MASTEROPPGAVE

M1GLU

Mai 2023

Muligheter til å utvikle algebraisk tenkning i fire lærebøker for førsteklasse

Opportunities to develop algebraic thinking in four first grade textbooks

Akademisk masteroppgave

30 stp. oppgave

Kamilla Skjeggestad og Stine Larsen

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Sammendrag

I dette prosjektet har vi sett på hvilke muligheter for å utvikle algebraisk tenkning som finnes i fire lærebøker for førsteklasse. Vi har gjort en komparativ lærebokanalyse og har tatt for oss fire læreverk fra de største forlagene i Norge.

Forskning har vist at Blanton, Stephens, et al. (2015) «Big Ideas» er viktige for å utvikle elevenes algebraiske tenkning tidlig i skoleløpet. Med utgangspunkt i disse store ideene, har vi utviklet et analyseverktøy for å finne ut hva som kjennetegner algebraisk tenkning i elevbøker for førsteklasse, og hvor stor andel av oppgavene i elevbøkene som gir mulighet for algebraisk tenkning.

Resultatene våre viser at det er forskjeller mellom læreverkene i hvor mye algebraisk innhold de har. Lærebøkene illustrerer ulikheter i både type og omfang av det algebraiske innholdet. Dette kan tilsi at valg av lærebøker kan påvirke elevenes muligheter til å utvikle algebraisk tenkning. Vi fant også likheter og forskjeller i hvordan lærerveiledningene gir støtte til læreren i arbeidet med å differensiere og legge til rette for elevenes utvikling av algebraisk tenkning. Mange av mulighetene til å utvikle algebraisk tenkning kan stå i fare for å bli oversett, og det vil i større grad være opp til læreren å identifisere og benytte disse mulighetene.

Abstract

In this project, we investigate opportunities to develop algebraic thinking in four first grade textbooks. We have carried out a comparative textbook analysis where we have considered textbooks from the four largest publishers in Norway.

Research has shown that Blanton et al. (2015) “Big Ideas” are important for developing students algebraic thinking in the early grades. Based on these ideas, we have developed an analyzing tool to find what characterizes algebraic thinking in first grade textbooks, and to what extent the textbooks provide opportunities for algebraic thinking.

Our results show that there are differences in how much algebraic content the textbooks include. The textbooks illustrate differences in both type and quantity of algebraic content. This indicates that the choice of textbooks can affect students' opportunities to develop algebraic thinking. We also found similarities and differences in how the teacher's guides support the teacher in differentiating and facilitating the students' development of algebraic thinking. Many of the opportunities to develop algebraic thinking may be at risk of being overlooked, and therefore it becomes the teacher's responsibility to both identify and use these opportunities.

Forord

Med en ekstra interesse for matematikkfaget, og med hjerte for de yngste barna i skolen, var valget om å skrive en masteroppgave om matematikk i begynneropplæringen enkelt.

Vi har begge erfart en matematikkundervisning i grunnskolen som var preget av huskeregler og formler, som ga oss stor mestringsfølelse, men som var utilgjengelig for de som ikke fant mening i standardalgoritmene. Lærerutdanningen, og en fordypning i matematikkfaget har gjort at vi drømmer om en matematikkundervisning som er tilgjengelig for alle, uansett forutsetninger. Hvor alle elevene kan få oppleve mestring i matematikken, slik vi gjorde.

Vi vil rette en takk til vår veileder Eyvind Martol Briseid, og vår biveileder Jarmila Bubikova-Moan, som har gitt oss gode råd og tilbakemeldinger underveis i prosjektet. Vi vil også takke vår gode venn, og reddende engel, Torstein for gode tips og råd på tampen av skriveprosessen.

Vi vil også takke gode studievenner, spesielt Emma, som tross eget masterstress har kommet med oppløftene ord, og motiverende smil.

Og til sist vil vi takke hverandre for det gode samarbeidet. Dette prosjektet hadde ikke blitt ferdigstilt uten godt samarbeid og nært vennskap. Å være to om denne oppgaven har gitt oss gode diskusjoner og refleksjoner, flere perspektiver, og uvurderlig hjelp i krevende stunder.

Dette prosjektet har vært krevende, men vi har lært mye om både tidlig algebra, lærebøker i matematikk, differensiering, lærerrollen, oppgaveskriving og vennskap. Vi tar med oss alle erfaringene og all kunnskapen disse fem årene har gitt oss, inn i hver vår kontaktlærerjobb til høsten. Vi ser frem til å være lærere og å hjelpe elevene med å utvikle sin algebraiske tenkning.

Oslo, mai 2023

Stine Larsen og Kamilla Skjeggestad

Innholdsfortegnelse

Innledning

I dette prosjektet skal vi se nærmere på hvilke muligheter for å utvikle algebraisk tenkning som finnes i noen utvalgte matematikkbøker for første trinn.

Forskning viser at mange elever sliter med overgangen fra aritmetikk til algebra, og foreslår å starte med algebra tidligere (Kaput, 2008). Men tidlig algebra er ikke det samme som algebra tidlig (Carraher & Schliemann, 2008). Vi kan altså ikke bare flytte algebrainnholdet fra ungdomsskolen og ned til grunnskolen (Knuth et al., 2016). Dette gjorde at vi ønsket å finne ut hvordan den algebraiske tenkningen kan se ut for de yngste elevene i skolen.

Disse perspektivene har gjort oss nysgjerrige på hvordan de norske lærebøkene gir rom for algebraisk tenkning i begynneropplæringen, og i forlengelse av dette er problemstillingen for prosjektet:

«På hvilke måter tilrettelegger utvalgte lærebøker for førsteklasse for at elevene skal utvikle algebraisk tenkning?»

For å hjelpe oss å finne svar på problemstillingene har vi formulert forskningsspørsmålene:

1. *Hva kjennetegner algebraisk tenkning i elevbøker for førsteklasse?*
2. *Hvor stor andel av oppgavene i elevbøkene gir mulighet for algebraisk tenkning?*
3. *Hvilke muligheter gir lærerveiledningene for å differensiere, i utviklingen av algebraisk tenkning?*

Ved å inkludere disse spørsmålene kan vi finne svar på ulike perspektiver ved problemstillingen. Vi kan både si noe om omfanget av mulighetene for algebraisk tenkning i lærebøkene, og i tillegg se på mer konkrete eksempler på hvordan det kan se ut i førsteklasse. For å finne ut hvordan lærebøkene tilrettelegger, ville vi også se på hvordan læreren kan differensiere i arbeidet med den algebraiske tenkningen og derfor inkludere det som står i lærerveiledningene. Innsikten i hvordan lærerveiledningene fremhever det algebraiske innholdet og støtter læreren, vil også kunne bidra til å utdype vår forståelse av hvordan oppgavene kan bidra til utviklingen av den algebraiske tenkningen. Sammenlagt vil dette gi oss svar på problemstillingen fra ulike perspektiver.

Lærebøkene som blir brukt i klasserommet er en svært sentral ressurs for både lærere og elever, og viktigheten av lærebøkene er vidt anerkjent blant forskere (Fan et al., 2013). Det blir også argumentert for at avhengigheten av lærebøkene kan være mer karakteristisk for matematikkfaget enn noe annet fag (Robitaille & Travers, 1992, s. 706) Dette gjør lærebokforskning i matematikkfaget svært relevant.

Utvalget vi tar for oss i denne analysen er lærebøker i matematikkfaget beregnet for førsteklasse. Vi tar for oss fire ulike læreverk med tilhørende lærerveiledning fra de fire største forlagene i Norge: Matematikk 1 (Cappelen Damm), Matemagisk 1 (Aschehoug), Multi 1 (Gyldendal) og Volum 1 (Fagbokforlaget). De er alle utgitt etter LK20, og representerer på mange måter elevenes aller første møte med matteboka i skolen.

Etter fagfornyelsen har abstraksjon og generalisering også blitt løftet frem som et av kjerneelementene i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2020), som innebærer at vi kan anta at den algebraiske tenkningen har fått en sentral plassering også i lærebøkene. Vi har derfor jobbet ut fra en hypotese om at de ulike bøkene gir elevene ulike muligheter for å utvikle algebraisk tenkning.

Noe av bakgrunnen til hvorfor vi har valgt å undersøke akkurat algebraisk tenkning er at vi vet at algebra er noe mange elever strever med på skolen (Levin & Walkoe, 2022). I tillegg har algebra blitt karakterisert som den viktigste «inngangsporten» til matematikken (Cai et al., 2005, s. 5), noe som understreker viktigheten av at god forståelse av algebra kan bidra til forståelse i matematikk på generelt plan.

I tillegg til å se på mulighetene for å utvikle algebraisk tenkning i elevbøkene, vil vi også ta for oss de tilhørende lærerveiledningene. Algebraisk tenkning utvikles ikke på egen hånd, og læreren har en helt avgjørende rolle i denne utviklingen (Kieran, 2011, s. 592). Et perspektiv på sammenhengen mellom mulighetene som finnes i elevbøkene, og lærerens rolle er noe vi etterlyste i andre studier, og vi anser det derfor som hensiktsmessig å inkludere et perspektiv på lærerrollen, og på lærerveiledningene som hører til lærebøkene for førsteklasse. Fordi er stor variasjon i hvor selvstendige elevene er når de begynner i første klasse (Berggren & Jom,

2021) innebærer det at lærere må differensiere og gjøre justeringer fortløpende knyttet til oppgavene. Vi ønsker derfor også å se på hvordan lærerveiledningene støtter læreren i å gjøre differensieringer når det kommer til utviklingen av elevenes algebraiske tenkning.

Analysen vår vil ta for seg muligheter som finnes i lærebøkene. Det innebærer at vi ikke kan si noe om hva som foregår i klasserommet når lærebøkene tas i bruk, hvordan de blir brukt, situasjoner som oppstår rundt oppgavene i bøkene, eller samhandling mellom elevene når de arbeider med oppgavene i bøkene. Disse situasjonene vil også kunne skape muligheter for å utvikle algebraisk tenkning, men de kan vi altså ikke si noe om i dette prosjektet.

Blanton, Stephens, et al. (2015) har identifisert fem store ideer som gir betydelige muligheter for elevene å engasjere seg i kjernekomponentene i den algebraiske tenkningen. Vi har i likhet med andre, tatt utgangspunkt i disse store ideene, og vårt prosjekt kan ses i sammenheng med disse, for å si noe om hvordan vårt prosjekt plasserer seg i forhold til de liknende studiene. For eksempel har Bråting et al. (2019) tatt for seg muligheter for å utvikle algebraisk tenkning i både læreplan og lærebøker i Sverige, fra første til sjette klasse. Lee og Park (2022) har også sett på muligheter for å utvikle algebraisk tenkning som er presentert i lærebøker i Korea og USA, også over seks klassetrinn. Hemmi et al. (2019) har sett på introduksjon til tidlig algebra i lærebøker for første til tredje trinn, i Estland, Finland og Sverige, hvor de konsentrerer seg mest om likhetstegnet.

Vi finner ikke tilsvarende studier gjort i Norge, men det kan tenkes at funnene Bråting et al. (2019) gjorde i Sverige også vil speile tendenser i Norge. Kongelf (2015) har sett på hvordan algebra introduseres i lærebøker på ungdomstrinnet i Norge, og peker på svake norske algebraresultater på nasjonale og internasjonale tester. Ifølge Grønmo (2014) prioriterer ikke norsk skole å gi elevene de kunnskapene i algebra vi vet mange vil trenge. Dette kan understreke at det trengs kunnskap om algebra i skolen generelt, men også i begynneropplæringen.

Begynneropplæring er et uklart begrep, som ikke er definert i verken i faglitteratur eller styringsdokumenter (Hoff-Jensen et al., 2020). Vi kan likevel finne noen definisjoner å ta utgangspunkt i. Palm et al. (2018) definerer det som alt fra læringsmiljø, aktiviteter og undervisning, i alle skolens fag spesielt på første og andre trinn. Dette ligner definisjonen fra Skorpen (2009), som inkluderer all undervisning på småskoletrinnet i sin definisjon av begynneropplæringen. Med utgangspunkt i dette kan vi plassere vårt prosjekt innenfor begynneropplæringen i matematikkfaget.

Vi vil starte med å presentere det teoretiske grunnlaget vi vil legge til grunn for analysen vår. Her vil vi også tydeliggjøre ulike begreper knyttet til fagområdet, og presentere Blanton, Stephens, et al. (2015) «store ideer» som er analyseverktøyet vi har benyttet oss av i denne masteroppgaven. Deretter vil vi redegjøre for metodene vi har brukt i vår analyse. Denne delen er todelt, da vi har utført en kvantitativ analyse av innhold i elevbøker, og en kvalitativ, tematisk analyse av de tilhørende lærerveiledningene. Dette følger av resultatene fra analysene vi gjorde, som vi for ryddighetsskyld vil presentere todelt. Til slutt vil vi diskutere noen sentrale funn og forskjeller, og trekke sammen de to analysene for å se resultatene i et nytt og mer nyansert lys.

Teoretisk grunnlag

Vi vil i dette kapittelet redegjøre for vår forståelse av algebra og algebraisk tenkning. Vi vil peke på noen sentrale trekk ved algebraisk tenkning som fremheves av flere forskere, og legge vårt fokus på tidlig algebra, som er spesielt relevant i denne konteksten av dette prosjektet. Til slutt vil vi presentere rammeverket utviklet av Blanton, Stephens, et al. (2015), som ligger til grunn for vår analyse.

1 Hva er algebra?

Algebra er et vidt begrep som vanskelig lar seg definere. Noe som kompliserer beskrivelsen av algebra, er at det ikke er en statisk kunnskapsmengde (Kaput, 2008, s. 9), og en definisjon kan risikere å ikke inkludere algebraens allsidighet. At det er dynamisk og stadig i endring, er også en av grunenne til at det er viktig å fortsette å undersøke det. Vår forståelse av algebra stammer fra James Kaput (2008) sine to kjerneaspekter («core aspects») ved algebra, og tilhørende avgreininger («strands»). Det første aspektet, «Kjerneaspekt A», dreier seg om algebra som «generalisering og uttrykk for generaliseringer i mer og mer systematiske, konvensjonelle symbolsystemer» og «Kjerneaspekt B», definerer algebra som «syntaktisk styrt handling på symboler innenfor organiserte symbolsystemer» (Kaput, 2008, s. 10-12, vår oversettelse). Et av argumentene for å ha dette som utgangspunkt, er at kjerneaspektene og de tre avgreiningene fremhever algebraens nett av forbindelser til all matematikk, og at det innebærer at algebraen bør spille en sentral rolle gjennom hele skoleløpet (Kaput, 2008). Dette synet støttes også av Boester og Lehrer (2008, s. 211), som beskriver algebra og algebraisk tenkning som et gjennomgående kjerneelement ved matematikkfaget i skolen i USA.

Kieran (2011) og andre bidragsytere på feltet støtter et perspektiv om at algebra i grunnskolen ikke handler om de bokstavsymbolene, men heller om måter å tenke på. Dette kan for eksempel innebære å tenke generelt i det spesielle (Mason, 1996), å tenke relasjonelt om mengde, å se etter regelmessighet i mønstre, eller å tenke konseptuelt om prosedyrer. Disse måtene å tenke på inkluderer blant annet generalisering, rettferdiggjøring, visualisering og språkbruk (Kieran, 2011, s. 591). Alle disse måtene å tenke på er komponenter i algebraisk tenkning.

2 Algebraisk tenkning

Begrepene «algebraisk tenkning» (algebraic thinking) og «algebraisk resonnering» (algebraic reasoning) kan være utfordrende å skille fra hverandre. Vi vil her forsøke å gi et rikere bilde av hva algebraisk tenkning er og kan være. Det er ikke enighet blant bidragsyterne på algebradidaktikkens felt om hva som skiller de to begrepene, og ettersom «algebraisk resonnering» kan risikere å forstås for smalt til å inkludere alle tilnærmingene til tidlig algebra (Kieran, 2011, s. 581), anser vi det som hensiktsmessig å benytte det bredere begrepet «algebraisk tenkning» for å inkludere mest mulig i denne konteksten.

Selv om forskere på feltet opererer med litt ulike inndelinger av algebrabegrepet og hva som utgjør algebraisk tenkning, er det allikevel stor enighet om at generalisering er et av de viktigste aspektene ved algebra og algebraisk tenkning (Carpenter et al., 2003; Kaput, 2008; Mason, 2018). Det vil derfor være noe som står sentralt i forståelsen av algebra og utvikling av algebraisk tenkning. Kjernen i denne tenkningen er ifølge Kaput (2008) å danne, uttrykke og rettferdiggjøre matematiske forhold eller generaliseringer. Dette finner vi også støtte i hos Freudenthal (1977) som mente at evnen til å beskrive relasjoner og generaliserte operasjoner er et viktig trekk ved algebraisk tenkning (s. 193-194). Dette tar oss tilbake til kjerneaspektene i algebra som vi nevnte over, og illustrerer hvor tett begrepene algebra og algebraisk tenkning er knyttet til hverandre.

Kaput (2000a) beskriver algebraisk tenkning og bruken av algebraiske representasjoner som noen av de mest betydningsfulle verktøyene vi har. Vi må derfor finne måter å tilgjengeliggjøre mulighetene som ligger i algebra for alle elever gjennom en undervisningspraksis som legger til rette for å forbedre elevenes forståelse av algebra (s. 3-4). Kaput peker her på noen av styrkene ved den algebraiske og fremhever, den sentrale rollen algebraisk tenkning bør ha i skolematematikken. Vi kan også se at dette blir løftet frem i kjerneelementene i matematikkfaget i grunnskolen, som vektlegger at elevene skal «utforske og lete etter mønstre og sammenhenger, resonnere og argumentere, samt abstrahere og generalisere» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Noe som kan peke på at oppmerksomheten i større grad blir rettet mot dette, også i læreplanen.

Oppfatningen av og definisjonen på hva algebra er vil spille inn på tilnærmingen man har til feltet, både for lærere, forskere, lærebokforfattere og andre (Kaput, 2008, s. 8). Det er derfor ikke overraskende at også elever påvirkes av måten algebra blir presentert for dem. Algebra har i flere århundrer blitt presentert som manipulasjon av bokstaver som om de var tall, med et fokus på håndtereringen av algebraiske uttrykk. Mange har derfor et syn på algebra som aritmetikk med bokstaver (Mason, 2011), som symbolmanipulasjon eller en prosedyremessig løsning av likninger (Kaput, 2008), eller at det har noe å gjøre med bokstaven *x* (Mason, 2008, s. 77). Vårt ståsted er, som Kaput (2008) argumenterer for, at dette svnevre synet på hva algebra er, må utvides og utvikles for å unngå å undervurdere algebraens mange sider. Dette må til for å kunne integrere algebra på alle trinn, i hele matematikkfaget, og i de andre fagene på skolen.

3 Tidlig algebra

Kaput (2008, s. 5) beskriver «The Algebra Problem» som baserer seg på den tradisjonelle strukturen; «Arithmetic-then-algebra curriculum structure», altså at elevene lærer aritmetikk først og deretter algebra. Dette har ledet til dårlige resultater og dysfunksjonell forståelse av den utregningsfokuserte skolearitmetikken, og videre har den isolerte og overfladiske tilnærmingen til algebra ført til fremmedgjøring av lærere og stort frafall blant elever på skolen (Kaput, 2008, s. 5-6). Å løse dette algebraproblemet er komplekst, men Kaput (2008) mener det innebærer å introdusere algebra og algebraisk tenkning tidligere på barneskolen og som en reaksjon på algebraproblemet, har ideen om tidlig algebra oppstått.

Overgangen fra aritmetikk og over i algebra har vist seg å være vanskelig for elevene (Levin & Walkoe, 2022), og hvis algebraisk tenkning er en forutsetning for å lære aritmetikk som Mason (2008, 2018) argumenterer for, vil det være hensiktsmessig å jobbe med dette samtidig når de er så tett knyttet sammen. Dette støttes også av Cai et al. (2005), som trekker frem at det må legges til rette for elevenes utvikling av algebraisk tenkning på lavere klassetrinn, som en måte å hjelpe dem i å lykkes i overgangen mellom aritmetikk og algebra. Flere argumenterer for at tidlig algebra ikke er det samme som algebra tidlig. Det vil si at vi ikke bare kan flytte innholdet i algebraundervisningen til tidligere skoletrinn (Carraher et al., 2008), det betyr heller at for å bygge det nødvendige grunnlaget for å lykkes i algebra senere, må elevene få muligheter til å utvikle den algebraiske tenkningen allerede fra tidlig på barneskolen (Knuth et al., 2016, s. 67). Målet med tidlig algebra er å fremme en tenkemåte, ved å venne seg til å se etter regelmessighet, og å artikulere, teste og bevise lover eller hypoteser (Kieran, 2011; Kieran et al., 2016), slik at det blir viktig å ha et langsiktig perspektiv i bakhodet når en begynner arbeidet med algebraisk tenkning tidlig på barneskolen.

Algebra blir også sett på som en inngangsport til den videre skolematematikken (Cai et al., 2005; Kaput, 2000a, 2000b) og den kan være avgjørende for videre utdannings- eller jobbmuligheter senere i livet (Knuth et al., 2006, s. 297). Flere studier fremhever utfordringene og de kognitive hindrene elevene møter når de skal lære algebra. Nyere forskning har lagt fokuset på at algebra får mer oppmerksomhet i undervisningen og læreplanen som en respons på økt bekymring om elevenes skjøre forståelse av og forberedelse på algebra (Nataraj & Thomas, 2016, s. 131). Dersom undervisningspraksisen ikke endres, og skillet mellom aritmetikk og algebra ikke oppheves, kan det frarøve elever viktige matematiske tenkemåter tidlig i skoleløpet og gjøre det vanskeligere for dem å lære algebra på høyere skoletrinn. Den tenkemåten som kreves for å legge grunnlag for innlæring av algebra må utvikles over tid, og må derfor starte tidlig (Carpenter et al., 2003, s. 1). Blanton, Brizuela, et al. (2015) argumenterer for at barn helt ned til første klasse mulighet til å håndtere og forstå generaliseringer, og at tidlig algebra helt fra start har blitt presentert som en tenkemåte som burde introduseres i barnehagen, men at vi ikke har omfavnet denne typen algebraiske ideer på grunn av en antagelse om at barn ikke er klare (s. 546-547). Slike antagelser blir ofte til forventninger (Mason, 2018, s. 346) og på den måten kan elevene bli frarøvet viktige muligheter for å utvikle algebraisk tenkning på bakgrunn av en oppfatning om at de ikke er klare.

I norsk kontekst har Kongelf (2015) sett på introduksjon av algebra i matmatikkbøker på ungdomsskolen. Han peker på at studien kan brukes som delforklaring på svake norske algebraresultater på nasjonale og internasjonale tester. Dette kan tyde på at algebra er vanskelig for norske elever, og understreke at det er behov for et fokus på tidlig algebra også i den norske grunnskolen.

4 Big ideas – store ideer (av Blanton, Stephens, et al., 2015)

Basert på Kaput (2008) to kjerneaspekter i algebraisk tenkning har Blanton, Stephens, et al. (2015) identifisert fem «store ideer»; equivalence, expressions, equations and inequalities (EEEI), generalized arithmetic (GA), functional thinking (FT), variable (VAR) og proportional reasoning (PR) (illustert i Figur 1). Disse «store ideene», eller kategoriene som vi også vil kalle dem her, gir gode muligheter for å generalisere, representere, argumentere og resonnere omkring matematiske forhold, som er kjernen i den algebraiske tenkningen (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008). Det er viktig at elevene møter en helhetlig tilnærming til algebra hvor de får tilgang til alle områdene der algebraisk tenkning foregå (Blanton, Stephens, et al., 2015). Også Kaput (2000a) fremhever viktigheten av å inkludere flere ulike former for algebraisk tenkning. Dette betyr at elevene må eksponeres for alle de store ideene for å få en helhetlig forståelse av algebra.

Bråting et al. (2019) og Lee og Park (2022) har brukt de fem «store ideene» til Blanton, Stephens, et al. (2015) for å se på hvilke muligheter som blir gitt til å utvikle algebraisk tenkning. Bråting et al. (2019) undersøkte både den svenske læreplanen, og i to ulike læreverk for 1.-6.klasse i matematikkfaget i Sverige. Lee og Park (2022) undersøkte lærebøker for 1.-6. klasse i Korea og USA. I vårt prosjekt vil disse «store ideene» fungere som kategorier i analysearbeidet.

4.1.1 Likhet, ulikhet, likninger og uttrykk (EEEI)

Den første kategorien i dette rammeverket, EEEI (equivalence, expressions, equations and inequalities), inneholder de oppgavene som handler om likhet, ulikhet, likninger og uttrykk (Blanton, Stephens, et al., 2015, s. 43). Disse oppgavene innebærer blant annet at elevene må kunne håndtere uttrykk med tanke på regnerekkefølge og verdien av uttrykket (Lee & Park, 2022). De må også tolke likninger skrevet på ulikt format med tanke på for eksempel plassering av likhetstegnet, kunne finne verdien av en variabel i et uttrykk, og å løse «åpne tallsetninger» (Blanton, Stephens, et al., 2015). Et viktig aspekt ved denne kategorien er behandlingen av likhetstegnet. Når det gjelder «åpne tallsetninger» vil de uttrykkene som har tomme plasser inne i uttrykket, som for eksempel 2 + 2 = _ + 1 tilhøre denne kategorien, fordi det krever resonnering basert på det strukturelle forholdet i likningen (Bråting et al., 2019). I disse oppgavene må elevene ha en relasjonell forståelse av likhetstegnet, som innebærer å forstå at tegnet representerer en relasjon mellom to like deler (Carpenter et al., 2003; Kieran, 1981; Lee & Park, 2022). Ifølge Knuth et al. (2016) er et av de viktigste punktene for å legge en stødig grunnmur å bygge algebraforståelsen på, nettopp å ha en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Oppgaver som 3 + _ = 4 er regnet med i kategorien, som en «åpen tallsetning», fordi dette også er oppgaver som kan bidra til utvikling av denne forståelsen av likhetstegnet (Blanton, Stephens, et al., 2015; Bråting et al., 2019; Lee & Park, 2022), og fordi disse forholder seg ulikt til likhetstegnet enn det rene utregningsoppgaver gjør.

Både Bråting et al. (2019) og Lee og Park (2022) valgte å ekskludere utregningsoppgaver som for eksempel 3 + 1 = _, i sin analyse, da disse bygger opp under en operasjonell forståelse av likhetstegnet (Lee & Park, 2022) og måler heller elevenes evne til å regne ut et svar (Bråting et al., 2019). Spesielt i begynneropplæringen kan elever se på likhetstegnet som et skille mellom et problem og en løsning (Kieran, 1981). Dette kan hindre dem i å forstå og bruke ideene bak grunnleggende aritmetikk og lage mer alvorlige problemer i overgangen til algebra. Flere mener også at elevene kan stå i fare for å utvikle misoppfatninger om de bare får erfaringer hvor de har en operasjonell forståelse av likhetstegnet (Carpenter et al., 2003; Knuth et al., 2016; Knuth et al., 2006). Derfor er det viktig at elevene får mange og ulike erfaringer med likhetstegnet (Carpenter et al., 2003), og flere forskere foreslår at konseptet om likhet bør få mer oppmerksomhet i utviklingen av elevenes algebraiske tenkning (Knuth et al., 2011).

4.1.2 Generalisert aritmetikk (GA)

Et av kjerneelementene i tidlig algebra er generalisert aritmetikk (GA), som har sitt utspring i den delen av algebraisk tenkning som fokuserer på struktur og forhold innen aritmetikken (Kaput, 2008). Denne kategorien dreier seg om å tenke, argumentere og resonnere rundt selve strukturene i de aritmetiske uttrykkene, som en motsetning til kun å se på verdien av uttrykket. Det inkluderer generaliseringer av aritmetiske forhold, for eksempel egenskaper ved tall og operasjoner, som den kommutative lov (Blanton, Stephens, et al., 2015, s. 61) eller sammenhengen mellom regneartene (Hemmi et al., 2020b). Dette inkluderer også egenskaper med tallet null, hvor elevene for eksempel kan oppdage at uansett hvilket tall du adderer med 0, blir svaret det opprinnelige tallet ($a + 0 = a$), eller at å trekke et tall fra seg selv alltid blir null ($a – a = 0$) (Blanton et al., 2011, s. 16).

Disse eksemplene reflekteres også i de to underkategoriene til GA av Hemmi et al. (2020b); relasjoner mellom aritmetiske operasjoner, og aritmetiske lover. «Aritmetiske lover», eller matematiske lover, inkluderer både kommutativ og assosiativ lov i addisjon og multiplikasjon, sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon, divisjon og multiplikasjon, og gjentatt addisjon og multiplikasjon (Hemmi et al., 2020b; Lee & Park, 2022). Når elevene resonnerer rundt regneoperasjoner på denne måten kan de lære de generelle egenskapene som forklarer hvordan operasjonene fungerer. Videre kan dette brukes i læring om både aritmetikk og algebra (Blanton et al., 2011, s. 15). Å studere disse strukturene er sentralt for å kunne tenke algebraisk (Blanton et al., 2011; Blanton, Stephens, et al., 2015; Kieran et al., 2016), men denne typen tenkning er ofte noe elevene strever med fra mellomtrinnet og oppover, og den tradisjonelle undervisningen av aritmetikk gjør lite for å forberede elevene på overgangen til algebra (Blanton, Stephens, et al., 2015, s. 71-72). Dersom disse lovene diskuteres mer eksplisitt kan de ifølge Warren (2003) være til stor hjelp for elevene i overgangen fra aritmetikk til algebra.

4.1.3 Funksjonstenkning (FT)

«Functional thinking» (FT), eller funksjonstenkning, handler om generalisering rundt forhold mellom størrelser og å representere og resonnere rundt disse forholdene, både gjennom språk, algebraisk notasjon, tabeller og grafer (Blanton, Stephens, et al., 2015, s. 43). For å utvikle funksjonstenkning må elevene ha oppmerksomheten rettet mot endring og vekst, og se etter mønstre i hvordan størrelser varierer i forhold til hverandre, og en funksjon er en måte dette kan uttrykkes på (Blanton, 2008, s. 5). Eksempler på dette kan være å organisere data i en tabell, gjenkjenne rekursive mønstre og funksjoner, samt beskrive dem både med ord og ved hjelp av variabler. Hemmi et al. (2020b) og Lee og Park (2022) beskriver FT ved hjelp av tre underkategorier; mønster, funksjoner, og tabeller og grafer. I kategorien mønster finner vi for eksempel oppgaver hvor elevene skal finne regelmessigheter og beskrive mønstre i tallfølger eller geometriske former (Lee & Park, 2022, s. 403).

Blanton og Kaput (2004; 2011) frarådet å begrense seg til rekursive mønstre, og mente matematikken på barneskolen i større grad burde strekkes utover dette for å styrke funksjonstenkningen. Å tenke rekursivt vil si at en fokuserer på hvordan den ene variabelen endrer seg i stedet for å se på sammenheng mellom de to variablene (Moss & McNab, 2011). Dette støttes av at små barn har vist seg å være kapable til å tenke og resonnere om funksjoner når de får muligheten til det (Blanton, Brizuela, et al., 2015; Blanton & Kaput, 2004; Moss & McNab, 2011) og at de med rett undervisning kan gå over til å uttrykke samvariasjon og korrespondanse, både gjennom hverdagsspråket, men også etter hvert symbolsk (Blanton & Kaput, 2004; Blanton et al., 2011). Denne prosessen skjer ikke nødvendigvis kronologisk.

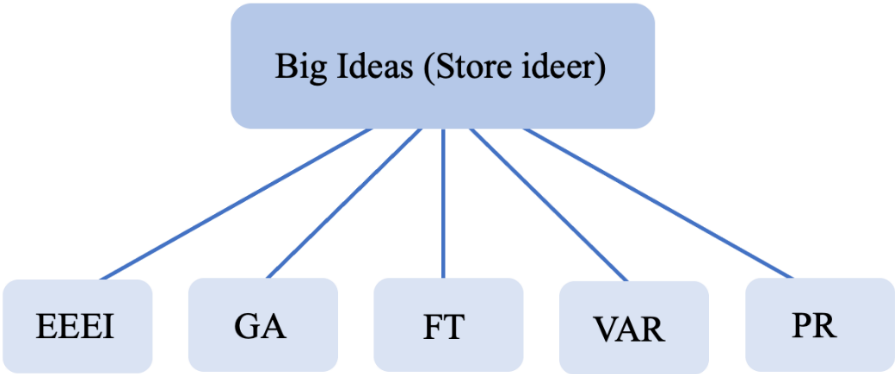
4.1.4 Variabel (VAR)

Algebra er sterkt knyttet til det matematiske språket som bruker operasjoner, variabler og tall til å uttrykke matematiske strukturer og forhold på en kortfattet måte. Det vil derfor være avgjørende å ha en forståelse for hva variabler er og hvordan de kan brukes, for å kunne forstå det symbolske språket som er helt sentralt for å forstå algebra (Blanton et al., 2011, s. 67-68), og derfor også for å kunne tenke algebraisk. Ifølge Mason (2008) kan barn i ung alder tenke rundt, og uttrykke generalitet uavhengig av tall, og at en ved å vente med å bruke symboler til de har mestret aritmetikk er å ikke utnytte barnas potensiale. Å gi elevene mulighet til å begynne å bruke symbolsk notasjon så tidlig som første klasse, kan åpne for at de utforsker mer komplekse matematiske ideer senere i skoleløpet (Blanton & Kaput, 2011, s. 12). Dette støttes også av Molina et al. (2018), som fant at å bruke bokstavsymboler for å representere ubestemte mengder kan være et utgangspunkt for tidlig algebraundervisning i tredjeklasse. Eriksen et al. (2018) fant også i sin undersøkelse at elever fra 2.til 4. trinn var i stand til å resonnere algebraisk gjennom å se sammenhenger mellom variabler. Det finnes altså flere som peker på at bruk av variabler fint kan finne sted i begynneropplæringen.

