

MASTEROPPGAVE

M5GLU

Mai 2023

En kartlegging av elevers hoderegningsstrategier i divisjon på femte og tiende trinn

A Survey of Pupils' Mental Arithmetic Strategies in Division in Fifth and Tenth Grade

Vitenskapelig masteroppgave

30 sp oppgave

Marianne Aasland

OSLOMET

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Sammendrag

Denne masteroppgaven handler om hoderegning av divisjon. Selv om man i dagens samfunn har kalkulator og andre digitale verktøy som hjelper oss med både enkle og mer avanserte regnestykker, er hoderegning fremdeles en viktig ferdighet. Det kan utvikle tallforståelse, forståelse for algebra, det kan aktivisere hjernen og være med på å utvikle en god hjernehelse. Det er i tillegg viktig å kunne dobbeltsjekke om man regner riktig når man bruker kalkulator. Læreplanen legger også vekt på at hoderegning er en ferdighet man skal arbeide med i skolen.

I denne oppgaven har jeg sett nærmere på hvordan et utvalg femte- og tiendeklassinger regner divisjon av positive heltall med null i rest, i hodet. Det har blitt gjennomført en hoderegningstest med 19 divisjonsoppgaver på totalt 49 femteklassinger og 38 tiendeklassinger. For å analysere elevbesvarelene har jeg utarbeidet et eget analyseverktøy som baserer seg på tidligere forskning på hoderegningstrategier i divisjon og består av elleve hoderegningstrategier. Analysen tok utgangspunkt i tre forskningsspørsmål, som handlet om hvor mange strategier hver enkelt elev brukte, hvilke strategier elevene brukte, og om elevene viste tilpasningsevner i valg av strategier når de løste oppgavene.

Analysen viser at det er stor forskjell på femte og tiende trinn når det kommer til hvor mange oppgaver de klarer å løse riktig. På femte trinn fikk elevene hovedsakelig til fire oppgaver, mens på tiendetrinn fikk mange elever til alle oppgavene. I snitt brukte elevene på femte trinn 3,0 strategier, mens elevene på tiende trinn brukte 4,5 strategier. Fordelingen av hvilke strategier som ble brukt var lik på femte og tiende trinn. Tilpasningsevnene til elevene var varierende og så ut til å avhenge av oppgavetypen.

Jeg diskuterer at elevene i stor grad oppfyller det læreplanen sier at elevene skal kunne, og totalt sett kan man si at elevene har funksjonelle ferdigheter i hoderegning av divisjon i forhold til alderstrinnet. Samtidig viser elevene også forbedringspotensial, og det vil være hensiktsmessig å arbeide mer med strategiutvikling i hoderegning av divisjon.

Abstract

This master's thesis is about mental arithmetic and division. Today, calculators and other digital aids are very accessible, and one may think that mental arithmetic is an outdated knowledge. This is not the case. Mental arithmetic can help develop numeracy, understanding of algebra, it can activate the brain in a way that develops good brain health, and it is important to be able to check the answers the calculator give. Mental arithmetic is also mentioned in the Norwegian curriculum, which highlights the fact that pupils are supposed to develop their ability in mental arithmetic in school.

In this thesis I have explored how a sample of fifth and tenth graders calculate division tasks with positive whole numbers with zero in remainder using mental arithmetic. A mental arithmetic test with 19 division tasks was completed by 49 fifth graders and 38 tenth graders. I developed an analysis tool to analyze the pupils' responses, which was based on previous research strategies on mental arithmetic for division. The analysis tool contains eleven different strategies. The analysis is based on three research questions that ask how many strategies each pupil used, which strategies the pupils used, and whether the pupils were adaptable when they chose strategies when they were solving the tasks.

The analysis showed that there is a big difference between the fifth graders and the tenth graders when it comes to solving the tasks correctly. The fifth graders mainly managed to solve the first four tasks of the test, while many of the tenth graders managed to solve all the tasks on the test. On average the fifth graders used 3,0 strategies each, and the tenth graders used 4,5 strategies. The distribution of strategies was quite similar between the fifth and the tenth grade. The students' adaptability varied and seemed to depend on the type of task.

I discuss that the pupils largely fulfil the requirements for mental division in the Norwegian curriculum and have functional skills in mental arithmetic of division, at least for their age group. Simultaneously, the pupils show potential for improvement, and working with strategy development in mental arithmetic of division will most likely benefit the pupils.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på fem innholdsrike og lærerike år på OsloMet. Gjennom årene har jeg utviklet min egen læreridentitet og er takknemlig for erfaringene jeg har fått. Takk til alle de fantastiske foreleserne som har lært meg mye, og ikke minst de uerstattelige praksislærerne jeg har fått muligheten til å bli kjent med og lære av. Nå ser jeg frem til å starte som kontaktlærer på syvende trinn til høsten. Dette blir et spennende og lærerikt møte med lærerjobben.

Valget av tema til oppgaven er inspirert av mine egne evner i hoderegning. I perioden hvor vi skulle bestemme oss for tema hadde jeg flere erfaringer hvor jeg la merke til at jeg var betydelig dårligere til å regne i hodet enn det venner og bekjente var. Dette vekket en nysgjerrighet i meg på hoderegning, og hvordan man kan forbedre denne ferdigheten.

Jeg vil rette en stor takk til mine to veiledere, Anders Månsson og Roar Bakken Stovner. Uten dere hadde ikke oppgaven blitt til det den har blitt til i dag. Tusen takk for innspill, gode råd, fine samtaler om hoderegning og om masterarbeidet, og for engasjementet for min oppgave.

En stor takk skal også rettes til kontoret/kjelleren/bomberommet, eller mastersalen som mange også kaller det for. Det har vært uvurderlig å ha et sted å møte opp hver dag. Takk for felles lunsj hver dag, for lyttende ører da noe er vanskelig, og for råd og tips da det var sårt tiltrengt.

Jeg ønsker også å takke skolene som stilte opp i mitt forskningsprosjekt. Uten dere hadde det vært umulig å gjennomføre. Takk for deres bidrag i mitt prosjekt, samt deres interesse i min oppgave. En takk skal også rettes til deltakerne på pilottesten min, dere var til stor hjelp.

Til slutt vil jeg rette en stor takk til verdens beste søster, som gjennom hele studieløpet har lest utallige oppgaver og nå til slutt har korrekturlest masteroppgaven. Uten deg hadde alt vært mye vanskeligere å gjennomføre. Og takk til resten av familien for to fine skriveuker på hytta det siste halvåret, og for hjelp og støtte gjennom hele studietiden.

OsloMet, mai 2023

Marianne Aasland

Innholdsfortegnelse

Sammendrag	I
Abstract	II
Forord	III
Figurer	VI
Tabeller	VI
Innledning	1
Problemstilling og forskningsspørsmål	1
Hoderegning, divisjon og strategier i læreplanen	3
Divisjon i læreplanen	3
Hoderegning i læreplanen	3
Strategier i læreplanen	4
Oppgavens struktur	5
Teori	6
Definisjon av begrepet hoderegning	6
Betydningen av hoderegningsstrategier	7
Hva menes med fleksibilitet i hoderegning?	9
Et analyseverktøy for hoderegningsstrategier i divisjon	11
Metode	15
Valg av metode	15
Utvalget	17
Datainnsamlingen	18
Oppgavesamlingen og spørreskjemaet	18
Pilottest	20
Gjennomføring av datainnsamling	21
Analyse	23
Analyseverktøyet	24
Kvalitetsvurdering	26

Etiske overveielser	28
Meldeskjema til Sikt.....	28
Risikoanalyse.....	29
Resultater	30
Hvor mange strategier bruker elevene i utvalget?	30
Hvilke strategier bruker elevene i utvalget, og hvor ofte brukes hver strategi?.....	35
Viser elevene i utvalget tilpasningsevne i valg av strategier?.....	41
Drøfting	47
Hovedfunn	47
Har elevene funksjonelle ferdigheter i hoderegning av divisjon?	48
Oppfyller elevene det læreplanen sier?	52
Bør det fokuseres mer på hoderegning i divisjon?	53
Avslutning	56
Konklusjon	56
Kritisk blick på arbeidet og videre forskning.....	57
Litteraturliste.....	60
Vedlegg 1 – Hoderegningstesten	63
Vedlegg 2 – Infoskriv og samtykkeskjema.....	68
Vedlegg 3 – Godkjenning fra Sikt.....	71
Vedlegg 4 – Risikovurdering av personopplysninger	73

Figurer

Figur 1: Utklipp av instruksene til oppgavesamlingen.....	19
Figur 2: Prosentvis fordeling av elevstrategier på femte trinn.	33
Figur 3: Prosentvis fordeling av elevstrategier på tiende trinn.	33
Figur 4: Oversikt over hvor mange strategier hver enkelt elev brukte.....	34
Figur 5: Oversikt over hvilke strategier elevene på femte trinn brukte.....	35
Figur 6: Oversikt over hvilke strategier elevene på tiende trinn brukte.....	36
Figur 7: Oversikt over fordelingen av backupstrategier og retrievalstrategier på femte trinn...	40
Figur 8: Oversikt over fordelingen av backupstrategier og retrievalstrategier på tiende trinn. .	40

Tabeller

Tabell 1: Backupstrategier for hoderegning av divisjon med naturlige tall.	12
Tabell 2: Retrievalstrategier for hoderegning av divisjon med naturlige tall	12
Tabell 3: Utklipp av oversikten over elevstrategier på femte trinn på hver enkelt oppgave....	23
Tabell 4: Tillegg til tabell 2 «Retrievalstrategier for hoderegning av divisjon med naturlige tall»	24
Tabell 5: Oversikt over elevstrategier på femte trinn.....	31
Tabell 6: Oversikt over elevstrategier på tiende trinn.	32
Tabell 7: Oversikt over elevstrategier på oppgave 5.....	42
Tabell 8: Oversikt over elevstrategier på oppgave 8.....	43
Tabell 9: Oversikt over elevstrategier på oppgave 14.....	43
Tabell 10: Oversikt over elevstrategier på oppgave 15.....	44

Innledning

Selv om alle nå bærer med seg en kalkulator i lomma, er hoderegning fremdeles en viktig ferdighet. Det er en viktig kompetanse i hverdagen for å gjøre raske utregninger, eller overslag, og kan være en støtte til bruk av kalkulator for å sjekke svarene kalkulatoren gir (Randriantsaralaza & Totohasina, 2018; Wigley, 1996). Hoderegning kan også aktivisere hjernen på måter som kan være med å bekjempe aldring, samt forsinke sykdommer som Alzheimers (Randriantsaralaza & Totohasina, 2018). Arbeide med hoderegning legger også et nødvendig grunnlag for algebra (Wigley, 1996). Dette skjer blant annet gjennom arbeid med den *distributive lov* som hoderegningsstrategi. Hvis man skal regne $112:4$, kan man dele opp tallet ved hjelp av den distributive lov, ved å ta $100:4$, og $12:4$. Den distributive lov er en av de algebraiske regnereglene, og ved å trene på å bruke den i hoderegning, vil elevene være godt kjent med den regelen når de senere skal lære algebra.

Australske styringsdokumenter anbefaler alle delstater i Australia å fokusere mer på hoderegning som en del av strategiutviklingen i matematikk i tillegg til fokus på skriftlige standard algoritmer (Hartnett, 2007). Det har blitt utført en studie i Nederland hvor det ble sett nærmere på bruken av hoderegning og skriftlig utregning (Hickendorff et al., 2010). Studien konkluderer med at elever i dag er mindre tilbøyelig til å bruke skriftlig utregning enn det de var før. Samtidig konkluderes det med at elevene regner mer unøyaktig når de benytter seg av hoderegning, sammenlignet med når de benytter seg av skriftlig utregning. På bakgrunn av dette er jeg er nysgjerrig på norske elevers evner i hoderegning.

Det er betydelig mindre forskning på divisjonsstrategier enn det det er på addisjons-, subtraksjons- og multiplikasjonsstrategier (Robinson et al., 2006). I tillegg ansees divisjon ofte som den vanskeligste regnearten, fordi elever ofte har mindre trening i å regne divisjon, og fordi divisjon er mer kompleks og forvirrende enn de andre regneartene.

Problemstilling og forskningsspørsmål

Basert på fordelene med hoderegning, og at det finnes lite forskning på divisjonsstrategier, ønsker jeg å se nærmere på hvilke divisjonsstrategier elever på femte og tiende trinn kjenner til og bruker i hoderegning, og har kommet frem til problemstillingen:

Hvordan regner et utvalg elever på femte og tiende trinn divisjonsoppgaver med positive heltall med null i rest, og er det forskjell mellom femte- og tiendetrinnelevne i utvalget?

Jeg har valgt å se på positive heltall, fordi dette passer til både femte og tiende trinn. Hvis jeg også velger å undersøke negative heltall, desimaltall eller delestykker med desimaltall, hadde ikke femtetrinnelevne hatt nok trening til å svare på stykkene. Jeg valgte tall som gir null i rest fordi det egner seg godt til hoderegning.

Fleksibilitet er en viktig del av hoderegningen. Lemonidis et al. (2014) har i sin forskning på kommende lærere, og deres hoderegning av to-siffer-multiplikasjonsstykker, konkludert med at mangel på fleksibilitet trolig var noe av grunnen til deres svake prestasjoner i hoderegning. Jeg har derfor valgt å fokusere på elevenes fleksibilitet når jeg har undersøkt hvordan elevene regner divisjonsoppgaver i hodet, og om det da er forskjell i elevenes fleksibilitet på femte og tiende trinn. Basert på dette har jeg kommet frem til følgende forskningsspørsmål:

1. Hvor mange strategier bruker elevene i utvalget?
2. Hvilke strategier bruker et utvalg femte- og tiendeklasseelever når de regner et utvalg divisjonsoppgaver med positive heltall med null i rest i hodet, og hvor ofte brukes hver strategi?
3. Viser elevene i utvalget tilpasningsevne i valg av strategier når de løser utvalget med divisjonsoppgaver med positive heltall med null i rest i hodet?

For å besvare forskningsspørsmålene har jeg gjennomført en hoderegningstest på femte- og tiendetrinnelever. Jeg har utarbeidet en egen analysemodell basert på tidligere forskning som jeg har brukt for å analysere og kategorisere elevbesvarelsene. Dette gir svar på hvor mange strategier hver enkelt elev i utvalget bruker, hvilke strategier elevene bruker, og hvor ofte elevene bruker hver strategi. I tillegg har jeg undersøkt hvilke strategier elevene tenderer til å bruke på enkelte oppgaver for å svare på spørsmålet om elevene viser tilpasningsevne i valg av strategier når de løser oppgavene i oppgavesamlingen.

Hoderegning, divisjon og strategier i læreplanen

Læreplanen er et av styringsdokumentene som legger grunnlaget for hva man som lærer har av ansvar og plikter. Det læreplanen omtaler, er det man skal drive med i skolen. Læreplanen omtaler både divisjon, hoderegning og strategier, som betyr at dette er noe man skal jobbe med i norsk skole (Utdanningsdirektoratet, 2020). I dette kapitlet utdypes det hva læreplanen sier om dette, samt hvilken relevans det har for min studie.

Divisjon i læreplanen

Divisjon er nevnt fire ganger i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det nevnes en gang i kompetansemålene for tredje trinn, og tre ganger i kompetansemålene for fjerde trinn. Man kan dermed si at ferdigheter innenfor divisjon, hovedsakelig arbeides med på tredje og fjerde trinn. Man fortsetter selvfølgelig å arbeide med, samt å bruke divisjon, men det å lære og øve på strategier direkte knyttet til divisjon skal skje på tredje og fjerde trinn. Dette betyr at elever på femte trinn skal være introdusert for og ha øvd på strategier knyttet til divisjon. Et av kompetansemålene på fjerde trinn sier at «elevene skal kunne utforske, bruke og beskrive ulike divisjonsstrategier». En av måtene elevene kan utforske, bruke og beskrive ulike divisjonsstrategier, er ved å bruke, utforske og beskrive divisjonsstrategier knyttet til hoderegning.

Hoderegning i læreplanen

I læreplanen nevnes hoderegning fire ganger (Utdanningsdirektoratet, 2020), under kompetansemål for andre trinn, tredje trinn, femte trinn og åttende trinn. Kompetansemålene sier henholdsvis at elevene skal kunne «utforske den kommutative og den assosiative egenskapen ved addisjon og bruke dette i hoderegning», «utforske og forklare sammenhenger mellom addisjon og subtraksjon og bruke det i hoderegning og problemløsning», «utforske og forklare sammenhenger mellom brøker, desimaltall og prosent og bruke det i hoderegning» og «utvikle og kommunisere strategier for hoderegning i utregninger».

Hoderegning av divisjon nevnes altså ikke eksplisitt i læreplanen, og dette kan da tyde på at det ikke legges stor vekt på å regne divisjon i hodet i norsk skole, som igjen kan bety at elevene i mitt utvalg ikke er spesielt godt kjent med å regne divisjonsoppgaver i hodet. Dette var ikke noe jeg var klar over da jeg besluttet å se nærmere på elevers evner i hoderegning av

divisjon, men det støttet opp om valget om å bruke divisjonsstykker med positive heltall som går opp – noe annet ville trolig blitt for vanskelig for elevene.

Kompetansemålene er med på å understreke at hoderegning er en viktig egenskap å arbeide med i matematikk, samt at det er en kompetanse man må arbeide med og utvikle over tid. De viser også til at det finnes en progresjon i hoderegning. Det man arbeider med på andre trinn er ikke det samme man fremdeles arbeider med på 8. trinn, men en egenskap man har utviklet og kan bruke i mer omfattende situasjoner enn tidligere. Først handler det om å bruke addisjon og subtraksjon i hoderegning, deretter å bruke brøk i hoderegning, og til slutt skal elevene kunne utvikle og kommunisere egne strategier for hoderegning. Dette kan tyde på at elever på tiende trinn vil kjenne til og bruke flere strategier enn elevene på femte trinn, i tillegg til at de i større grad skal ha øvd på hvordan de kommuniserer strategier for hoderegning.

Strategier i læreplanen

I læreplanen i matematikk på 1.–10. trinn omtales strategier 31 ganger (Utdanningsdirektoratet, 2020). Med andre ord ansees strategier som viktig i norsk læreplan. Under kjerneelementet *matematiske kunnskapsområder* står det at «[e]levne må tidlig få et godt tallbegrep og få utvikle varierte regnestrategier» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Dette viser at man i matematikkundervisningen skal legge til rette for at elever kan utvikle ulike strategier. Under *grunnleggende ferdigheter* står det blant annet at det å regne i matematikk handler om «å analysere og løse et spekter av stadig mer komplekse problemer med effektive og hensiktsmessige begreper, symboler, metoder og strategier» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Her legges det vekt på varierte regnestrategier, i tillegg til effektive og hensiktsmessige strategier. Dette kan knyttes opp mot ulike aspekter ved det å være fleksibel. Jeg kommer tilbake til dette i neste kapittel.

