Deltakere rett til innsyn, retting, sletting, begrensning og dataportabilitet (kopi). De har også klagerett til Datatilsynet.

Prosjektet skal etter planen avsluttes innen 30.12.2022. Ved prosjektslutt vil alle data bli slettet.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, en deltaker kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger om deltakere vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deltakere som ønsker å trekke seg. De elevene som ikke ønsker å delta vil få et annet tilbud.

Hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger?

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Prosjektet skal etter planen avsluttes når oppgaven blir godkjent, november 2022. Da vil alt materiale bli slettet.

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke, i henhold til formålene beskrevet i dette skrivet.

Hvis du har spørsmål til studien ta kontakt.

Med vennlig hilsen
Gunhild Bredesen
E-post: gunhild.bredesen@levanger.kommune.no
Tlf: 99575708

Kontaktinfo til min veileder ved OsloMet:

George Hitching

E-post: gehahi@oslomet.no

Tlf: 67237434

Kontaktinformasjon til personvernombud Levanger kommune:

personvernombud@levanger.kommune.no

Samtykkeerklæring

Jeg har lest og forstått informasjonen over og gir mitt samtykke til at mitt barn ___________________ kan delta i undersøkelsen: «Muligheter i multiplikasjon» og at resultatet blir benyttet i Gunhild Bredesen sin masteroppgave.

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles fram til prosjektet er avsluttet.

Sted og dato: _______________________________________

Underskrift foresatte: ____