Den store ideen «Varibel» kan være vanskelig å skille fra de andre ettersom en variabel kan sees på flere ulike måter. For å tydeliggjøre de ulike aspektene ved kategorien, kan vi dele den inn i tre underkategorier; ukjent tall, generaliseringsverktøy, og variabel (Hemmi et al., 2020b; Lee & Park, 2022). «Ukjent tall» refererer til oppgaver hvor elevene må finne ut hva en ukjent er, som for eksempel i oppgaver med tomme plasser: 4 + _ = 7. De tomme plassene kan også erstattes av symboler, figurer, bokstaver eller liknende. Den andre underkategorien, generaliseringsverktøy, omhandler for eksempel bruken av bokstavvariabler i likningen $a + b - b = a$, som viser sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon. «Variabel» representerer mengder som varierer, som for eksempel i oppgaver hvor det finnes tomme plasser, symboler eller bokstaver på begge sider av likhetstegnet, slik at de avhenger av verdiene en setter inn.

4.1.5 Resonnering om proporsjoner (PR)

Resonnering om proporsjoner, PR, handler om muligheten for å tenke algebraisk om to generaliserte størrelser hvor størrelsene varierer slik at forholdet mellom dem er konstant (Blanton, Stephens, et al., 2015, s. 43). Eksempler på dette kan være proporsjonale forhold, skalering av todimensjonale objekter og prosentregning (Lee & Park, 2022). Temaene som hører til i denne kategorien er ikke så fremtredende på førstetrinn, men det kan allikevel være interessant å se i sammenheng med de andre kategoriene.



Figur 1 Vår illustrasjon av «Big ideas»

4.1.6 Analyseverktøyet

Som vi tidligere har nevnt brukte Bråting et al. (2019) og Lee og Park (2022) har også brukt Blanton, Stephens, et al. (2015) «store ideer» som verktøy for å undersøke hvilke muligheter for å utvikle algebraisk tenkning i Sverige, Korea og USA. Fordi vår studie baserer seg på samme type data, tok vi utgangspunkt i at det ville være meningsfullt å benytte seg av det samme rammeverket i norske matematikkbøker for å kunne se dem i sammenheng med andre. Vi erfarte derimot at rammeverket med de fem store ideene ikke var tilstrekkelig for vårt utvalg.

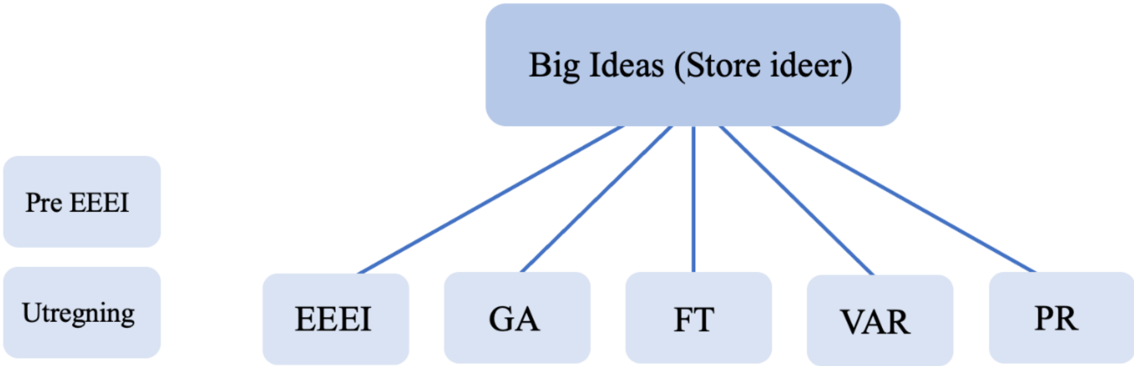
Blanton, Stephens, et al. (2015, s. 43) inkluderte ikke PR som en separat «stor ide» i sin analyse ettersom det ikke eksplisitt ble adressert i deres undersøkelse. Dette førte til at Bråting et al. (2019) heller ikke inkluderte PR som en separat ide, men inkluderte denne i funksjonstenkning fordi de mente proporsjonalitet hører til der. I sin gjennomgang av læreplanen i Sverige, Finland og Estland har Hemmi et al. (2020b) inkludert PR, og har kategorisert for eksempel dobling og halvering inn under «proportional reasoning». Med det som bakgrunn, ønsket vi å beholde PR som egen kategori i vår analyse, for å få et mer nyansert bilde av hvordan oppgavene fordeler seg i de ulike læreverkene.

Vi opplevde å finne oppgaver vi tolket som et steg på vei mot kategorien for likhet, ulikhet, likninger og uttrykk (EEEI), men som ikke kunne betraktes som fullverdig EEEI likevel. Det brøt med forventningen vi hadde at det var en så stor del av innholdet i elevbøkene som havnet på utsiden av de store ideene. Vi måtte derfor gjøre endringer som er i tråd med abduktiv analyse, som vil si å måtte videreutvikle teori for å gi mening til dataene som brøt med vår teoretiske forventning (Johannessen, 2022). Vi så oss derfor nødt til å utvide rammeverket og legge til en sidekategori for å kunne si noe om oppgaver som er «på vei inn» i rammeverket. Vi har valgt å kalle denne «Pre EEEI». Som vi har sett tidligere, representerer de store ideene (Blanton, Stephens, et al., 2015) områder som bør utvikles gjennom skoleløpet for å utvikle elevenes algebraiske tenkning. Flere av oppgavene i bøkene kan være med på å forberede, eller introdusere elevene for matematiske ideer som senere vil lede dem inn i EEEI. Oppgavene har likevel ikke kjennetegnene til denne store ideen, og vi anså derfor som relevant å ha med en «pre-kategori».

Oppgavene i Pre EEEI kan si noe om hvordan den begynnende utviklingen av algebraisk tenkning kan se ut, og hvilke typer oppgaver som mulig kan sette i gang denne prosessen. Dette kan for eksempel være oppgaver hvor elevene skal telle mengder og skrive tallsymboler, som da innebærer en-til-en-korrespondanse, eller oppgaver knyttet til plassering på tallinja.

Lee og Park (2022) har i sin analyse inkludert en oversikt over hvor mange sider i lærebøkene som håndterer likhetstegnet operasjonelt eller relasjonelt (s. 406). Med tanke på at en misoppfatning av likhetstegnet som en operasjon kan skape problemer i overgangen til algebra (Carpenter et al., 2003), ville det vært interessant å finne de samme tallene for læremidlene vi tar for oss i denne analysen, men av kapasitetshensyn kunne vi ikke gjøre dette. Vi ønsket allikevel å forsøke å tallfeste hvor mange av oppgavene i lærebøkene som forholder seg til likhetstegnet på denne måten, så vi laget en egen sidekategori til dette formålet, som vi har kalt «utregning». På denne måten kan vi få et inntrykk av hvor stor andel av oppgavene elevene møter i førsteklasse som er såkalte «rene utregningsoppgaver».

Det endelige analyseverktøyet for vår analyse er illustrert under (figur 2). Her ser vi de fem store ideene fra Blanton, Stephens, et al. (2015), men i tillegg har vi inkludert to sidekategorier som ikke tilhører det opprinnelige rammeverket, men som vi likevel ønsker å kunne si noe om. «pre EEEI» og «Utregning»



Figur 2 Vårt analyseverktøy

5 Læreboka

Til tross for at lærerne i Norge har stor metodefrihet og i stor grad kan bestemme innholdet i undervisningen, har allikevel læreboka en sentral rolle i undervisningspraksisen, og viktigheten av lærebøkene er vidt anerkjent blant forskere (Fan et al., 2013; Van den Ham & Heinze, 2018). Læreboka styrer i utstrakt grad både fordelingen av det faglige stoffet og mye av aktiviteten i klasserommene, spesielt i matematikkfaget (Grønmo, 2014; Sievert et al., 2021; Skorpen, 2009). Ifølge Van den Ham og Heinze (2018) påvirker innholdet i lærebøkene hvilke temaer som dekkes, og hvordan de presenteres for elevene (s 134) og flere forskere vil gå så langt som å si at dersom noe ikke inkluderes i lærebøkene, er det stor sjanse for at det ikke vil undervises om i klasserommet (Li et al., 2008; Stein et al., 2007). Dette understreker viktigheten av å undersøke innholdet i lærebøkene slik at en som lærer kan ha et mer bevisst forhold til hva det undervises om i klasserommet. Denne avhengigheten av lærebøker kan være mer karakteristisk for matematikkfaget enn noe annet fag (Robitaille & Travers, 1992), noe som gjør det særlig relevant med lærebokanalyse i akkurat dette faget. Som Sievert et al. (2021) nevner, er læreboka den viktigste ressursen for matematikklærere på barneskolen. De fant også at de fleste instruksjonene i bøkene i Tyskland gis nonverbalt. Vi vil derfor argumentere for at lærevoka er spesielt viktig i begynneropplæringen fordi elevene blant annet sjelden arbeider med boka helt på egenhånd og at læreren med det også får en sentral rolle.

Valget av lærebøker i matematikkfaget kan også ha innvirkning på elevprestasjoner, og resultatene til Van den Ham og Heinze (2018) viste at dette valget hadde betydelig effekt på elevenes oppnåelse selv når bøkene tok utgangspunkt i samme læreplan. Innholdet i lærebøkene kan derfor være av betydning både for hva lærerne ender opp med å fokusere på i sin undervisning, og for hva elevene får mulighet til å lære (Li et al., 2008; Stein et al., 2007; Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2018). Sievert et al. (2021) fant at det er en sammenheng mellom lærebøkene og elevenes prestasjoner i spesifikke temaer i matematikkfaget, og at denne sammenhengen understreker viktigheten av læreboka og muligheten til å bruke denne som en vei til å endre matematikkundervisningen. Vi har ikke funnet tilsvarende studier gjort i norsk kontekst, men dersom vi antar at det er gjeldende også her, må innholdet i lærebøkene være av stor interesse, og denne sammenhengen bør undersøkes nærmere.

Læremidlene bør bidra til lærerens egen læringsprosess ved å gi støtte til refleksjon rundt undervisningsforløpet og til lærerens egen rolle i prosessen (Pepin, 2018, s. 368), for å kunne hindre at innholdet blir for styrende. En måte å gjøre dette på, som må forskes nærmere på, er hvordan lærere kan bruke lærebøkene på en effektiv måte, også ved å se på lærerveiledningene (Pang & Sunwoo, 2022). Med dette som bakgrunn kan vi se hvor viktig læreboka er, og at kunnskap om innholdet er sentral for læreren for å kunne ta bevisste valg om sin undervisning. Ved å se på hva lærerveiledningen inneholder kan vi også få innsikt i hvilken støtte læreren får til å hjelpe elevene, og videre hvor viktig støtten fra læreren er for elevenes utvikling av algebraisk tenkning.

6 Lærerrollen

Det er vanlig å peke på læreren som nøkkelen til elevenes læring (Ekspertgruppa om lærerrollen, 2016), og for å få et bedre bilde av mulighetene elevene får til å utvikle algebraisk tenkning, er det naturlig å også se på hvilken rolle læreren spiller i dette. I vårt prosjekt ville vi derfor også se på lærerveiledningene og hvilke oppfordringer og muligheter som gis til læreren der.

6.1.1 <u>Læreren og læreboka</u>

Flere studier viser at læreren spiller en avgjørende rolle for hvordan lærebøkene brukes i klasserommet (Bråting et al., 2019; Kim, 2018), og at lærernes ulike bruk kan forklare ulikheter i for eksempel elevprestasjoner (Fan et al., 2013, s. 64) s 64. Tidligere har læreren blitt sett på som en «innfører» av læreplanen, som formidler innholdet i lærebøkene (Rezat et al., 2021), mens det i nyere tid viser seg at lærerne heller har et interaktivt forhold til både formidlingen av læreplanen og bruken av læremidlene, fremfor å følge dem mer passivt (Kim, 2018; Rezat et al., 2021). Selv om læreren påvirkes av innholdet i bøkene og i læreplanen, vil ikke en ny lærebok nødvendigvis være nok til å endre en lærers undervisningspraksis (Rezat et al., 2021). Det vil også si at dersom det finnes innhold læreren ikke aktivt følger opp, kan det føre til at elevene går glipp av læringsmuligheter (Kim, 2018).

I tillegg til lærebokas innhold, vil også lærerens faglige kompetanse ha betydning for undervisningen, slik at en lærer som mangler den faglige kompetansen eller er usikker vil bli mer bundet til boka (Selander og Skjelbred 2004). En lærer med god fagkompetanse kan både vurdere læremidlene, nyansere dem og legge til fagstoff som kanskje er mer relevant for de aktuelle elevene, og måten de tenker på (Selander & Skjelbred, 2004). Kompetansen til læreren vil, derfor kunne ha innvirkning på hvor bundet læreren er til læreboka, i tillegg til å ha innvirkning på elevenes utbytte av undervisningen.

Hvilken rolle læreren kan spille i elevenes utvikling skal vi komme nærmere inn på i delkapittelet Tilpasset opplæring og differensiering, men først vil vi ta for oss lærerens rolle i elevenes algebraiske tenkning.

6.1.2 Lærerens rolle i elevenes algebraiske tenkning

Kaput (2000b) konkluderte med at elevene kan utvikle sin forståelse av de ulike aspektene ved algebra, ved hjelp av nøye utformede og passende undervisningsmaterialer som kan lede dem på riktig vei. Dette støttes også blant annet av funn rundt funksjonstenkning, gjort av Pang og Sunwoo (2022). De fant at en konsekvent og systematisk læreplan og læringsressurser er nødvendig for å implementere kjernen i funksjonstenkningen inn i matematikktimer på en effektiv måte (Pang & Sunwoo, 2022, s. 1316). Likevel, å integrere funksjonstenkning i undervisningen hviler ikke utelukkende på det materialet læreren velger eller utvikler. Det krever kompetanse for at lærere blir i stand til å identifisere anledninger for å utvide samtaler fra å handle om aritmetikk, til å også utforske matematisk generalitet (s 19 (Blanton & Kaput, 2011). Dette kan utvides til å gjelde for flere av de store ideene, og vil innebære at læreren både oppdager og tar muligheter som oppstår i klasserommet.

Algebraisk tenkning utvikles ikke uten hjelp eller veiledning. Dette gjør lærerens rolle avgjørende for å utvikle denne tenkningen (Carraher & Schliemann, 2018; Kieran, 2011). Ifølge Mason (2018) er det ikke oppgavene elevene får, som legger til rette for algebraisk tenkning, men lærerens evne til å se mulighetene, og å bruke disse mulighetene som spiller en større rolle. Prosessen med å støtte denne tenkningen hos elevene kan starte i veldig ung alder. I en undersøkelse gjort av Blanton og Kaput (2004) fant de at lærere kunne fungere som et stillas og støtte elevenes algebraiske tenkning helt fra barnehagealder. Det viser at denne tenkningen kan starte tidlig, men at elevene er avhengige av at læreren er med i prosessen. Det er derfor også viktig at lærerne utvikler en bevissthet rundt potensialet relatert til tidlig algebra (Hunter et al., 2018), for at elevene skal få utvikle sin algebraiske tenkning.

I likhet med Kieran (2011) og Kieran et al. (2016), mener Blanton (2008) at et sentralt mål i algebraisk tenkning er å få elevene til å tenke på, beskrive og begrunne hva som skjer på et generelt plan, i en matematisk situasjon. Dette er noe de vil trenge hjelp av læreren til å få til. En måte å starte dette på er ved at deres begynnende generaliseringer uttrykkes med hverdagsspråk først, og deretter utvikles til å bruke symbolsk notasjon (Kaput, 2000b). Her vil igjen lærerens evne til å avdekke den algebraiske tenkningen spille en vesentlig rolle, i tillegg til den matematiske kompetansen. Ifølge Eriksen et al. (2018, s. 210) vil det å kjenne en oppgave godt, og dens potensiale grundig, gjøre at læreren er godt forberedt. Dette vil i stor grad være viktig for å kunne avdekke mulighetene for algebraisk tenkning når de forekommer, og lærerveiledningene kan hjelpe læreren i forberedelsene ved å peke på de spesifikke mulighetene som oppgaven gir. Alle disse perspektivene understreker viktigheten av lærerrollen i utviklingen av elevenes algebraiske tenkning.

7 Tilpasset opplæring og differensiering

Alle elever har rett til at opplæringen er tilpasset både evnene og forutsetningene deres (Opplæringslova, 1998), og det skal i størst mulig grad skje gjennom tilpasninger innenfor fellesskapet (Kunnskapsdepartementet, 2017). For å legge til rette for prinsippet om tilpasset opplæring innebærer dette at læreren hele tiden må kunne differensiere innholdet til hver enkelt elev i en klasseromssituasjon. Begrepet differensiering og brukes om de «[…] pedagogiske konsekvensene av at elever er ulike og lærer på forskjellige måter» (Håstein & Werner, 2014, s. 22). Ifølge Idsøe (2020) blir differensiering brukt for å oppnå tilpasset opplæring, noe som kan tilsi at differensiering er en metode, og tilpasset opplæring er målet.

Den differensieringen vi vil ta for oss i dette prosjektet kalles pedagogisk differensiering. Det kan defineres som «…de tilpasningene som gjøres innenfor klassens ramme, inkludert lærerens didaktiske disposisjoner. Det kan være at elever arbeider med ulikt lærestoff eller har ulikt tempo, nivå, tid eller tema» (Olsen, 2017, s. 46). Vår forståelse av differensiering dreier seg altså om lærerens ulike behandling av elevene, basert på de ulike elevenes forutsetninger og behov, og de tiltakene vi gjør i undervisningen for å ta hensyn til disse på best mulig måte. Det er den pedagogiske differensieringen vi viser til når vi videre bruker begrepet «differensiering».

Tilpasningen som gjøres kan, som vi har sett, omfatte ulikt lærestoff, slik at læreren tilpasser ved å gi elevene ulike oppgaver eller har ulike forventninger til elevene (Haug, 2006, s. 52). Det kan også være forskjeller i nivået elevene jobber på, slik at oppgavene for eksempel kan ha ulik kompleksitet eller abstraksjonsnivå. Tiden elevene får vil også være mulig å justere, ut fra behovet, sett i sammenheng med tempoet de jobber i, og arbeidsmengden. For å differensiere, kan læreren også berike lærestoffet ved å utvide og utdype det Olsen (2017). Dette vil kunne justeres etter elevenes forutsetninger, slik at elever med stort læringspotensial, slipper å bli frustrerte fordi de gjentatt må jobbe med ting de allerede kan (Idsøe, 2020, s. 29), og elever som strever, kan oppleve mestring på eget nivå. Inn i dette arbeidet blir lærerens rolle svært viktig, og lærerne må, ifølge Idsøe (2020), være bevisst sin egen praksis slik at de kan ta valg i arbeidet med differensieringen som påvirker elevenes læring på en positiv måte.

7.1.1 Den proksimale utviklingssone

Pedagogisk differensiering er ifølge Idsøe (2020) i tråd med Vygotsky teori om elevenes utviklingssoner. Det er et sentralt begrep i den sosiokulturelle læringsteorien (Lyngsnes & Rismark, 2017, s. 27) og dreier seg om Vygotskys tanker om undervisning og barns læring.

Når elevene starter på skolen i første klasse, er det svært ulikt hvor selvstendige de er (Berggren & Jom, 2021, s. 24), og det er stor variasjon i hva elevene kan få til på egenhånd. Hver enkelt elev har en grense for hva de får til, før de må ha hjelp for å utvikle seg videre. Området som ligger mellom det elevene får til alene, og det de ikke kan få til selv med assistanse, refereres til som den proksimale utviklingssonen (Vygotsky, 1978). For at elevene skal kunne utnytte ressursene som finnes i denne sonen er det avgjørende å få hjelp av en voksen, eller i samarbeid med medelever som har kommet lenger i sin utvikling (Vygotsky, 1978). Dette peker også på viktigheten av læreren for elevenes læring og utvikling.

I denne sammenhengen kan læreboka ifølge Stipek et al. (2017, s. 5) fungere som et rammeverk eller som læringssti for læreren å ta utgangspunkt i, og som kan veilede læreren i rekkefølgen på når matematiske ideer bør introduseres. Læreboka vil også hjelpe læreren i å sette målet for undervisningen like utenfor barnas nåværende forståelse, altså i den proksimale utviklingssonen. Dette synet støttes av Pepin (2018), som også hevder at læremidlene bør støtte læreren i dette arbeidet, blant annet gjennom å bevisstgjøres på sin rolle som støtte i elevenes læringsprosess (s. 368). På denne måten kan både læreboka og lærerveiledningen fungere som støtte for læreren, og overført også for elevene i deres læring.

Selv om elevene er på samme alder, vil utviklingssonene deres være forskjellige (Lyngsnes & Rismark, 2017, s. 28). Det krever en kompetanse i å differensiere hos de ulike elevene. Med utgangspunkt i hvilken kunnskap elevene har i den aktuelle utviklingssonen, må læreren tilpasse opplæringen og støtte elevene slik at de når sitt potensiale i deres proksimale utviklingssone (Lyngsnes & Rismark, 2017, s. 28-29). Hvilket matematisk innhold, og hvilke typer oppgaver som havner inn i elevenes proksimale utviklingssone, vil da være svært ulikt i en klasse med mange forskjellige elever.

Elever begynner ikke nødvendigvis å tenke algebraisk av seg selv dersom de bare får tilgang på muligheter. Carraher og Schliemann (2018) argumenterer for at algebra er komplekst og består av tenkemåter og systemer av representasjoner som barn på generell basis ikke vil lære av seg selv. De mener derfor at læreren spiller en avgjørende rolle, som er noe av det også Kieran (2011) løfter frem. Sett i sammenheng med Vygotskys utviklingssone (1978) kan vi se at elevene er avhengige av lærerens støtte for å få tilgang til den proksimale utviklingssonen og slik også den algebraiske tenkningen.

7.1.2 Abstraksjonsnivå

En gunstig måte å tilpasse kan være å differensiere gjennom representasjonsformer (Solvang, 1992, s. 189). Dette være spesielt gjeldende med tanke på algebraisk tenkning, og læreren kan da justere abstraksjonsnivået i oppgavene. Bruners (1964, 1966) representasjonsnivåer omhandler kognitiv utvikling og den naturlige progresjonen om å gå fra det konkrete til det abstrakte. For å utvikle algebraisk tenkning vil det for mange elever være nødvendig å starte i det konkrete, for så å gå over til det mer generelle og abstrakte. Det første steget omhandler konkrete opplevelser, læring gjennom bevegelse eller aksjon (enactive). Det andre, knyttes til det billedlige og visuelle (iconic). Det siste steget er et symbolsystem (symbolic), som representerer noe som inkluderer elementer av avstand og tilfeldighet, det abstrakte og symbolske (Bruner, 1964, 1966). Bruners modell har dannet grunnlaget for en tilnærming i matematikkfaget kjent som CPA (Concrete, Pictoral, Abstract) (Yeo et al., 2019). Når elevene skal lære matematiske begreper vil i denne tilnærmingen kunne sammenfattes gjennom en progresjon fra bruk av konkreter i form av fysiske objekter og opplevelser (concrete), til en billedlig oppfatning av denne håndteringen, kombinert med opplevelsene (pictoral), og til slutt bruken av matematiske symboler (abstract) (Chang et al., 2017, s. 5). «Concrete» vil her ikke bare gjelde for selve bruken av konkretene, men også opplevelsene rundt, knyttet til denne håndteringen (Yeo et al., 2019, s. 167).

Differensiering kan blant annet gjøres ved å forenkle gjennom konkretisering og bruk av fysiske objekter, som for eksempel tellebrikker. I første klasse må elevene få bruke de representasjonsformene de behersker best, og er tryggest på og, ifølge Berggren og Jom (2021, s. 116) må elevene som trenger det få lov til å bruke konkreter for å løse oppgavene. Differensiering kan også gjøres ved å gi elevene en utfordring hvor de må generalisere eller abstrahere. Matematikk, er et abstrakt fag, og alle elevene skal etter hvert lære å tenke abstrakt, men det kan ta tid å før de er trygge på å bruke symbolske representasjoner (Berggren & Jom, 2021). Dette er spesielt treffende for algebra, og noe av hensikten med algebra er nettopp å generalisere og lære å tenke abstrakt.

Undervisningen og de typiske læremidlene på barnetrinnet forbereder kanskje ikke elevene tilstrekkelig på å klare overgangen fra den konkrete aritmetikken de første årene på barneskolen, til den mer komplekse og abstrakte algebraiske tenkningen som trengs fra mellomtrinnet og oppover (Blanton, Stephens, et al., 2015). Konkreter kan hjelpe elevene med å skape mening i de nye matematiske situasjonene, men det holder ikke å bare bruke konkretene. Elevene må også reflektere over hva konkretene representerer (Clements & Sarama, 2012, s. 127). Læreren vil igjen spille en viktig rolle, og må veilede elevene slik at de forstå bruken av konkretene. Elevene trenger lærere som kan reflektere over elevenes representasjoner og hjelpe dem over i mer og mer sofistikerte og matematiske representasjoner (Clements & Sarama, 2012, s. 127), altså mer abstrakt og symbolsk notasjon.

Grønmo (2014) mener at styrken til matematikken ligger i det abstrakte og det generelle. Dette gjør at det algebraiske språket kan brukes på alle områder. Det at skolen vektlegger det konkrete og praktiske i stor grad, bryter med med troen om at elever lærer på forskjellige måter. Hun stiller også spørsmål ved om noen elever kunne ha lært mer matematikk hvis vekten ble lagt på det abstrakte og generelle aspektet i faget (s. 27).

Oversettelsen fra erfaring til symbolsk form åpner opp utallige muligheter ifølge Bruner (1964), og han mente det ville være vanskelig å over til det abstrakte dersom en lar det perseptuelle dominere, slik at en er avhengig av at noe kan pekes på. Skolen bør derfor lede elevene i retningen av det abstrakte, fordi det ifølge (Vygotsky, 1978, s. 89) vil være svært vanskelig, eller umulig for enkelte elever å oppnå dette på egenhånd. Overgangen fra det konkrete til det abstrakte innebærer en form for prosessering og interaksjon mellom representasjonene (Chang et al., 2017, s. 24). Ifølge Van de Walle et al. (2018, s. 89) trenger ikke dette være en rigid tilnærming som først går over til abstraksjon etter de andre fasene. I stedet er det viktig at det er parallell modellering av tallsymboler gjennom denne tilnærmingen, for å relatere de konkrete objektene og visuelle representasjonene til de tilsvarende tallsymbolene.

Metode

I denne delen vil vi gjøre rede for metoden vi har brukt i dette prosjektet. Vi har gjort en komparativ lærebokanalyse av fire læreverk for førsteklasse, som inneholder en kvantitativ innholdsanalyse av elevbøkene, og en tematisk analyse av lærerveiledningene, som er en form for kvalitativ innholdsanalyse (Clark et al., 2021). For å svare på problemstillingen, «På hvilken måte tilrettelegger utvalgte lærebøker for førsteklasse for at elevene skal utvikle algebraisk tenkning?» valgte vi å bruke disse analytiske tilnærmingene for å få bedre innsikt i ulike aspekter ved problemstillingen, som er formulert i forskningsspørsmålene under:

1. *Hva kjennetegner algebraisk tenkning i elevbøker for førsteklasse?*
2. *Hvor stor andel av oppgavene i elevbøkene gir mulighet for algebraisk tenkning?*
3. *Hvilke muligheter gir lærerveiledningene for å differensiere, i utviklingen av algebraisk tenkning?*

Den kvantitative analysen vil gi oss innsikt i mengden algebraisk innhold i de ulike læreverkene, og hvordan dette fordeler seg over de «store ideene». Vi får også muligheten til å se etter sammenhenger mellom de store ideene, og sammenlikne forskjeller og likheter mellom de ulike verkene. Ved å se på hva oppgavene inneholder, i de ulike store ideene, kan vi også danne oss et bilde av hvordan algebraisk tenkning kan se ut i førsteklasse. Den kvalitative analysen vil kunne bidra til å utdype og nyansere funnene fra den kvantitative analysen, ved å se på hvordan lærerveiledningene bidrar, eventuelt ikke bidrar, til å legge til rette for algebraisk tenkning. Vi kan, ved å inkludere lærerveiledningene få et tydeligere bilde av hvordan det er tenkt at læreren og elevene skal bruke verkene, hvilken støtte læreren får, og hvilke muligheter for differensiering som ligger i verkene. Denne sammenhengen er spesielt viktig å ta stilling til ettersom elevene i førsteklasse sjelden vil bruke bøkene alene, og i stor grad vil trenge hjelp fra læreren. Kombinasjonen av de to analytiske tilnærmingene vil kunne gi oss et mer helhetlig bilde av hvordan de ulike verkene tilrettelegger for algebraisk tenkning, og på den måten gi et mer helhetlig svar på problemstillingen vår.

Vi vil først gå kort inn på komparativ lærebokanalyse som overordnet metode for vår analyse, før vi gjør rede for utvalget. Deretter vil vi beskrive hvordan vi har gått frem for å analysere elevbøkene i den kvantitative analysen. Dette vil vi gjøre ved å presentere det teoretiske rammeverket, og gi en oversikt over hvordan vi har brukt det. Med denne tilnærmingen vil vi svare på forskningsspørsmål 1 og 2. Vi vil så redegjøre for den tematiske analysen, som søker å svare på det tredje forskningsspørsmålet, og hvordan denne ble gjort. Til slutt vil vi diskutere metodenes reliabilitet og validitet mer overordnet.

8 Lærebokanalyse

En komparativ lærebokanalyse fokuserer på hvordan et spesifikt tema, eller et interessant aspekt er presentert i bøkene, og for å identifisere forskjeller og likheter mellom de ulike læreverkene (Fan et al., 2013). I vår studie dreier dette seg om hvordan algebraisk tenkning kan se ut i de ulike læreverkene. Vi gikk da systematisk til verks for å undersøke innholdet i lærebøkene gjennom å kategorisere og analysere det, noe som kjennetegner innholdsanalyse av dokumenter (Grønmo, 2016). Vi går nærmere inn på hva vi har gjort under de aktuelle analysene.

8.1.1 Utvalget

Utgangspunktet for analysen er fire læreverk i matematikk for første trinn, bestående av ti elevbøker og syv lærerveiledninger. De er alle utgitt etter fagfornyelsen (LK20), og publisert av de fire største forlagene i Norge (Tabell 1). Vi ønsket å undersøke hvordan mulighetene for algebraisk tenkning varierte mellom læreverkene. Vi ville inkludere alle fire verkene for å kunne si noe mer overordnet om hvordan dette kan se ut i førsteklasse, og for å få et bredere grunnlag til å sammenligne. Læreverkene varierer i omfang og oppbygning, så vi valgte derfor å inkludere øve- og oppgavebøkene der de er tilhørende, ettersom dette er integrert i grunnboka til enkelte av verkene. På denne måten vil de ulike læreverkene få et likere utgangspunkt, og derfor være mer meningsfullt å sammenlikne. I tillegg vil vi få et mer utfyllende materiale, og et mer helhetlig inntrykk av læreverket. Sammenlagt vil utvalget vårt bestå av disse bøkene:

Matematikk 1 (Cappelen Damm)	Matemagisk 1 (Aschehoug)	Multi 1 (Gyldendal)	Volum 1 (Fagbokforlaget)
Matematikk 1A Grunnbok Matematikk 1B Grunnbok Matematikk 1 Øvebok	Matemagisk 1 Grunnbok Matemagisk 1 Øvebok	Multi 1A Elevbok Multi 1B Elevbok Multi 1 Øvebok	Volum 1A Volum 1B
Matematikk 1A Lærerveiledning Matematikk 1B Lærerveiledning	Matemagisk 1 Lærerveiledning	Multi 1A Lærerens bok Multi 1B Lærerens bok	Volum 1A Lærerveiledning Volum 1B Lærerveiledning

Tabell 1 Utvalget

8.1.2 Koding

Vi vil nå se på de ulike analytiske tilnærmingene, og hvordan vi gikk frem for å kode og analysere elevbøkene i den kvantitative analysen, og lærerveiledningene i den kvalitative.

Den kvantitative analysen - elevbøkene

I en kvantitativ innholdsanalyse er hensikten å finne relevant informasjon om det som skal studeres, og deretter bearbeide disse slik at de blir systematisert og registrert slik at de kan brukes som datagrunnlag (Grønmo, 2016) s 213. Vi jobbet da ut fra en deduktiv tilnærming, som vil si å teste teorier og hypoteser ved hjelp av forhåndsbestemte kategorier (Clark et al., 2021; Johannessen et al., 2021). Som nevnt tidligere gjorde vi også noen justeringer for å videreutvikle det opprinnelige rammeverket for å passe våre data, som er i tråd med det Johannessen (2022) kaller abduktiv analyse. Hypotesen vi ville undersøke er at det er forskjeller i mengden og typen algebraisk innhold i de ulike læreverkene. For å gjøre dette, kategoriserte vi alle oppgavene med elementer av algebraisk tenkning inn i analyseverktøyet vårt og gikk deretter videre med å se etter fellestrekk og forskjeller mellom verkene og sammenhenger mellom kategoriene.