I tillegg nevnes strategier i undervisvurdering for fjerde og tiende trinn. Der sies det at «[e]levne viser og utvikler kompetanse i faget på 4. trinn når de bruker hensiktsmessige strategier og representasjoner i arbeidet med de fire regneartene og til å forklare tenkemåtene sine» og «[e]levne viser og utvikler kompetanse i faget på tiende trinn når de formaliserer tanker og strategier ved hjelp av et matematisk språk». I tillegg sies det at «[l]æreren og

elevene skal være i dialog om elevenes utvikling når det gjelder å se sammenhenger mellom ulike kunnskapsområder og velge hensiktsmessige strategier». Både på fjerde trinn og på tiende trinn legges det vekt på at elevene skal kommunisere hvordan de tenker. I oppgavesamlingen jeg brukte i min datainnsamling var elevene nødt til å kommunisere skriftlig hvordan de regnet i hodet, og dette er altså noe de burde ha kompetanse til ifølge læreplanen.

Oppgavens struktur

Kapittel to er oppgavens teorikapittel. I dette kapitlet defineres viktige begreper, i tillegg til å presentere hva tidligere forskning sier om de ulike aspektene ved oppgaven. Til slutt vil analyseverktøyet jeg har utarbeidet presenteres. I kapittel tre presenteres metodiske valg, i tillegg utdypes det hvordan jeg har brukt analyseverktøyet mitt. Kapittel fire presenterer funn fra analysen. I kapittel fem presenteres hovedfunnene fra studien. Deretter drøftes resultatene opp mot teori og tidligere forskning. Til slutt i kapittel seks oppsummeres hovedfunnene og forskningsspørsmålene besvares. I tillegg presenteres tanker rundt videre forskning.

Teori

I dette kapittelet vil jeg presentere ulike definisjoner av hoderegning, samt presentere den definisjonen som ligger til grunn for min studie. Deretter vil jeg definere hva som menes med hoderegningsstrategier og utdype hvilken rolle strategier spiller for hoderegning. Videre defineres begrepet fleksibilitet og tidligere forskning på fleksibilitet presenteres. Til slutt presenteres teori som ligger til grunn for analysemodellen jeg har utarbeidet, og analysemodellen presenteres.

Definisjon av begrepet hoderegning

Det finnes mye litteratur på hoderegning, og jeg har sett nærmere på noen eldre definisjoner og noen nyere definisjoner. Moser (1953) definerer hoderegning som regning uten bruk av skriftlige algoritmer. Heirdsfield et al. (1999a) definerer hoderegning som aritmetisk utregning uten bruk av eksterne enheter (for eksempel penn og papir, kalkulator), med tall høyere enn ti, ekskludert *number fact recall*, altså utregninger elever har lært seg utenat som for eksempel gangetabellen. Ding et al. (2017) definerer hoderegning som aritmetisk utregning kun med bruk av den menneskelige hjerne, uten assistanse fra eksterne verktøy som kalkulator, PC eller penn og papir.

Ved å se på de tre ulike definisjonene, som kommer fra ganske ulike tidsperioder, ser man at man over lenger tid har ansett hoderegning som det samme. Fra 1953, og frem til i dag, defineres hoderegning på omtrent samme måte. Det som er hovedskillet fra Moser (1953) sin definisjon til Heirdsfield et al. (1999a) og Ding et al. (2017) sine definisjoner, er at Heirdsfield et al. (1999a) og Ding et al. (2017) sine definisjoner er mer spesifikke. De nevner flere aspekter eksplisitt enn det Moser (1953) gjør, slik som *number fact recall*, kalkulator og PC. Det kan tenkes at dette er fordi det i senere år har vært behov for flere avgrensinger, på grunn av den teknologiske utviklingen.

Heirdsfield et al. (1999a) og Ding et al. (2017) sine definisjoner av hoderegning er ganske like. De ordlegger seg litt ulikt, Heirdsfield et al. (1999a) bruker «uten eksterne verktøy, med tall høyere enn ti, ekskludert *number fact recall*», og Ding et al. (2017) bruker «kun bruk av den menneskelige hjerne uten assistanse fra eksterne verktøy». Begge legger vekt på at man

ikke skal bruke eksterne verktøy, som kalkulator og penn og papir. I tillegg til dette legger Heirdsfield et al. (1999a) til at det er med tall høyere enn ti, og ekskludert *number fact recall*. I min forskning vil definisjonen som ligger til grunn ligne de to definisjonene. Begge legger vekt på at man ikke skal bruke eksterne verktøy, men ingen av dem nevner om fingre inkluderes eller ekskluderes i eksterne verktøy. Forskning sier at bruk av fingre når man regner kan være som et stillas, og at dette stillaset legger et viktig grunnlag for matematisk kognisjon (Newman, 2016). Basert på at verken Heirdsfield et al. (1999a) eller Ding et al. (2017) nevner det som noe de ikke tillater og at det anses som en viktig del av å utvikle matematisk kunnskap, har jeg tillatt det i mitt arbeid. Jeg har dermed kommet frem til en definisjon som sier at *hoderegning er aritmetisk utregning som utføres kun ved bruk av eget hode og egen kropp*. Dette betyr at utregningen skal skje uten bruk av hjelpemidler som penn og papir, kalkulator og andre digitale hjelpemidler. Denne definisjonen tillater kjente utregninger (*number fact recall*) som en del av hoderegningen.

Betydningen av hoderegningsstrategier

Når man snakker om hoderegning, refereres det ofte til det å lære, samt å huske kjente tallfakta om tall og gangetabeller (Swan & Sparrow, 2001, s. 236). Et annet aspekt ved hoderegning handler om å utvikle og bruke strategier for å regne i hodet. Gjennom utvikling av strategier vil man være i stand til å regne med tall man ikke har sett før i tillegg til å regne med ukjente tallkombinasjoner. Dette kreves for å løse oppgaver hvor man ikke ser svaret umiddelbart eller klarer å løse oppgaven ved å huske kjente tallfakta. Haara (2006, s. 55) skriver også at forskning definerer to områder som sentrale for hoderegning: gjenkalling og strategibruk. Med gjenkalling menes det å huske kjente tallfakta om tall og gangetabeller. Dette tyder altså på at det er bred enighet om at gjenkalling og strategibruk er de to mest sentrale aspektene ved hoderegning.

Flere diskuterer om elever burde lære hoderegningsstrategier, eller om det er noe de burde utvikle på egenhånd (Kamii et al., 1993; Ostad, 2010; Swan & Sparrow, 2001; Wigley, 1996). Swan og Sparrow (2001) konkluderer med at elevene gjennom å bli eksponert for rike situasjoner vil utvikle egne strategier på en god måte. Tanken er at gjennom å bli eksponert for rike situasjoner der elevene er nødt til å forklare tenkemåten deres, vil de utvikle strategier, og gjennom samtale med medelever vil de bli eksponert for andre strategier. På

denne måten vil elevene utvikle et fleksibelt strategilager, og bli utfordret til å sette ord på hvordan de tenker. Kamii et al. (1993) trekker frem tre fordeler ved at elever utvikler egne strategier i matematikk. Dette er (1) at elevene ikke trenger å gi opp sin egen tenkning, (2) at elevens forståelse av plassverdisystemet styrkes istedenfor å svekkes av algoritmer, og (3) at elevene utvikler bedre tallforståelse.

Wigley (1996) mener at elever burde lære hoderegningstrategier. Han mener at hvis elevene selv skal oppdage og utvikle egne strategier vil de bli frarøvet muligheten til å lære mer avanserte strategier. Han mener at fokuset burde være på å lære elevene de avanserte ideene, samtidig som man lærer elevene å tilpasse de ulike ideene til ulike oppgaver og situasjoner. Ostad (2010, s. 142) trekker frem forskning som sier at dersom elever mangler effektive strategier på et gitt område, burde de undervises i effektive strategier. I tillegg skriver han at systematisk strategiopplæring kan være med på å påvirke utviklingen av den matematiske kompetansen i en positiv retning. Det kan tenkes at det i utgangspunktet er en fordel at elever selv utvikler egne strategier, men at dersom de ikke utvikler egne strategier er de nødt til å bli undervist i strategier for å utvikle matematisk kompetanse. Man burde overvåke hvilke strategier elevene utvikler, og hjelpe dem til å utvikle mer avanserte strategier om de har vanskeligheter for å utvikle det på egen hånd.

Kamii et al. (1993) har undersøkt om elever på tredje trinn og elever på fjerde trinn klarer å løse multiplikasjonsstykket $13 \cdot 11$ ved hjelp av hoderegning. Tredjetrinns elevene har ikke lært standard algoritme for multiplikasjon, noe fjerdetrinns elevene har lært. 60 % av tredjetrinns elevene klarer å regne stykket ved hjelp av hoderegning, mens bare 15 % av fjerdetrinns elevene klarer å regne stykket i hodet. Dette kan tyde på at elever som har mer øving i regning med standard algoritme har vanskeligheter for å bruke andre strategier når de regner i hodet. I mitt utvalg er det nærliggende å anta at tiendeklassingene har mer øving i bruk av standardalgoritmen i forbindelse med divisjon enn det femteklassingene har. Dette kan med andre ord bety at tiendeklassingene vil ha vanskeligheter for å bruke andre strategier når de regner i hodet.

Forskning viser at dersom elever bruker standardalgoritme i utregning av elementære oppgaver hvor hoderegning egner seg best, tyder dette på tallforvirring, lært ufornuft eller

krav til dokumentasjon av utregning (Haara, 2000). Dette betyr at om elevene i mitt utvalg uttrykker at det har benyttet seg av *mentalt bilde av standard algoritme* (Lucangeli et al., 2010) som strategi, så kan dette tyde på manglende tallforståelse eller krav til dokumentasjon av utregning.

Heirdsfield et al. (1999b) har sett nærmere på hvilke strategier elever bruker i arbeid med hoderegning av divisjon og multiplikasjon. De konkluderer med at estimering i dagens samfunn er en viktigere kompetanse enn nøyaktige utregning. Til nøyaktige utregninger kan man bruke kalkulatorer, dermed er estimering en mer nyttig kompetanse. For å styrke elevens evne til å estimere, mener Heirdsfield et al. (1999b) at man må fokusere mer på strategier som ikke er forbundet med tradisjonell utregning. Man burde for eksempel fokusere mer på strategier som prøving og feiling, eller helhetlige strategier. Med helhetlige strategier menes strategier hvor man behandler tall som hele. For eksempel dersom man skal regne $168:21$, så kan man først tenke $21 * 5 = 105$, da har man cirka 60 igjen, $3 * 20 = 60$, og $3 * 21 = 63$. Det betyr at $168:21 = 5 + 3 = 8$.

Ostad (2010) skiller mellom to ulike typer strategier, retrievalstrategier og backupstrategier. Retrievalstrategier viser til strategier man henter frem fra et fleksibelt kunnskapslager, og backupstrategier er strategier som baserer seg på en oppskriftsmessig tilnærming, som for eksempel varierende former for telling. Backupstrategier brukes ofte som en reserve-løsning, når man ikke har utviklet et fleksibelt kunnskapslager med retrievalstrategier. Senere i oppgaven vil jeg presentere et analyseverktøy som består av ulike strategier for hoderegning av divisjon. De vil bli presentert i to ulike tabeller; en tabell med backupstrategier og en tabell med retrievalstrategier. Dette vil senere i analysen gi et bilde på om elevene i utvalget mitt i hovedsak bruker backupstrategier eller retrievalstrategier.

Hva menes med fleksibilitet i hoderegning?

Fleksibilitet er essensielt for å utvikle god kompetanse innenfor hoderegning (Swan & Sparrow, 2001). Lemonidis et al. (2014) har i sin forskning på kommende lærere og deres hoderegning av to-siffer-multiplikasjonsstykker, konkludert med at mangel på fleksibilitet trolig var noe av grunnen til deres svake prestasjoner i hoderegning.

Rathgeb-Schnierer og Green (2019) har sett nærmere på ulike definisjoner av fleksibilitet. De trekker frem to fellestrekk som det stort sett er enighet om i de ulike definisjonene. Dette er kjennskap til ulike strategier og evnen til å tilpasse strategiene til ulike problem-strukturer. Noen skiller mellom fleksibilitet og tilpasningsevne. Da referer fleksibilitet til bruken av flere ulike strategier, og tilpasningsevne handler om å velge passende strategier. Noen forskere legger også vekt på at man raskest mulig skal komme frem til svaret. Når jeg skal undersøke elevers fleksibilitet vil jeg se nærmere på begge aspektene ved fleksibilitet, både kjennskap til ulike strategier og evne til å velge passende strategier. Det vil ikke være fokus på hvor lang tid elevene bruker på å løse oppgavesettet. Oppgavesettet består av relativt mange oppgaver, og for å få mest mulig data på antall strategier og tilpasningsevne var det viktigere at flest mulig elever regnet flest mulig oppgaver, enn at de skulle gjøre det raskest mulig.

Som tidligere omtalt i kapittelet om læreplanen sier den generelle delen av læreplanen at elever skal utvikle varierte, hensiktsmessige og effektive strategier (Utdanningsdirektoratet, 2020). Dette betyr at læreplanen implisitt sier at elevene skal utvikle fleksibilitet i matematikkfaget, og at dette er en kompetanse som skal arbeides med i skolen.

Lemaire og Siegler (1995) har definert fire ulike aspekter ved utvikling av strategisk kompetanse hos elever. Ifølge denne modellen viser et strategivalg som gir svaret raskest mulig, gode tilpasningsevner (Torbeyns et al., 2009). De fire kompetansene er (1) hvilken strategi som blir brukt, (2) når hver strategi blir brukt, (3) hvordan strategiene blir brukt og (4) hvordan strategiene velges. Ved forbedring av en kompetanse vil det ha en positiv effekt for elevenes effektivitet og nøyaktighet. Det første punktet, hvilken strategi som blir brukt, handler om utviklingen i hvilke strategier elevene bruker. De kjenner til og bruker flere strategier samtidig, men etter hvert som de lærer nye strategier, vil de også slutte å bruke noen strategier. For eksempel vil telling være en strategi elever bruker i mindre grad etter hvert som de lærer mer effektive strategier. Det andre punktet, når hver strategi blir brukt, handler om utviklingen i hvor ofte ulike strategier blir brukt, og på hvilke oppgaver de ulike strategiene brukes på. For eksempel bruker elever gjenkalling i liten grad til å begynne med, fordi de ikke har lært så mye de kan gjenkalle. Etter hvert brukes gjenkalling oftere, og på stadig vanskeligere oppgaver, fordi man lærer mer og mer som kan gjenkalles fra hukommelsen. I

min analyse samler jeg data som kan belyse de to første kompetansene, men punkt tre og fire krever andre typer datakilder enn en divisjonstest.

Et analyseverktøy for hoderegningsstrategier i divisjon

Hoderegningsstrategier skiller seg fra standardisert skriftlig utregning. Hoderegning krever mer enn å huske standardiserte fremgangsmåter, og de forutsetter en dypere forståelse for hvordan tall fungerer og samhandler (Hartnett, 2007, s. 345). Standardiserte metoder fokuserer på enkeltheter, altså at man regner med enere, tiere og hundrere. I kontrast er hoderegning, spesielt av flersifrede tall, mer komplekst og krever ofte at man håndterer hele tall (Rathgeb-Schnierer & Green, 2019). Hvis man for eksempel skal regne $450:6$ med standard algoritme deler man tallet opp etter plassverdisystemet, men om man skal regne tallet i hodet vil det være mer hensiktsmessig å behandle 450 som et helt tall, for eksempel ved å først dele $420:6 = 70$, deretter $30:6 = 5$.

Det finnes tidligere forskning på hoderegning av divisjon som har definert ulike hoderegningsstrategier for divisjon. Jeg har brukt noe av denne tidligere forskningen for å utarbeide et analyseverktøy som jeg har brukt i min studie for å analysere hvordan elever på femte og tiende trinn regner divisjon av positive heltall med null i rest, i hodet. Analyseverktøyet er utarbeidet på bakgrunn av fem ulike artikler (Erdem, 2017; Heirdsfield et al., 1999b; Lucangeli et al., 2010; Swan & Sparrow, 2001; Wigley, 1996). De ulike artiklene beskriver og eksemplifiserer ulike typer hoderegningsstrategier for divisjon. Jeg har samlet de strategiene som er relevante for min studie i to tabeller; en tabell med backupstrategier, og en tabell med retrievalstrategier. De strategiene som baserer seg på telling og de strategiene som har en oppskriftsmessig tilnærming, er kategorisert som backupstrategier. De resterende strategiene er kategorisert som retrievalstrategier. Strategiene som er kategorisert som retrievalstrategier er de strategiene som legger et grunnlag for elevenes fleksible kunnskapslager av strategier. Kategoriene er oversatt til norsk, og fra nå av vil strategiene bli referert til på norsk. I metode-kapittelet vil det utdypes på hvilken måte analyseverktøyet er brukt.

Tabell 1: Backupstrategier for hoderegning av divisjon med naturlige tall.

Engelsk	Norsk	Beskrivelse	Eksempler	Kilde
Counting	Telle (T)	Strategier som er forbundet med telling.	$24 \div 4$: 4, 8, 12, ...	(Heirdsfield et al., 1999b)
Repeated Subtraction	Gjentatt subtraksjon (GS)	Det subtraheres til man sitter igjen med null. Deretter telles det hvor mange ganger man subtraherte.	$18 \div 3$: 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0	(Swan & Sparrow, 2001)
Repeated Addition	Gjentatt Addisjon (GA)	Det adderes til man kommer frem til dividenden. Deretter telles det hvor mange ganger man adderte.	$18 \div 3$: 3, 6, 9, 12, 15, 18	(Swan & Sparrow, 2001)
Mental analogue of standard algorithm	Mentalt bilde av standard algoritme (MA)	Elevene uttrykker at de har brukt samme fremgangsmåte som standard algoritme for divisjon.		(Lucangeli et al., 2010)

Tabell 2: Retrievalstrategier for hoderegning av divisjon med naturlige tall

Engelsk	Norsk	Beskrivelse	Eksempler	Kilde
Automatic Calculation	Automatisk utregning (AU)	Strategier hvor man ser svaret umiddelbart uten å gjør utregninger.	Svar uten forklaring eller svar hvor eleven presiserer at de ser løsningen med en gang.	(Lucangeli et al., 2010)
Basic Fact	Kjente tallfakta (KT)	Strategier som bygger på allerede kjente tallfakta. For eksempel gangetabell.	$24 \div 4$: $4 \cdot ? = 24$, $? = 6$	(Heirdsfield et al., 1999b)

Halving	Halvering (H2)	Tallene deles i to slik at det blir mer håndterbare tall. Dette kan gjøres flere ganger etter hverandre.	$96 \div 8: 96 \div 2 = 48,$ $48 \div 2 = 24, 24 \div 2 = 12$	(Wigley, 1996)
Separated	Deling (D)	Tall blir delt opp etter plassverdisystemet, enten fra høyre til venstre, eller motsatt.	$100 \div 5: 10 \div 5 = 2,$ $0 \div 5 = 0, 20.$	(Heirdsfield et al., 1999b)
Distributive Property	Distributive lov (DL)	Strategier hvor elever benytter seg av den distributive lov. $a * (b + c) =$ $a * b + a * c$	$112 \div 4: 100 \div 4 = 25;$ $12 \div 4 = 3; 25 + 3 = 28$ $112 \div 4: 120 \div 4 = 30;$ $8 \div 4 = 2; 30 - 2 = 28$	(Erdem, 2017)
Wholistic	Helhetlig (H)	Tall blir behandlet som hele.	$100 \div 5: 100 \div 10 = 10,$ $10 * 2 = 20.$ $168 \div 21: 5 \cdot 21 = 105,$ <i>omtrent 60 igjen,</i> $3 * 20 = 60 \therefore 3 \cdot 21 = 63, 63 + 105 = 168, svar: 5 + 3 = 8$	(Heirdsfield et al., 1999b)

Retrievalstrategier er med andre ord mer fleksible strategier som lettere kan tilpasses ulike oppgavetyper. I tillegg er det noen interne forskjeller på retrievalstrategiene. Heirdsfield et al. (1999b) omtaler også forskjellen på *helhetlige* strategier og *delingsstrategier*. *Helhetlige* strategier blir ansett som mindre komplekse når man bruker de i hoderegning, og krever

mindre arbeidsminne enn det *delingsstrategiene* ofte gjør. Bruk av helhetlige strategier kan dermed ansees som et tegn på at man er fleksibel i hoderegning.