For å analysere elevbøkene tok vi som nevnt utgangspunkt i Blanton, Stephens, et al. (2015) sine «store ideer» (se figur 1). Før vi kodet materialet gjorde vi en pilottest med en bok fra hvert læreverk, for å se om kategoriseringen var meningsfull for vår analyse, og for å undersøke om analyseverktøyet kunne benyttes for å svare på problemstillingen vår. Dette ga oss også muligheten til å bli bedre kjent med verktøyet før vi skulle ta for oss hele materialet. Det hjalp oss også med å avdekke usikkerheter og feiloppfatninger vi hadde rundt de ulike kategoriene. Piloteringen er ifølge (Clark et al., 2021) s 284) en viktig del av forberedelsen til datainnsamlingen nettopp for å sikre at kodeinstruksen og kodeskjemaet fungerer godt og for å unngå potensielle utfordringer underveis. Kodeinnstruksen vi hadde som utgangspunkt var beskrivelsene til Blanton, Stephens, et al. (2015) av de «store ideene», og kodeskjemaet bestod også av disse fem kategoriene. Disse fem kategoriene fungerte som utgangspunkt for kodearbeidet vårt, men krevde noen tilpasninger.

Vi brukte ikke underkategoriene som Hemmi et al. (2020a) og Lee og Park (2022) har inkludert i sin analyse. Fordi flere av disse underkategoriene i stor grad ikke er representert, eller har lav frekvens i førsteklassebøkene, ble denne inndelingen ikke relevant for vår analyse. Det var heller ikke mange like oppgaver i vårt tilfelle. Vårt fokus på førsteklassebøkene har gjort at vi heller ikke har mulighet til å inkludere progresjonen innenfor de store ideene oppover i skoleløpet slik som Bråting et al. (2019) gjorde. Det kunne ha gjort underkategoriene mer aktuelle å benytte. Med dette som bakgrunn bestemte vi oss for å utelukke underkategoriene, og heller prioritere større bredde i utvalget vårt, for å bedre kunne si noe om hva bøkene i førsteklasse inneholder av algebraisk tenkning. Vi vil allikevel inkludere perspektiver og funn fra Bråting et al. (2019), Hemmi et al. (2020a) og Lee og Park (2022) i våre resultater og i diskusjonen.

Etter piloteringen så vi et behov for å tilpasse analyseverktøyet, for å passe bedre til bøker for førsteklasse og til vårt prosjekt. Dette dreide seg i hovedsak om oppgaver knyttet til EEEI. På bakgrunn av funnene Bråting et al. (2019) og Lee og Park (2022) gjorde, forventet vi at EEEI også i vår analyse ville bli den største kategorien i lærebøkene. Det var noe av grunnlaget for hvorfor vi ville vie denne kategorien mer oppmerksomhet. Vi oppdaget at en stor prosentandel av oppgavene i alle lærebøkene havnet i denne kategorien og så et behov både for å unngå at den rommet for mye, og for å dele den opp. Dette fremheves også av (Clark et al., 2021, s. 284) som en måte å kunne få frem detaljer i kategoriene. Dermed ble det svært relevant å anvende vårt tilpassede analyseverktøy (se Figur 2) med en kategori som inneholder oppgaver som er «på vei inn» i rammeverket (pre EEEI) og en kategori som inneholder rene utregningsoppgaver.

Feil! Fant ikke referansekilden. Tabell 2 viser et utdrag av kodeskjemaet vi benyttet til kodingen av elevbøkene. Vi har altså sett på hvor mange oppgaver hver side inneholder og deretter registrert forekomster av oppgaver med av de ulike kategoriene. For å øke kvaliteten på analysen og øke reliabiliteten kodet begge forfatterne alle bøkene hver for seg. Deretter ble resultatene sammenliknet og diskutert, slik at vi kom til enighet i de få tvilstilfellene som oppstod.

Sidetall	Antall oppg	Pre EEEI	Utregning	EEEI	GA	FT	VAR	PR
8								
9								
10								

Tabell 2 Utdrag av kodeskjemaet for elevbøkene

De store ideene er ikke gjensidig utelukkende (Blanton, Stephens, et al., 2015), og vi har derfor tillatt at oppgavene kan kodes innenfor flere av de store ideene, i likhet med Blanton, Stephens, et al. (2015), Bråting et al. (2019), Hemmi et al. (2020a) og Lee og Park (2022). Dette gir oss mulighet til å se etter sammenhenger ved å se når ulike kategorier opptrer innenfor samme oppgave, og undersøke mønster eller overordnede tendenser. Når det gjelder kategorien EEEI, og sidekategoriene «Pre EEEI» og «Utregning», er disse i vårt analyseverktøy, gjensidig utelukkende kategorier. Dette innebærer at de ikke overlapper (Clark et al., 2021), som i vårt tilfelle vil si at hvis en oppgave blir kodet under EEEI, vil den ikke kunne tilhøre «Pre EEEI» eller «Utregning», og motsatt.

8.1.2.1.1 Analyseenhet

I vår analyse har vi brukt oppgaver som analyseenhet. Der bøkene manglet oppgavenummer, har vi sett etter «kommandoer» eller instruksjoner som gis til elevene. Vi har også valgt å inkludere oppgaver som inneholder spørsmål som det legges opp til at elevene skal svare på eller ta stilling til, da i oppgaver både med og uten oppgavenummer. Oppgaver uten instruksjoner til elevene er ekskludert, fordi elevboka i disse tilfellene ikke gir nok informasjon om hva elevene skal gjøre.

Det er store forskjeller på hva en side inneholder i de ulike læreverkene vi har undersøkt. Basert på resultatene til Blanton, Stephens, et al. (2015), Bråting et al. (2019) og Hemmi et al. (2020a) forventet vi at vår undersøkelse ville speile noen av de samme resultatene og inneholde få data i hver kategori. Ettersom vi kun ser på lærebøker på første trinn, ville vi gjøre analyseenheten mindre for potensielt å få en mer detaljert oversikt over fordelingen og en mer presis analyse. I tillegg var flere av lærebøkene vi analyserte inndelt i oppgaver med oppgavenummer, slik at det ble naturlig å forholde oss til oppgave som enhet fremfor sider.

Bråting et al. (2019) valgte å bare telle med sidene hvor mer enn halvparten av siden inneholder en eller flere store ideer. Det kan da være en mulighet for å gå glipp av enkelte oppgaver. Særlig når noen av kategoriene viste seg å være lite synlige i bøkene i piloteringen, ville vi ikke risikere å gå glipp av de få oppgavene som er. Ved å dele inn i oppgaver fremfor sider, har vi mulighet til å se om noen av kategoriene opptrer samtidig innad i oppgavene. Hadde vi forholdt oss til sider ville det vært vanskelig å si noe om kategorier som opptrer samtidig innenfor enkelte oppgaver, fordi de da kunne referert til oppgaver som er uavhengig av hverandre. Det vil da bli lettere å se likheter og forskjeller mellom verkene, og gjøre en mer presis analyse.

Lærerveiledningene

I den tematiske analysen tok vi for oss de syv lærerveiledningene tilhørende læreverkene, for å finne svar på forskningsspørsmål 3 som er «Hvilke muligheter gir lærerveiledningene for å differensiere, i utviklingen av algebraisk tenkning?». Denne vinklingen skiller seg fra analysen av elevbøkene, blant annet ved at vi har brukt en mer induktiv tilnærming, som vil si å forsøke å bygge opp en teoretisk forståelse ut fra empirien (Grønmo, 2016). Vi gikk altså inn for å analysere lærerveiledningene med et åpent, teoretisk blikk, og lette etter underliggende «temaer» i materialet gjennom gjentatte gjennomlesninger og sammenlikninger, noe som ifølge Clark et al. (2021) er typisk for kvalitative innholdsanalyser. Vi skal nå se på hvordan vi gikk frem for å gjøre dette i den tematiske analysen.

8.1.2.1.2 Tematisk analyse

Å gjøre en tematisk analyse er en måte å analysere og organisere kvalitative data på, ved å identifisere «temaer» og mønstre i materialet (Braun & Clarke, 2006). For å gjøre vår kvalitative analyse fulgte vi i stor grad stegene Clark et al. (2021) beskriver som en generell tilnærming til å analysere kvalitative data, med prinsipper fra tematisk analyse. Selv om vi som nevnt brukte en mer induktiv tilnærming i denne analysen, hadde vi en tematisk retning før vi gjennomførte analysen. Denne tok utgangspunkt i teori om differensiering og tilpasset opplæring. Vi vil beskrive fremgangsmåten steg for steg, og beskrive hvordan vi analyserte materialet i vårt prosjekt.

Det første steget er å bli kjent med materialet og lese gjennom i alle fall et utdrag av materialet slik at en blir godt kjent med innholdet. Vi gjorde dette ved at vi så på en lærerveiledning fra hvert av verkene og begrenset utvalget ved å kun se etter innhold knyttet til differensiering. Vi gikk inn med et åpent blikk for å la teksten tale for seg selv i størst mulig grad. Det er allikevel viktig å være bevisste på sin rolle i undersøkelsen, og at vi ikke klarer å frigjøre oss fra vår teoretiske bakgrunn som Braun og Clarke (2006) fremhever. Vi var derfor også bevisste på at vi med vårt tematiske fokus hadde med oss en forforståelse inn i analyseprosessen.

Det neste steget er å gjøre en åpen koding, hvor en forsøker å finne egenskaper ved teksten som knytter seg til det en vil undersøke. Ifølge (Grønmo, 2016) s 267-68 fremstår kodene i en åpen koding som en første karakterisering og klassifisering av viktig innhold i datamaterialet, og det er først og fremst dataen som er bestemmende for kodene forskeren velger. I denne delen av prosessen tok begge forfatterne for seg to lærerveiledninger hver, en fra hvert verk, og gjorde en åpen koding av disse for å se etter innhold knyttet til differensiering og utviklingen av elevenes algebraiske tenkning, og hva som karakteriserte dem. Videre i den tematiske analysen samles kodene til mer overordnede temaer med fellestrekk, for å redusere mengden koder. For å komme frem til disse diskuterte vi kodene vi hadde funnet og samle dem. Denne prosessen resulterte i temaene, eller de overordnede kodene: «Forenkling», «Utfordring» og «Fleksibel tilpasning».

Side	Forenkling	Side	Utfordring	Side	Fleksibel tilpasning

Tabell 3 Skjema for analyse av lærerveiledning

For å analysere materialet videre, fordelte vi lærerveiledningene slik at vi tok halvparten hver og brukte skjemaet over (tabell 3) som utgangspunkt for å kode og analysere alle veiledningene. Dette gjorde vi ved å se etter eksempler innenfor de ulike overordnede temaene eller kodene vi hadde funnet. Innsamlingen av dataene ble gjort på en systematisk, men ikke uttømmende måte. Vi valgte å kun ta med ett tilfelle av hver «nye» form for tilpasning eller forslag til differensiering som dukket opp. Dette gjorde vi for å se på spekteret av ulike muligheter for differensiering bøkene legger til rette for, eller oppfordrer læreren til. For å videre definere «temaene» i lærerveiledningene så vi etter en relasjon til problemstillingen og forskningsspørsmålet vårt. Formålet med dette var å bidra til å skape et mer sammensatt bilde av hvilke muligheter som finnes for å utvikle algebraisk tenkning, i både elevbøker og lærerveiledningene. Vi diskuterte deretter funnene og så blant annet etter forskjeller og likheter, hva som gikk igjen og hva vi opplevde at manglet. Denne diskusjonen ble grunnlaget for å lage nye kategorier. Slik vekslet vi mellom å se på dataene i lærerveiledningene og temaene vi hadde identifisert, organiserte og justerte kategoriene etter hvert som vi så sammenhenger eller forskjeller mellom dem. På denne måten bar metoden vår preg av å være iterativ, altså en gjentakende veksling mellom innsamling og analyse av datamaterialet, slik at funnene vi gjorde på veien påvirket hvordan vi samlet inn data videre, noe som også er vanlig innenfor kvalitativ analyse (Clark et al., 2021, s. 524).

8.1.3 Begrensninger ved metoden

Vårt valg av metode gjør at vi ikke kan si noe om hvordan læremidlene blir brukt i klasserommet. Det vil si at vi ikke kan uttale oss om hvordan elevene bruker bøkene, eller hvordan læreren legger til rette for algebraisk tenkning ved hjelp av bøkene. Skulle vi sett nærmere på hvordan bøkene blir brukt i klasserommet kunne vi brukt deltakende eller strukturert observasjon (Grønmo, 2016). Dersom vi ønsket å se nærmere på hvordan lærere opplever lærebøkene, ville det vært mer nyttig med en intervjustudie (Clark et al., 2021) s 425. I vårt prosjekt er vi derimot ute etter å undersøke hvilket potensial for å utvikle algebraisk tenkning som ligger i læreverkene i seg selv. Vi vil se på hvilke muligheter som finnes for elevene, og hvordan lærerveiledningene kan fremheve disse, og det var derfor hensiktsmessig å analysere lærebøker på denne måten. Vi talte ikke hvor ofte temaene forekom i de ulike bøkene. Det gjør at vi ikke kan uttale oss om hvor mange ganger de ulike temaene er representert i verkene, men vi kan si noe om hvilke typer differensiering de legger opp til og mer overordnet hvor ofte disse forekommer.

9 Reliabilitet

For å ivareta en høyere reliabilitet i det kvantitative datamaterialet vårt, forsøkte vi å gjøre kodingen både systematisk og konsekvent, noe som er spesielt viktig for den kvantitative innholdsanalysen (Clark et al., 2021, s. 284). Påliteligheten til undersøkelsen vi har gjort vil være høyere når en ny undersøkelse gjennomføres og får de samme resultatene (Grønmo, 2016). Vi har derfor forsøkt å være så transparente som mulig i beskrivelsene av gjennomføringen. Reliabiliteten vil også kunne bli høyere ved at vi er to som koder samme materiale, og dersom det er stort samsvar mellom resultatene kan vi si at det er høy grad av inter-rater reliabilitet (Clark et al., 2021). Vi kodet derfor alt separat, og sammenlignet resultatene i etterkant. Før og etter piloteringen diskuterte vi også de ulike kategoriene og ble enige om hvilken kategori oppgavene vi var i tvil om tilhørte. Etter gjennomføringen av kodingen gikk vi systematisk gjennom alle oppgavene. Enigheten viste seg å være stor, og i de få tilfellene hvor vi oppdaget forskjeller, diskuterte vi disse og kom frem til en enighet.

En svakhet ved den kvantitative metoden vi har brukt, kan være at det nærmest er umulig å utforme en kodemanual som ikke involverer en eller annen form for tolkning som gjøres av de som koder (Clark et al., 2021). Vi opplevde likevel at vi var konsekvente i avgjørelsene, selv om det innebærer en subjektivitet i å kode materialet inn i kategoriene. Vi har også etterstrebet å være transparente om valg som ble tatt rundt kategoriseringen. Ettersom samsvaret mellom koderne var høyt, kan vi da med større sikkerhet også anta at variasjonene vi ser i datamaterialet kan tolkes som «utslag av reelle ulikheter mellom analyseenhetene» (Grønmo s 244). Altså hvor datamaterialet ikke er påvirket av hvem som koder det, i alle fall ikke i like stor grad. Dette vil selvfølgelig ikke si at vi kan konkludere med at våre funn er pålitelige, men det kan være en indikator på i hvor stor grad dette stemmer. En måte vi kunne økt reliabiliteten ytterligere, er hvis vi hadde gjennomført en test-retest, som vil si å kode hele, eller deler av materialet i på ulike tidspunkt for å se om de holdes stabile over tid (Clark et al., 2021).

I den kvalitative analysen er det kanskje mer fruktbart å snakke om troverdighet fremfor reliabilitet, ettersom det ikke er mulig å beregne reliabiliteten på en standardisert måte i de fleste kvalitative studier. Troverdigheten avhenger av at datainnsamlingen skjer på en systematisk måte som er i tråd med etablerte fremgangsmåter for metoden som er valgt (Grønmo, 2016). En tematisk analyse er en åpen og svært fleksibel metode, som derfor mangler en tydelig etablert fremgangsmåte (Braun & Clarke, 2006; Clark et al., 2021), noe som krever at troverdigheten kanskje heller vil avhenge av at vi er transparente. Vi har derfor forsøkt å beskrive i detalj hvordan analysen har foregått. Indre reliabilitet (internal reliability) brukes, i likhet med inter-rater reliabilitet, også for å si noe om graden av enighet mellom de som forsker om det de ser (Clark et al., 2021). I vårt prosjekt kan vi argumentere for at denne reliabiliteten var nokså høy, ettersom utviklingen av «temaene» tok utgangspunkt i flere sammenlikninger og diskusjoner, hvor det viste seg at vi i stor grad var enige om innholdet. Dette så vi for eksempel ved at vi hadde plukket ut samme, eller tilsvarende eksempler for å belyse samme «tema» gjentatte ganger.

10 Validitet

Validiteten viser i hvilken grad metoden egner seg til å samle inn data som er relevante for problemstillingen (Grønmo, 2016, s. 241). I dette prosjektet har vi tatt utgangspunkt i et allerede etablert analyseverktøy, og tidligere studier som har operert med samme type data. Dette øker validiteten fordi vi har sett flere eksempler på studier med liknende problemstillinger, som resulterte i data som er relevante for den problemstillingen vi har valgt. Selv om vi har tatt utgangspunkt i et rammeverk som allerede er etablert, er det muligheter for at vi har oversett eller misforstått elementer av dette rammeverket. I vår søken etter sammenhenger kan vi også ha tolket funnene annerledes enn andre ville, ved å for eksempel vektlegge likheter eller forskjeller som andre ikke ville sett som relevant, eller motsatt. Vi har også gjort justeringer som kan endre hvordan vi tolker dataene og hva vi kan uttale oss om.

Det at vi har kombinert to analyser og sett på innhold både i lærebøkene og lærerveiledningen kan også bidra til høyere validitet ved at vi i større grad kan se våre tolkninger og slutninger som gyldige. Dette kan styrkes av at vi har vist til mange eksempler i begge analysene, slik at vi formidler hvordan vi forstår innholdet og hvilke slutninger vi kan trekke med det som bakgrunn.

Ved å gjøre en pilottest og diskutere bruken av kodeskjema og kodemanualen før gjennomføringen av selve kodingen, og slik komme til enighet om hvordan dette skal brukes, kan også validiteten øke. I den tematiske analysen var også diskusjonen rundt kodene også en viktig del av å sikre indre validitet av de endelige «temaene» eller kategoriene vi kom frem til.

Det er også viktig å poengtere at vi med denne analysen ikke ønsker å si noe om hvilke læreverk som er gode eller dårlige. Læreverkene som helhet inneholder langt mer enn det vi har analysert i dette prosjektet, og vi kan derfor ikke uttale oss om innholdet på generelt plan.

Vårt mål er å peke på forskjeller og likheter knyttet til algebraisk tenkning og differensiering i læreverkene. Vi vil også understreke at vi ikke kan generalisere ut fra kunnskapen vi får av analysen utover det utvalget som er inkludert her. Vi kan altså ikke si noe om andre lærebøker i Norge, eller bøkene på andre trinn enn førstetrinn.

Vi har valgt å avgrense materialet til kun fysiske lærebøker, og har dermed ekskludert de tilhørende digitale ressursene til verkene vi har analysert. Vi har også ekskludert eventuelle andre digitale læremidler. Dette er i hovedsak knyttet til kapasitetshensyn. Vi må derfor innfinne oss med at det kan finnes mange muligheter for å utvikle algebraisk tenkning i de digitale ressursene, men at vi ikke kan si noe om det i dette prosjektet. Læreboka er likevel, som vi har vært innom tidligere, en svært sentral og mye brukt ressurs for klassetrinnet vi har tatt for oss.

10.1.1 Forskningsetiske hensyn

Selv om dette prosjektet ikke behandler personopplysninger, har vi likevel et forskningsetisk ansvar om å etterstrebe åpenhet og etterrettelighet i beskrivelsene av prosjektet vårt. Forskningen har en overordnet forpliktelse om å være en søken etter sannhet (NESH, 2021), og vi har forsøkt å være så objektive som mulig. Det er likevel verdt å merke at resultatene av denne analysen er våre tolkninger og kan derfor ikke illustrere en objektiv sannhet.

Resultater

I dette kapitlet skal vi presentere resultatene fra vår analyse, og med disse prøve å illustrere hvilke muligheter for algebraisk tenkning som finnes i de utvalgte læreverkene for å svare på problemstillingen: «På hvilken måte tilrettelegger utvalgte lærebøker for førsteklasse for at elevene skal utvikle algebraisk tenkning?». Vi vil først legge frem resultatene fra den kvantitative analysen av elevbøkene og svare på forskningsspørsmål 1 og 2, før vi går over til å presentere funnene fra lærerveiledningene fra den kvalitative analysen. Denne delen vil i hovedsak svare på forskningsspørsmål 3, men vil også bidra i å svare på hva som kjennetegner algebraisk tenkning i elevbøker for førsteklasse.

1. *Hva kjennetegner algebraisk tenkning i elevbøker for førsteklasse?*
2. *Hvor stor andel av oppgavene i elevbøkene gir mulighet for algebraisk tenkning?*
3. *Hvilke muligheter gir lærerveiledningene for å differensiere, i utviklingen av algebraisk tenkning?*

10.1.2 Beskrivelse av bøkene

Før vi går inn på de konkrete funnene vi har gjort, vil vi gi et lite overblikk over vårt generelle inntrykk av bøkene. Vi vil også peke på noen tendenser/trekk som fremstår som karakteristiske ved verkene med tanke på differensiering, og for mulighetene for å utvikle algebraisk tenkning.

<u>Matematikk</u>

Matematikk trekker frem i sine «Matematikkdidaktiske prinsipper» viktigheten av læreren og modellen «konkret-visuelt-abstrakt» som tar utgangspunkt i Bruners undervisningsteori (Dahl, Nohr, et al., 2020b, s. viii-ix). Lærerveiledningene bruker mye plass på å gjøre rede for de matematiske ideene bak innholdet elevene skal arbeide med, og sørge for at læreren vet hvorfor innholdet er nyttig for elevene. Det fremstår som noe tilfeldig eller ujevnt i hvilken grad læreren får støtte fra veiledningen i differensieringsarbeidet. Noen oppslag inneholder tips og forslag, da oftest hjelp til å forenkle ved at elevene bruker konkreter, men dette er heller ikke gjennomgående. Den kvantitative analysen viste at Matematikk hadde lite innhold i de fleste av kategoriene i analysen. Av det algebraiske innholdet skilte det seg ut at Matematikk var det eneste verket som benytter tabeller, innenfor funksjonstenkning.

Matemagisk

Matemagisk presenterer at de har et tydelig fokus på å utvikle elevenes begrepsforståelse og at verket er bygget opp av det de kaller systematisk begrepsundervisning (Fritzen, Nilsen, Nilsen & Nyborg, 2020, s. 6). Det kan tenkes at dette spesielle fokuset får utslag i analysen vår, ved at innholdet vi analyserer kan være nedprioritert til fordel for begrepsfokuset. Dette understreker også det vi har nevnt, at vi ikke kan si noe om verket som helhet. Vi kan kun si noe om det innholdet vi har sett på, som bare utgjør deler av verket. Vårt utvidede analyseverktøy ble tydelig hensiktsmessig i analysen av Matemagisk da det verket fikk størst utslag på kategorien pre EEEI. Når det gjelder algebraisk tenkning skiller verket seg ut ved å ha lav forekomst av generelt plan, og spesielt innenfor funksjonstenkning med kun en oppgave.

Lærerveiledningen gjentar i stor grad de samme poengene i mange av oppslagene. Veiledningen inneholder lite støtte til læreren i arbeidet med å utvikle algebraisk tenkning, og fremhever sjelden disse mulighetene eksplisitt. Som eksempel på dette så vi at elevboka inkluderte flere oppgaver som illustrerer kommutativ lov på en god måte, men at lærerveiledningen ikke retter oppmerksomheten på dette, og dermed ikke peker på disse mulighetene overfor læreren.

Multi

Oppgavene i elevbøkene sier ikke så mye annet enn hva elevene skal gjøre. Multi er derimot det eneste av alle læreverkene i vår analyse som eksplisitt fremhever differensiering, ved å ha tips under «forenkling» og «mer utfordring» til hvert eneste oppslag i elevbøkene. På denne måten skiller denne lærerveiledningen seg tydelig fra de andre, ved å ha tilsynelatende mer støtte til læreren i å gjøre tilpasninger for enkeltelevene. Vi oppdaget eksempler på at veiledningen tilførte andre matematiske ideer enn det elevbøkene først la opp til, og at det åpnet for flere muligheter for algebraisk tenkning enn det den kvantitative analysen viste. I den kvantitative analysen så vi at Multi hadde nest høyest andel i nesten alle kategoriene.

Volum

Volum skiller seg fra de andre verkene i at elevbøkene har stor variasjon i oppgavetyper og representasjonsformer. Verket gir med det et inntrykk av at elevene får relativt stor variasjon i leksjonene. I tillegg gir elevbøkene gir inntrykk av et høyere matematisk nivå enn de andre bøkene. Andelen av algebraisk tenkning var høyest i Volum i nesten samtlige av kategoriene.

I tillegg inneholdt Volum en større bredde i innholdet som inngår i de store ideene enn noen av de andre verkene. Blant annet må elevene forholde seg til likhetstegnet og variabler på flere ulike måter. Volum er bygget opp av ferdige leksjoner som lærerne kan velge å følge. Disse er grundig forklart i lærerveiledningene, men de bærer preg av å være lite fleksible med tanke å foreslå tilpasninger læreren kan gjøre og nevner sjelden noe eksplisitt om differensiering. Vi fant også at læreren i liten grad får innsikt i de matematiske ideene som ligger til grunn for de ulike oppgavene.

11 Elevbøkene (den kvantitative analysen)

Vi vil se på hvor mye algebraisk innhold som finnes i de ulike læreverkene, og hvor stor del av oppgavene som ikke tilhører noen av de store ideene (se tabell 4). Vi vil også peke på noen eksempler på hva oppgavene utenfor rammeverket inneholder. Deretter vil vi gå over til å se på det algebraiske innholdet i bøkene, ved å ta for oss en kategori av gangen, presentere noen eksempler, og sammenhenger mellom de ulike kategoriene.

11.1.1 Utenfor kategoriene

Tabellen under (tabell 4) viser hvor mange, og hvor stor del av oppgavene i elevbøkene som inneholder muligheter for algebraisk tenkning. Her ser vi en forskjell mellom verkene på mer eller mindre 20 prosent, fra Matemagisk som har 33,1 prosent, til Volum som har 55,4 prosent. Tabellen illustrerer også hvor stor del av oppgavene i bøkene som ikke har havnet i noen av våre kategorier i denne analysen. Det er forskjeller mellom verkene også her, men variasjonen ser noe annerledes ut. Naturlig nok er det Matemagisk som har størst prosentandel utenfor kategoriene, da det også er det verket med lavest prosentandel innenfor kategoriene. Multi er likevel det verket med minst innhold utenfor kategoriene, enda det ikke var det med mest innhold innenfor.

	Ant. oppg. totalt	Oppg. Store ideer	Prosentandel	Oppg. ingen kategori	Prosentandel
Totalt i Matematikk 1	742	284	38,3%	339	45,7%
Totalt i Matemagisk 1	432	143	33,1%	205	47,5%
Totalt i Multi 1	589	297	50,4%	172	29,2%
Totalt i Volum 1	756	419	55,4%	245	32,4%

Tabell 4 Oversikt over fordeling i og utenfor «Store ideer»

I denne tabellen har vi ekskludert oppgavene som tilhører vår sidekategori «pre EEEI» og de oppgavene hvor «utregning» opptrer alene, ettersom de ikke er inkludert under de store ideene i rammeverket. Denne tabellen illustrerer derfor ikke hundre prosent av oppgavene i elevbøkene, men heller hvor stor del vi har ansett som algebraisk innhold, og hvor stor del som ikke er del av våre kategorier. Oppgavene som ikke er inkludert i vår analyse har for eksempel tatt for seg temaer som former, måling, rekkefølge og å lære klokka.

11.1.2 Algebraisk tenkning i læreverkene

Tabell 5 viser at Volum har høyest forekomst innenfor fire av de fem store ideene. Multi havner som nummer to med en generelt høyere andel enn Matemagisk og Matematikk. Matemagisk har lavest prosentandel i tre av de fem store ideene og Matematikk har lavest forekomst i de to resterende kategoriene. Vi vil nå gå nærmere inn på de ulike kategoriene i analyseverktøyet.

		Pre EEEI	Utregning	EEEI	GA	FT	VAR	PR
Totalt i Matematikk 1								
Antall oppgaver	742	69	59	243	56	45	40	1
Prosentandel		9,3%	8,0%	32,7%	7,5%	6,1%	5,4%	0,1%
Totalt i Matemagisk 1								
Antall oppgaver	432	62	23	141	36	1	28	1
Prosentandel		14,4%	5,3%	32,6%	8,3%	0,2%	6,5%	0,2%
Totalt i Multi 1								
Antall oppgaver	589	65	70	243	71	41	43	11
Prosentandel		11,0%	11,9%	41,3%	12,1%	7,0%	7,3%	1,9%
Totalt i Volum 1								
Antall oppgaver	756	57	77	345	152	59	117	3
Prosentandel		7,5%	10,2%	45,6%	20,1%	7,8%	15,5%	0,4%

Tabell 5 Fordeling i kategoriene til vårt analyseverktøy i læreverkene

PRE

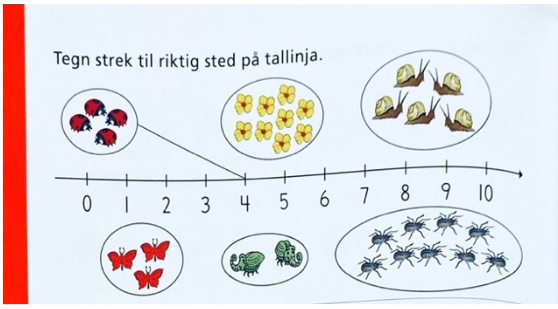
Pre EEEI inneholder, som vi har vist tidligere, oppgaver som er på vei inn i den store ideen EEEI, men som enda ikke kan inkluderes i denne. Denne kategorien opptrer ikke sammen med noen av de andre kategoriene i vår analyse. Vi har utelukket muligheten for å overlappe mellom kategoriene pre EEEI, EEEI og utregning, så det forklarer hvorfor disse ikke opptrer samtidig.

Vi kan se i tabell 6 at Matemagisk har høyest forekomst av pre EEEI, og det kan tenkes at det har sammenheng med at det samme verket har lavest forekomst av EEEI, da disse to kategoriene ikke kan overlappe. I denne sammenhengen kan vi også se at det motsatte gjelder for Volum, som har høyest prosentandel EEEI og lavest prosentandel pre EEEI.

Pre EEEI	Matematikk 1	Matemagisk 1	Multi 1	Volum 1
Antall oppgaver	69	62	65	57
Prosentandel	9,3 %	14,4 %	11,0 %	7,5 %

Tabell 6 Forekomst av Pre EEEI fordelt i læreverkene

Tabellen illustrerer også behovet vi hadde for å utvide rammeverket med nettopp denne kategorien. Prosentandelene varierer fra omtrent syv til fjorten prosent mellom de ulike bøkene, med oppgaver som ikke inngikk i det opprinnelige analyseverktøyet til Blanton, Stephens, et al. (2015). Dette er en relativt stor del av oppgavene det ikke hadde vært mulig å si noe om uten å tilpasse verktøyet og legge til denne kategorien.



Bilde 1 Eksempel på oppgave i pre EEEI i Matemagisk (Fritzen, Nilsen, Nilsen, Nyborg, Engmark, et al., 2020, s. 86)

Bilde 1 Eksempel på oppgave i pre EEEI i Matemagisk (Fritzen, Nilsen, Nilsen, Nyborg, Engmark, et al., 2020, s. 140)

Utregning

Analysen vår viste at det i Multi, som inneholdt mest i «utregning», fant vi at bare 12,1 prosent av oppgavene falt inn under denne kategorien, noe som var overraskende for oss, ettersom skolearitmetikken ofte er «utregningsfokusert» (Kaput, 2008) og utregningsoppgaver ofte brukes som mengdetrening for å automatisere regnestrategier hos elevene. Vi forventet derfor at «utregning» skulle ha en høy andel av oppgavene i alle læreverkene.

Multi har mer enn dobbelt så høy prosentandel av oppgaver som inneholder utregning, som Matemagisk, med lavest forekomst (se tabell 7). At Matemagisk har lavest forekomst her forteller oss ikke nødvendigvis så mye, men det kan si noe om mengdetreningen elevene får, og kanskje hvordan verket forholder seg til likhetstegnet. At Volum har den høyeste prosentandelen trenger heller ikke å si så mye om mulighetene for å utvikle algebraisk tenkning, men det kan si noe om at de har oppgaver som bygger opp under den operasjonelle forståelsen av likhetstegnet.