I forbindelse med hoderegning er to aspekter viktig, gjenkalling og strategibruk (Haara, 2006; Swan & Sparrow, 2001). Når man tar for seg strategiene i tabell 1 og tabell 2 refererer *automatisk utregning* og *kjente tallfakta* til gjenkalling, selv om det i skjemaet og underveis i oppgaven omtales som strategier. Det skilles altså mellom gjenkallingsstrategier og andre strategier.

Metode

I dette kapitlet presenteres metodiske valg og analysemetode. Først presenteres valg av metode og bakgrunnen for valgene. Deretter presenteres utvalget og bakgrunnen for utvalget. Så utdypes datainnsamlingen. Da presenteres oppgavesamlingen og spørreskjemaet som er brukt, hvordan dette er utformet, hvordan pilottest ble gjennomført og hvordan selve datainnsamlingen ble gjennomført. Så utdypes analyseverktøyet. Det forklares hvordan det er brukt, og at det ble utvidet underveis. I tillegg forklares det hvordan analysen ble gjennomført. Deretter presenteres en kvalitetsvurdering av studien, og til slutt presenteres etiske overveielser.

Valg av metode

Når man skal undersøke en problemstilling eller forskningsspørsmål finnes det ulike måter å undersøke dette på (Postholm & Jacobsen, 2011). Man må blant annet avgjøre om man har en induktiv eller en deduktiv tilnærming, og om man gjør en kvalitativ eller kvantitativ undersøkelse. I utgangspunktet har jeg valgt en deduktiv tilnærming. Min tilnærming er deduktiv fordi jeg har brukt forskningslitteratur som grunnlag for undersøkelsene jeg har gjort, og på forhånd forutsett hva jeg tror at jeg kommer til å finne. Det er derimot ikke en strengt deduktiv tilnærming, fordi jeg var åpen for å gjøre funn jeg på forhånd ikke hadde forutsett. Dette vil bli redegjort for senere i oppgaven. Undersøkelsen min er kvalitativ, men med et kvantitativt preg. Dette vil også bli gjort rede for senere i oppgaven.

Min problemstilling er *Hvordan regner et utvalg elever på femte og tiende trinn divisjonsoppgaver med positive heltall med null i rest, og er det forskjell mellom femte og tiendetrinnelevne i utvalget?* Og forskningsspørsmålene mine er

1. Hvor mange strategier bruker elevene i utvalget?
2. Hvilke strategier bruker et utvalg femte- og tiendeklasseelever når de regner et utvalg divisjonsoppgaver med positive heltall med null i rest i hodet, og hvor ofte brukes hver strategi?
3. Viser elevene i utvalget tilpasningsevne i valg av strategier når de løser utvalget med divisjonsoppgaver med positive heltall med null i rest i hodet?

For å besvare forskningsspørsmålene mine måtte jeg finne en egnet metode. Det var to ulike tilnærminger som var aktuelle for meg: intervju og skriftlige hoderegningstester. Intervju egner seg godt når man ønsker svar på «hvordan?» (Dalland & Andersson-Bakken, 2021). Det jeg ønsker svar på er hvordan elever regner i hodet. Gjennom intervju ville jeg hatt muligheten til å snakke med elever om deres tenkemåte i dybden. Jeg har mulighet til å stille elevene oppfølgingsspørsmål som kan hjelpe dem med å forstå sin egen tenkemåte. Samtidig er intervju en tidkrevende prosess, som ville vært med på å begrense antall informanter jeg kunne inkludert i prosjektet. Tester, i motsetning til intervju, gir mulighet for å samle inn en større mengde data (Cohen et al., 2011, s. 476). Tester kan gjennomføres på flere elever samtidig, noe som gjør at man får et bredere datamateriale enn om man gjennomfører intervjuer. Cohen et al. (2011, s. 478) skriver at tester gir lærere mulighet for rask og relevant tilbakemelding på hvordan elever presterer. Tester vil med andre ord gi meg en rask tilbakemelding på hvordan elever regner i hodet. En ulempe med skriftlige tester er at man må tolke regnemåten ut fra det elevene skriver uten å ha sjanse til å stille oppfølgingsspørsmål. I et intervju vil man ha mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål dersom svarene er uklare, det har man ikke mulighet til ved en skriftlig test. Jeg vurderte det allikevel som mest hensiktsmessig å gjennomføre hoderegningstester for å besvare forskningsspørsmålene mine, da det var viktig med stor datamengde, og et bredt utvalg.

For å få noe utdypende informasjon i tillegg til elevenes svar på oppgavesettet, ble et lite spørreskjema føyd til testen. Et spørreskjema er et nyttig instrument for å samle inn informasjon som kan gi strukturert, og ofte tallfestet, data, som ofte er enkel å analysere (Cohen et al., 2011). I tillegg kan det administreres uten tilstedeværelse av forskeren. Under gjennomføring av testene var jeg til stede, men oppgavesettet skulle gjennomføres individuelt av elevene uten hjelp eller støtte fra meg eller lærer. Derfor egnet spørreskjema seg, fordi det bare kunne legges til testen, uten at oppsettet på gjennomføringen måtte endres.

Analysen som er gjennomført er en deskriptiv analyse. Deskriptiv analyse innebærer at man strukturerer et datamateriale og kategoriserer datamaterialet i ulike kategorier (Postholm & Jacobsen, 2011, s. 104). I analysen har alle elevsvar blitt kategorisert innenfor ulike kategorier. Dette beskrives i dybdene senere i kapittelet. Resultatene som presenteres i resultatkapittelet kommer delvis til å bli presenter som deskriptiv statistikk. Deskriptiv statistikk brukes for organisere og presentere data på en tydelig og enkel måte ved å bruke

karakteristikk eller egenskaper ved datasettet som frekvens, sentraltendens eller spredningsmål (Dalland & Andersson-Bakken, 2021, s. 192).

Utvalget

Målet med studien var å gjennomføre hoderegningstestene på femte og tiende trinn. Dermed tenkte jeg det var mest hensiktsmessig å gjennomføre prosjektet på 1. – 10. trinn skoler, slik at elevgrunnlaget i størst mulig grad kunne sammenlignes. Elevgruppene vil i større grad kunne sammenlignes om femteklassingene og tiendeklassingene kommer fra samme skole, fordi elevgruppen vil være relativt lik i femteklasse og tiendeklasse, så fremt det ikke har skjedd store demografiske endringer i de fem årene mellom inntakene. Jeg kontaktet to grunnskoler jeg hadde kjennskap til og fikk tillatelse til å gjennomføre datainnsamlingen på de skolene. På begge skolene gjennomførte jeg undersøkelsen i to femteklasser og en tiendeklasse. Jeg fikk totalt 49 antall gjennomførte tester på femte trinn og 38 antall gjennomførte tester på tiende trinn.

Dette er et bekvemmelighetsutvalg. Et bekvemmelighetsutvalg er et utvalg som er lett tilgjengelig for forskeren og det tilhører kategorien av ikke-sannsynlighetsutvalg (Bryman, 2016). Grunnen for at jeg har valgt et bekvemmelighetsutvalg er at mange skoler har stor pågang fra studenter som skriver masteroppgave og ønsker å samle data på ulike skoler. Det var dermed en stor fordel å kontakte skoler jeg hadde kjennskap til, og som hadde kjennskap til meg. Et sannsynlighetsutvalg er et utvalg hvor hvert enkelt medlem i en populasjon har like stor sannsynlighet for å bli trukket ut (Dalland & Andersson-Bakken, 2021). Når utvalget er ikke-sannsynlighetsutvalg kan man ikke uten videre generalisere funnene til populasjonen. Funnene mine kan med andre ord ikke generaliseres til å gjelde alle femte og tiendeklassinger i Norge. De vil bare gjelde for det utvalget som var tilgjengelig for meg. Selv om funnene ikke kan generaliseres i forskningsmessig forstand, er det et eksempel på hvordan norske elever regner divisjon i hode, og det kan være med på å si noe om hva man kan forske videre på og kanskje hva man kan legge vekt på i undervisning. Studien min kan altså være hypotesedannende for fremtidig forskning.

Datainnsamlingen

I dette kapitlet presenteres datainnsamlingen. Først presenteres oppgavesamlingen og spørreskjemaet som er brukt i datainnsamlingen. Deretter utdypes det hvordan dette er utformet ved hjelp av gjennomføring av pilottester. Til slutt forklares det hvordan selve datainnsamlingen ble gjennomført.

Oppgavesamlingen og spørreskjemaet

Hoderegningstesten jeg laget er inspirert av min veileder Månsson (2022) sin artikkel. Han har gjennomført hoderegningstester i addisjon på førskolelærere. Før gjennomføringen laget Månsson en tabell med ulike hoderegningsstrategier for addisjon som finnes i litteraturen. Artikkelen har som hensikt å undersøke hvordan ulike forskere kategoriserer førskolelærernes strategier. Konklusjonen i artikkelen er at det er bred enighet mellom tre ulike forskeres kategorisering av førskolelærernes strategier. Dette betyr at slike tester, sammen med en omfattende liste med ulike strategier, kan bli brukt mer troverdig i forskning (Månsson, 2022). Jeg har brukt samme oppsett på mine tester som Månsson har brukt i sin artikkel, men jeg har tilpasset instruksjonene til de aldersgruppene jeg gjennomførte testene på.

Oppgavene i oppgavesamlingen er forsøkt tilpasset til både femte og tiende trinn. Dette var til en viss grad vanskelig, fordi nivået på de to ulike trinnene er ulikt. Oppgavene måtte være utfordrende nok til at elevene ikke automatisk regnet ut alle svarene, men samtidig måtte oppgavene være mulig for elevene å regne i hodet. I tillegg var det viktig at elevene skulle oppleve noe mestring i arbeid med oppgavene. Det er derfor en varierende vanskelighetsgrad på oppgavene. Noen oppgaver forventet jeg at alle elevene skulle få til, mens andre oppgaver forventet jeg at bare et fåtall elever skulle få til. For å ikke ødelegge mestringsopplevelsen til elevene i møte med oppgavene, ble det presisert at oppgavene var vanskelige, og at det ikke var forventet at de skulle få til alle, men at ønsket mitt var at alle prøvde så godt de kunne å løse flest mulig oppgaver. Læreplanen ble brukt for å vurdere hvilket nivå elevene burde være på, samt å vurdere hva elevene burde være i stand til å få til.

Hoderegningstest

Gjør så mange oppgaver du rekker. Når du er ferdig, rekker du opp hånden.

Slik løser du oppgavene:

1. Regn ut svaret i hodet. Du skal ikke skrive noe når du gjør dette.
2. Skriv ned svaret på arket.
3. Forklar matematisk hvordan du regnet oppgaven i hodet. Nå skal du skrive på arket.

Oppgave 1

$$78 : 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Forklaring: _____

Figur 1: Utklipp av instruksene til oppgavesamlingen.

Oppgavesamlingen bestod av 19 oppgaver. De var som følger:

1. $78 \div 2$
2. $20 \div 5$
3. $24 \div 4$
4. $100 \div 5$
5. $240 \div 5$
6. $450 \div 6$
7. $346 \div 2$
8. $112 \div 4$
9. $81 \div 3$
10. $2000 \div 5$
11. $96 \div 8$
12. $666 \div 3$
13. $81 \div 27$
14. $95 \div 19$
15. $630 \div 9$
16. $64 \div 4$
17. $440 \div 8$
18. $228 \div 3$
19. $504 \div 63$

I tillegg til å tenke gjennom vanskelighetsgrad da jeg lagde oppgavesamlingen var jeg opptatt av at det skulle være varierte oppgaver som la til rette for å bruke ulike strategier. Jeg valgte ulike divisorer, divisorene varierer mellom oddetall og partall, i tillegg til å variere mellom ett og to siffer. Det var også viktig at divisoren ikke alltid gikk opp i det første sifferet i dividenden. Fokuset da oppgavene ble laget, var at de skulle legge til rette for å bruke ulike strategier, altså at så mange oppgaver som mulig la opp til å bruke varierende strategier.

Spørreundersøkelsen bestod av tre refleksjonsspørsmål som kom etter oppgavesamlingen. De var som følger:

1. Hva synes du er utfordrende med å regne divisjon i hodet?
2. Hvilket av divisjonsstykkene du akkurat har regnet synes du var vanskeligst, og hvorfor?
3. Bruker du din kunnskap om multiplikasjon når du regner divisjon i hodet?

Refleksjonsspørsmålene ble inkludert for å få litt utdypende tanker om hva elevene tenker om det å regne divisjon i hodet. I tillegg ønsket jeg å se nærmere på om elevene benytter seg av sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon når de regner i hodet. Jeg tenkte at det kunne bli vanskelig å vurdere om elevene gjorde det, bare basert på deres forklaringer, og valgte dermed å inkludere et spørsmål om det. Grunnen for at jeg ønsket å se nærmere på om elevene kjenner til, samt bruker sammenhengen mellom divisjon og multiplikasjon, er fordi dette kan gi en indikator på om elevene er fleksible eller ikke. Dersom elevene kjenner til sammenhengen mellom divisjon og multiplikasjon, og bruker den når de regner divisjonsoppgaver i hodet, vil de da mest sannsynlig ha flere strategier å benytte seg av, sammenlignet med om de ikke gjør det. I retrospekt viste det seg at datamaterialet fra refleksjonsspørsmålene ikke var relevant for å besvare problemstillingen, og data fra refleksjonsspørsmålene er dermed ikke inkludert i oppgaven. Grunnen til dette er fordi spørsmålene ikke samsvarte med forskningsspørsmålene mine. I tillegg ga elevene på femte trinn få og lite utdypende svar på refleksjonsspørsmålene. Dette gjorde også at det var få interessante funn på refleksjonsspørsmålene fra elevbesvarelsene på femte trinn.

Pilottest

Det ble gjennomført en pilottest før testen ble gjennomført med elever. Dette ble gjort for å få et innblikk i hvor mange oppgaver elevene ville være i stand til å regne da de hadde en tidsramme på 45 minutter. Pilottesten ble også gjennomført for å få et innblikk i vanskelighetsgraden på oppgavene i oppgavesamlingen og om det var gjennomførbart for elever på femte og tiende trinn. I tillegg ønsket jeg å sjekke hvor mange strategier som ble brukt, og om oppgavene i stor nok grad la til rette for at man kunne benytte ulike strategier for å løse oppgavene. Pilottesten bestod av de 19 divisjonsoppgavene og de tre refleksjonsspørsmålene som ble presentert i forrige delkapittel.

I pilottestinga hadde jeg tre deltakere. I utgangspunktet ønsket jeg deltakere fra femte og tiende klasse til pilottesten, men dette var vanskelig å få til. Derfor var deltakerne i pilottesten studenter mellom 20 og 25 år. De gikk tre ulike utdanninger med ulik grad av matematikk i utdanningen sine. Ingen av deltakerne tar en pedagogisk utdanning. Alle deltakerne i pilottesten gjennomførte testen på under 25 minutter, dermed besluttet jeg at arbeidsmengden passet fint til 45 minutter for femte- og tiendeklassingene. I utgangspunktet var tanken at det holdet med 16 divisjonsoppgaver til elevene, men etter pilottesten endret denne tanken seg til at det gikk fint med 19 oppgaver. Det var allikevel en oppgave jeg var usikker på om jeg skulle beholde eller ikke. Både 81: 27 og 81: 3 var inkludert som oppgaver i oppgavesettet. To av deltakerne i pilottesten brukte strategien «å referere til den foregående oppgaven» til å løse den andre oppgaven, altså at når de visste at svaret på 81: 27, så visste de også svaret på 81: 3. Tanken var at det kunne være interessant å se om elever la merke til det eller ikke, og jeg besluttet derfor å beholde begge oppgavene. Etter at analysen var gjennomført kom det ikke frem noen interessante funn angående dette, og derfor vil det ikke utdypes i resultatene.

Deltakerne i pilottesten forklarte tankemåten sin på en utfyllende og forståelig måte. De brukte flere ulike typer strategier og løste store deler av oppgavene. De svarte også utfyllende på refleksjonsspørsmålene. Derfor valgte jeg å beholde oppgavesettet og spørreskjemaet slik det var før pilottestene ble gjennomført. At disse studentene, men ikke femtetrinnselvene, svarte godt på refleksjonsspørsmålene viser ulempen med å ikke pilotere undersøkelsen i riktig aldersgruppe.

Gjennomføring av datainnsamling

Datainnsamlingen ble gjennomført i løpet av tre dager, to dager på den ene skolen og en dag på den andre skolen. På den første skolen ble det gjennomført i to femte klasser og en tiendeklasse. Gjennomføringen i hver femteklasse tok 45-60 minutter. Timene jeg hadde til rådighet var på 60 minutter, men både litt av starten og slutten av timene ble brukt til info og organisering fra kontaktlæreren, lik at jeg hadde i overkant av 45 minutter til rådighet.

Jeg introduserte testen ved å si at jeg forsker på hoderegning og ønsket å se hvordan de tenkte når de løste divisjonsoppgaver i hodet. Jeg presiserte at det viktigste ikke var å løse oppgavene raskt, å løse alle oppgavene, eller at alt var gjort riktig, det viktigste var at de

prøvde å kommunisere på arket hvordan de tenkte når de løste oppgavene. I den ene klassen sa jeg at jeg skulle gjennomføre testen med tiende klasse også. Dette var ment som en forklaring på hvorfor oppgavene kunne oppleves som vanskelige for dem, og at det var helt greit at de hoppet over oppgaver dersom de synes oppgavene ble for vanskelige. Det virket derimot heller som at det opplevdes demotiverende for elevene. Flere elever kom med spontane utsagn som «hæ, da er det alt for vanskelig» og «hvorfor må vi gjøre det samme som tiende klasse, det er teit, vi klarer jo ikke det». Jeg valgte derfor å ikke si det i den andre femteklassen, og de så ut som at de gikk løs på oppgavesettet med mer motivasjon enn den første klassen.