Utregning	Matematikk 1	Matemagisk 1	Multi 1	Volum 1
Antall oppgaver	59	23	71	77
Prosentandel	8,0 %	5,3 %	12,1 %	10,2 %

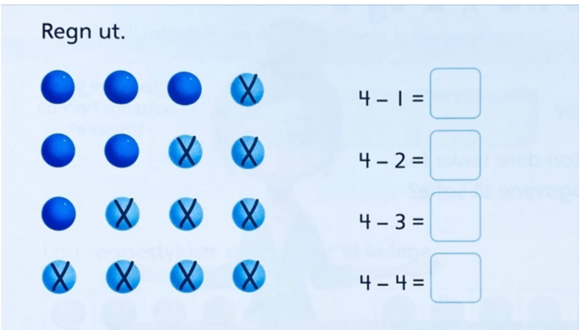
Tabell 7 Utregning og Store ideer

Utregning alene	Matematikk 1	Matemagisk 1	Multi 1	Volum 1
Antall oppgaver	50	22	55	35
Prosentandel	6,7 %	5,1 %	9,3 %	4,6 %

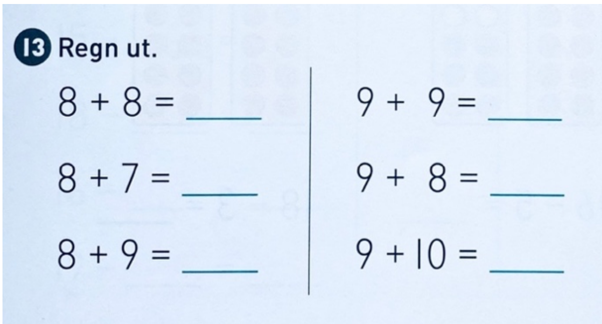
Tabell 8 Utregning utenfor Store ideer

Utregningsoppgavene opptrer i stor grad uten tilknytning til noen av de store ideene (tabell 8Tabell) Dette kan skyldes at vi har valgt at utregning og EEEI utelukker hverandre, og pre EEEI, og at disse høyst sannsynlig hadde overlappet om vi åpnet for dobbelkoding her. Dersom vi sammenlikner tabell 7 og tabell 8 kan vi se at Volum og Multi inneholder mange oppgaver hvor utregning opptrer samtidig med de store ideene, mens Matemagisk kun har én av disse, og Matematikk har ni oppgaver hvor dette er tilfellet.

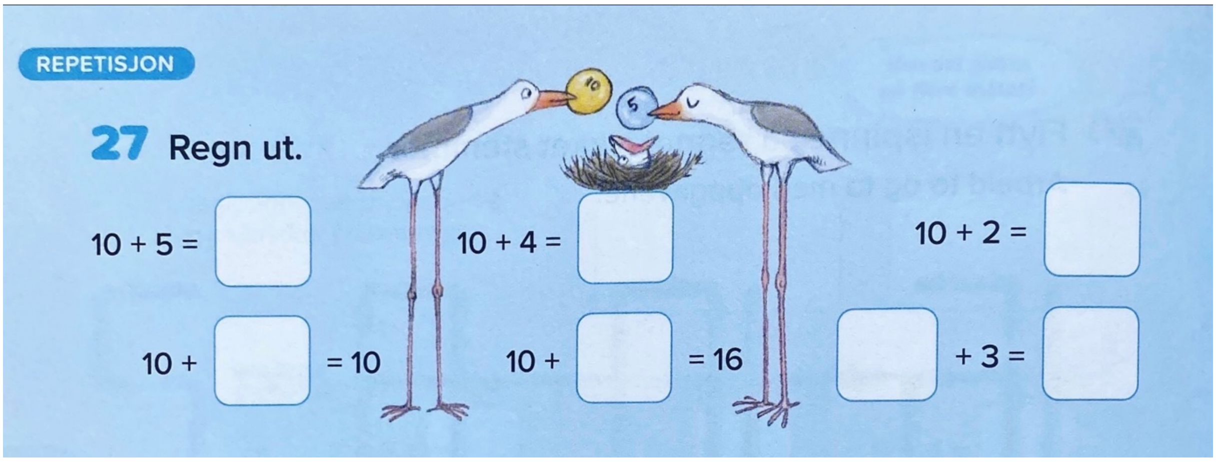
Her kan vi også se hvordan behandlingen av likhetstegnet her har plassert disse oppgavene i kategorien for utregning, og ikke EEEI.



Bilde 3 Utregning i Matematikk (Dahl, Nohr, et al., 2020c, s. 93)



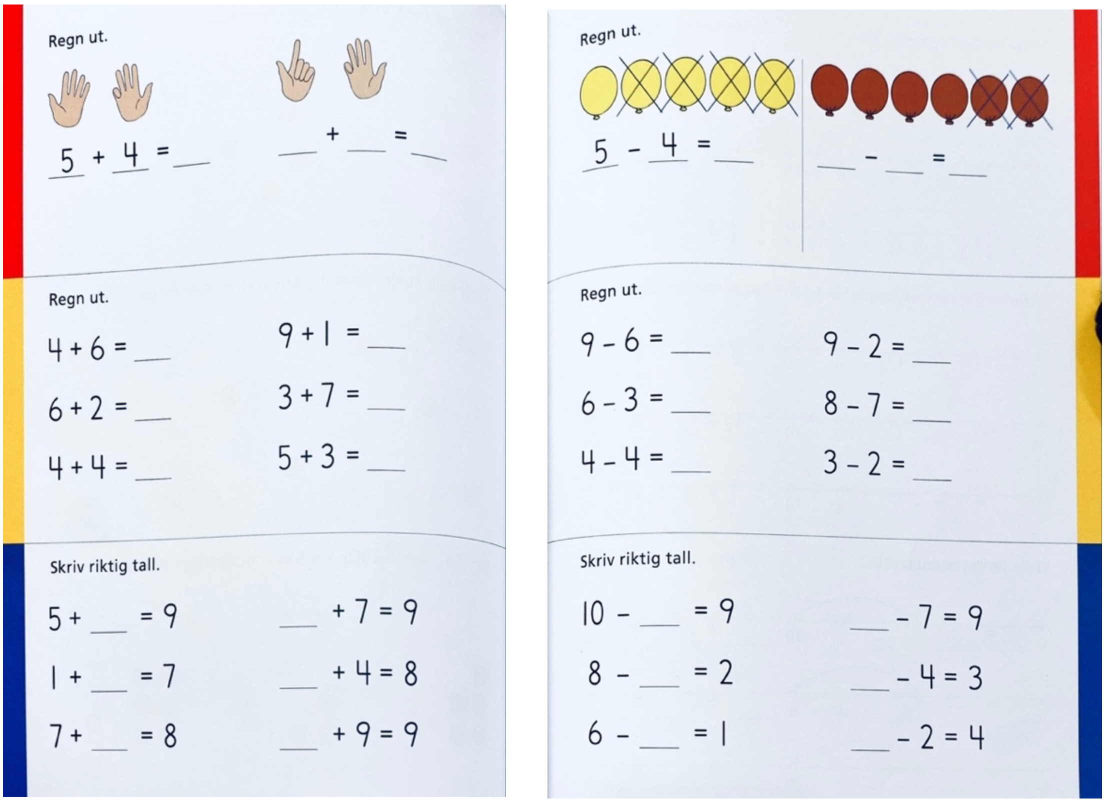
Bilde 4 Utregningsoppgave i Multi (Alseth et al., 2020c, s. 93)



Bilde 2 Både utregning og EEEI i Volum (Olafsen, Korsvold & Kaufmann, 2020, s. 146)

I eksempelet over kan vi se at Volum endrer plasseringen på de tomme plassene innenfor en og samme oppgave. Dette gjør at elevene må elevene forholde seg til likhet på en relasjonell måte, og derfor har oppgaver som denne blitt plassert innenfor kategorien EEEI og ikke utregning. Fordi vi valgte å ha disse kategoriene utelukkende for hverandre, påvirker det også tallene i tabellen over, i den forstand at dette eksempelet kunne blitt inkludert i Utregning. Dette fordi det inneholder utregningsoppgaver med utgangspunkt i en operasjonell forståelse av likhetstegnet, men fordi vi også finner oppgaver for bygger opp under en relasjonell forståelse av likhetstegnet i samme oppgave, vil EEEI utelukke for Utregning.

Matemagisk har noe de kaller «sporsider», hvor det legges opp til at alle elevene skal starte på det rød sporet, og bevege seg til gul og så eventuelt til det blå sporet, hvis tiden skulle strekke til. I eksempelet under (bilde 6) kan vi se at de ulike sporene inneholder ganske forskjellige oppgaver. I dette oppslaget ser vi også en tydelig forskjell i behandlingen av likhetstegnet mellom gult og blått spor. I det gule sporet er oppgavene stilt opp på en måte som plasserer dem i kategorien «utregning», fordi de bygger opp under elevenes operasjonelle forståelse av likhetstegnet. I det blå sporet derimot, ser vi åpne tallsetninger som bygger opp under elevenes relasjonelle forståelse av likhetstegnet. Derfor har oppgavene i det blå sporet blitt plassert i kategorien for likhet, ulikheter, likninger og uttrykk (EEEI). Dette betyr at oppgavene i det blå sporet inneholder muligheter for elevene å utvikle algebraisk tenkning, mens det gule sporet ikke gjør det. Likevel skal elevene arbeide seg gjennom det gule sporet før de kommer til det blå. Det oppleves heller ikke som en prioritet at alle elevene kommer seg til oppgavene i det blå sporet.



Bilde 3 Oppgaver på «sporsider» i Matemagisk (Fritzen, Nilsen, Nilsen, Nyborg, Engmark, et al., 2020, s. 118-119)

Denne innsikten får vi fordi vi har en egen kategori for denne typen behandling av likhetstegnet (utregning) og fordi vi også har gjort en tematisk analyse av lærerveiledningene. Uten lærerveiledningene ville vi ikke fått et helt bilde av hva det forventes av elevene, eller hvilke oppgaver som er ment at skal prioriteres først. Med denne innsikten har vi grunn til å tro at elevene kan få veldig ulike erfaringer, og ikke minst, ulik mengde erfaringer med likhetstegnet.

Utregningsoppgaver fant vi i alle lærebøkene, men her skilte Volum seg fra de andre bøkene ved å flytte rundt på plasseringen av likhetstegnet (se bilde 5). De andre bøkene viser flest eksempler hvor elevene i den ene oppgaven forholder seg operasjonelt til likhetstegnet, og i den neste forholder seg relasjonelt til likhetstegnet.

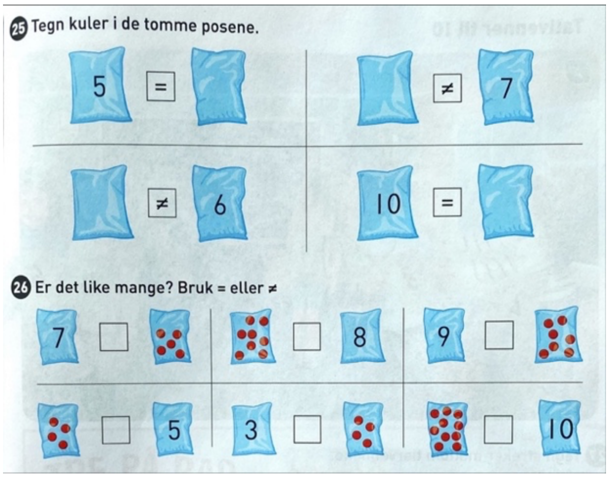
Likhet, ulikhet, likninger og uttrykk

Den store ideen likhet, ulikhet, likninger og uttrykk (EEEI) var den kategorien med flest oppgaver i samtlige av læreverkene. Som vi kan se i tabell 9 under er det store forskjeller i prosentandelen av oppgaver som inneholder EEEI på tvers av verkene. Volum har den høyeste andelen med 45,6 prosent av alle oppgavene i hele verket, mens Matematikk og Matemagisk har lavest med henholdsvis 32,7 prosent og 32,6 prosent.

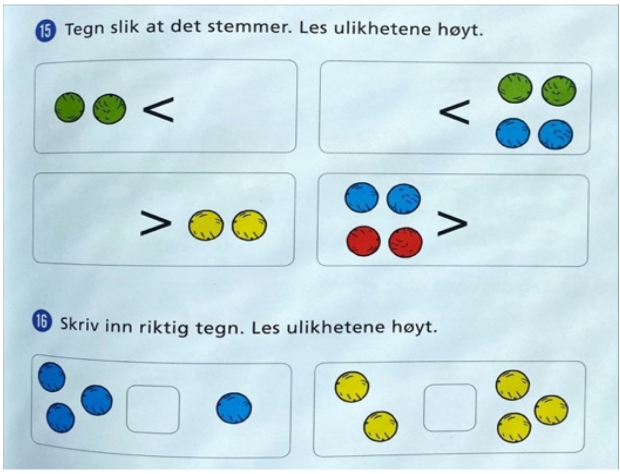
EEEI Likhet, ulikhet, likninger og uttrykk	Matematikk 1	Matemagisk 1	Multi 1	Volum 1
Antall oppgaver	243	141	243	345
Prosentandel	32,7 %	32,6 %	41,3 %	45,6 %

Tabell 4 Forekomst av EEEI fordelt på læreverkeneTabell 9 Forekomst av EEEI fordelt på læreverkene

EEEI forekommer ofte alene som kategori, som vil si at det er den eneste store ideen representert i oppgaven det gjelder. I eksemplene under ser vi to ulike måter elevene kan arbeide med likheter og ulikheter på. Vi vil senere komme inn på andre eksempler hvor EEEI er representert sammen med noen av de andre store ideene.



Bilde 7 Eksempel på oppgave i EEEI fra Multi (Alseth et al., 2020c, s. 53)



Bilde 4 Eksempel på oppgave i EEEI fra Matemagisk (Fritzen, Nilsen, Nilsen, Nyborg, Engmark, et al., 2020, s. 45)

Generalisert aritmetikk

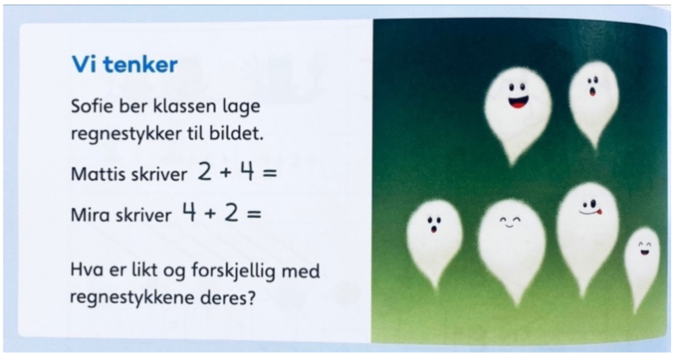
GA var i nokså liten grad representert i tre av læreverkene. Tabell 10 viser fordelingen mellom verkene og vi kan se at det er stor forskjell mellom Volum og Matematikk som er henholdsvis høyest og lavest. Volum skiller seg også ut ved å ha nesten dobbelt så høy prosentandel som Multi, som er nummer to i rekka her. Det er mindre forskjell mellom Matematikk og Matemagisk som ligger som nummer tre og fire.

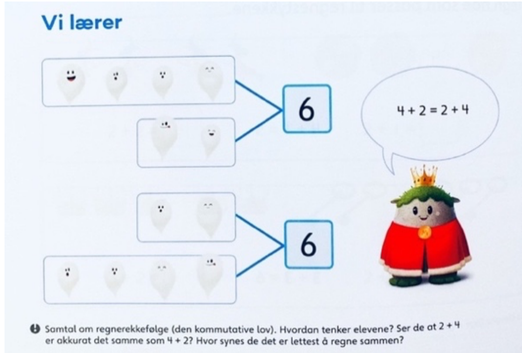
GA Generalisert aritmetikk	Matematikk 1	Matemagisk 1	Multi 1	Volum 1
Antall oppgaver	56	36	71	152
Prosentandel	7,5 %	8,3 %	12,1 %	20,1 %

Tabell 5 Forekomst av GA i læreverkeneTabell 10 Forekomst av GA i læreverkene

GA opptrådte også ofte i oppgaver som inneholdt utregning. Dette var gjennomgående i alle bøkene. De aller fleste av disse oppgavene inneholder en mulighet for å oppdage den kommutative lov i addisjon, men er kun oppstilt som «rene utregningsoppgaver» med formatet «1 + 2 =», slik at de havner i kategorien «utregning» fremfor EEEI. Andre varianter av GA med «utregning» vi så var i sammenheng med tallet null, som for eksempel i oppgaver som «1 + 0 =», eller «3 – 3 =». Dette beregnet vi også som GA ettersom elevene kan bli oppmerksomme på generelle egenskaper ved tallet 0, som for eksempel a + 0 = a og a – a = 0 (Blanton et al., 2011, s. 16).

De få eksemplene vi så hvor GA var den eneste store ideen representert, inneholdt for eksempel sammenlikning av regnestykker. I oppslaget under fremhever Matematikk den kommutative lov i addisjon (GA), i sammenheng med viktigheten av en god forståelse av likhetstegnet (EEEI) (bilde 9). Den første oppgaven, «Vi tenker», oppfordrer elevene til å sammenlikne det to ulike måtene å skrive et addisjonsstykke på, slik at de kan oppdage den kommutative lov, ved å se på strukturen i regnestykket.

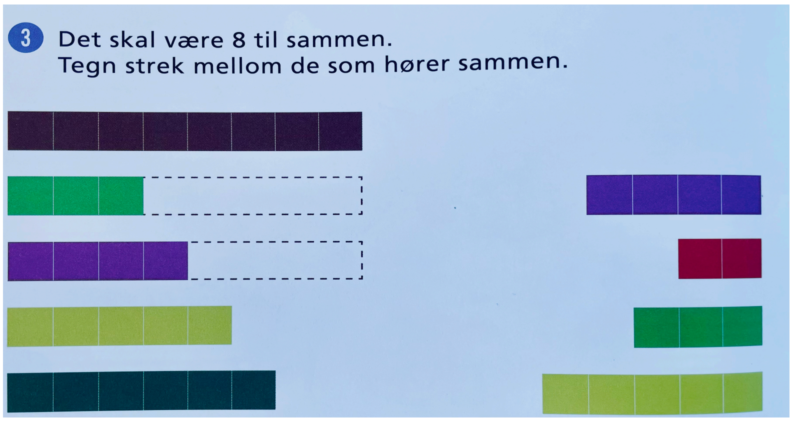


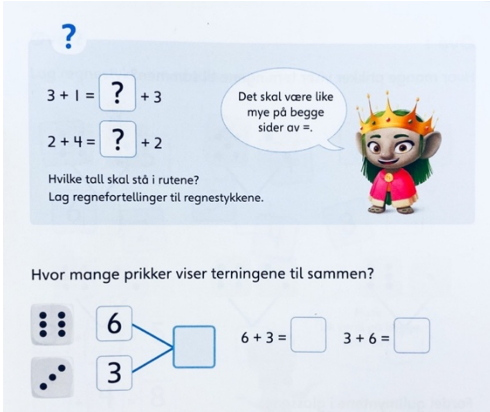


Bilde 9 Oppgaver med kommutativ lov i Matematikk (Dahl, Nohr, et al., 2020c, s. 76)

På «Vi lærer» får elevene en mer visuell forklaring. I dette eksemplet er det nevnt eksplisitt også i elevboka, som en bemerkning til læreren nederst på siden: «Samtal om regnerekkefølge (den kommutative lov). Hvordan regner elevene? Ser de at 2 + 4 er akkurat det samme som 4 + 2? Hvor synes de det er lettest å regne sammen?» (Dahl, Nohr, et al., 2020c, s. 76). Lærerveiledningen supplerer også lærerens kunnskap ytterligere, ved å ha en egen del som fokuserer på akkurat rekkefølgen i addisjon og en mer utdypende forklaring. På den neste siden får elevene prøve seg videre med å bruke den kommutative lov, samtidig som de også blir minnet på hva symbolet for «er lik» betyr. Også her får læreren en nærmere forklaring på hvorfor denne forståelsen er viktig: «Det er viktig å legge vekt på at likhetstegnet betyr «lik verdi på begge sider», dette er viktig for seinere algebraforståelse» (Dahl, Nohr, et al., 2020c, s. 77), noe som kan hjelpe læreren til å ha dette i bakhodet når de fortsetter å jobbe med både rekkefølgen i addisjon, og likhetstegnet.

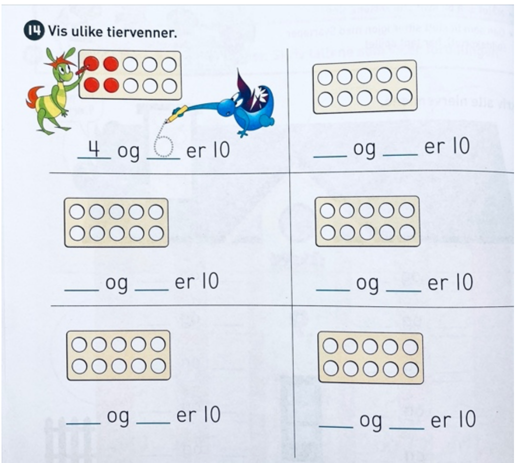
GA forekom ofte sammen med EEEI, og noen eksempler på dette kan vi se i de fire bildene under (bilde 10-13), hvor elevene skal sette sammen to mengder, eller dele en mengde i to. Disse oppgavene krever at elevene forholder seg til en mengde og må skape likhet i «uttrykkene» (EEEI), i tillegg til at de gir mulighet for å se, og ta i bruk, den kommutative lov (GA). Det som skiller oppgaven i Matematikk (bilde 11) fra de tre andre verkene, er at den tar det opp eksplisitt, i selve elevboka.





Bilde 10 Oppgave med kommutativ lov i Matemagisk (Fritzen, Nilsen, Nilsen, Nyborg, Engmark, et al., 2020, s. 90)

Bilde 11 Oppgaver med kommutativ lov i Matematikk (Dahl, Nohr, et al., 2020c, s. 77)



Bilde 12 Oppgave med kommutativ lov i Multi (Alseth et al., 2020a, s. 44)

Bilde 13 Oppgave med GA og EEEI fra Volum 1A (Olafsen, Korsvold, Onsrud, Kaufmann, et al., 2020, s. 114)

Alle læreverkene har flere oppgaver hvor elevene kan oppdage den kommutative lov, men lærerveiledningen poengterer dette sjelden for læreren. Matemagisk hadde flere oppgaver som illustrerte den kommutative lov på gode måter (som for eksempel bilde 10) men lærerveiledningen uthevet ikke denne muligheten for læreren overhodet. Vi merket oss også spesielt at Volum kun nevnte den kommutative lov en gang i lærerveiledningene, på tross av at læreverket inneholdt langt flere oppgaver med GA enn de andre verkene. I oppgaven fra Volum (bilde 13) skal elevene lage fem addisjonsstykker som alle blir fem til sammen. Den kommutative lov ble da forklart på denne måten, i sammenheng med oppgaven:

> For å få fem ulike addisjoner må noen av de samme tallene brukes igjen, bare i en annen rekkefølge. Dermed kan elevene oppdage den kommutative loven. Den går ut på at rekkefølgen mellom leddene er likegyldig og altså kan byttes om i addisjon, for eksempel $1 + 3 = 3 + 1$ (Bugten & Olafsen, 2020, s. 73).

Lærerveiledningen forklarer hva den kommutative loven går ut på, men tilbyr allikevel lite støtte til læreren for hvordan en kan jobbe med oppgaven for å hjelpe elevene å forstå hva loven innebærer.

Selv om vi fant flere varianter av generalisert aritmetikk, var fremdeles forekomsten lav nok til at vi i likhet med Bråting et al. (2019), opplevde det som et oppsiktsvekkende funn at GA er så svakt representert flere av lærebøkene, når vi vet at det er et viktig element i tidlig algebra (Kaput, 2008; Kieran et al., 2016) og så viktig for algebraisk tenkning (Blanton, Stephens, et al., 2015).

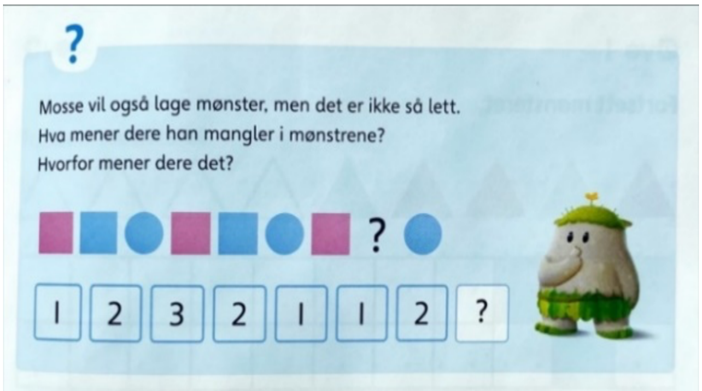
Funksjonstenkning

Med tanke på hvor viktig funksjonstenkning er for den algebraiske tenkningen og potensialet det har for å hjelpe elevene å forstå blant annet algebra senere i skoleløpet, opplevde vi at det var svært lav forekomst av muligheter for FT i alle verkene. Matemagisk skiller seg tydelig fra de andre verkene i denne kategorien med kun 0,2 prosent innenfor funksjonstenkning. Da de tre andre læreverkene ligger relativt tett mellom 6,1 prosent til 7,8 prosent, blir denne forskjellen enda tydeligere (se tabell 7)

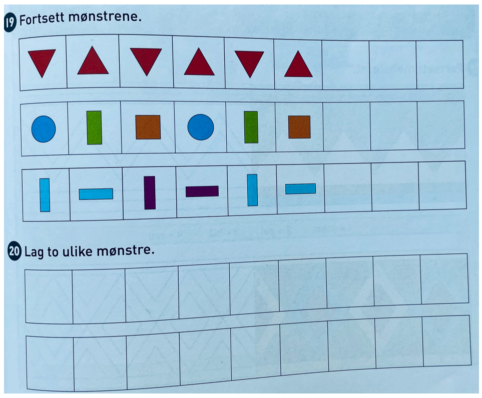
FT Funksjonstenkning	Matematikk 1	Matemagisk 1	Multi 1	Volum 1
Antall oppgaver	45	1	41	59
Prosentandel	6,1 %	0,2 %	7,0 %	7,8 %

Tabell 5 Forekomst av FT i læreverkeneTabell 11 Forekomst av FT i læreverkene

I analysen vår så vi at kategorien opptrådte oftest uten at de andre store ideene var involvert. Dette kan skyldes at kategorien FT inneholder mange mønsteroppgaver som ikke inkluderer noen av de store ideene. Noen typiske eksempler på mønsteroppgaver er illustrert under (bilde 14 og 15). Denne typen oppgave, hvor elevene skal fortsette et mønster, reflektere over hva som kommer videre eller lage egne mønstre, var nokså like i alle de forskjellige lærebøkene. Det kan tenkes at denne typen oppgaver være en naturlig måte for elevene å begynne å forholde seg til sammenhenger ved å bruke ulike typer mønstre, og dermed er det ikke overraskende at det er dette vi finner mest av på første trinn.



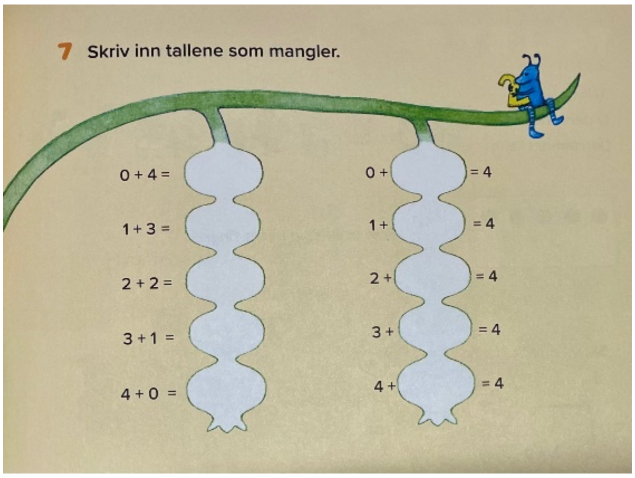
Bilde 14 Mønsteroppgave i Matematikk (Dahl, Nohr, et al., 2020c, s. 43)



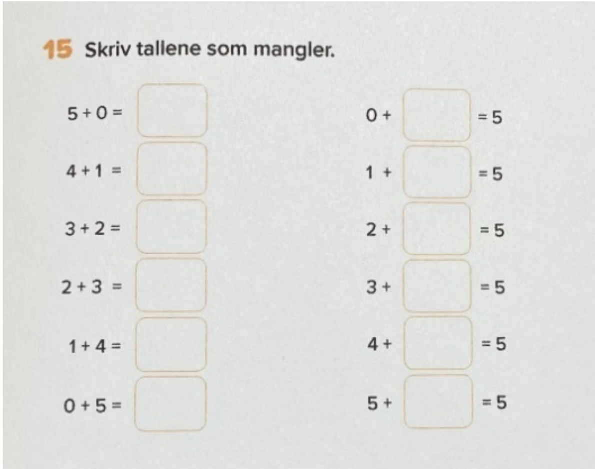
Bilde 15 Mønsteroppgave i Multi (Alseth et al., 2020c, s. 45)

I Multi fant vi eksempler på at lærerveiledningen tilfører noe som kan fremme muligheten for å oppdage disse sammenhengene i mønsteroppgavene. Til oppgaven over (bilde 15) så vi blant annet at læreren ble oppfordret til å be elevene øve på å beskrive mønstrene de så eller laget, ved å samtale om dem og lage mønstre andre beskrev (Alseth et al., 2020d, s. 45). Læreren ble også bedt om å ha kriterier og presisere for elevene at de skulle lage mønstre, og deretter: «Observer om elevene har forstått at et mønster blir lagd av at to-fire enheter gjentas, og at de ikke bare fargelegger rutene med tilfeldige farger og tilfeldig rekkefølge» (Alseth et al., 2020d, s. 45). På denne måten kan læreren få støtte til hvordan de kan konkretisere oppgaven for elevene (to-fire enheter som gjentas), og mulig videreutvikle funksjonstenkningen, slik at det kanskje kan bli tydeligere hva de skal se etter i andre mønsteroppgaver.

Oppgavene under, fra Volum, inneholder de store ideene EEEI, GA, FT og VAR. Ved å ha med åpne tallsetninger som på høyre side i oppgavene, åpner de for en måte å forholde seg til likhetstegnet som er annet enn bare utregning. Vi har derfor inkludert dem i EEEI. Det viser også eksempel på hvordan VAR kan se ut som «ukjent tall». Fordi de er satt opp på en systematisk måte, kan det være lettere for elevene å oppdage den kommutative lov (GA) og mønstre i regnestykkene (FT), enn dersom oppgavene stod mer tilfeldig plassert. Flere av oppgavene i Volum inneholder også liknende oppgaver, og noen av dem legger til eksplisitt i oppgaveteksten at elevene skal se etter mønstre i svarene. Dette fant vi ikke i noen av de andre verkene.



Bilde 16 Strukturerte regneoppgaver i Volum (Olafsen, Korsvold, Onsrud, et al., 2020a, s. 97)

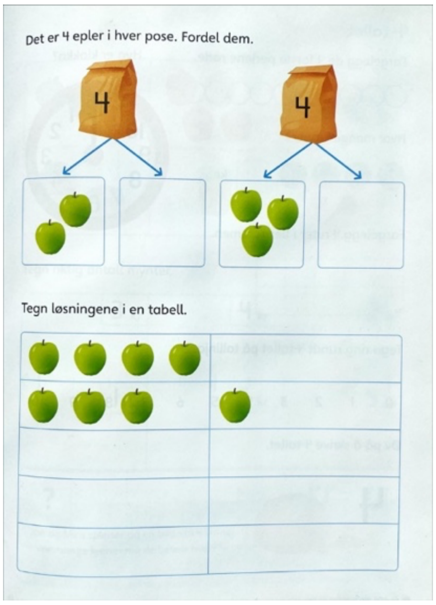


Bilde 17 Strukturerte regneoppgaver i Volum (Olafsen, Korsvold, Onsrud, et al., 2020a, s. 101)

Selv om oppgavene (bilde 16 og bilde 17) ser identiske ut i formatet, oppdaget vi en vesentlig forskjell i kommentarene i lærerveiledningen. Kommentaren til den første oppgaven (bilde 16) er: «Elever som blir raskt ferdige, kan få i oppgave å studere de to loddrette oppgavekolonnene og lete etter system eller mønstre» (Bugten & Olafsen, 2020, s. 53). Her kan vi se at en mulig differensiering først og fremst gjelder for de elevene som har et høyere tempo, og at disse elevene kan få en større mulighet til å oppdage den generelle sammenhengen, som kan være med å utvikle funksjonstenkningen (FT) deres. Bilde 17 har en helt annen kommentar til læreren: «**Tilleggsspørsmål:** Venstre oppgave: Ser elevene et mønster i tallene? Høyre oppgave: Tallet som mangler, minker med en for hver linje nedover. Hvorfor?» (Bugten & Olafsen, 2020, s. 55).

Som nevnt over, blir sannsynligheten for å oppdage sammenhenger mellom regnestykkene mye høyere når de er satt opp systematisk, men muligheten styrkes ytterligere av at det fremheves spesifikt i lærerveiledningen tilhørende bilde 17**Feil! Fant ikke referansekilden.** (Bugten & Olafsen, 2020, s. 55). Lærerveiledningen anbefaler læreren å gå gjennom denne oppgaven i avslutningen av timen, også med tilleggsspørsmålene. Dette kan tolkes som at forfatterne mener alle elevene kan være mottakelige for å utforske disse sammenhengene, så det fremstår som uklart hvorfor muligheten allikevel blir forbeholdt elever som har høyt nok tempo i andre oppgaver.

Oppgaven på bilde 18 fra Matematikk er et annet eksempel på hvordan begynnende funksjonstenkning kan se ut i førsteklasse. Den inneholder også muligheten til å oppdage den kommutative lov (GA), ved at elevene ser sammenhengen mellom at tre epler og ett eple er det samme som ett eple og tre epler. Matematikk hadde, som eneste verk, mange av disse oppgavene hvor elevene skal fordele mengder i en tabell, enten som bilder av konkrete objekter (som eplene), som sirkler, eller som tallsymboler. Selv om de andre læreverkene ikke brukte tabeller på denne måten, fant vi flere eksempler hvor en annen type tabell var en del av oppgaven, enten i elevboka eller som et forslag fra lærerveiledningen.