Gjennomføringen i tiendeklasse tok også cirka 50 minutter. Jeg hadde en time på 60 minutter til rådighet. De først ti minuttene ble brukt på å informere om testen og svare på spørsmål. Deretter arbeidet elevene med testen til de var ferdige. Dette var cirka ti minutter før timen var over. Elevene brukte dermed 40 minutter eller mindre på å gjennomføre testen. Jeg var til stede under hele gjennomføringen. Det var satt inn vikar for kontaktlærer denne timen, vikaren var til stede under oppstarten, men under selve gjennomføringen var jeg alene med elevene.

På den andre skolen ble datainnsamlingen også gjennomført i to femteklasser og en tiendeklasse. I femteklassene ble det gjennomført parallelt. Jeg informerte først om testen i den ene klassen og lot de starte på testen. Deretter gikk jeg inn i den andre klassen og informerte, og lot dem starte. Deretter gikk jeg litt mellom klassene mens de arbeidet. Det var en kontaktlærer til stede i hver klasse hele tiden. Elevene fikk litt i overkant av 45 minutter til å gjennomføre testen. I tiende klassen informerte jeg om testen, men var ikke til stede mens elevene gjennomførte testen. Kontaktlærer var til stede under gjennomføringen og jeg kom innom innimellom for å sjekke om elevene hadde spørsmål eller om de var ferdige. Elevene fikk arbeide med testen til de var ferdige, dette var i overkant av 40 minutter.

Da jeg informerte om hoderegningstesten i alle klassene jeg gjennomførte datainnsamlingen i, ble det brukt et eksempel for å forklare hvordan elevene skulle gjennomføre testen. Dette ble gjort fordi det å forklare egen tenkemåte når de regner i hodet ikke er noe elever er veldig kjent med. På samme tid er det en risiko at elevene kopierer tankemåten når de får et

eksempel. For at elevsvarene skulle bli påvirket i minst mulig grad av eksempelet, valgte jeg et addisjonsstykke som eksempel, og ikke et divisjonsstykke eller multiplikasjonsstykke. Det ville da være vanskelig for elevene å kopiere fremgangsmåten, men de ville få et eksempel på hvordan man kan forklare hvordan man tenker når man regner noe i hodet. Stykket jeg valgte var $24 + 37$, og jeg forklarte det slik: $20 + 30 = 50$, $4 + 7 = 11$, $50 + 11 = 61$. Dette ble vist på tavlen og stod på tavlen gjennom hele gjennomføringen. I tillegg ble det i alle klasser oppfordret om at eleven skulle presisere at svarene kom automatisk når svarene gjorde det, men det ble ikke satt som et krav. Flere elever uttrykket misnøye med at dette burde presiseres og ønsket ikke å måtte presisere dette der det var tilfelle.

Analyse

I analysen gikk jeg gjennom elevbearselsene og kategorisere dem. Hvert enkelt elevsvar ble kategorisert innenfor en av kodene som på forhånd var utformet, se *Tabell 1* og *Tabell 2* på slutten av teorikapittelet. Det ble laget to tabeller med oversikt over alle elevstrategiene, én tabell for femteklassingene, og én for tiendeklassingene. Elevbearselsene ble nummerert og elevnumrene står vertikalt i skjemaet og oppgavennummer står horisontalt i skjemaet. Dermed fikk jeg en oversikt over hvilken type strategi hver enkelt elev brukt på hver oppgave. *Tabell 3* er et utklipp av tabellen for elevbearselser fra femte trinn. Dette er inkludert for å illustrere hvordan elevbearselsene ble kategorisert.

Tabell 3: Utklipp av oversikten over elevstrategier på femte trinn på hver enkelt oppgave.

Elev nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	D	KT		H			D			AU
2	AU									
3	H	AU	GA	AU	D		D	DL	H	KT
4	S	AU	AU	AU			DL	DL		D
5	PF	KT	GS	KT						
6										
7	D	KT	KT	T		AU	KT	AU	AU	AU
8	D	KT	KT	KT			D			
9	D	KT	KT	D				DL		KT
10	D	KT	KT	KT	D		D	DL	PF	D

Informasjonen i *tabell 3* og den tilsvarende tabellen for tiendeklassingene ble deretter fylt inn i to nye tabeller. De nye tabellene hadde oppgavennummer vertikalt i tabellen og type strategi

horisontalt i tabellen. Antall type strategi per oppgave ble talt og fylt inn i tabellene. Dermed fikk jeg en oversikt over hvilke typer strategier som ble brukt på de ulike oppgavene, samt hvor mange ganger de ulike strategiene ble brukt. I tillegg til å legge inn hvor mange som brukte hver strategi på hver oppgave, la jeg også til en kolonne med feil eller manglende svar. Feil svar og manglende svar ble kategorisert i samme kategori, fordi fokuset ligger ikke på riktig svar, men på hvilken strategi elevene har brukt. Tabellene omtales som *tabell 5* og *tabell 6*, og blir presentert i resultat-kapittelet.

Analyseverktøyet

Kodene som ble brukt til å kategorisere elevbesvarelsene ble presentert i teoridelen. De er som følger: *telling* (T), *gjentatt subtraksjon* (GS), *gjentatt addisjon* (GA), *mentalt bilde av standard algoritme* (MA), *automatisk utregning* (AU), *kjente tallfakta* (KT), *halvering* (H2), *deling* (D), *distributive lov* (DL), og *helhetlig* (H). Da elevbesvarelsene ble analysert bemerket jeg at det var flere elever som hadde løst oppgavene ved hjelp av prøving og feiling. Dette er en strategi som Heirdsfield et al. (1999b) omtaler, men ikke inkluderer som egen kategori over strategier. Etter gjennomgangen av elevbesvarelsene valgte jeg å inkludere det som en egen kategori for strategier. Jeg har definert *prøving og feiling* (PF) som en retrievalstrategi, da det ikke bygger på en oppskriftsmessig tilnærming. Heirdsfield et al. (1999b) anser *prøving og feiling* som en underkategori av *helhetlige* strategier. Jeg valgte å skille de to strategiene fordi jeg ønsket å kategorisere elevbesvarelsene så spesifikt som mulig. Det kom tydelig frem i elevbesvarelsene når de hadde brukt prøving og feiling, dermed var det naturlig at de svarene skulle få en egen kategori.

Tabell 4: Tillegg til tabell 2 «Retrievalstrategier for hoderegning av divisjon med naturlige tall»

Engelsk	Norsk	Beskrivelse	Eksempler	Kilde
Trial and error	Prøving og feiling (PF)	Man prøver ulike løsninger før man kommer frem til riktig svar.	$78 \div 2: 35 + 35 = 70,$ $36 + 36 = 72,$ $37 + 37 = 74,$ $38 + 38 = 76,$ $39 + 39 = 78$	

Det er noen av kodene som ligner på hverandre, og bygger på hverandre. Dette betyr at det i noen tilfeller vil være mulig å kategorisere en løsningsstrategi innenfor flere koder. I hovedsak gjelder dette strategiene *deling* og *distributive lov*. *Deling* er en underkategori av *distributive lov*, det vil si at alle elevsvar som kategoriseres som *deling*, også vil kunne plasseres innenfor kategorien *distributive lov*. Det som gjør *deling* til en egen kategori, er at man deler opp tallet etter plassverdisystemet, mens ved bruk av *distributive lov* kan man dele opp tallet på en vilkårlig måte. Dette betyr at alle strategier hvor elevene deler opp tallet etter plassverdisystemet er kodet som *deling*, mens de strategiene hvor elevene har delt opp tallet på en annen måte enn etter plassverdisystemet er kodet som *distributive lov*. Svarene som kodes som *deling* eller *distributive lov* er altså tydelig innenfor en av de kategoriene, men det er ikke like tydelig skille mellom de to kategoriene som det er mellom de andre kategoriene.

Det er i tillegg noe usikkerhet rundt svar som kodes som *automatisk utregning*. Alle svar hvor elevene presiserer at de har kommet frem til svaret automatisk er kodet som *automatisk utregning*. I tillegg er alle riktige svar hvor elevene ikke har oppgitt en forklaring kategorisert som *automatisk utregning*. Dette kan bety at svar som er kategorisert som *automatisk utregning* egentlig ikke er det, altså at elevene har brukt en annen strategi når de har regnet oppgavene i hodet, uten å skrive det ned. Hvis dette er tilfelle kan det både skyldes elevenes manglende evner til å kommunisere egen tenkemåte, eller det kan skyldes elevenes latskap.

Det knyttes også en viss usikkerhet til om svar som kodes som noe annet enn *automatisk utregning*, egentlig er *automatisk utregning*. Når elevene blir bedt om å forklare tenkemåten sin, kan det føre til at de forklarer mer enn de skal. Altså at eleven egentlig regner ut svaret automatisk, men at de allikevel forklarer hvordan de kunne ha tenkt, dersom de ikke regnet oppgaven automatisk. Dette kan for eksempel være tilfelle på oppgave 2, ($20 \div 5$), og oppgave 3, ($24 \div 4$). Det var mange elever som forklarte at de brukte gangetabellen for å regne ut svarene, dermed ble svarene kategorisert som *kjente tallfakta*, men det kan altså tenkes at elevene har regnet svarene automatisk. På bakgrunn av dette vektlegges ikke forskjellen på bruk av *kjente tallfakta* og *automatisk utregning* i stor grad.

Kvalitetsvurdering

Min studie kan virke kvantitativ, siden jeg kategoriserer strategier som n elever bruker på x oppgaver. Det er allikevel mye ved studien som er utforskende og avhengig av mitt forskerblikk, noe som drar studien i en kvalitativ retning. Jeg har laget rammeverket, jeg har kategorisert strategier og jeg har funnet ut at det er vanskelig å kategorisere strategiene så jeg har måttet benytte skjønn i mine vurderinger. Derfor velger jeg å benytte de kvalitative begrepene. Det er et omdiskutert fenomen, om man skal bruke begrepene validitet og reliabilitet når man vurderer kvaliteten på en kvalitativ studie (Bryman, 2016, s. 383). Det er begreper som i utgangspunktet er utarbeidet for å vurdere kvantitative studier, og kan være vanskelige å overføre til kvalitative studier. Lincoln og Guba (1985) og Guba og Lincoln (1994), gjengitt av Bryman (2016, s. 384), presenterer to andre begreper man kan bruke: troverdighet og autentisitet. For å vurdere min forskning har jeg brukt troverdighetsbegrepet. Troverdighet deles igjen inn i fire deler: kredibilitet, overførbarhet, pålitelighet og bekreftbarhet. De fire aspektene anses som paralleller til intern validitet, ekstern validitet, reliabilitet og objektivitet.

Når man undersøker kredibiliteten, undersøker man om forskningen er gjennomført i henhold til prinsipper for god praksis (Bryman, 2016). I tillegg er triangulering et viktig prinsipp innenfor kredibilitet. Triangulering handler om å bruke mer enn en metode eller kilde til data når man studerer et sosialt fenomen. I min studie har jeg gjennomført datainnsamling på to ulike skoler. Datainnsamlingen ble gjennomført på tilsvarende måte på begge skoler. Dette er en form for triangulering, fordi det er to kilder til data, og det er dermed med på å styrke kredibiliteten i studien. Selv om datainnsamlingen ble gjennomført på tilsvarende måter på begge skolene, varierte det om jeg var til stede under hele gjennomføringen. Det ble gitt tydelige instruksjoner til lærerne som var til stede under gjennomføringene om hvordan gjennomføringen skulle foregå. I tillegg var jeg innom flere ganger i de klasserommene for å sjekke at lærerne og elevene overholdt de rammene som var satt. Det at jeg ikke var til stede under hele gjennomføringen kan svekke kredibiliteten i noen grad.

For å styrke overførbarheten i en studie er man nødt til å presentere det som omtales om tykke beskrivelser (Bryman, 2016). Dette innebærer utdypende beskrivelser av kulturen, miljøet eller konteksten man har undersøkt. Gjennom hele oppgaven har jeg forsøkt å være

transparent. Dette er med på å styrke oppgavens overførbarhet. Dette har jeg gjort ved å gi tykke beskrivelser av utvalget, oppgavesamlingen og spørreskjemaet, samt gjennomføringen av datainnsamlingen. Jeg har også gitt utdypende forklaringer av analysen, både av hvordan jeg har gått frem når jeg har kodet elevsvar, og hvordan jeg har gjennomført analysen etterpå.

Lincoln og Guba (1985), gjengitt av Bryman (2016), foreslår at pålitelighet i kvalitativ forskning kan sikres ved at forskeren tar vare på alt av datamateriale og arbeid forskeren gjør gjennom forskningsprosjektet. Deretter kan forskeren få fagfeller til å gå gjennom hele datamaterialet og alt arbeidet og vurdere i hvilken grad forskeren har fulgt riktige fremgangsmåter og tatt riktige vurderinger. Det argumenteres samtidig for at dette er en omdiskutert ide, på grunn av hvor tidkrevende det er, med tanke på at kvalitativ forskning ofte har omfattende datamaterialer. Pålitelighet ansees som parallell til reliabilitet. Dette handler om hvorvidt studien er replikerbar. Dette vil altså si at man kan styrke pålitelighet ved å være transparent, slik at det i størst mulig grad er mulig å replikere studien. Det er viktig å presisere at kvalitativ forskning i liten grad er replikerbar, da sosiale settinger er dynamiske og vil ha endret seg i mellomtiden. Gjennom å være transparent i min forskning blir mitt prosjekt mer pålitelig. Det som kunne styrket studiens pålitelighet var å få en annen forsker til å gjennomgå datamaterialet og se om den forskeren hadde kodet elevbetsvarelsene på samme måte. Samtidig viser Månsson (2022) i sin artikkel at forskere som kategoriserer hoderegningstrategier, stort sett er enig, og at slike hoderegningstester kan bli brukt på en pålitelig måte i forskning.

Bekreftbarhet handler om at selv om man anerkjenner at fullstendig objektivitet er umulig, så skal forskeren handle i god tro (Bryman, 2016). Det skal være tydelig at forskeren ikke har latt seg påvirke av personlige verdier i gjennomføringen av forskningsprosjektet. I tillegg skal det være tydelig at forskeren ikke lar teoretiske tendenser legge føringer for hvordan gjennomføringen av datainnsamlinger gjøres eller hvordan og hvilke funn som presenteres. I gjennomføringen av mitt prosjekt har jeg ikke latt personlige verdier påvirke valg eller handlinger. Jeg har på forhånd lest meg opp på teori, og laget hypoteser, men dette har ikke påvirket hvordan jeg har samlet data, eller hvordan jeg har analysert data. Dette kommer tydelig frem gjennom en transparent fremstilling av fremgangsmåte og av resultater.

Etiske overveielser

Når man skal gjennomføre et forskningsprosjekt er det lovpålagt å dokumentere behandlingen av personopplysninger (Sikt, 2023b). Dette gjøres i samhandling med Sikt ved å melde prosjektet til dem, og få godkjenning før man behandler personopplysninger. I tillegg til å melde prosjektet mitt til Sikt har jeg fylt ut en risikoanalyse for å sikre trygg innhenting og behandling av personopplysninger.

Meldeskjema til Sikt

I mitt forskningsprosjekt skulle jeg i utgangspunktet ikke samle inn personopplysninger. Hoderegningstestene jeg gjennomførte ble gjennomført på papir uten å kreve personopplysninger fra elever. Det som gjorde at jeg ble nødt til å vurdere om jeg skulle melde prosjektet til Sikt eller ikke, var fordi jeg kanskje måtte samle inn samtykkeerklæringer for at elever skulle kunne delta. Før jeg skulle gjennomføre prosjektet måtte jeg vurdere om jeg trengte samtykke fra foresatte, eller om elevene kunne samtykke på egne vegne. Dersom elever kunne samtykke på egne vegne hadde ikke samtykkeerklæringer med navn og underskrift vært nødvendig. Elevene kunne da huket av for samtykke på at ark som hang sammen med testen de gjennomførte, uten å oppgi navn eller andre personopplysninger. Hvis foresatte skulle samtykke på vegne av elevene trengte jeg at foresatte skrev navnet på eleven, slik at jeg da hadde oversikt over hvilke elever som hadde samtykke fra foresatte, og hvilke elever som ikke hadde samtykke fra foresatte.

Det er argumenter for og imot om barn kan samtykke på egne vegne til å delta i forskning (Backe-Hansen, 2009). I utgangspunktet har ikke barn juridisk kompetanse før de er 18 år, og dermed er det nærliggende å anta at foresatte er nødt til å samtykke på vegne av sine barn, for at de skal kunne delta i forskning. På den andre siden har barn rettighet til å bli hørt, jf. FNs barnekonvensjon artikkel 12. Backe-Hansen trekker frem at barns deltakelse i forskning kan være et spørsmål om deres rettigheter til å bli hørt, og at deltakelse i forskning handler om at barns synspunkter kommer frem. Jeg ønsket å gjennomføre tester på femte trinn og tiende trinn. Elever på femte trinn er 10-11 år og elever på tiende trinn er 15-16 år. Barn over femten år kan samtykke på egne vegne når det gjelder innsamling av ikke-sensitiv data (Sikt, 2023a). Dette betyr at for de fleste elevene i mitt utvalgt, måtte jeg ha samtykkeskjemaer fra foresatte. Foresatte samtykket på vegne av elevene, men dersom elevene ikke ønsket å delta, på tross av

at foresatte hadde gitt tillatelse, lot jeg det være opp til elevene å bestemme. Dette gjorde jeg ved å informere på starten av gjennomføringen at det var frivillig om jeg skulle samle inn testene eller ikke.

Jeg konkluderte dermed at foresatte skulle samtykke på vegne av elevene og jeg ble derfor nødt til å melde prosjektet til Sikt. Samtykkeskjema som ble delt ut til foresatte ligger som *vedlegg 2*. Det forelå godkjenning fra Sikt før datainnsamlingen ble satt i gang. Sikts vurdering ligger som *vedlegg 3*.

Risikoanalyse

Som en del av de etiske overveielserne ble det fylt ut et risiko- og sikkerhetsanalyse-skjema (ROS-analyse). Dette fylles ut for å sikre en trygg behandling av personopplysninger. I ROS-analysen identifiserte jeg hvilke uønskede hendelser som kunne oppstå, om dette går ut over konfidensialitet, integritet eller tilgjengelighet, hvilket risikonivå hendelsen har (lav, moderat eller høy), og eventuelle tiltak for å forhindre hendelsen. ROS-analysen ligger som *vedlegg 4*.

Resultater

Hensikten med analysen i denne studien er å finne ut hvordan et utvalg elever på femte og tiende trinn regner ut et utvalg divisjonsoppgaver i hodet. Jeg ville finne ut hvor mange strategier elevene brukte, hvilke strategier eleven brukte, samt om elevene er tilpasningsdyktige i valg av strategier. Fokuset i analysen var å kategorisere elevbesvarelsene innenfor elleve kategorier med ulike typer strategier, i tillegg til en kategori med ingen svar eller feil svar. Deretter undersøkte jeg hvilke strategier som forekom oftest, om det var bred variasjon i hvilke strategier som blir brukt, om det er variasjon i hvilke strategier hver enkelt elev bruker og om elevene bruker den mest egnede strategien på et utvalg oppgaver. Dette er en kvalitativ studie som gjennom analysen kvantifiserer noe av den kvalitative dataen. Det er viktig å understreke at det er et lite utvalg, og at utvalget ikke er et sannsynlighetsutvalg, noe som gjør at funnene i studien ikke kan generaliseres til å gjelde hele populasjonen, altså til å gjelde alle femte og tiendeklasser i Norge. Det er allikevel interessant å se på likheter og ulikheter innad i utvalget, og derfor vil resultatene fra femte klasse bli sammenlignet med resultatene fra tiende klasse. Resultatene vil i hovedsak presenteres hver for deg, for så å bli sammenlignet. Alle resultater som presenteres og sammenligninger som gjøres, gjelder kun for utvalget og kan ikke generaliseres til populasjonen. Kapitlet er organisert ut fra forskningsspørsmålene mine.

Resultatene som presenteres vil til en viss grad drøftes i dette kapitlet, men den overordnede drøftingen vil skje i drøftings-kapitlet. Med dette menes det at funnene som kommer frem i denne delen vil drøftes opp mot hverandre. Deretter vil funnene oppsummeres i drøftingskapitlet og så vil funnene drøftes mer overordnet opp mot tidligere forskning og teori.

Hvor mange strategier bruker elevene i utvalget?

Tabell 5 og tabell 6 viser hvilke strategier elevene brukte på hver oppgave, samt hvor mange elever som brukte hver enkelt strategi. I tillegg viser tabellene hvor mange elever som ikke svarte på oppgavene eller som svarte feil. Hovedvekten av svarene i denne kategorien er blanke svar.

De elleve strategiene elevbesvarelsene har blitt kategorisert innenfor er *telling* (T), *gjentatt subtraksjon* (GS), *gjentatt addisjon* (GA), *mentalt bilde av standard algoritme* (MA), *automatisk utregning* (AU), *kjente tallfakta* (KT), *halvering* (H2), *deling* (D), *distributive lov* (DL), *helhetlig* (H) og *prøving og feiling* (PF).

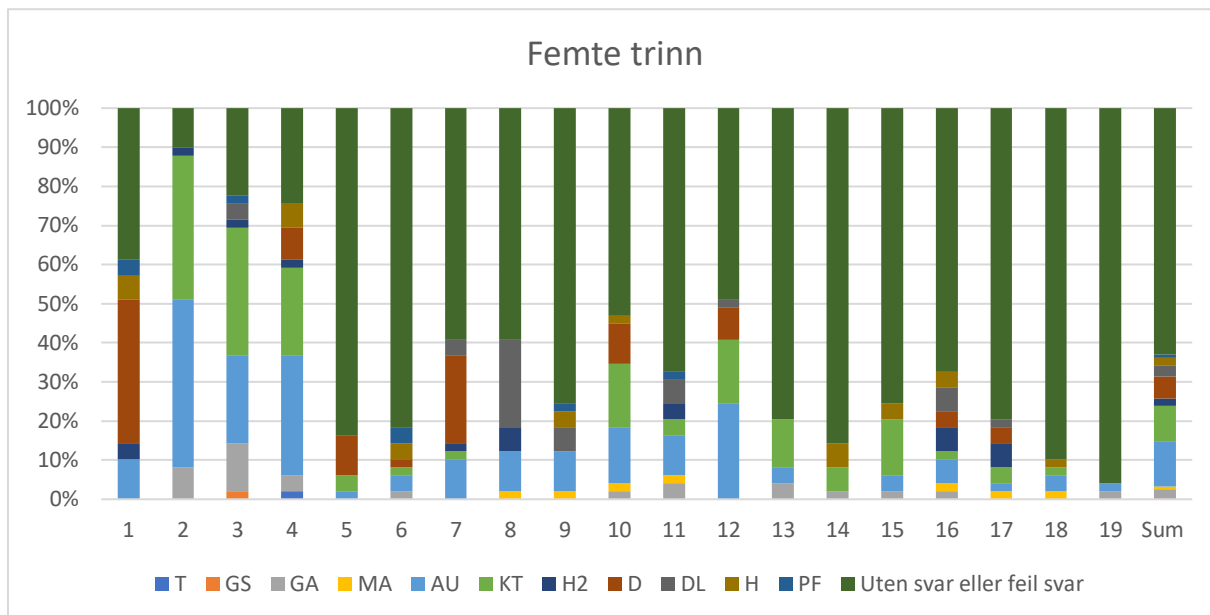
Tabell 5: Oversikt over elevstrategier på femte trinn.

Oppgave	T	GS	GA	MA	AU	KT	H2	D	DL	H	PF	Uten svar eller feil svar	Sum
1	0	0	0	0	5	0	2	18	0	3	2	19	49
2	0	0	4	0	21	18	1	0	0	0	0	5	49
3	0	1	6	0	11	16	1	0	2	0	1	11	49
4	1	0	2	0	15	11	1	4	0	3	0	12	49
5	0	0	0	0	1	2	0	5	0	0	0	41	49
6	0	0	1	0	2	1	0	1	0	2	2	40	49
7	0	0	0	0	5	1	1	11	2	0	0	29	49
8	0	0	0	1	5	0	3	0	11	0	0	29	49
9	0	0	0	1	5	0	0	0	3	2	1	37	49
10	0	0	1	1	7	8	0	5	0	1	0	26	49
11	0	0	2	1	5	2	2	0	3	0	1	33	49
12	0	0	0	0	12	8	0	4	1	0	0	24	49
13	0	0	2	0	2	6	0	0	0	0	0	39	49
14	0	0	1	0	0	3	0	0	0	3	0	42	49
15	0	0	1	0	2	7	0	0	0	2	0	37	49
16	0	0	1	1	3	1	3	2	3	2	0	33	49
17	0	0	0	1	1	2	3	2	1	0	0	39	49
18	0	0	0	1	2	1	0	0	0	1	0	44	49
19	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	47	49
Sum	1	1	22	7	105	87	17	52	26	19	7	587	931

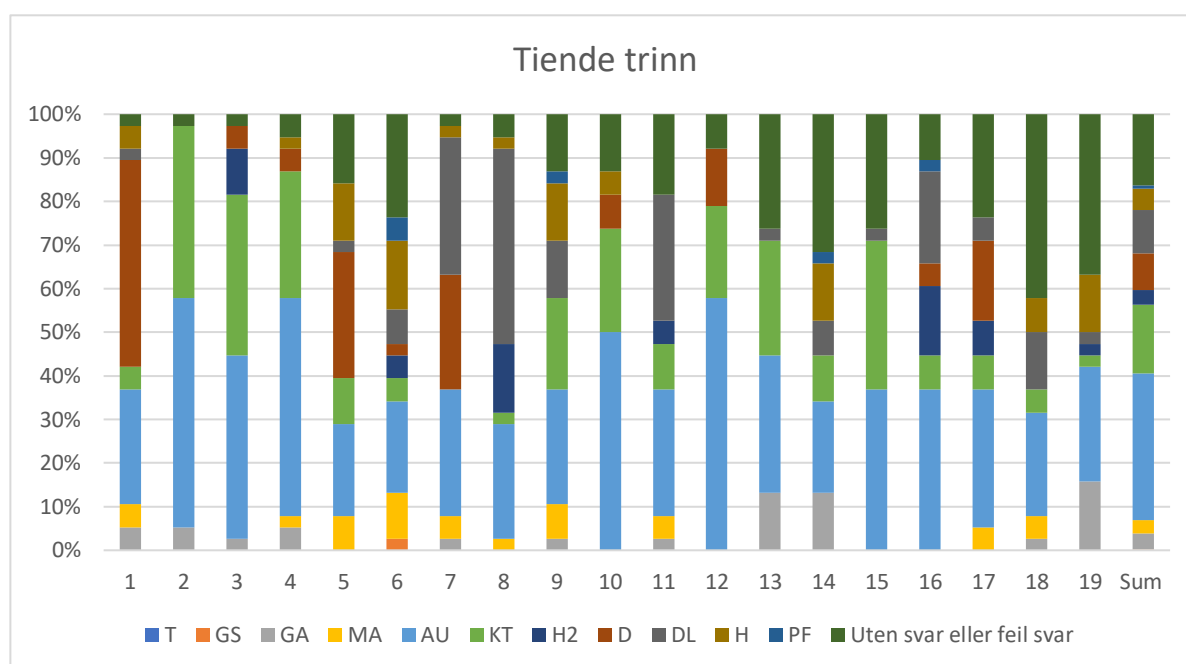
Tabell 6: Oversikt over elevstrategier på tiende trinn.

Oppgave	T	GS	GA	MA	AU	KT	H2	D	DL	H	PF	Uten svar eller feil svar	Sum
1	0	0	2	2	10	2	0	18	1	2	0	1	38
2	0	0	2	0	20	15	0	0	0	0	0	1	38
3	0	0	1	0	16	14	4	2	0	0	0	1	38
4	0	0	2	1	19	11	0	2	0	1	0	2	38
5	0	0	0	3	8	4	0	11	1	5	0	6	38
6	0	1	0	4	8	2	2	1	3	6	2	9	38
7	0	0	1	2	11	0	0	10	12	1	0	1	38
8	0	0	0	1	10	1	6	0	17	1	0	2	38
9	0	0	1	3	10	8	0	0	5	5	1	5	38
10	0	0	0	0	19	9	0	3	0	2	0	5	38
11	0	0	1	2	11	4	2	0	11	0	0	7	38
12	0	0	0	0	22	8	0	5	0	0	0	3	38
13	0	0	5	0	12	10	0	0	1	0	0	10	38
14	0	0	5	0	8	4	0	0	3	5	1	12	38
15	0	0	0	0	14	13	0	0	1	0	0	10	38
16	0	0	0	0	14	3	6	2	8	0	1	4	38
17	0	0	0	2	12	3	3	7	2	0	0	9	38
18	0	0	1	2	9	2	0	0	5	3	0	16	38
19	0	0	6	0	10	1	1	0	1	5	0	14	38
Sum	0	1	27	22	243	114	24	61	71	36	5	118	722

Det er stor forskjell i utvalget på femte og tiendetrinnselevne når det kommer til antall blanke og feil svar. På femte trinn er det hele 63 % av oppgavene som ikke er besvart eller som er besvart feil. På tiende trinn er det bare 16 % som har svart feil eller som ikke har svart. Det at elevene på femte trinn ikke har fått til så mange oppgaver, kan tyde på at de mangler passende strategier for å løse oppgavene. Det at tiendetrinnselevne har fått til så mange oppgaver som de har tyder på at de i mye større grad kjenner til og bruker egnede hoderegningsstrategier.



Figur 2: Prosentvis fordeling av elevstrategier på femte trinn.

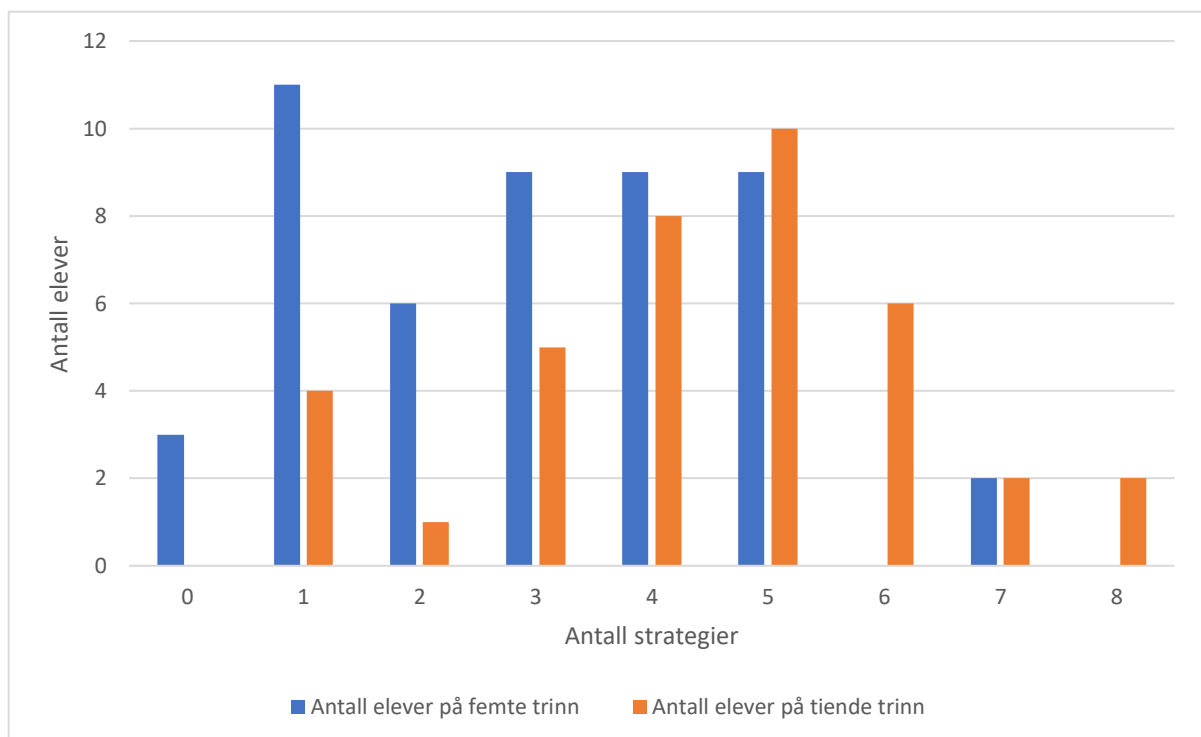


Figur 3: Prosentvis fordeling av elevstrategier på tiende trinn.

Figur 2 og figur 3 viser den prosentvise fordelingen av de ulike strategiene på hver enkelt oppgave. Her ser man at femtetrinnselevne i hovedsak har fått til oppgave 1-4, mens de resterende oppgavene består av blanke eller feil svar. På tiende trinn er det mye jevnere fordelt og de fleste elevene har fått til nesten alle oppgavene. Oppgave 18 er den eneste

oppgaven hvor det er færre enn 60 % av elevene som har løst oppgaven riktig. Dette viser at de aller fleste elevene på femte trinn er i stand til å regne enkle divisjonsstykker i hodet, men strever når stykkene blir vanskeligere, og at elever på tiende stort sett får til å regne divisjonsstykker med heltall som går opp i hodet.

Totalt sett har elevbesvarelsene blitt kategorisert innenfor elleve ulike kategorier for typer strategier. Det var stor variasjon på hvor mange ganger hver strategi forekom, men det ble funnet minst et eksempel på hver strategi i datasettet. Det ble talt opp hvor mange ulike strategier hver enkelt elev brukte. Dette viser at elever på femtetrinn i mitt utvalg, i gjennomsnitt bruker 3,0 ulike strategier. Spennet på hvor mange strategier elevene brukte på femtetrinn var fra null til syv strategier. Standardavviket er 4,0. Tiendetrinnselevne i utvalget mitt brukte i gjennomsnitt 4,5 ulike typer strategier. Spennet på hvor mange ulike strategier de brukte var fra én til åtte ulike strategier. Standardavviket er 3,3. Elevene på tiende trinn bruker med andre ord i snitt flere strategier og flere elever ligger nærmere gjennomsnittet enn det elever på femte trinn gjør. *Figur 4* viser fordelingen av hvor mange strategier elevene har brukt.

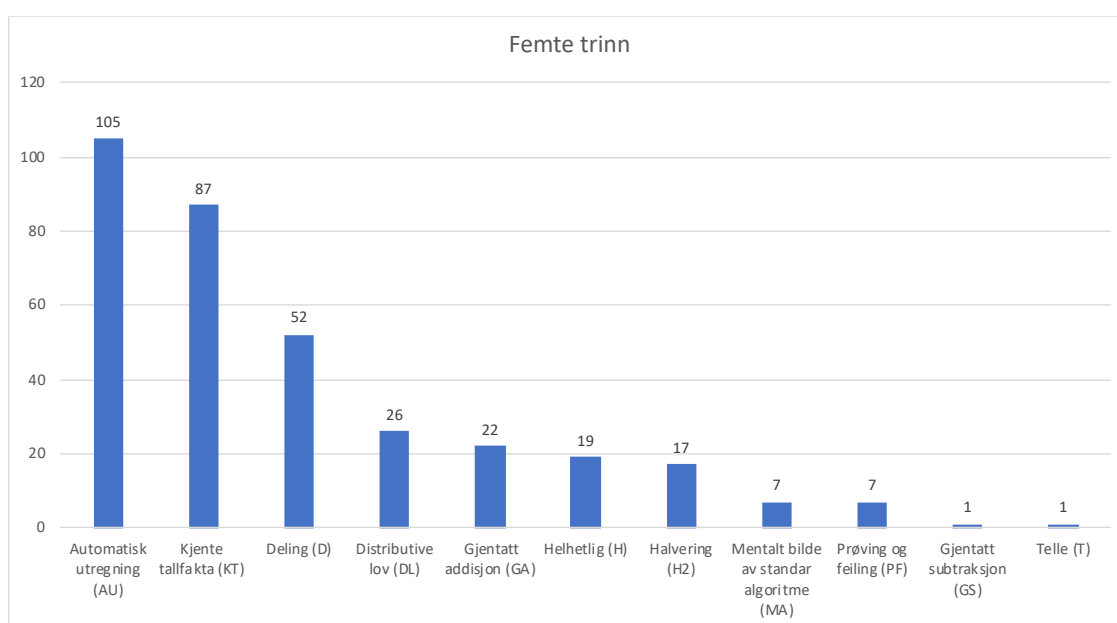


Figur 4: Oversikt over hvor mange strategier hver enkelt elev brukte.