Bilde 18 6 Oppgave med tallvenner i Matematikk (Dahl, Nohr, et al., 2020a, s. 85)

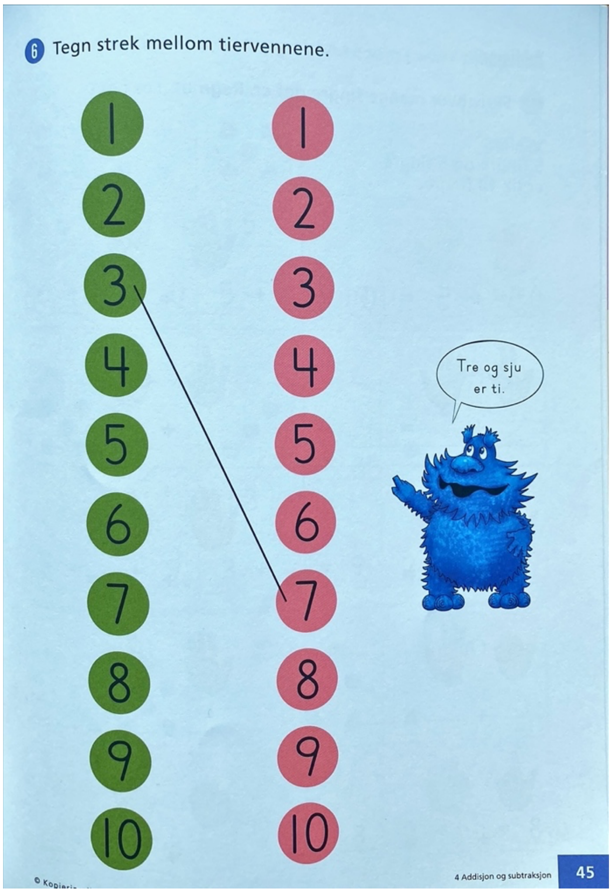
Bilde 19 Oppgave med tallvenner i Multi (Alseth et al., 2020a, s. 85)

Et annet trekk ved oppgavene som fremheves av lærerveiledningen er sammenhengen mellom antall objekter og antall mulige løsninger, som kan sies å være enda mer abstrakt enn å kun se etter mønster i tabellen. Det står:

> På forrige side var det 5 kaker og 6 mulige løsninger. Nå er det 4 epler og 5 mulige løsninger. Hm, er det et mønster her? Prøv gjerne med 3 eller 5 epler. Hvor mange løsninger tror dere det blir da? (Dahl, Nohr, et al., 2020b, s. 85)

Vi opplever dette som styrkende for funksjonstenkningen hos elevene og som en måte å utvide oppgaven. Elevene får muligheten til å undre seg og utforske sammenhengen mellom antall objekter som skal fordeles i to grupper og antall mulige løsninger, slik at de kanskje kan utvikle bedre forståelse for funksjoner oppover i skoleløpet. Læreren oppfordres til å spørre elevene blant annet om å forklare hvordan de tenker, og om å gjette hvor mange løsninger det er basert på antallet de skal fordele, i tillegg til at de bør løfte frem hensiktsmessige løsningsmetoder som for eksempel å jobbe systematisk (Dahl, Nohr, et al., 2020b, s. 95), noe som kan bidra til å påvirke elevenes måte å tenke på, på en positiv måte. Oppgaven følges ikke videre opp i lærerveiledningen, og læreren står i stor grad uten hjelp fra veiledningen til å gi en god forklaring på denne sammenhengen, som potensielt kan være utfordrende.

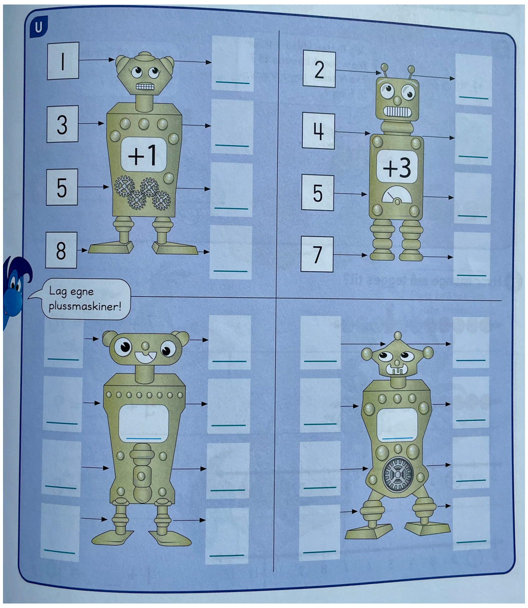
Multi har også liknende eksempler med å dele mengder i to, som inneholdt både EEEI, GA og FT, men uten tabelloppsettet. Dette gjelder spesielt for oppgaver om tallvenner. Et eksempel på denne typen oppgave kan vi se på bilde 19, hvor elevene skal skrive alle «sjuervennene». Lærerens bok tilbyr imidlertid læreren hjelp til å lede elevene mot å systematisere, ved å trekke frem at elevene kan finne alle tallvennene ved å sortere dem. Hvis tallvennene systematiseres som dette, kan det komme nærmere et tabelloppsett, og oppgavetypen i Multi kan da i likhet med Matematikk, også inneholde funksjonstenkning (FT), selv om oppgaven i elevbøkene i seg selv ikke tilrettelegger for å se disse sammenhengene eller mønstrene. Dette vil gjelde for mange av oppgavene i alle læreverkene, slik at forekomsten av FT hadde vært vesentlig høyere dersom flere av oppgavene eksplisitt la opp til denne systematiseringen.



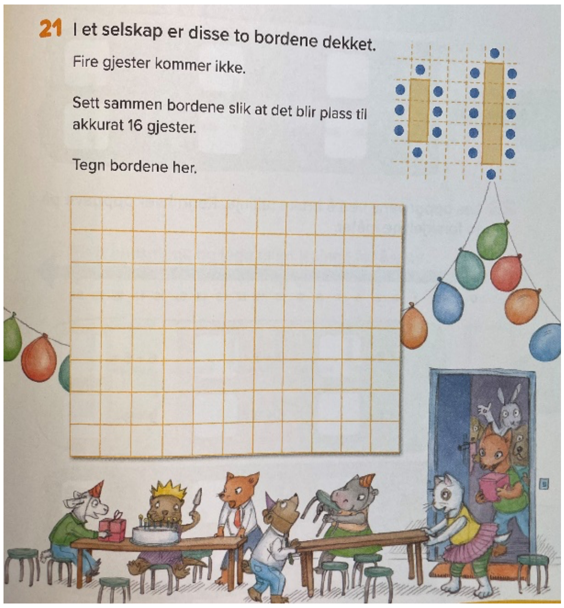
Bilde 20 Systematisert tiervennoppgave i Matemagisk (Fritzen, Nilsen, Nilsen, Nyborg, Baklid, et al., 2020, s. 45)

Det mest oppsiktsvekkende vi fant, var at Matemagisk kun hadde én oppgave, 0,2 prosent av alle oppgavene, som havnet innenfor kategorien for funksjonstenkning (FT). Denne ene oppgaven omhandler tallvenner, som vi ser på bilde 20. Vi regnet den med i FT fordi den systematiske oppstillingen gir elevene muligheten til å oppdage hvordan de grønne og røde tallene varierer i forhold til hverandre. Eksempelet er hentet fra oppgaveboka, og det eneste som finnes av informasjon rundt oppgaven, er oppgaveteksten: «Tegn strek mellom tiervennene». Elevene blir altså ikke oppfordret til å se etter mønster, og selv om vi kodet oppgaven som både EEEI, GA og FT, kan denne manglende oppfordringen kanskje føre til at elevene løser den mer som en utregningsoppgave. På denne måten kan mulighetene bli oversett. Lærerveiledningen gir heller ingen råd om hvordan en kan justere nivået i oppgaven, ettersom det ikke finnes veiledning til oppgaveboka. Vi fant heller ikke noen tilsvarende oppgaver i grunnboka.

I Multi fant vi også eksempler på en form for «funksjonsmaskin» (bilde 21), hvor elevene må se på hvordan tallene endrer seg i «plussmaskinen». Elevene skal også lage egne plussmaskiner hvor de må beskrive denne endringen selv, ved å fylle inn den tomme ruta på maskinen. Denne typen oppgave var noe som var unikt for Multi.



Bilde 21 Oppgave med funksjonsmaskiner i Multi (Alseth et al., 2020a, s. 85)



Bilde 22 Oppgave med funksjonstenkning i Volum (Olafsen, Korsvold & Kaufmann, 2020, s. 143)

En annen form for funksjonstenkning vi bare fant to eksempler av, så vi i Volum (bilde 22). Denne likner en av oppgavene Blanton, Stephens, et al. (2015) brukte i sin studie, for å undersøke funksjonstenkning i tredjeklasse. Vi forventet derfor ikke å finne slike oppgaver allerede på førstetrinn. Oppgaven oppfordrer ikke elevene til å se på sammenhengen mellom antall bord og antall personer på samme måte som hos Blanton, Stephens, et al. (2015), men den kan være en inngang til å begynne å se på hvordan disse varierer i forhold til hverandre, slik at det mulig kan bli lettere å møte disse oppgavetypene senere. Vi anser derfor Volums bidrag her som positivt for elevenes muligheter for utvikling av algebraisk tenkning. Lærerveiledningen ga ingen ytterligere informasjon om innholdet i oppgaven, og foreslo kun at elevene kunne prøve seg frem ved tegning (Bugten & Olafsen, 2021, s. 79), noe som øker sannsynligheten for å overse en mulighet til funksjonstenkning, fra lærerveiledningens side.

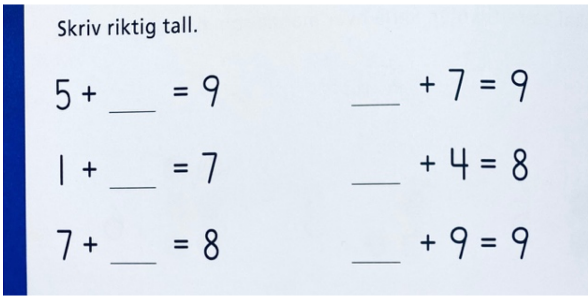
Variabel

Kategorien for variabel illustrerer tydelige forskjeller mellom læreverkene (se tabell 8). Her kan vi se at Volum skiller seg fra de andre verkene med hele 15,5 prosent, mens de andre verkene har mellom 5,4 prosent til 7,3 prosent. Det vil si at Volum har over dobbelt så høy prosentandel som Multi, som er det verket med nest høyest andel. Matematikk viser igjen lavest forekomst med bare 5,4 prosent her.

VAR Variabel	Matematikk 1	Matemagisk 1	Multi 1	Volum 1
Antall oppgaver	40	28	43	117
Prosentandel	5,4 %	6,5 %	7,3 %	15,5 %

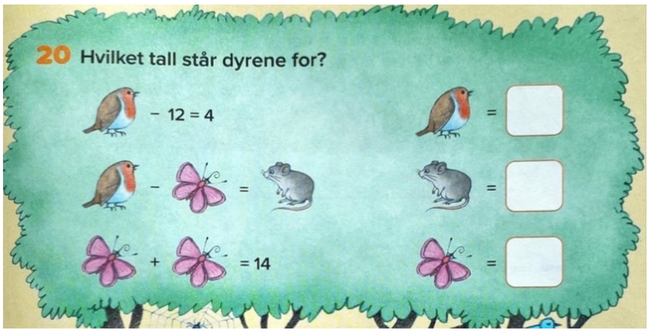
Tabell 6 Forekomst av VAR i læreverkeneTabell 12 Forekomst av VAR i læreverkene

Eksemplene på oppgaver vi fant i denne kategorien var nokså ulike i de forskjellige bøkene. Åpne tallsetninger med én ukjent kunne vi finne i alle læreverkene. Bildene under illustrerer hvordan noen av disse oppgaven så ut. Variabler som varierer fant vi eksempler på i både Matematikk og Volum, mens variabel som generaliseringsverktøy fant vi kun i Volum.



Bilde 23 Oppgave med ukjent tall i Matemagisk (Fritzen, Nilsen, Nilsen, Nyborg, Engmark, et al., 2020, s. 118)

Bilde 24 Oppgave med ukjent tall i Multi (Alseth et al., 2020c, s. 112)



Bilde 25 Oppgave med ukjent tall i Volum (Olafsen, Korsvold & Kaufmann, 2020, s. 129)

Bilde 26 Oppgave med ukjent tall i Matematikk (Dahl, Nohr, et al., 2020a, s. 128)

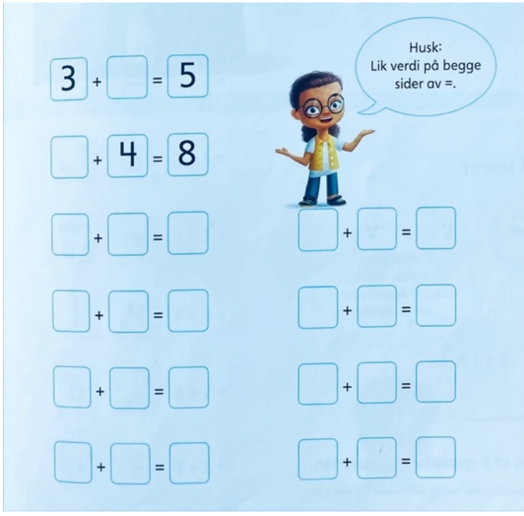
Disse oppgavene (bilde 23-26) er alle eksempler på hvordan variabel kan være et «ukjent tall». Den største forskjellen mellom dem er i måten de er fremstilt. Her kan vi se at eksempelet fra Matemagisk illustrerer en åpen tallsetning med én ukjent. Dette er den eneste formen for variabel vi finner i Matemagisk. I de tre andre verkene finner vi oppgaver som vist over, hvor den ene oppgaven benytter figurer som står for en bestemt verdi (bilde 25), den andre en åpen tallsetning med både en synlig og en skjult mengde (bilde 24), og den tredje et spørsmålstegn som plassholder for en ukjent mengde (bilde 26).

En mer visuell representasjon av disse ukjente tallene finner vi eksempler på i alle verkene bortsett fra Matemagisk. I eksempelet med smultringene i esken (bilde 26) fra Matematikk, ser vi at en eske med et spørsmålstegn blir brukt som plassholder for et ukjent tall. Dette er en mer konkret måte å representere en ukjent mengde, ved å illustrere at det er smultringer i esken, men vi kan ikke se hvor mange.

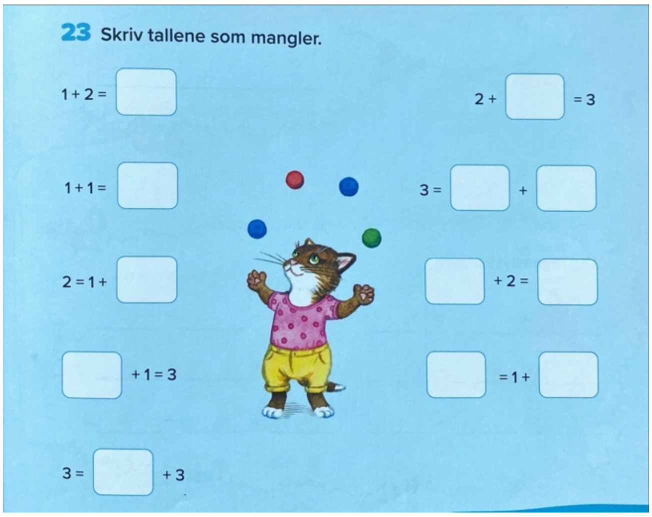
Det samme kan vi se i eksempelet fra Multi (bilde 24) hvor det er illustrert en lukket hånd som gjør at vi ikke kan se mengden inne i hånden. I lærerveiledningen blir læreren oppfordret til å vise elevene et eksempel ved å ha en bestemt mengde brikker fordelt i to hender, hvor elevene bare få se hva som er i den ene hånden (Alseth et al., 2020d, s. 112). Med denne som utgangspunkt kan det tenkes at oppgaven kan bli mer konkret for elevene, og de har en erfaring de kan basere det videre arbeidet på.

I Volum fant vi ikke eksempler på denne typen behandling av et ukjent tall, med en visuell framstilling av en mengde som er skjult. Det vi derimot fant i Volum, som vi ikke fant i de andre verkene, er oppgaver som eksempelet viser (bilde 25). Dette er en mer abstrakt tilnærming hvor elevene må akseptere at fuglen og sommerfuglen representerer en mengde, og at de ikke får illustrert denne mengden. Dette gjør at Volum igjen skiller seg ut fra de andre lærebøkene.

Eksempler på oppgaver med variabler som varierer, fant vi kun i Volum og Matematikk. Dette kan for eksempel være er oppgaver med åpne tallsetninger hvor det er to eller flere ukjente tall. Dette gjør at tallene vil variere etter hvilke verdier elevene setter inn.



Bilde 27 Oppgaver med variabler som varierer i Matematikk (Dahl, Nohr, et al., 2020c, s. 79)



Bilde 28 Oppgaver med variabler som varierer i Volum (Olafsen, Korsvold, Onsrud, et al., 2020b, s. 91)

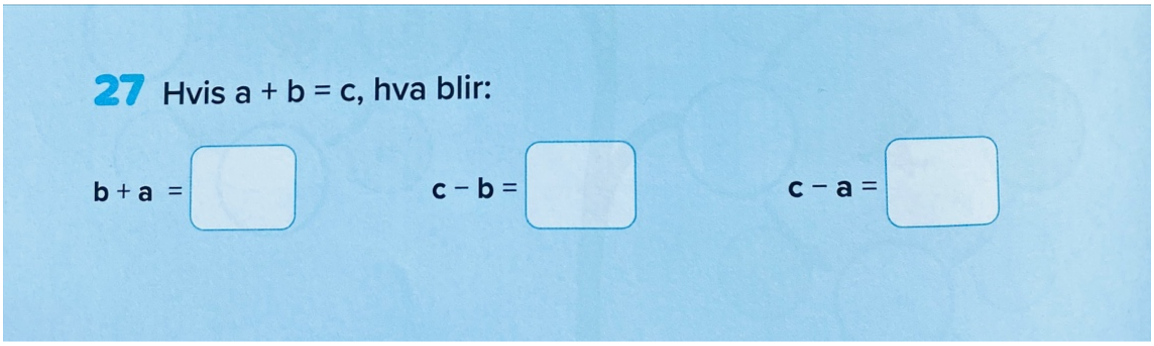
Disse eksemplene (bilde 27 og 28) befinner seg også på et høyere abstraksjonsnivå, da de kun refererer til tallsymbolene, og ikke inneholder noe konkret eller visuell støtte i elevbøkene. Lærerveiledningene tilbyr heller ingen forslag for å konkretisere oppgavene for elevene (Bugten & Olafsen, 2020, s. 51; Dahl, Nohr & Rättzén, 2020, s. 79).

Når det kommer til oppgaven fra Volum (bilde 28), finner vi et eksempel på hvordan lærerveiledningen tilfører en rikere forståelse av innholdet i oppgaven. Her må også læreren være den som åpner opp for elevenes muligheter til å oppdage sammenhenger. For oppgave 23 skriver veiledningen:

«Det er fint om elevene kan finne flere løsninger der det er to bokser. F.eks: 3 = __ + __
Mulige løsninger:
3 = 1 + 2, 3 = 2 + 1, 3 = 3 + 0 og 3 = 0 + 3» (Bugten & Olafsen, 2020, s. 51).

Læreren må selv vite hva som er hensikten med at elevene skal finne flere løsninger og lærerveiledningen viser ikke til den kommutative lov. Det er likevel lovende å se at veiledningen til Volum oppfordrer til å finne flere løsninger. Når det er sagt, står det videre at:
«Klarer elevene å si noe om antall løsninger på de to nederste oppgavene til høyre? La dem prøve ulike tall og diskutere. Svaret er uendelig mange løsninger. Hvorfor?» (Bugten & Olafsen, 2020, s. 51). I dette tilfellet ser vi at de tomme plassene representerer uendelig mange løsninger, og at lærerveiledningen i tillegg peker eksplisitt på dette slik at læreren kan bli oppmerksom på denne muligheten. Det ble derimot ikke lagt til noe mer om hvordan læreren kan følge opp spørsmålet og ha denne samtalen med elevene, og heller ingen forklaring om hvorfor det er viktig å snakke om. Det kan innebære at muligheten likevel ikke følges opp.

En tydelig forskjell mellom lærebøkene var at det bare var ett av verkene som bruker bokstavvariabler, som et generaliseringsverktøy. Altså hvor variabelen ikke trenger å representere et bestemt tall. Volum presenterer de dette allerede i første bok:



Bilde 7 Oppgave med variabel som generaliseringsverktøy (Olafsen, Korsvold, Onsrud, et al., 2020b, s. 162)

Her blir elevene oppfordret til å bruke bokstavvariablene til å utforske den kommutative lov og sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon. Ved første øyekast kan det se ut til at elevene skal løse oppgaven helt uten å regne og bare ved å forholde seg til informasjonen de får gitt. Altså at a + b = c. Og det finnes det gode muligheter for, men når vi går til lærerveiledningen kan vi se at den eneste informasjonen til læreren er:

> «En måte å løse denne ukjente oppgaven på, er å sette inn tall i stedet for bokstaver. For eksempel: a = 2, b = 3 og c = 5

b + a = __, 3 + 2 = 5, gir at b + a = c

c – b = __, 5 – 3 = 2, gir at c – b = a

c – a =__, 5 – 2 = 3, gir at c – a = b» (Bugten & Olafsen, 2020, s. 91).

Ved å sette inn tall kan elevene komme frem til riktig svar, og ettersom det ikke var noen oppfordring om at elevene burde prøve å forholde seg til oppgaven uten å sette inn tall, er det kanskje naturlig at det er dette de vil gjøre. Dersom de løser oppgaven med prøving og feiling, og ikke bruker tid på å se hvorfor det fungerer, vil de heller ikke få muligheten til å se sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon, eller den kommutative lov. Lærerveiledningen gir ingen informasjon til læreren om hvilke sammenhenger det er ment at elevene skal oppdage, og heller ingen støtte om hvordan en kan forklare eller samtale med elevene rundt disse. Det kan derfor tenkes at muligheten for å se denne generelle sammenhengen da kan være borte.

Oppsummert er det interessant at Volum kan illustrere eksempler på alle disse ulike variantene av variabel, mens Matemagisk bare kan vise til åpne tallsetninger med en ukjent. Dette reflekterer et gjentagende bilde i vår analyse, nemlig at Volum viser stor bredde innenfor det vi har undersøkt, mens Matemagisk oftest er det verket med færrest eksempler å vise til.

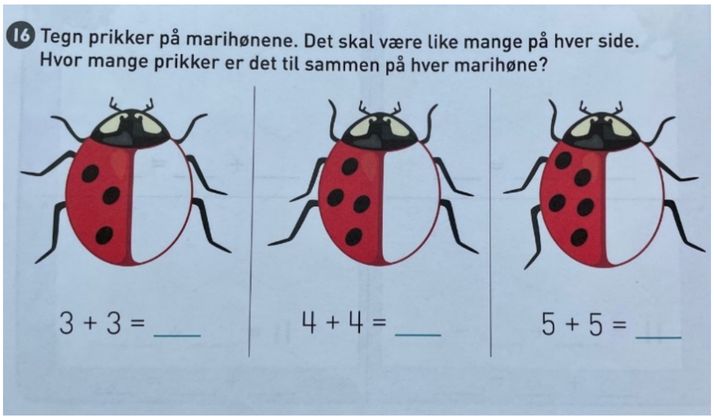
Resonnering om proporsjoner

En likhet mellom alle læreverkene vi tok for oss var at «resonnering om proporsjoner» var den kategorien med lavest forekomst i alle læreverkene. Multi har den aller høyeste forekomsten innenfor denne kategorien, med 1,9 prosent, men som vi kan se i tabell 13 er ikke forskjellene veldig store.

PR Resonnering om proporsjoner	Matematikk 1	Matemagisk 1	Multi 1	Volum 1
Antall oppgaver	1	1	11	3
Prosentandel	0,1 %	0,2 %	1,9 %	0,4 %

Tabell 13 Forekomst av PR fordelt i læreverkene

Eksemplene vi fant omhandlet kun dobling, og vi oppdaget at de få oppgavene som faller inn under denne kategorien, oftest opptrådte sammen med kategorien for utregning. Denne sammenhengen fant vi i samtlige av læreverkene. I to av disse tilfellene var både «utregning» og GA med PR i samme oppgave, og dette gjaldt for den ene oppgaven i PR i både Matematikk og Matemagisk.



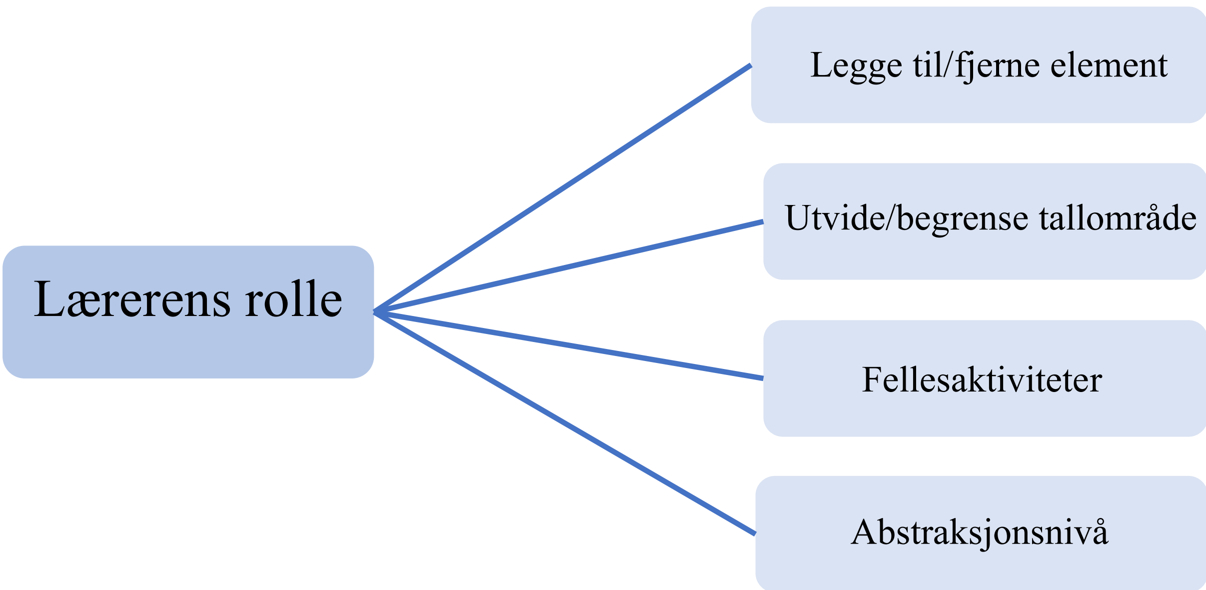
Bilde 29 Oppgave med dobling i Multi (Alseth et al., 2020a, s. 92)

12 Lærerveiledningene (den kvalitative analysen)

Vi vil nå se nærmere på funnene vi gjorde i den tematiske analysen knyttet opp mot forskningsspørsmålet: *Hvilke muligheter gir lærerveiledningene for å differensiere, i utviklingen av algebraisk tenkning?* Gjennomgangen av alle lærerveiledningene resulterte i at vi fant fire overordnede temaer som gikk igjen. Disse temaene sier alle noe om hvordan læreren kan differensiere:

1. Å legge til eller fjerne et element
2. Å utvide eller begrense tallområdet
3. Fellesaktivitet
4. Abstraksjonsnivå

Fordi læreren spiller en sentral rolle i alle disse temaene, har vi illustrert denne sammenhengen i modellen under (figur 3).

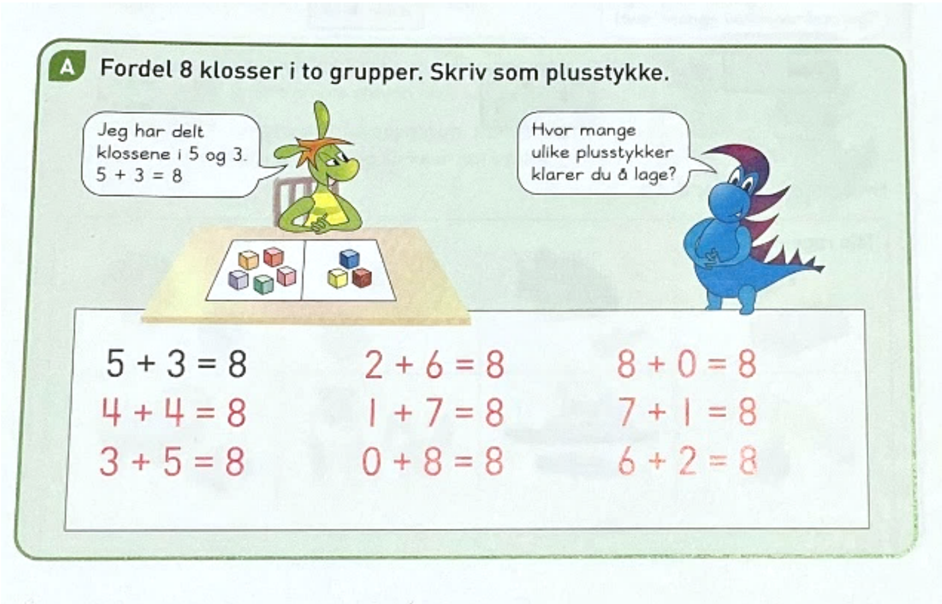


Figur 3 Modell av tematisk analyse av lærerveiledningen

12.1.1 Legge til/fjerne elementer

Dette «temaet» kan si noe om hvordan læreren kan differensiere i undervisningen gjennom å legge til eller fjerne elementer i oppgavene. Eksempler vi fant på å legge til elementer er for eksempel at læreren utvider oppgaven slik at elevene skal utforske og lete etter andre sammenhenger, eller at elevene skal lage noe knyttet til oppgaven. Å fjerne elementer kan for eksempel være når læreren redusere mengden oppgaver elevene skal gjøre, begrenser fokuset til deler av oppgaven, eller fjerner eller endrer noen operasjoner som skal gjøres. Vi fant at alle lærerveiledningene la opp til at oppgavene kunne utvides ved å lage egne regnefortellinger. Dette var den eneste formen for «å legge til/fjerne elementer» vi fant i Matemagisk og Matematikk.

I Multi fant vi et eksempel som illustrerer hvordan lærerveiledningen ga læreren mulighet til å tilføre et element, som i tillegg kan heve nivået av algebraisk tenkning ved å tilføre flere av de store ideene (Blanton, Stephens, et al., 2015; Kaput, 2000a). I oppgaven under (bilde 30) skal elevene fordele klosser i to grupper og skrive regnestykket, og vi kodet den som EEEI fordi elevene må lage regnestykkene som er lik fordelingen de har laget med klossene. Den inneholder også en mulighet for å oppdage den kommutative lov, dersom elevene ser sammenhengen og likheten mellom to regnestykkene 5 + 3 = 8 og 3 + 5 = 8, som gjør at den også regnes som generalisert aritmetikk (GA).



Bilde 30 Oppgave med utregningsforslag i lærerveiledningen til Multi (Alseth et al., 2020b, s. 73)

Lærerveiledningen ber læreren om å oppfordre elevene til å finne så mange løsninger som mulig. Videre oppfordres læreren til å hjelpe elevene å systematisere løsningene, slik at de kan være sikre på at de har funnet alle løsningene, og at de kan gjøre dette ved å sette tallene opp i stigende rekkefølge (Alseth et al., 2020b, s. 73). Denne systematiseringen kan gi elevene en tredje vei inn i den algebraiske tenkningen, ved å se på sammenhengen og mønstrene i fordelingen av klossene, som vil innebære funksjonstenkning (FT).

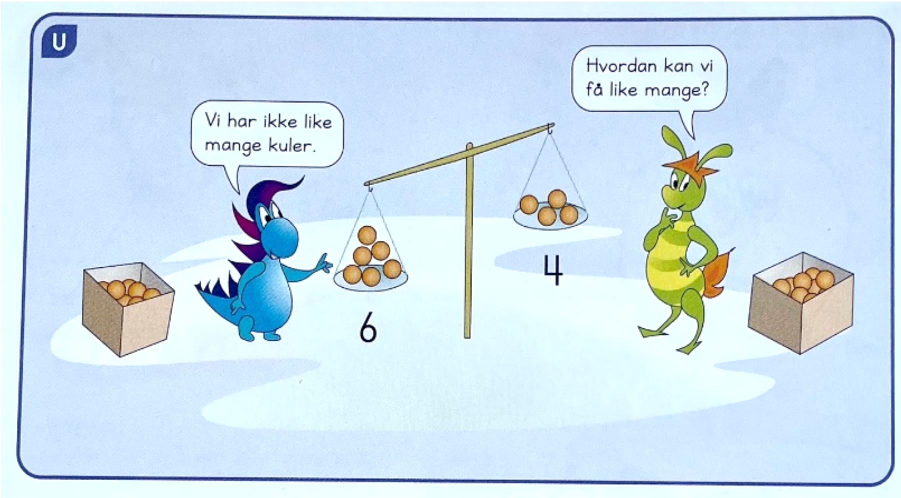
Differensieringene som ble foreslått i Volum skilte seg ut for oss fordi det var et overordnet fokus på tempoet til elevene, og ikke nødvendigvis nivået på den matematiske forståelsen deres. Veiledningen benyttet gjennomgående formulereringer som «Elever som blir raskt ferdige …» eller «Elever som trenger mer å gjøre …» i tilfeller hvor vi fant en utvidelse av oppgaven eller tilleggsoppgaver, som omhandlet å se etter nye aspekter ved oppgaven. Det var likevel oftest ikke en slik utforskning lærerveiledningen foreslo, men heller at elever som jobbet raskt skulle «[…] bla tilbake å finne oppgaver som ikke er gjort» (Bugten & Olafsen, 2021, s. 102). Dette kan betraktes som mengdetrening, men det kan også sees på som en noe forenklet tilpasning.