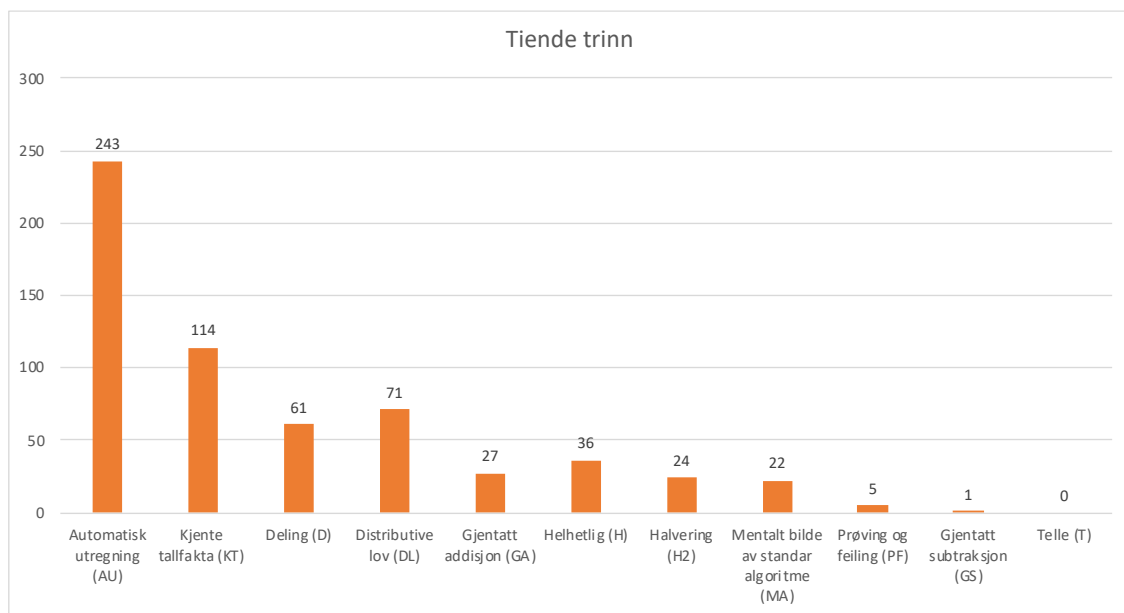
Figur 4 viser altså at elevene på tiendetrinn i snitt bruker flere strategier enn elevene på femte trinn, i tillegg til at spredningen på tiende trinn er lavere enn på femte trinn. Ved å se nærmere på figurene ser man også at det er en tydelig forskjell mellom femte- og tiendetrinnselevne. Tiendetrinnselevne bruker betydelig flere strategier enn det femtetrinnselevne gjør. Hele 20 elever bruker to eller færre strategier på femte trinn, mens på tiende er det bare fem elever som bruker to eller færre strategier. På femte trinn er det i tillegg tre elever som ikke bruker noen strategier, på tiende trinn bruker alle minst en strategi. Det er også bare to elever som bruker seks eller flere strategier på femte trinn, mens det på tiende trinn er ti elever som bruker seks eller flere strategier. Dette viser tydelig at elevene på tiende trinn bruker flere strategier enn elevene på femte trinn, noe som kan bety at elevene på tiende trinn kjenner til flere strategier og er mer fleksible enn det femtetrinnselevne er.

Hvilke strategier bruker elevene i utvalget, og hvor ofte brukes hver strategi?

Figur 5 og *figur 6* viser hvor mange ganger hver strategi ble brukt. *Figur 5* viser utvalget med femteklassinger og *figur 6* viser utvalget med tiendeklassinger. Feil eller manglende svar er ikke inkludert i diagrammet. I diagrammene er kategoriene organisert fra den strategien som forekom flest ganger til den kategorien som forekom færrest ganger på femte trinn. Diagrammet for tiende trinn har kategoriene i den rekkefølgen kategoriene framkommer i femteklassediagrammet, for å tydeliggjøre eventuelle likheter og forskjeller mellom trinnene.



Figur 5: Oversikt over hvilke strategier elevene på femte trinn brukte.



Figur 6: Oversikt over hvilke strategier elevene på tiende trinn brukte.

Diagrammene viser at fordelingen av hvilke typer strategier elevene bruker er ganske lik på femte og tiende trinn. De to typene strategier som uten tvil er brukt flest ganger av både femte- og tiendeklassingene er *automatisk utregning* og *kjente tallfakta*. Over halvparten av elevbesvarelsene som er besvart korrekt, både på femte og på tiende trinn, er kategorisert som *automatisk utregning* og *kjente tallfakta*. De elevbesvarelsene som er kategorisert som *kjente tallfakta* er hovedsakelig besvarelser hvor elevene bruker gangetabellen for å komme frem til svaret. På tiende trinn brukes *automatisk utregning* oftere, sammenlignet med *kjente tallfakta*, enn det det gjøres på femte trinn. Som nevnt i metodedel er det noe usikkerhet knyttet til besvarelser som er kategorisert som *automatisk utregning* og *kjente tallfakta*.

Det at *automatisk utregning* og *kjente tallfakta* er de mest brukte strategiene på begge trinn kan tyde på at elevene er mest komfortable med å regne divisjon i hodet når de ser svaret automatisk eller kan bruke *kjente tallfakta*, som for eksempel gangetabell, for å regne ut svaret. Både *automatisk utregning* og *kjente tallfakta* er kategorisert som retrievalstrategier og den utstrakte bruken av de to strategiene er en faktor som er med på å antyde at elevene er fleksible i hoderegning av divisjon.

Deling og *distributiv lov* er de to nest mest brukte strategiene både på femte og tiende trinn. Som nevnt tidligere er *distributiv lov* en underkategori av *deling*. Når man benytter seg av deling-strategien deler man opp tallene etter plassverdisystemet og deler opp hundrere for seg, tiere for seg og enere for seg. Når man bruker den distributive lov deler man også opp tallene, men da kan man dele opp på andre måter enn bare plassverdisystemet. Med andre ord tyder dette på at hvis elevene ikke ser svaret umiddelbart (*automatisk utregning*) eller ved hjelp av *kjente tallfakta* klarer å komme frem til svaret, så er det mest naturlige for dem å dele opp tallet i mindre deler som er håndterbare. På tiende trinn brukes *distributive lov* flere ganger enn *deling*. Dette er en motsetning til femtetrinn hvor *deling* brukes flere ganger enn *distributive lov*. Dette kan tyde på at elevene på tiende trinn har en litt bredere forståelse for den helhetlige sammenhengen til tall. De er i større grad i stand til å dele opp tallene på utradisjonelle og praktiske måter, mens femteklassingene i noe større grad er mer komfortable med å dele opp tallene i plassverdisystemet. Forskjellen mellom trinnene er relativt liten, så det kan være at det bare er en statistisk tilfeldighet, og av liten betydning.

Gjentatt addisjon er ikke brukt i utstrakt grad, men forekommer flere ganger både på femte og tiende trinn. På tiende trinn er *gjentatt addisjon* brukt flest ganger på oppgave 13, 14 og 19. Henholdsvis fem, fem og seks ganger. På de resterende oppgavene er *gjentatt addisjon* bare brukt null, en eller to ganger. Oppgave 13, 14 og 19 skiller seg fra de andre oppgavene ved at det er de eneste oppgavene med flersifret divisor. En mulig forklaring på hvorfor tiendetrinnselevne tenderer til å bruke strategien på oppgaver med flersifret divisor, er at det er på de oppgavene strategien egner seg best. På de oppgavene i oppgavesettet hvor divisor er flersifret, er svarene 8, 5 og 3. Det betyr at det er overkommelig antall ganger man må addere divisor for å komme frem til dividend. Selv om *gjentatt addisjon* er en backupstrategi, og at bruken av den strategien kan tyde på lav fleksibilitet, vil jeg argumentere for at elevene på tiendetrinn allikevel viser en viss grad av fleksibilitet med tanke på hvilke oppgaver de bruker strategien på. De bruker den i hovedsak på oppgaver hvor det til en viss grad er hensiktsmessig å bruke strategien, og ikke på oppgaver hvor det er lite hensiktsmessig å bruke strategien. Oppsummert tyder bruken av *gjentatt addisjon* på lav fleksibilitet, men med tanke på hvilke oppgaver strategien brukes på kan det allikevel tyde på at tiendeklassingene er fleksible i hoderegning av divisjon.

På femte trinn er *gjentatt addisjon* brukt mer enn to ganger på to oppgaver, dette er oppgave 2 og 3. Der er strategien brukt henholdsvis fire og seks ganger. De to oppgavene er de eneste oppgavene i oppgavesettet som finnes i gangetabellen. Årsaken til at strategien brukes mest på disse oppgavene er muligens fordi elevene er vant til å telle gangetabellen når de regner oppgavene, altså at de tenker $5 - 10 - 15 - 20$, og uttrykker det som $5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Bruken av *gjentatt addisjon* på oppgaver fra gangetabellen tyder på lav fleksibilitet hos elevene. Det er en backupstrategi, og når elevene bruker den tyder det på at de mangler bedre og mer fleksible strategier.

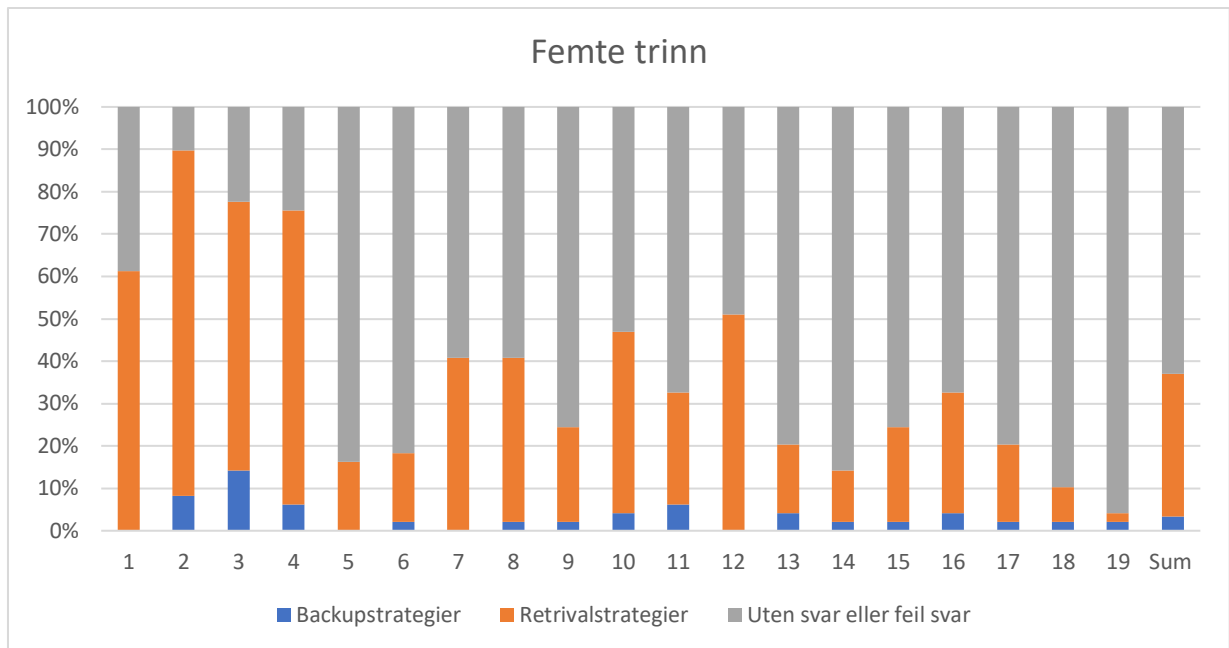
Helhetlig, altså at tall blir behandlet som hele, er brukt i moderat grad på både femte og tiende trinn. Helhetlige strategier innebærer at elevene på et eller annet vis behandler tallene som en helhet. For eksempel kan man løse $504:63$, ved å tenke at $630:63 = 10$. Differansen mellom 630 og 504 er 126. Ved å ta $63 * 2 = 126$ finner man ut at $504:63 = 8$, fordi $10 - 2 = 8$. Da har man behandlet 504 som et helhetlig tall, og brukt en *helhetlig* strategi. Dette er en fleksibel strategi som kan anvendes på alle oppgaver. Det er ingen premisser i regnestykket som må oppfylles for at strategien skal kunne benyttes. Med andre ord er dette en strategi som egner seg til bruk på mange oppgaver. At elevene ikke benytter seg av strategien i utstrakt grad kan dermed bety at de ikke kjenner til denne typen strategier i stor nok grad til å benytte seg av den. For å heve nivået på elevenes evner i hoderegning kan man dermed fokusere mer på *helhetlige* strategier.

Halvering er heller ikke brukt i utstrakt grad. Syv av oppgavene i oppgavesamlingen hadde 2, 4 eller 8 som divisor. I tillegg til at en oppgave hadde 6 som divisor. Dette betyr at strategien halvering egner seg godt til bruk i overkant av en tredjedel av oppgavene. På de oppgavene med 2, 4, 6 eller 8 som divisor har 4 % av femtetrinnslevnene og 8 % av tiendetrinnslevnene brukt halvering som strategi. Dette kan bety to ting; enten så kjenner elevene til og bruker strategier som egner seg bedre på de nevnte oppgavene, eller så kjenner de ikke til *halvering* som strategi. Det kan dermed være hensiktsmessig å undersøke årsaken til at elevene ikke bruker denne strategien i utstrakt grad. Ved å undersøke dette kan man finne ut hva man burde fokusere på i undervisning.

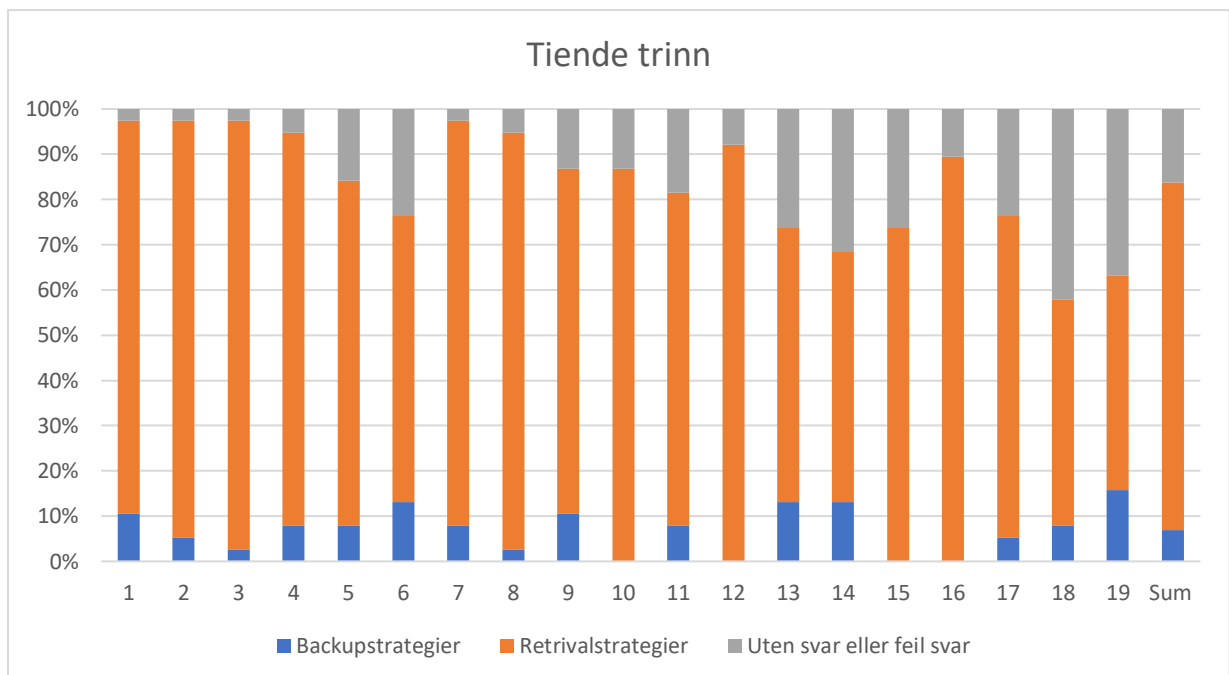
Prøving og feiling er brukt få ganger av både femte- og tiendetrinnselevne. Det er syv ulike elever på femte trinn som har brukt prøving og feiling fordelt på fem ulike oppgaver, og tre ulike elever på tiende trinn som har brukt prøving og feiling på to ulike oppgaver. Det er totalt seks oppgaver prøving og feiling er brukt på. I likhet med *helhetlig* er *prøving og feiling* en strategi som egner seg å bruke på de aller fleste oppgaver. Det kan tenkes at dette er en strategi spesielt femtetrinnselevne vil ha utbytte av å utforske og arbeide mer med. Som nevnt tidligere er det veldig mange oppgaver elevene på femte trinn ikke har fått til, noe som kan tyde på at de mangler kjennskap til egnede hoderegningstrategier. Da kan de ha utbytte av å arbeide med og utforske *prøving og feiling* som strategi. *Prøving og feiling* er en viktig del av det å lære og gjennom *prøving og feiling* vil elevene også kunne oppdage andre strategier.

Ut fra tabellen ser man at *mentalt bilde av standard algoritme* ble brukt som strategi henholdsvis syv og 22 ganger på femte- og tiendetrinn. Ved å se nærmere på skjemaet med oversikt over hvilken strategi hver enkelt elev brukte så jeg at det bare var én elev på femte trinn og fem elever på tiende trinn som hadde brukt *mentalt bilde av standard algoritme* som strategi. Av 87 elever er det altså bare seks elever som har brukt dette som strategi. På mellomtrinnet utgjør dette 1,6 % av elevene og på ungdomstrinnet utgjør dette 15,8 % av elevene. Det er altså en betydelig større andel av elevene på tiende trinn som bruker *mentalt bilde av standard algoritme* som strategi, sammenlignet med elevene på femte trinn. Samtidig er strategien brukt i liten grad da den bare er brukt 29 ganger på totalt 948 riktig besvarte oppgaver. Dette tyder altså på at det ikke er en strategi elevene tenderer til å bruke når de regner i hodet, men det forekommer oftere hos elevene på tiende trinn enn det gjør hos elevene på femte trinn.

Det er to typer strategier som omtrent ikke ble brukt på hverken femte eller tiende trinn. Dette er *gjentatt subtraksjon* og *telling*. *Telling* ble kun benyttet en gang på femte trinn og ingen ganger på tiendetrinn. *Gjentatt subtraksjon* ble bare benyttet én gang på femte trinn og én gang på tiende trinn. Begge disse strategiene er kategorisert som backupstrategier. Det at elevene ikke bruker dem som strategier kan dermed bety at elevene har kjennskap til andre, og mer egnede strategier, og at elevene har utviklet fleksible evner i hoderegning av divisjon.



Figur 7: Oversikt over fordelingen av backupstrategier og retrievalstrategier på femte trinn.



Figur 8: Oversikt over fordelingen av backupstrategier og retrievalstrategier på tiende trinn.

For å oppsummere har jeg inkludert *figur 7* og *figur 8*. *Figur 7* og *figur 8* viser fordelingen av backupstrategier og retrievalstrategier på femte og tiende trinn. Her ser man tydelig at elevene bruker få backupstrategier, og at hovedvekten av strategiene de bruker er retrievalstrategier. Det er relativt lik fordeling av backupstrategier og retrievalstrategier på femte og tiende trinn.

Det som skiller elevgruppene, er at elevene på femte trinn har betydelig flere blanke og feil svar. Dette antyder at elevene på tiende trinn har et fleksibelt strategilager som de evner å benytte seg av når de regner divisjonsoppgaver i hodet. I tillegg antyder det at elevene på femte trinn har et godt utgangspunkt og tenderer til å bruke retrivalstrategier når de får til oppgavene, men samtidig er det en del oppgaver elevene synes er utfordrende. Derfor trenger elevene på femte trinn å utvikle sine hoderegningstrategier i divisjon hvis de skal regne mer utfordrende divisjonsoppgaver i hodet.

Viser elevene i utvalget tilpasningsevne i valg av strategier?

I dette kapitlet skal jeg se nærmere på noen av oppgavene i oppgavesamlingen. Årsaken til at jeg ikke analyserer alle oppgavene er fordi det ikke er like entydig for alle oppgaver hvilken strategi som egner seg best til å løse oppgavene. Oppgavesettet ble laget med en tanke om å undersøke hvor mange strategier elevene kjente til, og ikke tilpasningsdyktigheten deres. Derfor var hovedfokuset da oppgavene ble laget, å lage oppgaver som la til rette for at elevene skulle benytte seg av flest mulig strategier. Dette har ført til at det ikke er så mange oppgaver hvor det er veldig tydelig hvilken strategi som egner seg. Jeg har derfor valgt ut noen oppgaver hvor det er mer åpenbart hvilke strategier som egner seg til å løse oppgaven. Deretter har jeg sett nærmere på hvilke strategier elevene har brukt på de oppgavene. Det vil gi svar på om elevene bruker den mest egnede strategien, hvilke strategier de bruker istedenfor om de bruker andre strategier, og om det er forskjeller mellom femte og tiende trinn. Det er valgt ut totalt fire oppgaver, fordi det var de fire oppgavene hvor det var tydeligst at det var én spesifikk strategi som egnest seg bedre enn de resterende strategiene. Bruken av *automatisk utregning* og *kjente tallfakta* som strategi vil ikke telle negativt på vurderingen om elevene er tilpasningsdyktige eller ikke. Bruken av de strategiene tolkes bare som et tegn på at elevene ikke trenger mer avanserte strategier for å regne ut stykket.

Den først oppgaven jeg har valgt er oppgave 5, altså $240:5$. Her egner *deling* seg godt som strategi fordi divisor kan deles etter plassverdisystemet og alle tallene vil være delbart på dividenden. Med andre ord går både hundrerplassen 200 og tier-plassen 40 opp i 5. Ut fra *tabell 7* ser man at av femteklassingene er det bare åtte elever som har regnet riktig på denne oppgaven. Av de åtte elevene har fem elever bruk *deling* som strategi. De resterende elevene har bruk *automatisk utregning* eller *kjente tallfakta*. På tidene trinn er det 32 elever som har

løst oppgaven riktig. Av de har elleve elever brukt *deling*. De resterende elevene har brukt *automatisk utregning, helhetlige, kjente tallfakta, distributive lov* eller *mentalt bilde av standard algoritme* som strategi.

Tabell 7: Oversikt over elevstrategier på oppgave 5.

Trinn	T	GS	GA	MA	AU	KT	H2	D	DL	H	PF	Uten svar eller feil svar	Sum
Femte	0	0	0	0	1	2	0	5	0	0	0	41	49
Tiende	0	0	0	3	8	4	0	11	1	5	0	6	38

Både på femte trinn og på tiende trinn er *deling* den mest brukte strategien. På femte trinn er det den eneste strategien som er brukt i tillegg til *automatisk utgrening* og *kjente tallfakta*. Dette tyder på gode tilpasningsevner hos femtetrinnelevne, fordi elevene enten regner oppgaven automatisk, ved hjelp av kjente tallfakta, eller så bruker de den mest egnede strategien. Det må også nevnes at det er ganske mange elever som ikke har regnet denne oppgaven, noe som tyder på dårlige tilpasningsevner. På tiende trinn er også *deling* den mest brukte strategien. Elevene på tiende trinn viser ikke like tydelige tilpasningsevner som på femte trinn, da hele ni elever har brukt andre strategier enn *automatisk utgrening, kjente tallfakta* eller *deling*. I tillegg har tre av de ni elevene brukt *mentalt bilde av standard algoritme* som strategi. Dette er kategorisert som en backupstrategi og kan dermed tyde på dårlig strategiutvikling hos elevene. Både elevene på femte trinn og elevene på tiende trinn har moderate tilpasningsevner på denne oppgaven.

Oppgave 6 er den andre oppgaven jeg valgte, dette er $112:4$. På denne oppgaven egner *distributive lov* seg som strategi. *Distributive lov* egner seg på denne oppgaven fordi 100 er delelig med 4 og 12 er delelig med 4. *Deling* egner seg ikke som strategi her fordi 10 og 2 er ikke delelig med 4. Ut fra *tabell 8* ser man at på femte trinn er det 20 elever som har regnet oppgaven riktig. Av de har elleve elever brukt *distributive lov*, og de resterende elevene har bruk *automatisk utregning, halvering* og *mentalt bilde av standard algoritme*. På tiende trinn har 36 elever regnet oppgaven riktig. Av de har 17 elever brukt *distributive lov*, og de resterende elevene har brukt *automatisk utregning, halvering, kjente tallfakta, helhetlig* og *mentalt bilde av standard algoritme*.

Tabell 8: Oversikt over elevstrategier på oppgave 8.

Oppgave	T	GS	GA	MA	AU	KT	H2	D	DL	H	PF	Uten svar eller feil svar	Sum
Femte	0	0	0	1	5	0	3	0	11	0	0	29	49
Tiende	0	0	0	1	10	1	6	0	17	1	0	2	38

Her ser man at både på femte trinn og på tiende trinn er det *distributiv lov* som er den mest brukte strategien. I tillegg har tre femtetrinnselever og seks tiendetrinnselever brukt *halvering* som strategi. Dette er ikke den strategien jeg har vurdert som mest effektiv, men i og med at divisor er 4 så er dette en strategi som også egner seg på denne oppgaven, derfor vil ikke bruken av halvering i stor grad telle negativt på elevenes tilpasningsevner. Det er en strategi som egner seg godt på denne oppgaven, men *distributiv lov* egner seg enda bedre. Med andre ord viser elevene gode tilpasningsevner på denne oppgaven.

Den tredje oppgaven jeg valgt ut er oppgave 14, som er $95:19$. Her egner *helhetlige* strategier seg. Man kan for eksempel tenke at 95 er nesten 100, og 19 er nesten 20. Derfor tar man først $100:20 = 5$. Deretter regner man $100 - 5 = 95$ og $20 - 1 = 19$, og siden $1 * 5 = 5$ så må det bety at $95:19 = 5$. Her ser man tallene som en helhet. I *tabell 9* ser man at på femte trinn har syv elever regnet riktig, og av de har tre elever brukt *helhetlige* strategier. De resterende elevene har brukt *kjente tallfakta* og *gjentatt addisjon*. På tiende trinn har 26 elever regnet oppgaven riktig, og av de er det bare fem elever som har brukt *helhetlige* strategier. De resterende elevene har brukt *automatisk utregning*, *gjentatt addisjon*, *kjente tallfakta*, *distributiv lov* og *prøving og feiling*.

Tabell 9: Oversikt over elevstrategier på oppgave 14.

Trinn	T	GS	GA	MA	AU	KT	H2	D	DL	H	PF	Uten svar eller feil svar	Sum
Femte	0	0	1	0	0	3	0	0	0	3	0	42	49
Tiende	0	0	5	0	8	4	0	0	3	5	1	12	38

På denne oppgaven er ikke *helhetlige* strategier den mest brukte strategien på verken femte eller på tiende trinn. På femte trinn er *kjente tallfakta* brukt like mange ganger som *helhetlig*, i tillegg er *gjentatt addisjon* brukt en gang. Det at *kjente tallfakta* er den strategien som er brukt

flest ganger, sammen med *helhetlige* strategier, tyder på moderate tilpasningsevner på femte trinn. Det er ganske få elever som har løst oppgaven, men av de som har klart den har alle utenom én elev brukt den mest egnede strategien eller tallfakta for å løse den. På tiende trinn har tolv elever brukt *automatisk utregning* eller *kjente tallfakta*. I tillegg har ni elever brukt *gjentatt addisjon*, *distributiv lov* eller *prøving og feiling* og bare fem elever har brukt *helhetlige* strategier. Dette viser dårlige tilpasningsevner hos tiendetrinnselevne på denne oppgaven. Det er interessant at hele fem elever bruker gjentatt addisjon på denne oppgaven, da det er en oppgave med tosifret divisor. Dette gjør at gjentatt addisjon som strategi til en viss grad er effektiv, men det er allikevel kategorisert som en backupstrategi, og bruk av den kan tyde på dårlig strategiutvikling hos elevene. Oppsummert viser altså femtetrinnselevne moderate tilpasningsevner på denne oppgaven, og tiendetrinnselevne viser dårlige tilpasningsevner på denne oppgaven.

Den siste oppgaven jeg valgte ut var oppgave 15, altså $630:9$. I og med at 63 er i 9-gangen vil det på denne oppgaven være mest naturlig å bruke gangetabellen for å regne ut, altså at man benytter seg av strategien *kjente tallfakta*. Som nevnt tidligere i metodedel kan det tenkes at elevsvar som kategoriseres som *kjente tallfakta* eller som *automatisk utregning* egentlig er det motsatte. Derfor ansees *automatisk utregning* også som en egnet strategi på denne oppgaven og det sees på det samlede resultatet i de to kategoriene. Ut ifra *tabell 10* ser man at på femte trinn har tolv elever regnet oppgaven riktig, av de har ni elever brukt *kjente tallfakta* eller *automatisk utregning*. De resterende elevene har brukt *helhetlige* strategier og *gjentatt addisjon*. På tiende trinn er det 28 elever som har regnet riktig på oppgaven. Av de har 27 elever brukt *kjente tallfakta* eller *automatisk utregning*. Den resterende eleven har brukt *distributiv lov*.

Tabell 10: Oversikt over elevstrategier på oppgave 15.

Trinn	T	GS	GA	MA	AU	KT	H2	D	DL	H	PF	Uten svar eller feil svar	Sum
Femte	0	0	1	0	2	7	0	0	0	2	0	37	49
Tiende	0	0	0	0	14	13	0	0	1	0	0	10	38

På både femte trinn og på tiende trinn er altså *kjente tallfakta* i kombinasjon med *automatisk utregning* uten tvil de mest brukte strategiene. På femte trinn er det tre av tolv elever som har

brukt en annen strategi enn de to, og på tiende trinn er det bare en av 28 elever som har brukt en annen strategi enn de to mest egnede strategiene. Men på denne oppgaven er det også mange elever på femte trinn som ikke har svart eller som har svart feil, og dette tyder på dårlige tilpasningsevner. Her viser altså femtetrinnselevne moderate tilpasningsevner og tiendetrinnselevne viser svært gode tilpasningsevner.

Elevene viser altså en varierende grad av tilpasningsdyktighet på ulike oppgaver, i tillegg til at det varierer om det er femtetrinnselevne eller tiendetrinnselevne som viser størst grad av tilpasningsdyktighet. På femte trinn er det mange elever som har svart på få oppgaver. Det kan dermed være vanskelig å analysere deres tilpasningsdyktighet. Det at de ikke har regnet oppgavene sier noe om at oppgavene er for utfordrende for dem å regne i hode. Dette kan tyde på manglende strategirepertoar eller manglende tilpasningsevner, eller begge deler. I dette kapitlet er det delvis fokusert på de elevene som har svart, og tilpasningsevne er vurdert ut fra det. Samtidig er det tatt med i beregningen dersom det er et stort antall elever som ikke har svart, da har det påvirket den totale vurderingen i negativ grad. Det er viktig å understreke at oppgavene ble laget med en tanke om at det skulle være utfordrende for tiendeklassingene. Dette betyr at det er unaturlig at femteklassingene skulle klare å svare på alt, og det var naturlig å vurdere tilpasningsdyktighet uten å legge for stor vekt på hvor mange elever på femte trinn som hadde klart oppgavene.

At tilpasningsevne ser ut til å variere fra oppgave til oppgave, kan tyde på at elevenes tilpasningsevner avhenger av oppgavetype, og hvilke strategier som er de mest egnede. I forrige kapittel viste det seg at de mest brukte strategiene er *automatisk utregning* og *kjente tallfakta*, etterfulgt av *deling* og *distributiv lov*. De resterende strategiene var bare brukt i moderat grad. I dette kapitlet har det vist seg at elevene er mest tilpasningsdyktige på oppgaven hvor *kjente tallfakta* var den mest egnede strategien, og på oppgaven hvor *distributiv lov* var den mest egnede strategien. Den oppgaven de var minst tilpasningsdyktig på, var den oppgaven hvor helhetlige strategier egnet seg mest. Både *kjente tallfakta* og *distributiv lov* var strategier elevene viste godt kjennskap til, mens *helhetlig* var en strategi elevene kun viste moderat kjennskap til.

Noe annet som skiller oppgave 14 fra de resterende oppgavene er at det er en oppgave med tosifret divisor. Dette kan også bety at elevene strever mer med oppgaver med tosifret divisor enn med oppgaver med ensifret divisor. Dette tyder på at det er vanskeligere for dem å tilpasse strategiene til slike typer oppgaver. Det kan tenkes at elevene har arbeidet mindre med dette, og at de på grunn av dette har dårligere tilpasningsevner på den typen oppgaver.

Drøfting

Gjennom min studie ønsket jeg å belyse problemstillingen min som sier «*Hvordan regner et utvalg elever på femte og tiende trinn divisjonsoppgaver med positive heltall med null i rest, og er det forskjell mellom femte og tiendetrinnelevne i utvalget?*». Jeg har gjennomført en hoderegningstest på et utvalg femtetrinnelever og et utvalg tiendetrinnelever, gjennom analysen har jeg besvart forskningsspørsmålene mine. Dette kapittelet starter med en oppsummering av hovedfunnene mine og svar på forskningsspørsmålene. Deretter vil funnene drøftes opp mot tidligere presentert teori. Det er tre hovedpunkter som vil bli drøftet. Det første er om elevene har funksjonelle ferdigheter i hoderegning av divisjon. Det andre er om elevene oppfyller det læreplanen sier at de skal. Det siste handler om hvorvidt man burde fokusere på hoderegning av divisjon, på tross av at det ikke er nevnt eksplisitt i læreplanen.

Hovedfunn

Det første forskningsspørsmålet spør hvor mange strategier hver enkelt elev i utvalget har brukt. Her er det tydelig forskjell mellom femtetrinnelevne og tiendetrinnelevne. Av elleve mulige strategier, har elevene på femte trinn i snitt brukt 3,0 strategier, mens elevene på tiende trinn i snitt har brukt 4,5 strategier. Elevene på tiende trinn bruker altså i snitt 1,5 flere strategien enn det elevene på femte trinn gjør. Dersom man undersøker variasjonen kan man se på hvor mange elever som bruker fra tre til seks strategier. På femte trinn er dette 55 % og på tiende trinn er dette 76 %. Med tanke på at det er elleve ulike strategier besvarelsene blir kategorisert innenfor bruker femteklassingene i snitt få strategier, mens tiendeklassingene bruker et moderat antall strategier i snitt.

Det andre forskningsspørsmålet spør hvilke strategier et utvalg femte- og tiendeklasselever bruker når de regner et utvalg divisjonsoppgaver med positive heltall med null i rest i hodet, og hvor ofte hver strategi brukes. I hovedsak benytter elevene seg på begge trinn av *automatisk utregning* og *kjente tallfakta*. Over halvparten av besvarelsene som er regnet riktig er kategorisert innenfor de to kategoriene. I tillegg bruker elevene på begge trinn *deling* og *distributiv lov*. De resterende strategiene er brukt i liten eller moderat grad. I tillegg viser resultatene at elevene benytter seg av betydelig flere retrievalstrategier enn de gjør av backupstrategier. Oppsummert vil dette si at elevene hovedsakelig benytter seg av fire ulike strategier, men alle de strategiene er kategorisert som retrievalstrategier, slik at selv om de

benytter seg betydelig mer av noen strategier, enn av andre strategier, stammer de strategiene fra et fleksibelt strategilager og bygger ikke på oppskriftsmessige tilnærminger.

Det tredje og siste forskningsspørsmålet spør om elevene i utvalget viser tilpasningsevne i valg av strategier når de løser utvalget med divisjonsoppgaver med positive heltall med null i rest i hodet. Her er svaret at elevene viser varierende grad av tilpasningsdyktighet, og det kan se ut som at tilpasningsdyktigheten varierer avhengig av oppgavetype. Samtidig viser analysen at det kan være vanskelig å analysere tilpasningsdyktighet når oppgavene på forhånd ikke er laget med en bestemt tanke om hvilken strategi som egner seg best. Dette utdypes under kapitlet om videre forskning. Resultatene i denne studien tyder allikevel på at elever er tilpasningsdyktige når de regner oppgaver hvor strategier de er godt kjent med er de som egner seg best, som oppgaver hvor *kjente tallfakta*, *deling* og *distributiv lov* er mest egnet. Elevene strever mer når de regner oppgaver hvor strategier de ikke kjenner like godt er de mest egnede strategiene. Resultatene kan også tyde på at elevene er mindre tilpasningsdyktige når de regner oppgaver med tosifret divisor.

Har elevene funksjonelle ferdigheter i hoderegning av divisjon?

For å undersøke elevenes funksjonelle ferdigheter i hoderegning vil resultatene i studien sees i sammenheng med tidligere presentert teori. Avslutningsvis vil kapittel oppsummeres, og da vil spørsmålet om elevene har funksjonelle ferdigheter i hoderegning av divisjon besvares.

Hoderegning handler om strategibruk og gjenkalling (Haara, 2006; Swan & Sparrow, 2001). I min studie har jeg undersøkt hvilke strategier et utvalg elever på femte og tiende trinn har brukt. Strategiene *Automatisk utregning* og *kjente tallfakta* referer i denne sammenheng, som nevnt til gjenkalling, mens de resterende strategiene referer til strategibruk. Resultatene viser tydelig at gjenkalling er det elevene bruker mest av i hoderegning av divisjon. I overkant halvparten av besvarelsene som er besvart korrekt er besvart ved hjelp av gjenkalling, henholdsvis 56 % for femte trinn, og 59 % for tiende trinn. Elevene bruker altså både gjenkalling og ulike strategier når de regner divisjon i hodet, og fordelingen er relativt jevn mellom gjenkalling og strategibruk. Dette kan tyde på funksjonelle ferdigheter i hoderegning av divisjon.

Fleksibilitet trekkes frem som en viktig komponent for å utvikle god kompetanse innenfor hoderegning (Swan & Sparrow, 2001). For å vurdere elevenes funksjonelle ferdigheter i hoderegning av divisjon har fokuset derfor vært å se nærmere på elevenes fleksibilitet. Fleksibilitet handler om kjennskap til ulike strategier og tilpasningsdyktighet (Rathgeb-Schnierer & Green, 2019). I analysen kom det frem at elevene på femte trinn bruker få strategier i snitt, og at elevene på tiende trinn bruker et moderat antall strategier i snitt. Dette viser altså at både elevene på femte trinn og tiende trinn kan forbedre sin fleksibilitet ved å lære seg flere strategier. I tillegg viser elevene i utvalget moderate tilpasningsevner. Det er viktig å nevne at av strategiene elevene bruker, så bruker de i all hovedsak retrievalstrategier. Dette er strategier som bygger på et fleksibelt strategilager (Ostad, 2010). Det vil si at selv om hovedvekten av elever ikke har brukt så mange strategier, har de hovedsakelig brukt strategier som kommer fra et fleksibelt kunnskapslager.