Som en motsetning, ble læreren oppfordret til å redusere antall stykker i oppgavene eller arbeidsmengden for elevene som ikke arbeider så fort. Dette ble begrunnet med blant annet at de «[…] får øvd seg i flere oppgavetyper og får mer variasjon» (Bugten & Olafsen, 2021, s. 84 og 92). I likende tilfeller ble det også begrunnet ytterligere med «Tanken er at elevene bør komme gjennom metodene i de mest sentrale oppgavene. Tilsvarende kan elever som arbeider raskt, hoppe over oppgaver de føler seg sikre på, og heller bruke tid på de siste oppgavene i økta» (Bugten & Olafsen, 2021, s. 10). Her får læreren en bedre begrunnelse og mer informasjon om hva intensjonen bak tilpasningen er, som også er knyttet mer spesifikt til det faglige innholdet eleven skal gjennom. Dette står i kontrast til kun å oppfordre til å bare la elevene gjøre det de ikke har gjort, som vi som nevnt fant mange eksempler på.

Multi tilbød også læreren muligheten til å berike oppgaven ved å legge til et element av funksjonstenkning, men for alle elevene, ikke bare de som «blir fort ferdige». Utgangspunktet for oppgaven (bilde 31) er at den ber elevene fordele kulene slik at de får like mange, som er et typisk trekk ved EEEI. I Lærerens bok, ser vi at forslagene læreren får kan tilby elevene et rikere grunnlag til å utvikle algebraisk tenkning. Måten dette gjøres på kan tilføre en mulighet for funksjonstenkning, ved å forsøke å forklare hvordan størrelsene varierer i forhold til hverandre. Oppgaven vil da gå fra å inneholde kun den store ideen EEEI, til å inkludere også FT.

Veiledningen til læreren presiserer at oppgaven har mange ulike løsninger ettersom det finnes mange flere appelsiner tilgjengelige for både Fibo og Fiboline (figurene i Multi læreverket), og at elevene slik kan utfordres til å finne flere løsninger. I oppsummeringen oppfordres læreren til å samle, systematisere og trekke frem elevenes løsninger, for så å diskutere dem. Løsningene med å fjerne appelsiner oppsummeres slik: «Hva er felles med alle løsningene der de tar bort appelsiner? (Fibo må fjerne to flere enn Fiboline.)» (Alseth et al., 2020b, s. 52), og videre om løsningene med å legge til appelsiner:

> Det som er likt for alle løsningene når de legger på appelsiner, er tilsvarende det å ta vekk: Fiboline kan legge på så mange appelsiner hun vil, men hun må alltid ta to flere enn Fibo for at det skal bli like mange. Det å formulere slike generelle sammenhenger er begynnende algebraisk tenkning, og noe det er utmerket å få elevene med på allerede nå (Alseth et al., 2020b, s. 52)



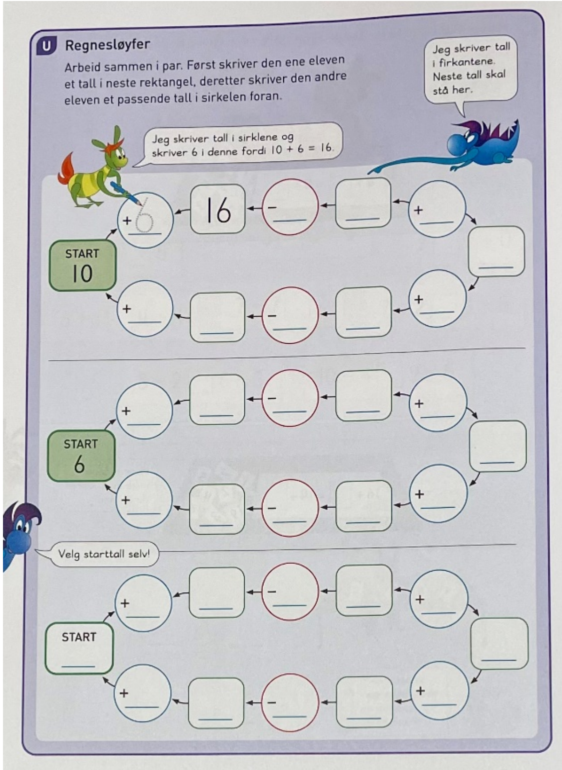
Bilde 31 Appelsinoppgave i Multi (Alseth et al., 2020a, s. 52)

Lærerens bok gir god støtte til læreren både gjennom konkrete spørsmål de kan ta opp i undervisningen, for å hjelpe elevene til å se fellestrekk ved løsningene, og gjennom å svare på spørsmålet slik at det blir tydelig hva forfatterne ønsker å fremheve i oppgaven. Her nevnes det at målet er begynnende algebraisk tenkning gjennom bruk av generalisering, og i tillegg at dette er noe det er lurt å lede elevene mot nå, altså tidlig i skoleløpet. Læreren kan da hjelpe elevene å bruke hverdagsspråket til å formulere hvordan de to størrelsene (appelsiner) samvarierer (Fibo må fjerne to flere enn Fiboline, eller at Fiboline alltid må ta to flere enn Fibo), og denne utvidelsen av oppgaven vil da også kunne bidra til å heve nivået av funksjonstenkning (FT) ved å gå fra å tenke rekursivt og beskrive variasjon i en størrelse, til å forklare hvordan størrelsene samvarierer. Også bruken av ordet «alltid» er en måte å uttrykke generalisering på (Bråting et al., 2018, s. 33), som læreren kan hjelpe elevene til å forstå.

12.1.2 Utvide/begrense tallområde

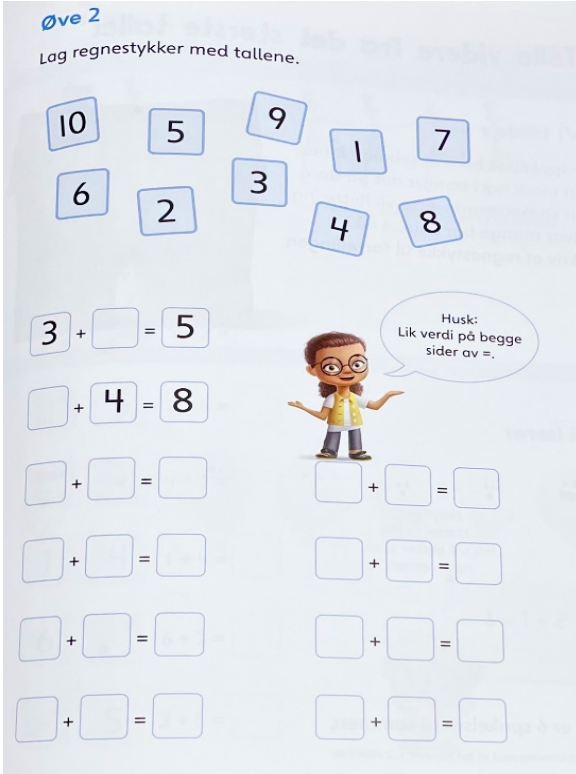
En annen måte vi så at læreren kan differensiere på, kan være ved å utvide eller begrense tallområdet elevene arbeider med eller i, når de arbeider med algebraisk tenkning. Det kan bety at elevene ender med å jobbe med ulike tallområder, enten basert på nivået for det de får til alene, eller med hjelp, altså elevens proksimale utviklingssone (Vygotsky, 1978). Alle lærerveiledningene inneholdt denne formen for differensiering. Her så vi at Matemagisk og Volum igjen skilte seg ut fra de to andre verkene ved at de i liten grad eksplisitt oppfordret læreren til å gjøre disse tilpasningene.

I lærerens bok til Multi gis læreren muligheten til å gjøre oppgaven mer utfordrende: «[…] ved at elevene oppfordres til å bruke større tall, altså større enn 20» (Alseth et al., 2020d, s. 119), altså ved å utvide tallområdet. Forenklingen av oppgaven lyder: «Om noen elever strever med regnesløyfene, kan de endre oppgaven til å først skrive inn sirklene og deretter regne ut den påfølgende firkanten […]» (Alseth et al., 2020d, s. 118). Oppgaven om «regnesløyfer» (bilde 32) inneholder de store ideene EEEI, VAR og FT. Dette fordi de både må forholde seg til åpne tallsetninger med «ukjente tall», hvor tallene de velger å sette inn vil være avhengige av hverandre, og at de må finne denne sammenhengen mellom tallene. Dersom en forenkler oppgaven slik lærerveiledningen foreslår, vil det innebære å ta bort det algebraiske aspektet, og oppgaven vil gå over til å bli en ren utregningsoppgave.



Bilde 32 Oppgave med regnesløyfer i Multi

(Alseth et al., 2020c, s. 118)



Bilde 8 Oppgaver med variabler i Matematikk (Dahl, Nohr, et al., 2020c, s. 79)

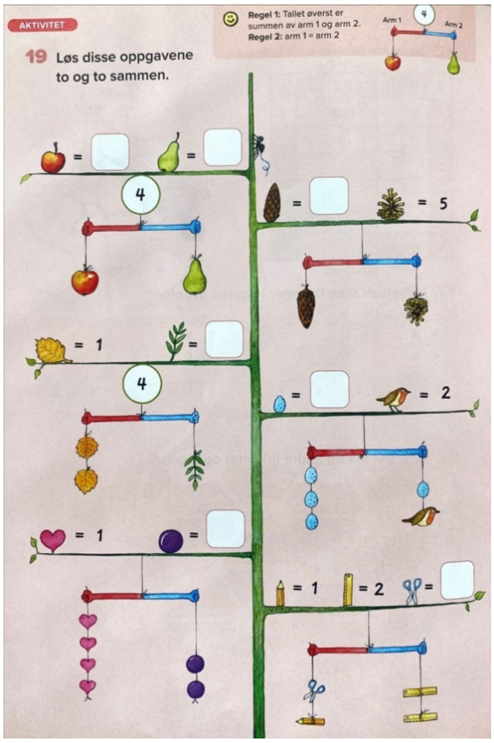
En annen måte oppgavene kan differensieres på, er ved at elevene selv velger tall eller antall de skal bruke i oppgaven. Dette vil gi elevene rom til å justere nivået selv, og oppgaven tilpasser seg naturlig eleven som arbeider med den. Dette fant vi eksempler på i alle læreverkene. I tillegg til å justere tallområdet, finnes det i Matematikk (bilde 33) ytterligere en mulighet for læreren å differensiere, ifølge lærerveiledningen (Dahl, Nohr & Rättzén, 2020, s. 79), ved å la elevene tegne inn flere tallkort med selvvalgte tall som de kan lage regnestykkene med. Dette tillegget vil både innebære å «legge til et element» (tallkortene) og med det også kunne «utvide tallområdet».

12.1.3 Fellesaktiviteter

Når det kommer til fellesaktiviteter, er det ikke like enkelt å peke på verken forenkling eller utfordring. Derfor vil vi ikke gå så dypt inn på dette temaet. Når det er sagt vil vi poengtere at vi ser mulighetene for tilpasninger i disse aktivitetene, men at dette i stor grad vil avhenge av den enkelte læreren, elevene, og klassen som helhet. Noen eksempler vi har funnet under dette temaet er blant annet ulike typer spill, leker, danseleker, samarbeidsoppgaver og uteaktiviteter.

Det vil variere hvor involvert læreren er i de ulike typene aktiviteter, og derfor også hva lærerveiledningen sier om disse. I oppgaven på bildet (34), tilføyer ikke lærerveiledningen noe angående samarbeidet mellom elevene, eller hvordan dette samarbeidet kan organiseres (Bugten & Olafsen, 2020, s. 88). Men fordi det eksplisitt blir lagt opp til samarbeid, vil vi trekke frem dette som et eksempel på hvordan en fellesaktivitet kan se ut, hvor det finnes rom for læreren å gjøre differensieringer. Samarbeidet mellom elevene kan organiseres på ulike måter, ut fra hva læreren ser av behov hos elevene og hva som er hensikten.

Mange av oppgavene i «fellesaktiviteter» inneholder flere algebraiske elementer som gjør dem relevante i denne oppgaven. De inneholder også store muligheter for differensiering på ulike plan, og derfor er de inkludert i den kvalitative analysen. Når det er sagt vil disse oppgavene i så stor grad avhenge av lærer, organisering, elever og samarbeid. Vi vil derfor ikke gå dypere inn i disse oppgavene.



Bilde 34 Eksempel på samarbeidsoppgave med algebraisk tenkning fra Volum (Olafsen, Korsvold, Onsrud, et al., 2020b, s. 158)

12.1.4 Abstraksjonsnivå

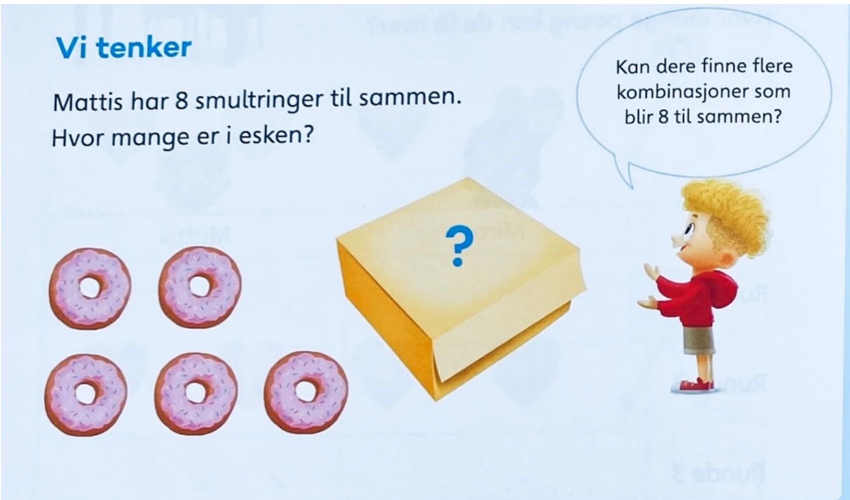
Å justere abstraksjonsnivået er en annen måte å tilpasse innholdet i oppgavene på. I dette temaet har vi tatt utgangspunkt i Bruners representasjonsnivåer (1964, 1966) som handler om progresjonen fra det konkrete til det abstrakte. Vi skal nå se på hvordan de læreverkene behandler de ulike nivåene konkret, visuell, og abstrakt.

Konkretisering og forenkling

Et felles trekk for alle lærerveiledningene vi har analysert er at de alle oppfordrer til å bruke konkreter. Det er ulikt om lærerveiledningene formulerer at dette, eller andre former for konkretisering, er ment som forenkling for de elevene som trenger det, men de nevner alle bruk av konkreter.

På bildet under (Bilde), fra Matematikk, kan vi se en oppgave knyttet til et ukjent antall smultringer i en eske. I forbindelse med oppslaget foreslår lærerveiledningen å skape en kontekst for elevene, som læreren kan lese høyt:

> *Kontekst:* […] Mattis bare elsker smultringer. En dag fikk han en eske med 8 smultringer! Mattis tar 5 smultringer ut av esken og viser dem til Mira. Jeg har 8 til sammen sier Mattis. Hvor mange tror du det er igjen i esken? Kan dere hjelpe Mira med å finne det ut? Spør gjerne elevene om de kan se det for seg. Lukke øynene og forestille deg hvor mange det er inne i esken.» [sic] På denne måten får elevene trening i å tenke abstrakt. (Dahl, Nohr, et al., 2020b, s. 128).



Bilde 35 Smultringoppgave i Matematikk

I tillegg til at denne konteksten bidrar til en konkretisering for elevene, oppfordrer lærerveiledningen læreren også til å ta med konkreter i form av klosser for at elevene skal kunne gjøre oppgaven praktisk samtidig, eller eventuelt å ta med en eske med smultringer (Dahl, Nohr, et al., 2020b, s. 128).

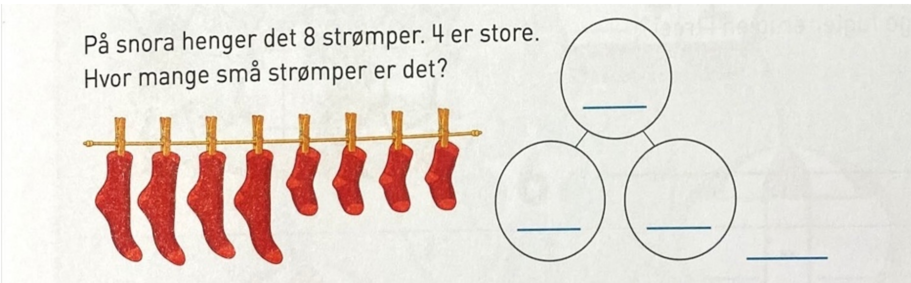
I forbindelse med dette oppslaget kan vi se i lærerveiledningen til Matematikk at de også poengterer bruken av konkreter helt spesifikt i sammenheng med det de kaller for pre-algebra;

Når man jobber med pre-algebra, bør det knyttes til kjente kontekster og bruk av konkreter. Konkretiseringsmateriellet i seg selv fører ikke til utvikling og læring, men det er tenkningen, samtalene og handlingene som blir utløst gjennom variert bruk av materiellet, som gir læring. En utfordring er å elevene til å se koplingene mellom konkreter og matematiske symboler (Dahl, Nohr, et al., 2020b, s. 128)

Her kan vi se et eksempel på at læreren er veldig sentral i utviklingen av algebraisk tenkning, ettersom det i stor grad vil bli opp til læreren å sørge for å hjelpe elevene til å oppdage koplingen mellom konkretene og symbolene som lærerveiledningen refererer til.

På hvert oppslag i lærerveiledningen til Matemagisk kan vi se at læreren blir oppfordret til å ha konkreter tilgjengelig for elevene, men det er opp til elevene selv å bevege seg videre fra konkretene og over til den visuelle eller symbolske notasjonen. I lærerveiledningen står det ved flere anledninger: «La elevene bruke konkreter i arbeidet. Så snart eleven ikke lenger trenger konkreter, vil han eller hun slutte å bruke dem, siden det går fortere å regne i hodet» (se for eksempel Fritzen, Nilsen, Nilsen & Nyborg, 2020, s. 116). Det blir opp til læreren å vurdere om dette er et behov elevene faktisk har, og i hvilken grad det stemmer at de som slutter å bruke dem har gått over til hoderegning. Vi fant ingen indikasjoner i lærerveiledningen på at læreren får støtte eller veiledning i denne overgangen.

Lærerens bok til Multi inneholder som nevnt forslag til både forenkling og mer utfordring på hvert oppslag. Som tips til forenkling blir det i stor grad kun foreslått å bruke konkreter, og det er denne tilpasningen av abstraksjonsnivået som forekommer mest i Multi som helhet. Som et eksempel kan vi se på en oppgave hvor elevene arbeider med tallvenner som minusstykker (bilde 36).



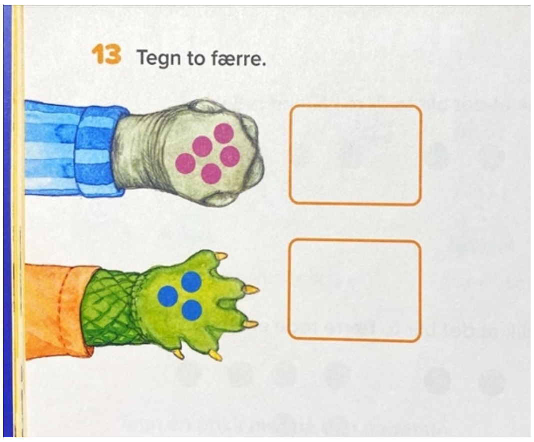
Bilde 36 Oppgave med rom for konkretisering i Multi (Alseth et al., 2020c, s. 7)

Som forslag til forenkling for denne typen oppgaver står det i lærerveiledningen:

> La elevene bruke klosser. De finner da frem den opprinnelige mengden. Så deles den i to deler i samsvar med oppgaven. Til slutt skrives dette som et minusstykke: Det hele minus den ene er lik den andre delen. Det er viktig å knytte de ulike representasjonsformene sammen. Det vi gjør med klossene, tilsvarer det vi skriver i boblene: den opprinnelige mengden i den øverste sirkelen og delene i de to sirklene under. Deretter skriver vi det som et minusstykke (Alseth et al., 2020d, s. 7).

Her får læreren en mer detaljert instruksjon i hvordan de kan forenkle oppgaven, helt konkret og steg for steg. Det fremheves også hva som er viktig å fokusere på, å knytte representasjonsformene sammen, og hvordan læreren kan modellere og forklare det til elevene på en lettfattelig måte.

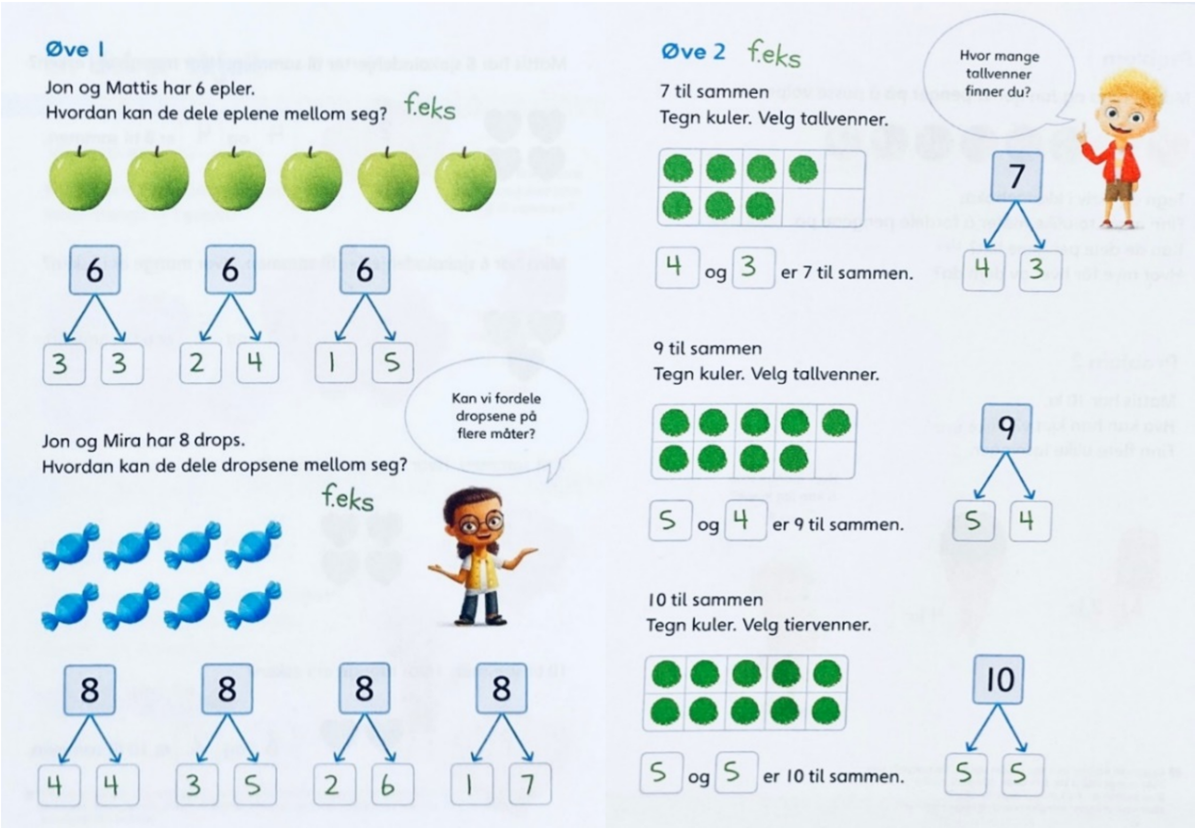
I lærerveiledningene til Volum finner vi som nevnt sjeldent tips til hvordan læreren kan forenkle oppgaver til elevene som trenger det. Når det er sagt, finner vi eksempler som i oppgaven under (bilde x) hvor lærerveiledningen skriver at: «Denne kan løses ved å sette kryss over to prikker og tegne antallet som er igjen i ruta. Elevene kan også bruke brikker» (Bugten & Olafsen, 2020, s. 15). Her blir det ikke formulert som en forenkling, men heller som noe læreren kan foreslå eller legge til rette for. Det blir altså ofte kommentert at elevene **kan** bruke konkreter, men ikke noe om på hvilken måte eller hvorfor, noe som skiller seg fra hvordan det blir behandlet i Matematikk og Multi. På denne måten fremstår Volum og Matemagisk som likere. Denne formuleringen er gjennomgående i hele Volum og den eneste som kan tolkes som å gjelde forenkling. Det vil si at det igjen i stor grad vil være opp til læreren å tolke betydningen av forslaget til boka, og hvilket behov det skal dekke. Altså for hvem og hva tilpasningen skal være til hjelp for, for hver enkelt oppgave.



Bilde 9 Oppgave med mulighet for konkretisering i Volum (Olafsen, Korsvold, Onsrud, Kaufmann, et al., 2020, s. 28)

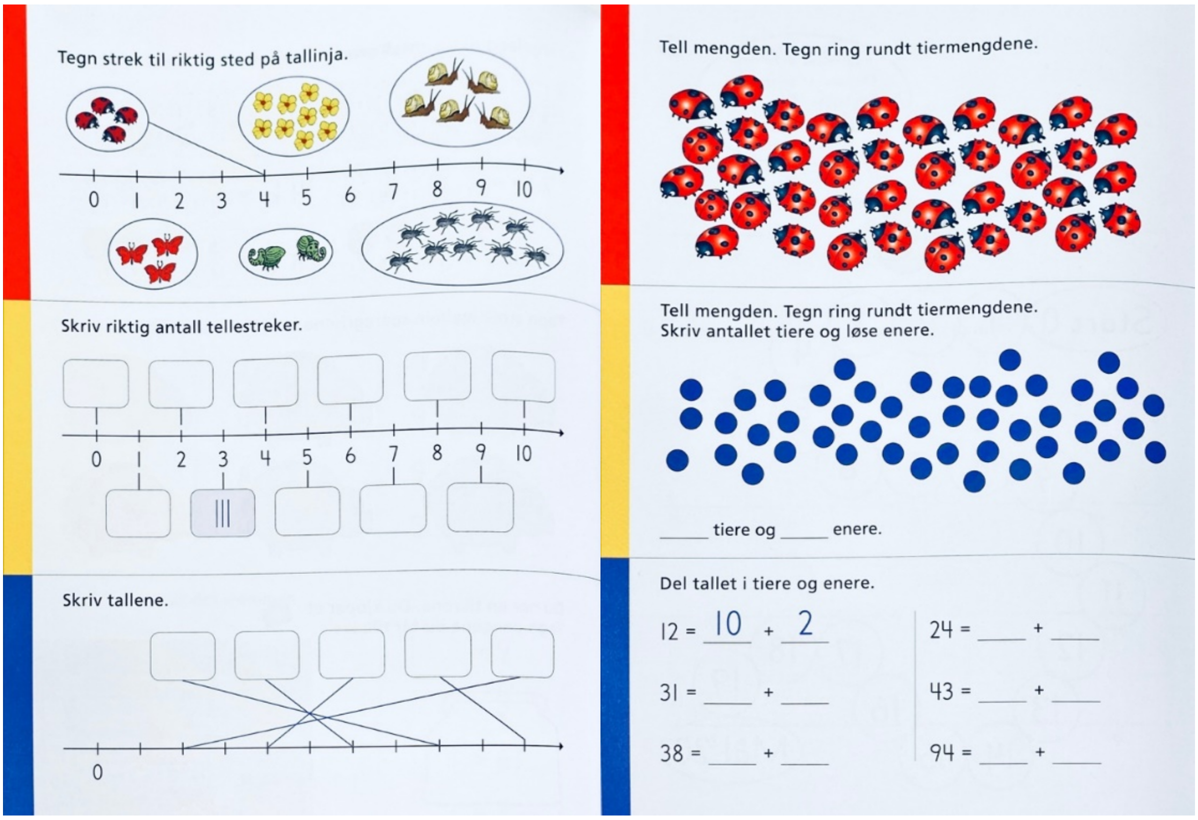
Visualisering

Som vi har sett poengterer Matematikk prosessen fra det konkrete, via det visuelle til det abstrakte (Dahl, Nohr, et al., 2020b, s. IV), og de bruker «øvesider» med ulikt abstraksjonsnivå. Illustrert under (bilde) kan vi se et eksempel på hvordan det kan se ut. Under «Øve 1» kan elevene først støtte seg til bilder av epler, og deretter, på «Øve 2», bruke mindre konkret, og mer abstrakt visuell framstilling av kuler for å komme seg fram til de abstrakte tallsymbolene.



Bilde 10 Oppslag fra lærerveiledning med løsningsforslag i Matematikk (Dahl, Nohr, et al., 2020b, s. 130-131)

Matemagisk har som nevnt «sporsider», som ifølge lærerveiledningen har ulik vinkling. På disse sidene er det lagt opp til at: «Alle elevene bør begynne på rødt spor, og de som får det til raskt, arbeider seg nedover på gult spor og eventuelt på blått spor. Det er ikke nødvendig at alle elevene gjør alle oppgavene på hver side» (se for eksempel Fritzen, Nilsen, Nilsen & Nyborg, 2020, s. 99). Et par eksempler på hvordan disse sporsidene er utformet kan du se under (bilde).

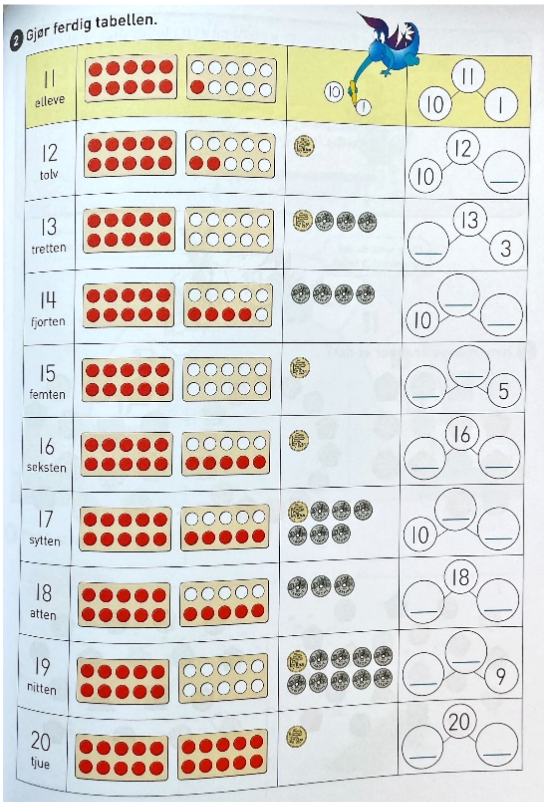


Bilde 11 Eksempel på «sporsider» i Matemagisk (Fritzen, Nilsen, Nilsen, Nyborg, Engmark, et al., 2020, s. 86 og 140)

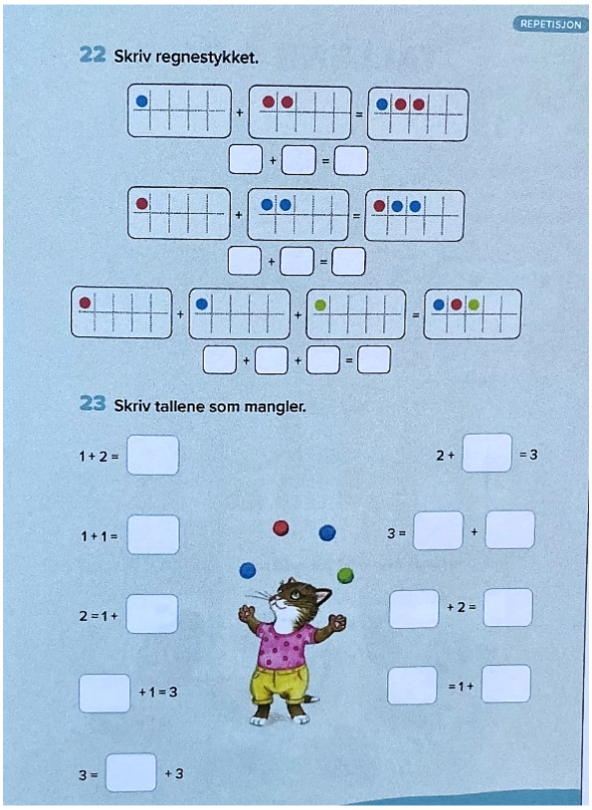
Her ser vi at abstraksjonsnivået er ulikt på de ulike sporene. Det røde sporet er klart mest konkret med bilder av faktiske ting (insekter), mens det gule sporet består av en noe mer abstrakt, visuell fremstilling med tellestreker og kuler. Det blå sporet bruker kun tallsymbolene, som er den mest abstrakte formen her. Vi kan altså se hvordan abstraksjonsnivået gradvis øker for hver oppgave.

Vi fant også oppgaver med ulike abstraksjonsnivåer og representasjonsformer i Multi, som oppgaven til venstre, på bilde under. Elevene må da forholde seg til både de visuelle representasjonene av de ulike mengdene, som sirklene på tierbrettene og bildene av mynter, i tillegg til mer abstrakte tallsymbolene. Disse to abstraksjonsnivåene blir knyttet sammen ved at elevene får se de samme tallene representert på ulike måter, og også får mulighet til å sammenhengen mellom det fulle tierbrettet, tikroningen og tallet 10, og på samme måte enerne.

Lærerens bok oppfordrer læreren til å la elevene jobbe med oppgaven i par, snakke med læringspartner og reflektere over hva de ser i den første raden i oppgaven. Læreren bes om å gjenta deler av det elevene sier de har snakket om, for å fremheve gode poenger (Alseth et al., 2020d, s. 59) Det kan slik bli noe tilfeldig hva elevene oppdager og hva læreren trekker frem, i motsetning til dersom oppgaven fremhevet noen viktige aspekter læreren kunne løftet frem. I denne oppgaven må elevene forholde seg til likhet (EEEI), ukjente tall (VAR), og kan se etter mønstre i endringene nedover i tabellen (FT). For at elevene skal oppdage mønstrene må de høyst sannsynlig ha hjelp. For at muligheten til å utvikle denne funksjonstenkningen (FT) skal være til stede, må enten læreren selv være oppmerksom på denne sammenhengen, ettersom dette ikke fremheves i lærerens bok.



Bilde 13 Oppgave med ulike representasjoner i Multi (Alseth et al., 2020c, s. 59)



Bilde 13 Oppgave med visuelt abstraksjonsnivå i Volum (Olafsen, Korsvold, Onsrud, et al., 2020b, s. 91)

Oppgaven til høyre i bildet fra Volum benytter også et visuelt abstraksjonsnivå i den øverste oppgaven (oppgave 22) med tierbrett og sirkler som knyttes sammen med det abstrakte ved å inkludere tallsymbolene når elevene skal skrive det passende regnestykket. I oppgaven under er det et høyere abstraksjonsnivå med bare tallsymboler, slik at elevene ikke får den visuelle støtten og da gradvis kanskje må tenke mer abstrakt, og da tvinges ut av tellingen og må bruke andre strategier. Begge oppgavene inneholder både EEEI og GA, ettersom det de må behandle uttrykkene og skape likhet (EEEI) i tillegg til at de kan oppdage den kommutative lov (GA). Den visuelle fremstillingen i oppgave 22 (øverst) kan mulig bidra til å hjelpe elevene til å oppdage den kommutative lov ved at den viser det mer eksplisitt, men kanskje hadde den gjort det enda tydeligere dersom rekkefølgen på antall sirkler ble snudd i det andre regnestykket.

Abstraksjon og utfordring

I kjerneelementene for matematikkfaget i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020) er abstraksjon og generalisering et av fem elementer. Flere av lærerveiledningene vi har analysert kommenterer dette på et generelt grunnlag, og som utgangspunkt for at alle elevene skal få erfaringer og øving med abstraksjon og generalisering.

For eksempel skriver lærerveiledningen til Matemagisk at: «Generalisering i matematikk handler om at elevene oppdager sammenhenger og strukturer som kan anvendes i nye og ukjente situasjoner og oppgaver. Matemagisk har generaliseringsoppgaver under hvert tema. Disse oppgavene hjelper elevene til å finne felles egenskaper, se sammenhenger og systematisere kunnskapen sin» (Fritzen, Nilsen, Nilsen & Nyborg, 2020, s. 7). Det at Matemagisk velger å løfte frem generaliseringer på hvert oppslag virker som et godt utgangspunkt for at læreren også skal vektlegge dette i klasserommet ofte. Når det er sagt ser vi at generaliseringene det er snakk om ikke alltid går i dybden av hva en generalisering egentlig er, som for eksempel: «Generalisering: vis elevene tre mengdepar som er tiervenner. Spør hvilken egenskap alle mengdeparene har. De har alle den egenskapen at de er tiervenner. Gjenta med tallkort» (Fritzen, Nilsen, Nilsen & Nyborg, 2020, s. 112).

I Multi ser vi også at dette kjerneelementet er representert i lærerens bok;

> Allerede fra første trinn legger Multi opp til at elevene oppdager generelle sammenhenger, for eksempel tilknyttet tallene, regnemetoder, figurer og mønstre, samt på tvers av ulike emner. Elevene utforsker og formulerer disse sammenhengene på måter som er tilpasset deres mestringsnivå, gjerne med konkreter, tegninger og muntlig språk. (Alseth et al., 2020d, s. v)

Her refereres det også til elevenes ulike mestringsnivå, og at konkreter, tegninger og muntlig språk kan være verktøy for elevene i denne prosessen med å oppdage og uttrykke generelle sammenhenger.

Abstraksjon og generalisering fungerer i flere av læreverkene som en måte å differensiere og gi en ekstra utfordring på. Både i Matematikk og Multi ser vi eksempler på at mer utfordring til elevene kan være å skrive tallsymboler fremfor prikker, tellestreker eller andre mer visuelle framstillinger. I disse eksemplene omtales ikke denne tilpasningen som spesifikt for en større utfordring, men som noe elevene kan gjøre (Alseth et al., 2020b, s. 12; Dahl, Nohr, et al., 2020b, s. 12). I Matemagisk sine «sporsider» ser vi tydelig hvordan denne progresjonen fra det konkrete til det abstrakte resulterer i en slags nivåinndeling, som kanskje kan gjøre det vanskelig for noen elever å få tilgang til det mer abstrakte.

Diskusjon

Vi har sett hva som kjennetegner algebraisk tenkning i elevbøker for første klasse, og hvor stor andel av oppgavene i disse bøkene som gir muligheter for å utvikle denne tenkningen. Vi har også sett hvordan lærerveiledningene tilbyr støtte til læreren i differensieringsarbeidet. Med dette som utgangspunkt vil vi diskutere viktige funn vi gjorde i lys av teori og tidligere forskning.

13 Muligheter i bøkene

De ulike verkene tilbyr et variert grunnlag for å utvikle algebraisk tenkning. Vår analyse viste at mengden algebraisk innhold varierte fra 33,1 prosent (Matemagisk) til 55,4 prosent (Volum) (se tabell). Bråting et al. (2019) fant i verkene de undersøkte 6 prosent og 11 prosent algebraisk innhold, i bøkene for 1-3 klasse (tilsvarende 2-4 klasse i Norge), slik at de norske bøkene vi undersøkte har et mye høyere innhold sammenliknet med de svenske. Innholdet i bøkene i Korea og USA var en del høyere enn de svenske, med henholdsvis 15,6 prosent og 25,2 prosent, men det er verdt å bemerke at Lee og Park (2022) inkluderte bøker for trinn tilsvarende 1-6 trinn i Norge. Som vi tok opp i metodekapittelet har vi ikke benyttet samme analyseenhet som Bråting et al. (2019) og Lee og Park (2022), slik at resultatene ikke er direkte sammenliknbare verken med tanke på analyseenheten eller med tanke på at deres utvalg representerer bøker på flere trinn. Det er allikevel interessant å se hvordan de norske bøkene for førsteklasse plasserer seg med tanke på det algebraiske innholdet. Dette spesielt fordi alle undersøkelsene har tatt utgangspunkt i det samme analyseverktøyet, enda vi gjorde tilpasninger i vårt endelige verktøy. En kan anta at mengden algebraisk innhold stadig vil øke etter hvert som klassetrinnet blir høyere, ettersom elevene da vil nærme seg den mer formelle algebraundervisningen. Dersom vi følger denne antagelsen, burde alle de tre landene ha et høyere innhold enn de norske, ettersom vi kun har sett på førsteklasse, hvor denne mengden da burde være lavest. Det ville vært interessant å følge opp videre, for å finne ut om denne tendensen fortsetter for de norske bøkene også på høyere trinn.

13.1.1 Pre EEEI

Et av de sentrale funnene i vårt prosjekt var at Matemagisk hadde færrest oppgaver innenfor de store ideene til Blanton, Stephens, et al. (2015), og at dette verket hadde flest oppgaver innenfor vår tilpassede versjon av rammeverket, i kategorien Pre EEEI. Når vi ser at Volum blir motsetningen til Matemagisk, med færrest prosentandel oppgaver innenfor Pre EEEI, og størst prosentandel i flertallet av de store ideene ville det vært interessant å utforske denne sammenhengen videre.

Bråting et al. (2019) fant i deres studie, en naturlig progresjon som samsvarte mellom læreplan og lærebøker fra første til sjette trinn i Sverige. Selv om vi må gjøre samme studie for å kunne si det samme om Norge, kan vi anta at denne progresjonen også finnes i norske lærebøker for matematikkfaget ettersom de nordiske nabolandene har store likheter i både demografi og skolesystem. Lee og Park (2022) viser også til en progresjon oppover i skoletrinnene i sin studie. Fordi vi utelukkende har sett på lærebøker for første trinn kan vi ikke si noe om progresjonen som skjer oppover i skoletrinnene. Men det er mulig at om vi hadde tatt for oss lærebøkene for andre- og tredjeklasse, kunne vi mulig sett en utvikling, hvor Pre EEEI gjorde seg mindre gjeldene jo mer innhold som falt inn under de store ideene. På denne måten kunne vi ha fått et mer sammensatt bilde av en naturlig progresjon over trinnene.

13.1.2 Kommutativ lov

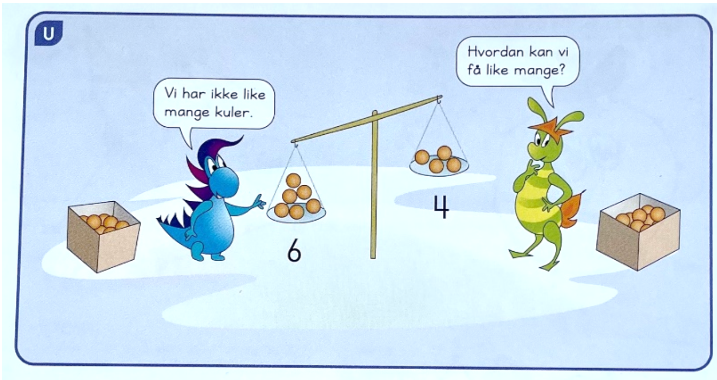
I vårt prosjekt havnet GA som nummer to, i rangeringen av kategorier med mest innhold i lærebøkene. Det er i likhet med det Lee og Park (2022) fant i de amerikanske lærebøkene. Dette var noe overraskende ettersom GA var lavest (av EEEI, GA og FT) i de svenske lærebøkene (Bråting et al., 2019), og vi forventet at disse ville være nærmere de norske. Denne forskjellen kan mulig skyldes at de norske elevbøkene kom ut i 2020 og de amerikanske i 2015, mens de svenske bøkene (da for 1-3 klasse) kom ut i 2004 og 2008, slik at det kan ha skjedd store endringer i læreplanen siden bøkene kom ut. Det kan også skyldes forskjeller i hva som vektlegges av innhold i læreplanene og lærebøkene i de respektive landene, slik som i Sverige, hvor generalisert aritmetikk er svakt representert (Bråting et al., 2019; Hemmi et al., 2020a).

Vi fant imidlertid oppgaver i alle læreverkene som i større eller mindre grad gir elevene muligheten til å utforske ulike varianter av generalisert aritmetikk, og disse dreier seg i stor grad om muligheten til å oppdage den kommutative lov i addisjon. Dersom den kommutative lov i stor grad diskuteres og synliggjøres for elevene, kan det være til stor hjelp for elevene når de senere går over til mer formell algebra (Warren, 2003). Eksemplet i Matematikk (bilde av GA oppslag), illustrerer hvordan dette kan gjøres ved å rette elevenes oppmerksomhet mot denne loven i elevboka, men også eksplisitt for læreren i lærerveiledningen. Et slikt fokus allerede fra førsteklasse, kan bidra til løse «algebraproblemet» (Kaput, 2008) ved at elevene i større grad kan å se sammenheng mellom aritmetikk og algebra, og forstå at de samme matematiske lovene gjelder for begge områdene (Mason, 2008, 2018). Når vi har sett svake norske algebraresultater på nasjonale og internasjonale tester (Kongelf, 2015), kan det tyde på at broen mellom aritmetikk og algebra ikke er tilstrekkelig bygget opp i læreplan og lærebøker.

13.1.3 Mønstre og samvariasjon

Når det gjelder utviklingen av funksjonstenkning (FT) fant vi, i likhet med både (Bråting et al., 2019) og (Lee & Park, 2022) at det meste av innholdet i denne kategorien handler om å gjenkjenne mønstre. Det kan være en inngangsport for de yngste elevene å begynne funksjonstenkningen ved å forholde seg til sammenhenger i ulike typer rekursive mønstre, enten som geometriske mønstre eller som tallfølger. Det er derfor ikke overraskende at det er dette vi finner mest av på første trinn. For at elevene skal utvikle funksjonstenkning er det ikke nok å bare forholde seg til rekursive mønstre ifølge Blanton og Kaput (2004). Det er derfor viktig at elevene blir eksponert for noe mer enn bare denne formen for funksjonstenkning. Dette spesielt fordi det er mulig for elever å forstå og beskrive samvariasjon og korrespondanse tidlig på barneskolen, som både Blanton og Kaput (2004) og Moss og McNab (2011) viste i sine undersøkelser. Det finnes altså god grunn til å begynne denne prosessen tidlig.

Vår analyse viste at forekomsten av FT var lav i alle verkene. Mulighetene til å utnytte elevenes evner til funksjonstenkning er altså ikke er benyttet i særlig stor grad i noen av bøkene. Vi fant allikevel noen tilfeller som skilte seg ut, hvor lærebokforfatterne kanskje har tenkt på samme måte, nemlig at elevene er mottakelige for å resonnere og reflektere rundt hvordan mengder kan samvariere. Oppgaven med appelsinene fra Multi gir elevene mulighet til å beskrive hvordan størrelsene varierer med hverdagsspråket, og kanskje også ved tegning. Ifølge Blanton og Kaput (2004) kan dette hjelpe dem i overgangen til symbolsk notasjon senere. Det at vi fant eksempler hvor elevene forholder seg til samvariasjon allerede i førsteklasse, skiller seg tydelig ut når vi ser at Lee og Park (2022) fant dette først i fjerdeklasse i Korea og i tredjeklasse i USA. Det er positivt for elevenes muligheter at vi finner eksempler som kan bidra til utviklingen av funksjonstenkning, når vi vet at elever tidlig på barneskolen evner å tenke på denne måten (Blanton, Brizuela, et al., 2015; Blanton & Kaput, 2004; Moss & McNab, 2011). Dette står i kontrast til for eksempel oppgaven om regnesløyfer, hvor det som står i fare for å bli fjernet fra oppgaven, er nettopp funksjonstenkningen. Vi kan også se en tydelig forskjell i hvordan oppgaven med appelsinene (bilde under) hjelper læreren å fremheve det algebraiske innholdet, i motsetning til i andre oppgaver som for eksempel i oppgaven om tallvenner fra Matemagisk (bilde), eller oppgaven med systematisk oppsett i Volum (bilde).



Bilde 29 Appelsinoppgave i Multi (Alseth et al., 2020a, s. 52)

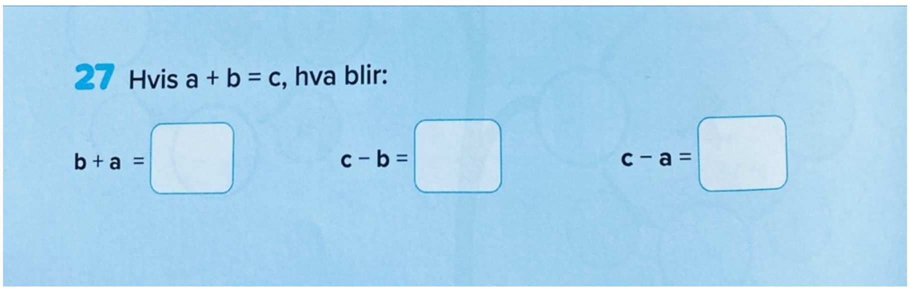
Oppgaver liknende appelsinoppgaven vil også kunne gi muligheten til at elevene kan se på strukturen, uten å nødvendigvis måtte regne ut verdiene, som Blanton et.al (2011; 2015) mente var et sentralt aspekt for å tenke algebraisk. Dersom elevene ser at den ene har to mindre/flere enn den andre, kan de resonnere seg frem til nye uttrykk ved hjelp av denne strukturen. På denne måten kan elevene begynne å resonnere rundt aritmetiske strukturer og generaliseringer av aritmetiske uttrykk tidlig i skoleårene (Bråting et al., 2018, s. 33). Dersom en skal få hjelp til å utvikle algebraisk tenkning i form av generalisert aritmetikk, kreves et fokus på å kjenne igjen strukturer, generalisering og matematiske lover i lærebøkene (Blanton et al., 2011; Blanton, Stephens, et al., 2015; Kieran et al., 2016). Det vil allikevel i størst grad være opp til læreren å hjelpe elevene til å tenke på denne måten.

Selv med lav forekomst av FT i alle læreverkene har vi sett at det allikevel er god variasjon i hvordan funksjonstenkningen kan se ut i førsteklasse, med både geometriske mønstre, tallfølger, tabeller, funksjonsmaskin, mønstre i regnestykker og samvariasjon. Med tanke på at det er viktig for elever å bli eksponert for en helhetlig og tidlig algebratilnærming som inkluderer alle områder der algebraisk tenkning kan forekomme (Blanton, Stephens, et al., 2015), trengs det ulike oppgaver med ulike perspektiver. For å bidra i størst mulig grad til funksjonstenkningen hos elevene, vil det være viktig at de får både hyppige og varierte muligheter for å utvikle denne tenkningen videre.

13.1.4 Ulike variabler

«Variabel» opptrådte aldri som eneste kategori i noen av oppgavene i vår analyse. Dette var også grunnen til at Blanton, Stephens, et al. (2015) og Bråting et al. (2019) valgte å integrere VAR i de andre store ideene i sine analyser, fremfor å ha den som en separat kategori. I vår analyse kom det frem at VAR aldri opptrådte uten kategorien EEEI, og denne sammenhengen ville ikke vært mulig å se dersom vi hadde utelatt VAR som egen kategori. Ettersom det viste seg å være stor variasjon i hva de ulike verkene tilbyr av tilnærminger til «variabel» var det formålstjenlig å ha med kategorien for å illustrere denne variasjonen, i likhet med Lee og Park (2022). Vi fant åpne tallsetninger med én ukjent i alle læreverkene og variabler som varierer i Matematikk og Volum, det skiller seg fra Lee og Park (2022), som fant variabler som ukjent tall gjennom alle klassetrinnene, mens variabler som varierer kun ble brukt på høyere klassetrinn.

Et annet eksempel som skiller seg særlig ut, er eksempelet vi fant på variabel som generaliseringsverktøy (bilde under). Lee og Park (2022) fant i sin studie at variabel som generaliseringsverktøy ikke ble synlig før i femteklasse i Korea, og i USA fant de ett tilfelle av denne typen i andreklasse, men ellers ikke før i femteklasse. Det var derfor noe overraskende for oss å finne dette i en lærebok for førsteklasse.



Bilde 14 Oppgave med variabel som generaliseringsverktøy (Olafsen, Korsvold, Onsrud, et al., 2020b, s. 162)

Det er verdt å poengtere at om elevene løser oppgaven som er vist over (bilde over) ved å sette inn tall, og ved prøving og feiling, vil de ikke kunne se sammenhengene oppgaven inviterer til, eller kunne generalisere. Dette vil først være mulig hvis de prøver flere eksempler, og deretter undersøker hvorfor de fungerer. Eller hvis de kommer frem til svaret helt uten å sette inn tall i det hele tatt. Det kan tenkes at å sette inn tall er en helt nødvendig konkretisering for mange av elevene, men for å utnytte muligheten til å fremme den algebraiske tenkningen trenger elevene lærere som kan hjelpe dem over i mer og mer sofistikerte og matematiske representasjoner (Clements & Sarama, 2012). Elevene må altså få hjelp til å knytte erfaringen med det mer konkrete til det abstrakte og generelle.

Vi har også sett at både Eriksen et al. (2018) og (Molina et al., 2018) fant at elever på småtrinnet var i stand til å resonnere algebraisk gjennom å se sammenhenger mellom variabler, og å bruke variabler til å representere ubestemte mengder. Det finnes altså grunn til å håpe at elevene kan løse oppgaver som denne, hvis de får muligheten til det.

Et perspektiv på hvorfor oppgaver som dette er inkludert i førsteklasse, kan være å venne elevene til å se oppgaver med bokstavvariabler. I lys av at det er viktig å introdusere den algebraiske tenkningen tidlig for at overgangen mellom aritmetikk og algebra skal bli lettere, kan vi se en hensikt med oppgaven slik den opptrer (Blanton & Kaput, 2004; Kaput, 2008). Når vi vet at å gi elever muligheter til å begynne å bruke symbolsk notasjon helt ned til første klasse, kan gi rom til mer komplekse ideer senere i skoleløpet (Blanton & Kaput, 2011), er dette en mulighet elevene bør få utforske. Bruken av algebraiske representasjoner bør ifølge Kaput (2000a) benyttes for å utnytte styrken som ligger i dem, og disse mulighetene må tilgjengeliggjøres for alle. Vi ser mulighetene denne oppgaven kan gi, men vi stiller spørsmål til at den er inkludert uten støtte eller veiledning til læreren utover prøving og feiling, slik at muligheten vanskelig blir tilgjengelig for alle elevene.

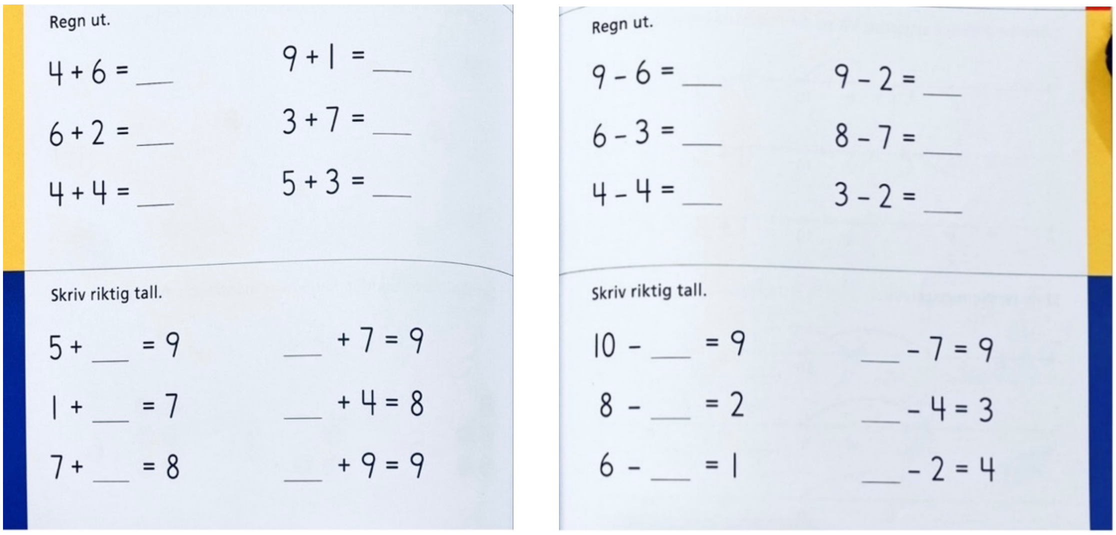
Som vi allerede har sett er det flere som støtter et perspektiv om at algebraen i grunnskolen ikke bare handler om bokstavsymbolene, men om måter å tenke på (Kieran, 2011). Variabler kan illustrere at man kan tenke generelt i det spesielle, og symbolene er helt avgjørende for å forstå det symbolske språket, som igjen er avgjørende for å forstå algebra (Blanton et al., 2011, s. 68). Både Matematikk og Volum benytter variabler i form av figurer eller spørsmålstegn, og Volum bruker i tillegg bokstavsymboler. Med tanke på at barn helt ned til første klasse har mulighet til å håndtere og forstå generaliseringer (Blanton, Brizuela, et al., 2015), finnes det egentlig ingen grunn til å ikke introdusere dette allerede i førsteklasse. Dette er en mulighet flere av bøkene kunne utnyttet i større grad.

Selv om vi har sett eksempler på mange muligheter for å utvikle algebraisk tenkning er det relativt få muligheter med tanke på hvor viktig den algebraiske tenkningen kan være for den videre skolematematikken (Kaput, 2008). Det kan tenkes at mulighetene for å utvikle denne tenkningen burde gjennomsyret bøkene for å gi elevene gode forutsetninger for å utvikle algebraisk tenkning. Vi skal videre se på hvordan disse mulighetene kan avhenge av tempoet til elevene, og hvordan lærerveiledningene bidrar til å differensiere med det som bakgrunn. Vi vil så gå over til å se på muligheter som ligger i verkene, som bøkene og veiledningen ikke fremhever, også kan bidra til utviklingen av den algebraiske tenkningen, dersom disse ikke forbipasseres.

14 Muligheter som avhenger tempo

Vi har sett at tempoet elevene jobber i kan spille en rolle for hvilke muligheter de får til å utvikle algebraisk tenkning. Vi stiller derfor spørsmål ved om de elevene som arbeider saktere ikke får nok muligheter til å utvikle algebraisk tenkning som elever som arbeider i et høyere tempo.

I vårt prosjekt så vi en tendens til at elever som jobber raskt kan få flere erfaringer med likhetstegnets egenskaper enn elever som jobber saktere. Eksempelet fra Matemagisk (se bildet under), illustrerer hvordan dette kan se ut. For å komme til oppgaven som faktisk inneholder EEEI og VAR, og dermed mulighet for å utvikle algebraisk tenkning må elevene gjøre to andre først. Elevenes utgangspunkt vil naturligvis være ulikt, slik at den mer avanserte blå oppgaven vil for noen være vanskelig. Det vil allikevel være viktig at alle elevene blir eksponert for ulik bruk av likhetstegnet slik at de kan få en mer relasjonell forståelse av det.

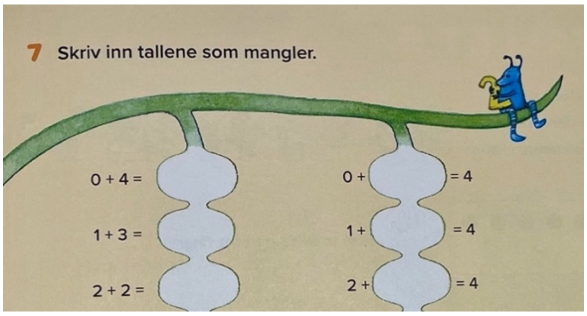


Bilde 1 Utdrag av Oppgaver på «sporsider» i Matemagisk
(Fritzen, Nilsen, Nilsen, Nyborg, Engmark, et al., 2020, s. 118-119)

Det er et viktig punkt for utviklingen av elevenes algebraiske tenkning å forstå at likhetstegnet representerer en relasjon mellom to like mengder (Carpenter et al., 2003; Knuth et al., 2016). I tillegg mener blant andre Carpenter et al. (2003) at elever kan stå i fare for å utvikle misoppfatninger om de ikke beveger seg fra den operasjonelle til den relasjonelle forståelsen av likhetstegnet. Dette er en av grunnene til at det er viktig at elevene får mange og varierte erfaringer med likhetstegnet. Hvis vi legger dette til grunn, kan det se ut som at de elevene som arbeidet raskere ikke bare kan få flere erfaringer med likhetstegnet og dermed flere muligheter til å utvikle algebraisk tenkning, de kan også få bedre utgangspunkt for denne utviklingen. Dette vil også innebære bedre forutsetninger i overgangen til algebra (Warren 2003 flere kilder), som kan fremstå som urettferdig om dette ikke er noe alle elevene skal få lik eksponering for.

Lee og Park (2022) viste i sin studie at de så en tendens i både USA og Korea hvor mulighetene for å håndtere en relasjonell forståelse av likhetstegnet en økte med skoletrinnene (side 406). Dersom vi sammenligner de norske lærebøkene med de fra USA og Korea, kan det tenkes at bøkene vil gi flere og flere muligheter for å utvikle en relasjonell forståelse av likhetstegnet etter hvert. Når det er sagt, har flere forskere poengtert viktigheten av å forstå likhetstegnet for å kunne gå over til algebra/tenke algebraisk, og dersom vi skal holde det for sant at denne forståelsen er grunnleggende må dette arbeidet starte tidlig.

I Volum så vi ofte at det var elever med høyt tempo som fikk utforske andre aspekter ved oppgavene, slik at elever med lavere tempo ikke får av disse mulighetene. Et eksempel hvor dette ble synlig var i oppgaven med regnestykkene (ft fra resultater, og bildeutklipp under). De elevene som blir raskt ferdige, kunne få i oppgave å lete etter mønster og sammenhenger, slik at oppgaven utvides til å inkludere en ny mulighet for algebraisk tenkning gjennom funksjonstenkning.



Bilde 2 Utdrag fra strukturer regneoppgave i Volum
(Olafsen, Korsvold, Onsrud, et al., 2020a, s. 97)

For å differensiere for elevene på en måte som ivaretar mulighetene for algebraisk tenkning også hos elever med lavere tempo, kan de for eksempel gjøre færre av hver oppgave, som vi har sett i lærerveiledningen til Volum. På den måten prioriteres heller variasjonen i oppgavene med både arbeidsmåte og innhold. Dette står i kontrast til det Matemagisk formidler med sine «sporsider» og utvidelsen vi så eksempel på i oppgaven over. Ved at Volum påpeker at elevene helst bør få gjøre litt av alle oppgavene, kan de sikre at alle elevene får erfaringer med flere typer oppsett. Og på den måten bidra til at alle elevene, uavhengig av arbeidstempo, får et likere utgangspunkt for den videre utviklingen.

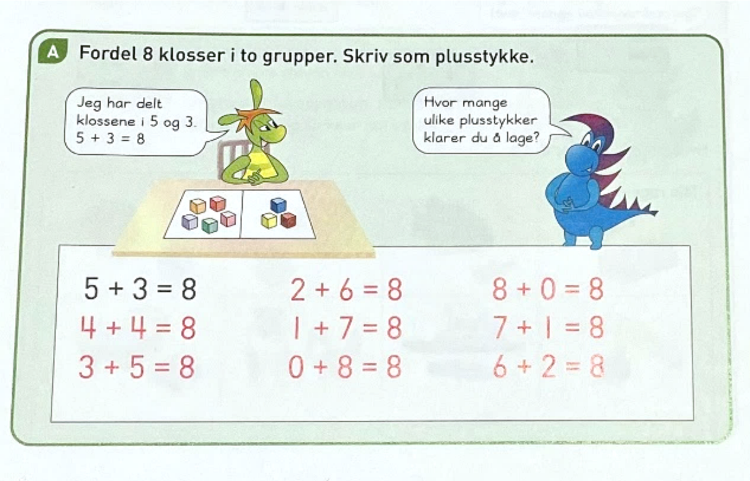
Siden elevene bør eksponeres for alle de store ideene for å få en helhetlig algebraforståelse (Blanton, Stephens, et al., 2015), kan forskjellene bli større mellom elevene dersom arbeidstempoet bestemmer om de får denne eksponeringen eller ikke. Denne forskjellen kan minskes ved at alle elevene får muligheten til å utvikle tenkningen innenfor de ulike store ideene. Dette er også i tråd med prinsippet om tilpasset opplæring, slik at læreren kan differensiere for eksempel arbeidsmengden ut fra tempo (Olsen, 2017). Læreren må da sørge for at alle de ulike algebraiske aspektene blir ivaretatt når oppgaven tilpasses, slik at ikke noen av elevene ofte får muligheter andre ikke får. Vi så flere eksempler i resultatkapitlet hvor lærerveiledningen gjorde dette på en god måte, og la opp til at alle elevene i klassen skulle gjøres oppmerksomme på nye, mer algebraiske aspekter ved oppgavene.

15 Oversette muligheter – støtte i lærerveiledningen

Noe av det som har bli tydelig gjennom vår analyse, er at det finnes mange muligheter som lett kan overses. Dette kan enten være fordi læreren selv ikke er oppmerksom på mulighetene som er til stede i bøkene, eller at lærerveiledningene ikke påpeker mulighetene tilstrekkelig for at læreren skal implementere dem i undervisningen.

Vi fant at det ofte var i lærerveiledningen at mulighetene for å tilføye eller fremheve de algebraiske aspektene lå. I noen tilfeller fant vi det eksplisitt nevnt for elevene hva de skulle se etter, som for eksempel om kommutativ lov fra Matematikk (bilde) eller når oppgavene i Volum etterspurte om elevene så et mønster i svarene, men dette forekom sjelden. Ifølge Mason (2018) er læreren mer avgjørende for å utvikle den algebraiske tenkningen enn oppgavene i seg selv, og mulighetene elevene får vil derfor i stor grad avhenge av at læreren identifiserer og bruker disse mulighetene. Et alternativ kan være at de bruker lærerveiledningen i sitt arbeid med å støtte og veilede elevene, og som hjelp til å identifisere mulighetene som ligger i læreverket. Dette er spesielt viktig fordi elevene ikke er klarer å utvikle denne tenkningen uten hjelp eller veiledning fra læreren (Carraher & Schliemann, 2018; Kieran, 2011) s 592). Elevene i førsteklasse er også i større grad avhengige av læreren enn på høyere klassetrinn, da de er mindre selvstendige i arbeidet med oppgavene.

Vi har sett at lærebøkene er sentrale i undervisningspraksisen (Fan et al., 2013; Van den Ham & Heinze, 2018) og innholdet i lærebøkene kan påvirke hva lærerne fokuserer på i undervisningen (Li et al., 2008; Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2018). Konsekvensen av dette er at innholdet i lærebøkene også kan bestemme hva elevene får mulighet til å lære. Med dette perspektivet kan vi stille spørsmål til om lærerveiledningene poengterer mulighetene som finnes i bøkene tilstrekkelig for lærerne.

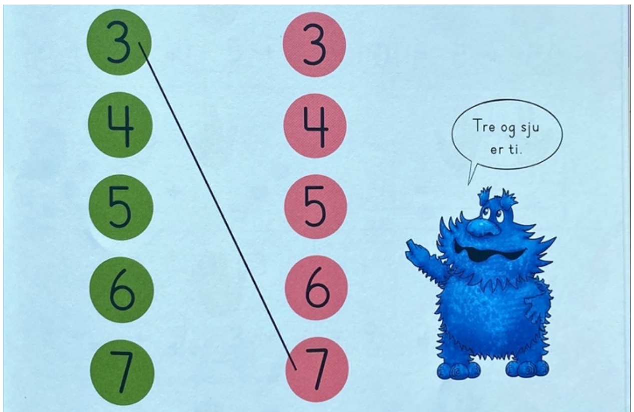


Bilde 15 Oppgave med utregningsforslag i lærerveiledningen til Multi (Alseth et al., 2020b, s. 73)

Vil vi peke tilbake til eksempelet fra Multi (bilde og resultatdel). Her oppfordres læreren til å hjelpe elevene å systematisere løsningene sine, for eksempel i stigende rekkefølge. Denne systematiseringen er avgjørende for at oppgaven skal kunne gi muligheter for å utvikle funksjonstenkning. Dette er også et eksempel som understreker viktigheten av lærerveiledningen. Uten at lærerveiledningen hadde pekt på denne muligheten, vil mulighetene oppgaven i mye større grad være avhengig av hvilket potensiale læreren ser i oppgaven. Mulighetene disse oppgavene har for å utvikle den algebraiske tenkningen hos elevene, vil da også avhenge av at læreren klarer å identifisere dem.

Et perspektiv som Pang og Sunwoo (2022) understreker, er at konsekvente og systematiske læreplaner og læringsressurser er nødvendig for å implementere funksjonstenkning i matematikkundervisningen (side 1316). Som vi har sett inneholder alle læreverkene oppgaver som i en eller annen form behandler tallvenner. Dersom lærebøkene hadde fremhevet en mulighet for å systematisere alle oppgavene på denne måten, hadde elevene fått mange flere muligheter til å oppdage regelmessigheten oppgavene og slik utvikle funksjonstenkning. På denne måten blir ikke alle mulighetene som finnes tatt i bruk til å fremheve denne viktige ideen. Elever som strever med å forstå de matematiske ideene som det blir undervist om, trenger kanskje nettopp at mulighetene benyttes i enda større grad, for å få erfaring med ideene gjentatte ganger, slik at de kan forstå dem. Dette vil være opp til læreren å sørge for, men boka kan være en påminnelse for læreren, eller som Stipek et al. (2017) beskrev, fungere som en veileder for læreren, og hjelpe med å sette mål for elevene i den proksimale utviklingssonen.

Som vi har poengtert flere ganger vil ikke elevene utvikle algebraisk tenkning uten hjelp (Kieran, 2011) s 592). Forutsetningene for at elevene skal få til mange av oppgavene i læreverkene på egenhånd er ofte til stede. Bøkene legger da opp til at elevene skal være i den aktuelle sonen, ved å gjøre ting de kan klare på egenhånd. For å hjelpe dem videre i den proksimale utviklingssonen, kan læreboka fungert som et verktøy for å støtte denne prosessen, ved å legge til rette for at elevene skal oppdage aspekter ved oppgaven som kan fremme den algebraiske tenkningen. Dette kan også fasiliteres av at læreren fungerer som stillas og tilbyr den støtten elevene trenger for å være i sin proksimale utviklingssone. På den måten kan elevene tilegne seg ny kunnskap som gjør at den aktuelle sonen deres blir utvidet (Vygotsky, 1978). Knyttet til oppgaven med funksjonstenkning i Matemagisk (bilde), så vi på den ene siden at muligheten for FT ble støttet av at boka satte tallene i stigende rekkefølge, slik at det ble lettere for dem å se mønstre. På den annen side ble det ikke fremhevet eksplisitt slik at mange elever heller løser den som en utregningsoppgave, og da «går glipp av» funksjonstenkningen. I situasjoner som denne vil det være viktig at læreren både oppdager og tar mulighetene (Blanton & Kaput, 2011). Da må læreren være den som utfyller boka der forklaringen mangler.



Bilde 16 *Utdrag fra systematisert tiervennoppgave i Matemagisk (Fritzen, Nilsen, Nilsen, Nyborg, Baklid, et al.,*

Lærerens kompetanse vil spille en rolle for i hvilken grad de klarer å se og utnytte mulighetene for å utvikle algebraisk tenkning. For å klare å utnytte mulighetene tilstrekkelig, må lærerne også ha en bevissthet rundt potensialet i oppgavene knyttet til tidlig algebra (Hunter et al., 2018) s399). De må også være bevisste på sin undervisningspraksis, slik at valgene de tar med tanke på differensiering påvirker elevene på en god måte Idsøe (2020).

Lærerveiledningen kan hjelpe lærerne å øke denne bevisstheten, både rundt sin egen rolle og differensiering, og for å få øye på det algebraiske innholdet. Det vil også kunne bidra til å forberede læreren i større grad ved å kjenne oppgavene godt og potensialet i dem Eriksen et al. (2018), slik at det blir lettere å oppdage mulighetene etter hvert som de kommer.

Vi har vist eksempler på at lærerveiledningene i analysen vår viste seg å ikke invitere læreren til å vektlegge det algebraiske innholdet i stor nok grad.. Forklaringen til oppgavene var ofte lite utfyllende eller ikke til stede. Som vi har sett tidligere forklarte lærerveiledningen til Volum (kapittel) hva den kommutative lov går ut på, men vi stiller spørsmål ved om veiledningen lærere får her egentlig er tilstrekkelig for at elevene kan få en god nok mulighet til å utvikle algebraisk tenkning i denne type oppgave. Læreren får lite hjelp til hvordan en kan formidle loven til elevene på en forståelig måte, på grunn av den noe forkortede og lite utdypende forklaringen de selv får. Dette eksempelet oppleves som et typisk eksempel på hvordan lærerveiledningene forklarer bakgrunnen for oppgavene. Det illustrerer også hvordan det i liten grad tilrettelegges for at læreren får den nødvendige støtten til å fremheve det algebraiske aspektet, eller de matematiske ideene som ligger til grunn for oppgaven. Med tanke på dette er det problematisk å se, som Selander og Skjelbred (2004) påpeker, at en lærer som mangler den faglige kompetansen eller er usikker vil bli mer bundet til boka, og derfor være mer avhengig av at læreverket tilbyr mer støtte for å kunne hjelpe elevene.

Ettersom vi har undersøkt mulighetene som finnes i læreverkene, er det interessant å se på tilfeller hvor lærerveiledningen ikke støtter læreren. Verken i arbeidet med å løfte frem mulighetene for å utvikle algebraisk tenkning, eller i arbeidet med å tilpasse disse mulighetene for de ulike elevene i klassen. Den manglende støtten ble også spesielt oppsiktsvekkende, når den eneste løsningsmetoden som blir foreslått for å løse oppgaven med variabel som generaliseringsverktøy (bilde med generaliseringsverktøy), er å sette inn tallverdier. Det gis ingen veiledning til læreren om hvordan en kan forklare eller samtale med elevene om denne sammenhengen, eller det faktum at elevene faktisk må prøve ut ulike eksempeltall for å begynne å forstå det generelle mønsteret. Siden algebra dreier seg om generalisering og uttrykk for generalisering (Kaput, 2008), er det problematisk at dette ikke løftes frem og tydeliggjøres i lærerveiledningen.

Avslutning

I vår studie har vi analysert læreverk for førsteklasse ved hjelp Blanton, Stephens, et al. (2015) «Store ideer», for å svare på problemstillingen: «På hvilke måter tilrettelegger utvalgte lærebøker for førsteklasse for at elevene skal utvikle algebraisk tenkning?». Forskningsspørsmålene vi har forsøkt å gi svar på er:

4. *Hva kjennetegner algebraisk tenkning i elevbøker for førsteklasse?*
5. *Hvor stor andel av oppgavene i elevbøkene gir mulighet for algebraisk tenkning?*
6. *Hvilke muligheter gir lærerveiledningene for å differensiere, i utviklingen av algebraisk tenkning?*

Resultatene våre viser at det er forskjeller mellom læreverkene i hvor mye algebraisk innhold de har. Lærebøkene illustrerer ulikheter i både type og omfang av det algebraiske innholdet. Dette kan tilsi at valg av lærebøker kan påvirke elevenes muligheter til å utvikle algebraisk tenkning. For å oppsummere resultatet vi fant til forskningsspørsmål 2 kan vi kort se på hvordan de ulike kategoriene i vårt analyseverktøy fordelte seg. Resultatene fra den kvantitative analysen viser at det er forskjeller mellom de ulike læreverkene i hvor mange muligheter for algebraisk tenkning de inneholder, og på hvilken måte det blir lagt frem. Når vi ser på hvor stor del av elevbøkene som inneholder en mulighet for algebraisk tenkning, viser våre resultater at denne varierer mellom læreverkene (tabell). Nederst, med 33,1 prosent, finner vi Matemagisk, mens Matematikk har en noe større andel med 38,3 prosent. I toppen finner vi Multi med 50,4 prosent og Volum med 55,4 prosent. Totalt sett gir altså Volum flere muligheter for å utvikle algebraisk tenkning enn de andre læreverkene, og hele 22,3 prosentpoeng mer enn Matemagisk.

For å se på bredden av mulighetene i læreverkene, til å utvikle algebraisk tenkning, benyttet vi de fem «store ideene» som rammeverk for å utvikle vårt eget analyseverktøy. Analysen vi så gjorde resulterte i (tabell) som viser at Volum er det verket som har høyest andel i samtlige av kategoriene (med unntak av PR), og derfor mest variasjon og bredde i mulighetene.

Ved at vi utvidet rammeverket til å inkludere en kategori for utregningsoppgaver, og en kategori for Pre EEEI, fikk vi et mer nyansert bilde av det algebraiske innholdet i bøkene. Kategorien for Pre EEEI ga oss en innsikt i en mulig progresjon, og ga oss muligheten til å se sammenhenger som at Matemagisk hadde den laveste andelen av innhold innenfor de store ideene, men var også det verket med mest innhold i sidekategorien Pre EEEI.

Ved å se på innholdet vi fant under de ulike kategoriene kan vi også få et innblikk i hvordan algebraisk tenkning kan se ut i førsteklasse, som er spørsmålet som behandles i det første forskningsspørsmålet. Kategorien Likhet, ulikhet, likninger og uttrykk (EEEI), var størst i alle læreverkene og oppgavene i denne kategorien handler i stor grad om å måtte forholde seg til likhetstegnet. Her illustrerte alle verkene et betydelig innhold, men Volum skilte seg ut også her, fordi vi fant et bredt spekter av ulike måter å forholde seg til likhetstegnet på.

Når det gjelder generalisert aritmetikk (GA) var dette kategorien med nest høyest prosentandel i alle verkene. Vi opplevde at andelen i alle verkene var svært lav, med tanke på viktigheten av denne ideen, og at få av disse mulighetene ble løftet frem av lærerveiledningen. Som vi har sett eksempler på, er muligheten for å oppdage den kommutative lov til stede i alle verkene, og noe mer eksplisitt nevnt i Matematikk. Muligheten for å se generelle egenskaper ved tall, som for eksempel null, fant vi også, men igjen implisitt, slik at det blir mer opp til læreren å fremheve dette for elevene. Sammenhengen mellom regneartene, her addisjon og subtraksjon, fant vi som eget kapittel i Volum 1, mens de andre verkene hadde muligheter, men i mye mindre tydelig grad.

Innenfor funksjonstenkning (FT) skilte Matemagisk seg ut ved å kun ha en oppgave med denne store ideen. De andre læreverkene hadde alle oppgaver knyttet til rekursive mønstre, mens Multi i tillegg hadde oppgaver hvor samvariasjon ble tatt opp. Mengden av FT fremstår også som lav, når dette er en av de viktige ideene som kan bidra til å legge grunnlaget for den algebraiske tenkningen. Vi fant også at andelen FT kunne vært vestentlig høyere i alle verkene, dersom oppgaver med tallvenner hadde vært strukturert på en måte som innbyr til å se sammenhenger og mønstre for elevene, eller dersom lærerveiledningen i større grad hadde hjulpet læreren med dette.

Variabel (VAR) viste seg, ikke overraskende, å ha lav andel i alle verkene unntatt Volum. Vi fant oppgaver hvor elevene skal finne et «ukjent tall» i alle læreverkene, selv om omfanget varierte noe. Oppgaver som behandler variabel som varierer fant vi også eksempler på i både Matematikk og Volum, og disse oppgavene var som vi har sett, stort sett åpne tallsetninger med to eller flere tomme plasser. Vi fant oppgaver med bokstavsymboler, og da variabel som generaliseringsverktøy i Volum, som eneste læreverk med denne variasjonen av VAR. Dette var noe vi synes var overraskende å finne i en førsteklassebok, ettersom dette ikke kom før høyere klassetrinn i undersøkelsen til for eksempel Lee og Park (2022).

I den tematiske analysen fant vi «temaer» som gikk igjen i måten bøkene differensierte på. Hyppigheten og omfanget av differensieringen varierte i stor grad i de ulike læreverkene. Ofte var differensieringen knyttet til abstraksjonsnivået, og da spesielt bruken av konkreter som forenkling. Vi så også at det var en generell tendens at lærerveiledningene ofte ikke la opp til differensiering i det hele tatt.

Et fellestrekk ved alle verkene var at de inneholdt flere muligheter for algebraisk tenkning enn den kvantitative analysen viste. Disse mulighetene ble enkelte ganger fremhevet tydelig til læreren og bidro slik til å kunne øke både omfanget og variasjonen av kategoriene i analyseverktøyet. I disse tilfellene får elevene muligheter som gir dem et bedre utgangspunkt for en helhetlig algebraforståelse. Som oftest så vi allikevel at disse mulighetene ikke ble tydeliggjort så de lett kan overses. Det styrker argumentene for den viktige rollen læreren har i utviklingen av elevenes algebraiske tenkning (Kieran, 2011).

Som vi har poengtert flere ganger gjennom denne oppgaven, vil læreren spille en stor rolle i elevenes muligheter for å utvikle algebraisk tenkning. Både i å identifisere og utnytte muligheter som oppstår, men også i den daglige differensieringen læreren gjør. Vi har i denne oppgaven sett eksempler på at lærerveiledningene foreslår å differensiere oppgaver på måter som gjør at de kan miste sitt algebraiske innhold. Vi har til og med sett et eksempler på at elever som er raskere i arbeidet, vil kunne få tilgang på mer algebraisk innhold enn de som arbeider saktere. I disse situasjonene vil det være avgjørende at læreren ser dette, og er i stand til å differensiere på en måte som ikke tar bort noen elevers muligheter for å utvikle algebraisk tenkning. For å få til å utnytte mulighetene som kan overses, og samtidig sørge for at alle får tilgang på mulighetene, må læreren må være utrolig oppmerksom, og ha en inngående kunnskap om utvikling av algebraisk tenkning for at elevene skal få og få utbytte av mulighetene

Vi deler i et syn med Blanton, Brizuela, et al. (2015) og Mason (2018) om at antagelsen om at elever ikke er «klare» for å tenke algebraisk ikke stemmer. Vårt bidrag viser at det allerede i førsteklasse finnes mange muligheter i lærebøkene, men at disse må identifiseres og utnyttes på en god måte som gjør denne tenkningen tilgjengelig for at elevene. Vi har også understreket viktigheten av læreboka og lærerrollen inn i dette arbeidet. Elevenes muligheter vil i stor grad avhenge av læreren, og lærerens muligheter vil igjen avhenge av mulighetene som fremheves i læreboka.

16 Videre forskning

Med tanke på forskningen som er gjort av Bråting (2019) i Sverige og Hemmi (2020) i Estland, Finland og Sverige, savner vi lignende studier i Norge utover Kongelfs (2015) studie på ungdomstrinnet, og som heller tar for seg algebraisk tenkning på barnetrinnet, og i begynneropplæringen. I denne oppgaven har vi understreket viktigheten av tidlig algebra, og det er derfor naturlig å etterspør mer forskning på den algebraiske tenkningen i de første skoleårene.

Ettersom vi også har sett viktigheten av lærebøkene, trenger vi mer forskning på bøkene som har blitt gitt ut etter, og som er i tråd med fagfornyelsen (2020). Fordi vi kun har sett på lærebøkene til førstetrinn i denne studien, ville det også vært nyttig å se på progresjonen i de videre skoletrinnene. Med liknende studier på lærebøker fra høyere skoletrinn kan det være relevant å se om det er en naturlig progresjon her og økning i muligheter for elevene til å utvikle algebraisk tenkning. Dette kunne også satt vår sidekategori «Pre EEEI» inn i en mer nyansert kontekst, og vi kunne fått innsikt i om denne minsket i omfang på høyere trinn. Det er i flere retninger denne oppgaven har inspirert oss til å ville forske mer, eller oppfordre andre til å ta for seg liknende problemstillinger.

En lærebokanalyse kan potensielt forutse, men ikke konkludere med sikkerhet hvordan bøkene blir brukt i klasserommet, og det bør derfor også sees på bruken i klasserommet (Fan et al., 2013) s 640). Vi kan altså ikke si noe om den helhetlige bruken og utbyttet elevene kan få av de ulike læreverkene, uten å måle det. For å kunne si noe mer om dette, hadde det vært mulig å forske videre med utgangspunkt i vår analyse, på en måte som inkluderer også klasseromsaspektet. Det hadde vært spesielt interessant å se hvordan Volum brukes i klasserommet, når vi har sett at skiller seg en del ut fra de andre verkene. Dette med tanke på hva elevene møter i elevbøkene, men også med tanke på at lærerveiledningene kommer til kort i å følge opp og støtte læreren i å differensiere i utviklingen av elevenes algebraiske tenkning.

Litteratur

Alseth, B., Arnås, A.-C. & Røsseland, M. (2020a). *Multi 1A : Elevbok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.-C. & Røsseland, M. (2020b). *Multi 1A : Lærerens bok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.-C. & Røsseland, M. (2020c). *Multi 1B : Elevbok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.-C. & Røsseland, M. (2020d). *Multi 1B : Lærerens bok* (3. utg.). Gyldendal.

Berggren, S. A. & Jom, P. E. O. (2021). *Førsteklasses matematikk : matematikk for de yngste elevene* (1. utgave. utg.). Gyldendal.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom : transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M. L., Brizuela, B., M. , Gardiner, A. M., Sawrey, K. & Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for research in mathematics education*, *46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization : A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 5-24). Springer.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. & Dougherty, B. J. (2011). *Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5*. National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M. L., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I. & Kim, J.-S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking : The impact of a comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for research in mathematics education*, *46*(1), 39-87. https://doi.org/https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Boester, T. & Lehrer, R. (2008). Visualizing Algebraic Reasoning. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 211-234). Lawrence Erlbaum Associates.

Bråting, K., Hemmi, K. & Madej, L. (2018). Teoretiska och praktiska perspektiv på generaliserad aritmetik. I J. Häggström, Y. Liljekvist, J. B. Ärlebäck, M. Fahlgren &

O. Olande (Red.), *Perspectives on professional development of mathematics teachers Proceedings of MADIF 11 The eleventh research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education* (s. 27-36). Svensk förening för matematikdidaktisk forskning SMDF. http://matematikdidaktik.org/wp-content/uploads/2019/01/Madif11_webb-002.pdf

Bråting, K., Madej, L. & Hemmi, K. (2019). Development of algebraic thinking : opportunities offered by the swedish curriculum and elementary mathematics textbooks. *Nordic Studies in MAthematics Education*, *24*(1), 27-49.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*, 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, *19*, 1-15.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Belknap Press of Harvard University Press.

Bugten, Å. M. & Olafsen, A. R. (2020). *Volum 1A : Lærerveiledning*. Fagbokforlaget.

Bugten, Å. M. & Olafsen, A. R. (2021). *Volum 1B : Lærerveiledning*. Fagbokforlaget.

Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Fong Ng, S. & Schmittau, J. (2005). The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(1), 5-15. https://doi.org/10.1007/BF02655892

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically : integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2008). Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 235-272). Lawrence Erlbaum Associates.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating Early Algebraic Thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds : The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 107-138). Springer International Publishing. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. & Schwartz, J. L. (2008). Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 235-272). Lawrence Erlbaum Associates.

Chang, S. H., Lee, N. H. & Koay, P. L. (2017). Teaching and learning with concrete-pictorial-abstract sequence: A proposed model. *The Mathematics Educator*, *17*(1), 1-28.

Clark, T., Foster, L., Sloan, L. & Bryman, A. (2021). *Bryman's social research methods* (Sixth edition. utg.). Oxford University Press.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2012). Learning and Teaching Early and Elementary Mathematics. I J. S. Carlson & J. R. Levin (Red.), *Instructional Strategies for Improving Students' Learning* (s. 107-162). Information Age Publishing.

Dahl, H. H., Nohr, M.-E. & Rättzén, F. (2020). *Matematikk 1B : Lærerveiledning*. Cappelen Damm.

Dahl, H. H., Nohr, M.-E., Rättzén, F. & Mathisen, L. (2020a). *Matematikk 1A : Grunnbok*. Cappelen Damm.

Dahl, H. H., Nohr, M.-E., Rättzén, F. & Mathisen, L. (2020b). *Matematikk 1A : Lærerveiledning*. Cappelen Damm.

Dahl, H. H., Nohr, M.-E., Rättzén, F. & Mathisen, L. (2020c). *Matematikk 1B : Grunnbok*. Cappelen Damm.

Ekspertgruppa om lærerrollen. (2016). *Om lærerrollen. Et kunnskapsgrunnlag*. Fagbokforlaget.

Eriksen, E., Solem, I. H. & Ulleberg, I. (2018). På jakt i elevers algebraiske tenkning. I K. Palm & E. Michaelsen (Red.), *Den viktige begynneropplæringen. En forskningsbasert tilnærming* (s. 187-212). Universitetsforlaget.

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM : The International Journal on Mathematics Education*, *45*(5), 633-646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Freudenthal, H. (1977). What is Algebra and What has it been in History? *Archive for history of exact sciences*, *16*(3), 189-200. https://doi.org/10.1007/BF00328154

Fritzen, I.-L., Nilsen, E. K., Nilsen, M. & Nyborg, S. (2020). *Matemagisk : Lærerveiledning* (2. utg.). Aschehoug.

Fritzen, I.-L., Nilsen, E. K., Nilsen, M., Nyborg, S., Baklid, E. S. & Ødegaard, E. (2020). *Matemagisk 1 : Oppgavebok* (2. utg.). Aschehoug undervisning.

Fritzen, I.-L., Nilsen, E. K., Nilsen, M., Nyborg, S., Engmark, E., Baklid, E. S. & Ødegaard, E. (2020). *Matemagisk 1 : Grunnbok* (2. utg.). Aschehoug undervisning.

Grønmo, L. S. (2014). Svikter skolen de flinke elevene? I L. S. Grønmo, E. Jahr, K. Skogen & I. Wistedt (Red.), *Matematikktalenter i skolen* (s. 9-36). Cappelen Damm.

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2. utg. utg.). Fagbokforl.

Håstein, H. & Werner, S. (2014). Tilpasset opplæring i fellesskapets skole. I M. Bunting (Red.), *Tilpasset opplæring - i forskning og praksis* (s. 19-55). Cappelen Damm.

Haug, P. (2006). *Begynnaropplæring og tilpassa undervisning : kva skjer i klasserommet?* Caspar Forlag.

Hemmi, K., Bråting, K. & Lepik, M. (2020a). Curricular approaches to alebra in Estonia, Finland and Sweden - a comparative study. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 49-71. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1740857

Hemmi, K., Bråting, K. & Lepik, M. (2020b). Curricular approaches to algebra in Estonia, Finland and Sweden - a comparative study. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 49-71. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1740857

Hoff-Jensen, R., Bjerke, M. O. & Afdal, H. W. (2020). Begynneropplæring - et kjent, men uklart begrep : En analyse av læreres perspektiver. *Nordisk tidsskrift for pedagogikk og kritikk*, *6*, 143-157. https://doi.org/https://doi.org/10.23865/ntpk.v6.2030

Hunter, J., Anthony, G. & Burghes, D. (2018). Scaffolding Teacher Practice to Develop Early Algebraic Reasoning. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds : The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 379-401). Springer International Publishing. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_16

Idsøe, E. C. (2020). *Differensiering i skolen : en praktisk bok om tilpasset opplæring* (1. utgave. utg.). Cappelen Damm akademisk.

Johannessen, A., Christoffersen, L. & Tufte, P. A. (2021). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (6. utgave. utg.). Abstrakt forlag.

Johannessen, L. (2022). Utenfor akademia: mot en utvidet forståelse av «abduktiv analyse» og teoriutvikling. *Norsk sosiologisk tidsskrift*, *6*, 1-16. https://doi.org/10.18261/nost.6.2.4

Kaput, J. J. (2000a). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. https://eric.ed.gov/?id=ED441662

Kaput, J. J. (2000b). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by" algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. https://eric.ed.gov/?id=ED441664

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 5-18). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational studies in mathematics*, *12*(3), 317-326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (2011). Overall Commentary on Early Algebraization: Perspectives for Research and Teaching. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 579-593). Springer Berlin / Heidelberg.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra : Research into its Nature, its Learning, its Teaching* (1st ed. 2016. utg.). Springer International Publishing : Imprint: Springer.

Kim, O.-K. (2018). Teacher Decisions on Lesson Sequence and Their Impact on Opportunities for Students to Learn. I L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat & J. Visnovska (Red.), *Research on MAthematics Textbooks and Teachers' Resources* (s. 315-339). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_15

Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M. L. & Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan*, *97*(6), 65-68. https://doi.org/10.1177/0031721716636877

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N. & Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in mathematics education*, *37*, 297-312. https://doi.org/10.2307/30034852

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. & Stephens, A. C. (2011). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization : A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 259-276) (Advances in Mathematics Education Series). Springer.

Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in MAthematics Education*, *20*(3-4), 83-109.

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

Lee, E. & Park, M. (2022). Exploring Opportunities to Develop Algebraic Thinking Presented in Elementary Mathematics Textbooks in Korea and the United States. *Journal of Educational Research in Mathematics*, *32*(3), 395-421. https://doi.org/https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.395

Levin, M. & Walkoe, J. (2022). Seeds of algebraic thinking: a Knowledge in Pieces perspective on the development of algebraic thinking. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(6), 1303-1314. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01374-2

Li, X., Ding, M., Capraro, M. M. & Capraro, R. M. (2008). Sources of Differences in Children's Understandings of Mathematical Equality: Comparative Analysis of Teacher Guides and Student Texts in China and the United States. *Cognition and Instruction*, *26*, 195 - 217.

Lyngsnes, K. & Rismark, M. (2017). *Didaktisk praksis 1-7. trinn*. Gyldendal akademisk.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 65-86). Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (2008). Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 57-94). Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2011). Commentary on Part III. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 557-577). Springer Berlin Heidelberg.

Mason, J. (2018). How Early Is Too Early for Thinking Algebraically? I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds : The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 329-350). Springer International Publishing. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_14

Molina, M., Ambrose, R. & Río, A. d. (2018). First Encounter with Variables by First and Third Grade Spanish Students. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds : The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 261-280). Springer International Publishing. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_11

Moss, J. & McNab, S. L. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and Covariation. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization : a Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 277-302). Springer.

Nataraj, M. S. & Thomas, M. (2016). Teaching and learning Middle School Algebra: Valuable Lassons from the History of Mathematics. I S. Stewart (Red.), *And the Rest is Just Algebra* (s. 131-154). Springer International Publishing AG.

NESH. (2021). *Forskningsetiske rettningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora* (5. utg.). De nasjonale forskningsetiske komiteene.

Olafsen, A. R., Korsvold, H. T. & Kaufmann, O. T. (2020). *Volum 1B : Elevbok*. Fagbokforlaget.

Olafsen, A. R., Korsvold, H. T., Onsrud, G. & Kaufmann, O. T. (2020a). *Volum 1A : Elevbok*. Fagbokforlaget.

Olafsen, A. R., Korsvold, H. T., Onsrud, G. & Kaufmann, O. T. (2020b). *Volum 1A : Elevbok* Fagbokforlaget.

Olafsen, A. R., Korsvold, H. T., Onsrud, G., Kaufmann, O. T. & Ball, S. L. (2020). *Volum 1A : Elevbok* (1. utg.). Fagbokforlaget.

Olsen, M. H. (2017). *Elever med stort læringspotensial : tilpasset opplæring*. Pedlex.

Opplæringslova. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa* (LOV-1998-07-17-61). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61?q=oppl%C3%A6ringsloven

Palm, K., Becher, A. A. & Michaelsen, E. (2018). Den viktige begynneropplæringen - Aktuelle fagområder og kritiske perspektiver. I K. Palm & E. Michaelsen (Red.), *Den viktige begynneropplæringen. En forskningsbasert tilnærming* (s. 13-32). Universitetsforlaget.

Pang, J. & Sunwoo, J. (2022). Design of a pattern and correspondence unit to foster functional thinking in an elementary mathematics textbook. *ZDM - Mathematics Education*, *54*(6), 1315-1331.

Pepin, B. (2018). Enhancing Teacher Learning With Curriculum Resources. I L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat & J. Visnivska (Red.), *Research in Mathematics Texbooks and Teachers' Resources* (s. 359-374). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_17

Rezat, S., Fan, L. & Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(6), 1189-1206. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3

Robitaille, D. F. & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. I *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* (s. 687-709). Macmillan Publishing Co, Inc.

Selander, S. & Skjelbred, D. (2004). *Pedagogiske tekster for kommunikasjon og læring*. Universitetsforlaget.

Sievert, H., van den Ham, A.-K. & Heinze, A. (2021). The role of textbook quality in first graders' ability to solve quantitative comparisons: a multilevel analysis. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(6), 1417-1431. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01266-x

Skorpen, L. B. (2009). Nokre spesielle trekk ved arbeidet med matematikkfaget i begynnaropplæringa. *Nordic Studies in MAthematics Education*, *14*(3), 7-32.

Solvang, R. (1992). *Matematikk-didaktikk* (2. utg. utg.). NKI.

Stein, M. K., Remillard, J. & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematic* (Bd. 1, s. 319-370). Information age.

Stipek, D., Franke, M., Clements, D., Farran, D. & Coburn, C. (2017). PK-3 What Does It Mean For Instruction? *Social Policy Report*, *3*(2), 1-23. https://doi.org/https://doi.org/10.1002/j.2379-3988.2017.tb00087.x

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk: Kjerneelementer* (MAT01-05). https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Van de Walle, J. A., Bay-Williams, J. M., Lovin, L. H. & Karp, K. S. (2018). *Teaching student-centered mathematics : developmentally appropriate instruction for grades 6-8* (3rd. ed. utg., Bd. vol. 3). Pearson.

Van den Ham, A.-K. & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, *59*, 133-140. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.07.005

Van Zanten, M. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM*, *50*(5), 827-838. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0973-x

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society : the development of higher psychological processes* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman, Red.). Harvard University Press.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 122-137. https://doi.org/10.1007/BF03217374

Yeo, J. B. W., Choy, B. H., Lim, L. G. P. & Wong, L. F. (2019). Innovative Pedagogical Practices. I T. L. Toh, B. Kaur & E. G. Tay (Red.), *Mathematics Education in Singapore* (s. 165-193). Springer Nature Singapore.

Vedlegg: Medforfattererklæring

Om to eller tre studenter gjennomfører og/eller skriver masteroppgaven sammen, skal det legges ved et medforfatterklæring, jf. emneplan MGMO5900:

"For studenter som velger å gjennomføre masteroppgaven som gruppearbeid, skal det gå tydelig fram i egen redegjørelse hvordan arbeidet er fordelt, og hvordan hver enkelt oppfyller kravet om selvstendig vitenskapelig arbeid. Her benyttes en medforfattererklæring som begge eller alle tre parter signerer."

Masteroppgavens tittel:

Muligheter til å utvikle algebraisk tenkning i fire lærebøker for førsteklasse

Redegjørelse på hvordan arbeidet er fordelt, og hvordan den enkelte oppfyller kravet om selvstendig vitenskapelig arbeid:

Vi har begge deltatt likestilt og rettferdig i arbeidet med masteroppgaven. Med dette mener vi i arbeidet med ideutvikling og prosjektskisse, orientering i litteratur, gjennomføring av analyse, veiledninger og i skriveprosessen helt til det ferdigstilte produktet. Begge parter oppfyller på denne måten kravet om selvstendig vitenskapelig arbeid.

Undertegnede bekrefter å ha bidratt til følgende deler av masteroppgavearbeidet:

Prosjektskisse, idé og tema for masteroppgaven	Ja
Praktisk gjennomføring av studien for eksempel innhenting av data	Ja
Analyse, drøfting og tolkning av resultatene	Ja

Undertegnede har lest og godkjent den innsendte versjonen av masteroppgaven

Oslo 15.05.23 Kamilla Skjeggestad Kamilla Skjeggestad ....

Oslo 15.05.23 Stine Larsen Stine Larsen ....

(sted) (dato) (signatur)