Forskning viser at elever som har lært standard algoritme er mindre tilbøyelig til å bruke andre strategier (Kamii et al., 1993). Resultatene viser at elevene på tiende trinn i større grad enn elevene på femte trinn bruker *mentalt bilde av standard algoritme* som strategi. Dette kan altså tyde på at dersom elever er bedre kjent med standard algoritme, så bruker de *mentalt bilde av standard algoritme* oftere som strategi i hoderegning. Samtidig brukte tiendetrinnseleven i stor grad andre strategier, og sammenlignet med de resterende strategiene ble *mentalt bilde av standard algoritme* brukt som strategi i liten grad. Det tyder altså ikke på at elevene som kjenner bedre til standard algoritme er mindre tilbøyelige til å bruke andre strategier. Årsaken til at standard algoritme blir brukt i hoderegning kan være tallforvirring, lært ufornuft eller krav til dokumentasjon (Haara, 2000). Elevene i utvalget var nødt til å forklare fremgangsmåten sin, og ble dermed bedt om å dokumentere utregningen. Dette kan dermed være grunnen til at *mentalt bilde av standard algoritme* ble brukt som strategi. Eller så kan det skyldes at elevene er mindre frie i hoderegningen når de blir bedt om å dokumentere utregningen eller at elevene strever med tallforvirring eller lært ufornuft. Utstrakt bruk av strategien *mentalt bilde av standard algoritme* kunne antydnet at elevene ikke hadde funksjonelle ferdigheter i hoderegning av divisjon, men elevene bruker altså ikke denne strategien i utstrakt grad og vi ser da altså ikke tegn på manglende funksjonelle ferdigheter.

Et aspekt som er interessant å se nærmere på, er hvorvidt det har skjedd en strategiutvikling fra femte til tiende trinn. Jeg har ikke undersøkt samme elevgruppe to ganger, men har undersøkt to ulike aldersgrupper på samme skole. Det vil dermed ikke være mulig å si noe om utviklingen til de enkelte elevene, men det er mulig å si noe om hvordan utviklingen kan antas å ha vært fra femte til tiende trinn, da elevgruppene som sammenlignes er veldig like, i og med at de kommer fra samme skole. Strategiutvikling deles inn i fire ulike kompetanser av Lemaire og Siegler (1995). I min undersøkelse har jeg undersøkt to av kompetansene de omtaler. Dette handler om hvilke strategier som er brukt, og når strategiene er brukt. Resultatene tyder på at det har skjedd en betydelig utvikling hos elevene. Tiendetrinnselevne har som nevnt fått til betydelig flere oppgaver enn det femtetrinnselevne har fått til. Dette tyder på at det har skjedd en utvikling fra femte trinn, til tiende trinn. Det er store likheter i frekvensen av de ulike strategiene, dette tyder på at elevene har utviklet, når de bruker strategiene, og er i stand til å anvende strategiene på flere oppgaver. I tillegg bruker elevene på tiende trinn strategiene som er forbundet med gjenkalling i større grad enn elevene på femte trinn. Dette tyder ifølge Lemaire og Siegler (1995) på en positiv strategiutvikling. Det er interessant at denne utviklingen har skjedd, uten at hoderegning av divisjon nevnes i læreplanen. Betyr dette at elevene oppdager strategiene selv ved at det har måttet dele mye uansett, eller gir lærerne elevene støtte i disse årene selv om læreplanen ikke sier noe om dette? Dette er noe man kan undersøke i videre forskning.

Strategiene som er knyttet til telling, altså *telling*, *gjentatt subtraksjon* og *gjentatt addisjon*, er brukt i liten grad på begge trinn. Dette tyder på at femtetrinnselevne allerede har godt utviklede strategievner. Lemaire og Siegler (1995) mener at dette er en type strategi man bruker til å begynne med, men at man går bort fra det når man lærer seg andre, bedre strategier. Oppsummert vil dette si at elevene på femte trinn allerede har utviklede strategikunnskaper og bruker gode strategier, og at på tiende trinn har elevene utviklet strategikunnskapene til å være i stand til å bruke de strategiene de kjenner til på flere og mer avanserte oppgaver.

(Heirdsfield et al., 1999b) trekker frem at *helhetlige* strategier, inkludert *prøving* og *feiling*, er mer fleksible strategier enn strategier som baserer seg på oppdeling av tall, som *deling* og *distributiv lov*. I artikkelen blir det konkludert med at elever bør øve mer på *helhetlige* strategier, *prøving* og *feiling*. Elevene i utvalget mitt bruker *deling* og *distributiv lov* betydelig

flere ganger enn *helhetlig og prøving og feiling*. Totalt sett er *helhetlig og prøving og feiling* bare brukt som strategi på 7 % av oppgavene som er regnet riktig. Til sammenligning er *deling og distributiv lov* brukt på 22 % av oppgavene som er regnet riktig. Det kan derfor se ut til at elevene i mitt utvalg også vil ha utbytte av å arbeide mer med strategiene *helhetlig og prøving og feiling*. Rathgeb-Schnierer og Green (2019) understreker at forskjellen på hoderegning og regning med standardiserte metoder i stor grad handler om hvorvidt man behandler tall som hele eller ikke. De fleste standardiserte metodene baserer seg på plassverdisystemet, hvor man behandler enere for seg, tiere for seg, og så videre. Mens i hoderegning, spesielt av flersifrede tall, bruker man mer komplekse metoder og behandler tallene som hele. Resultatene på elevenes tilpasningsdyktighet viste at de hadde dårligst tilpasningsevner på oppgaven hvor *helhetlig* var den mest egnede strategien. Dette er også med på å underbygge at dersom elevene skal øve på hoderegningstrategier, burde det fokuseres på *helhetlige* strategier.

For å oppsummere ser man at elevene på tiende trinn, jevnt over presterer bedre enn elevene på femte trinn. På forhånd var dette forventet. I følge læreplanen skal elevene på tiende trinn har arbeidet mer med hoderegning enn femtetrinnselevne (Utdanningsdirektoratet, 2020), i tillegg til at elevene gjennom fem år mest sannsynlig har opparbeidet seg mer matematikkunnskap og bedre tallforståelse gjennom øving på divisjon, hoderegning og andre aspekter ved matematikken. Funnene viser at elevene på femte trinn i noen grad har funksjonelle ferdigheter i hoderegning av divisjon, og at elever på tiende trinn i stor grad har funksjonelle ferdigheter i hoderegning av divisjon. Elevene på begge trinn bruker hovedsakelig retrievalstrategier. De bruker en god blanding av gjenkalling og strategier, og det ser ut til at det har skjedd en betydelig utvikling i hvilke oppgaver de ulike strategiene benyttes på. Samtidig viser elevene at fleksibiliteten deres kan utvikles. De bruker i snitt få eller et moderat antall strategier, i tillegg til at de tidvis viser dårlige tilpasningsevner. For å konkludere kan man si at elevene har funksjonelle ferdigheter i hoderegning av divisjon, som svarer til forventningene man kan ha til de ulike trinnene, men samtidig ser man at fleksibiliteten kan utvikles slik at ferdighetene deres blir enda bedre.

Oppfyller elevene det læreplanen sier?

Et av kompetansemålene på fjerde trinn sier at «elevene skal kunne utforske, bruke og beskrive ulike divisjonsstrategier» (Utdanningsdirektoratet, 2020), så elevene i mitt utvalg skal være i stand til dette. Dette er ikke nødvendigvis divisjonsstrategier knyttet til hoderegning, men det kan være det. Tidligere ble det nevnt at det er et skille mellom hoderegningsstrategier og standardiserte skriftlige metoder (Hartnett, 2007). Selv om det er et skille, er det naturligvis også mange likheter, og gjennom å arbeide med ulike skriftlige divisjonsstrategier er det nærliggende å anta at det har en positiv effekt på utviklingen av hoderegningsstrategier også. Resultatene viser at det bare er tre elever som ikke bruker noen strategier, og at 69 av 87 elever bruker to eller flere strategier. Dette viser at de aller fleste elevene på både femte og tiende trinn kan bruke, og beskrive flere divisjonsstrategier.

Hoderegning av divisjon er ikke nevnt eksplisitt i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020), men kompetansemålene som omhandler hoderegning viser til at det skal skje en progresjon. Dette betyr at elevene på tiende trinn, i større grad enn elevene på femte trinn, burde være i stand til å løse oppgavene i oppgavesettet, samt å kommunisere hvilke strategier de bruker. Resultatene viser at det er en tydelig forskjell på elevene i utvalget. På tiende trinn løste elevene 84 % av oppgavene riktig, mens på femte trinn løste elevene bare 36 % av oppgavene riktig. Dette viser altså tydelig at elevene på tiende trinn har utviklet betydelig bedre kompetanse i hoderegning av divisjon i hodet, sammenlignet med elevene på femte trinn. Kompetansemålet på åttende trinn som omhandler hoderegning sier at eleven skal kunne «utvikle og kommunisere strategier for hoderegning i utregninger», og resultatene tyder altså på at dette kompetansemålet er oppfylt av eleven i utvalget. Det kunne vært interessant og undersøkt nærmere hvor mye av elevenes prestasjoner henger sammen med å kommunisere strategier. Altså om det elevene strever mest med er å regne oppgavene i hodet, eller om det de strever mest med er å kommunisere hvordan de tenker.

Læreplanen legger stor vekt på strategier (Utdanningsdirektoratet, 2020). Utdypende vektlegges varierte regnestrategier, og effektive og hensiktsmessige strategier. Dette er det samme som fleksibilitet i matematikk, altså at man kjenner til flere ulike strategier, og evner å tilpasse de ulike strategiene og velge den strategien som er mest hensiktsmessig å bruke til de oppgavene man skal løse (Rathgeb-Schnierer & Green, 2019). I underveivurderingen på

fjerde og tiende trinn står det at elever viser kompetanse ved å bruke hensiktsmessige strategier i tillegg til å kommunisere tenkemåten sin. Dette betyr at alle elevene i utvalget skal være i stand til å velg effektive strategier, samt å kommunisere dem. Det er viktig å presisere at det i læreplanen ikke er snakk om strategier knyttet til hoderegning av divisjon, men at dette er et alternativ til hvordan man kan arbeide med dette. Resultatene viser at elevene i noen grad velger hensiktsmessige strategier. Som nevnt er det litt få resultater knyttet til akkurat dette, da oppgavesettet ikke er utarbeidet med en tanke om at dette skulle bli undersøkt. De resultatene som foreligger, tyder allikevel på at elevene velger hensiktsmessige strategier når de kjenner til de mest hensiktsmessige strategiene. Dette kan tyde på at elevene i stor grad er i stand til å velge hensiktsmessige strategier dersom de kjenner til strategiene, men det de trenger å arbeide mer med er å kjenne til og bruke flere strategier. Elevene evner også i noen grad å kommunisere tenkemåten sin, men dette er vanskelig å si noe utdypende om basert på mitt datamateriale. Dette er noe som ville vært interessant å undersøke videre, altså hvor gode er elever til å kommunisere tenkemåten sin.

Bør det fokuseres mer på hoderegning i divisjon?

Læreplanen nevner ikke eksplisitt at elever skal lære å regne divisjon i hodet (Utdanningsdirektoratet, 2020). Derfor er det relevant å stille spørsmålet om dette egentlig er noe man bør arbeide med i skolen og om det burde vært nevnt i læreplanen. Innledningsvis ble det nevnt flere grunner for at hoderegning er en viktig egenskap. Først og fremst er det en viktig hverdagsferdighet, for å gjøre raske utregning, samt å sjekke svar man får ved hjelp av kalkulator (Randriantsaralaza & Totohasina, 2018; Wigley, 1996). På bakgrunn av dette kan elever ha utbytte av å øve på hoderegning av divisjon. I tillegg til at dette fungerer hoderegning som en aktivering av hjernen som kan være med på å forlenge god hjernehelse (Randriantsaralaza & Totohasina, 2018). Divisjon er ofte ansett som den vanskeligste av regneartene, og det kan dermed tenkes at det vil aktivere hjernen i større grad enn hoderegning av de andre regneartene. Det vil da kunne ha en god effekt på elevenes hjernehelse å arbeide med hoderegning av divisjon.

Et annet argument for å arbeide med hoderegning av divisjon i skolen, handler om at man gjennom hoderegning kan lære og øve på andre aspekter ved matematikk. Hoderegning krever andre ferdigheter enn det regning med standardiserte fremgangsmåter gjør. Det krever en dypere forståelse for tall, og hvordan de samhandler (Hartnett, 2007), i tillegg til at

hoderegning ofte krever at man behandler tall som hele, og ikke regner ved hjelp av plassverdisystemet (Rathgeb-Schnierer & Green, 2019). Dette betyr at gjennom å fokusere på hoderegning vil elevene få en dypere forståelse av sammenhengen mellom tall, og spesifikt gjennom fokus på divisjon kan elevene få en dypere forståelse for hvordan divisjon fungerer og henger sammen. Dette vil være i tråd med det læreplanen sier om at elevene tidlig skal få et godt tallbegrep (Utdanningsdirektoratet, 2020). Kamii et al. (1993) legger vekt på at dersom elevene skal arbeide med hoderegning, burde dette skje gjennom utvikling av egne strategier

En matematikkgren man kan forbedre kunnskapene sin om, gjennom arbeid med hoderegning, er algebra. (Wigley, 1996). *Den distributive lov* er en av de algebraiske regnereglene, og elevene kan gjennom forståelse og bruk av denne loven i hoderegning, også forbedre sin forståelse for algebra. Resultatene viser at dette er den tredje mest brukte strategien på tiende trinn, og den fjerde mest brukte strategien på femte trinn. Dette tyder på at det er en av strategiene elevene er best kjent med. Samtidig er det en viktig strategi, som elevene kan få et godt utbytte av å være godt kjent med. Derfor kan det være lurt å fokusere på denne strategien i undervisningen, selv om elevene allerede viser kjennskap til den.

Som tidligere nevnt kan elevene i utvalget forbedre sin fleksibilitet. Dette kan blant annet skje ved å utvide strategirepertoaret. I tidligere forskning er det uenighet om elever helst skal oppdage og utvikle egne strategier, eller om de burde undervises i strategier. Swan og Sparrow (2001) og Kamii et al. (1993) mener at elever burde utvikle egne strategier. Ostad (2010) mener at elever som tydelig viser at de mangler strategier på et gitt område, burde undervises i strategier på det gitte området, mens Wigley (1996) mener at alle burde undervises i strategier, for å få tilgang til de mest avanserte strategiene. Kamii et al. (1993) mener at elevene utvikler bedre tallforståelse ved å utvikle egne strategier. Læreplanen legger stor vekt på strategier og strategiutvikling, men spesifiserer ikke om strategier er noe som skal læres, eller oppdages på egenhånd (Utdanningsdirektoratet, 2020). Dette kan tyde på at en kombinasjon av å la elevene oppdage strategier selv, og lære dem strategier kan være en god løsning. Gjennom å legge til rette for at elever kan oppdage strategier på egenhånd, samtidig som man overvåker hvilke strategier de oppdager, kan man sørge for at de lærer mer avanserte strategier om de mangler det. I tillegg kan man hjelpe de elevene som strever med å oppdage noen strategier i det hele tatt.

I alle delstater i Australia anbefaler australske styringsdokumenter at det skal fokuseres mer på hoderegning som en del av strategiutviklingen (Hartnett, 2007). I norsk læreplan nevnes strategier 31 ganger, og med dette legges det altså stor vekt på strategier og strategiutvikling også i norsk skole (Utdanningsdirektoratet, 2020). For å skape en variert og tilpasset undervisning kan man dermed inkludere arbeidet med hoderegningsstrategier som en del av strategiopplæringen. Lærere har altså god støtte i læreplanen for å jobbe med hoderegningsstrategier hvis de velger å også jobbe med *hoderegningsstrategier* der læreplanen nevner *strategier* generelt.

For å oppsummere finnes det altså flere grunner for at man kan arbeide med hoderegning av divisjon, selv om det ikke er nevnt eksplisitt i norsk læreplan. Først og fremst er hoderegning en viktig hverdagskunnskap som kan brukes til å gjøre raske utregninger, samt å sjekke svar man får når man bruker kalkulator (Randriantsaralaza & Totohasina, 2018; Wigley, 1996). I tillegg er det også god trening for hjernehelsen (Randriantsaralaza & Totohasina, 2018). Det kan også legge grunnlaget for god tallforståelse (Hartnett, 2007; Rathgeb-Schnierer & Green, 2019), og for forståelse av algebra (Wigley, 1996). Dersom elevene skal kunne gjennomføre raske utregninger av divisjon i hodet, samt kunne sjekke svarene kalkulatoren gir, er man nødt til å øve på hoderegning av divisjon. De andre egenskapene og kunnskapene man utvikler ved å arbeide med hoderegning av divisjon, er kunnskaper og egenskaper man kan utvikle på andre måter også, men å lære det gjennom arbeid med hoderegning av divisjon er et alternativ. Samtidig legger læreplanen stor vekt på strategier, og hoderegningsstrategier kan være en måte for elevene å arbeide med og å lære ulike strategier (Utdanningsdirektoratet, 2020). Med andre ord kan elevene ha utbytte av å arbeide med hoderegning av divisjon, og arbeide med hoderegning kan være med på å oppfylle ulike deler av læreplanen, men man må ikke fokusere på det i for stor grad.

Avslutning

I denne oppgaven har jeg sett nærmere på hvordan norske elever regner divisjon i hodet. Hensikten med oppgaven var å belyse problemstillingen min som spør om «*Hvordan regner et utvalg elever på femte og tiende trinn divisjonsoppgaver med positive heltall med null i rest, og er det forskjell mellom femte og tiendetrinnelevne i utvalget?*». For å belyse problemstillingen har jeg gjennomført hoderegningstester i fire femteklasser og to tiendeklasser, fordelt på to ulike grunnskoler. Forskningsspørsmålene har blitt brukt i analysen for å belyse problemstillingen, deretter har funnen blitt drøftet opp mot teori og tidligere forskning. I dette kapittelet vil jeg forsøke å konkludere og besvare problemstillingen min.

Konklusjon

Hovedfunnene viser at femtetrinnelevne i utvalget totalt sett løser få oppgaver og i snitt bruker få strategier. Tiendetrinnelevne får til flesteparten av oppgavene og bruker totalt sett et moderat antall strategier. Funnene viser at det er en jevn fordeling mellom gjenkalling og strategibruk når de løser oppgavene, dette blir ansett som to hovedaspekter ved hoderegning (Haara, 2006; Swan & Sparrow, 2001). Samtidig viser elevene god fleksibilitet ved at de bruker hovedsakelig retrievalstrategier, som er ansett som fleksible strategier fordi de ikke bygger på en oppskriftsmessig tilnærming (Ostad, 2010). Elevene benytter seg i størst grad av strategiene: *automatisk utregning, kjente sannheter, deling og distributive lov*. De benytter seg i minst grad av strategiene *mentalt bilde av standard algoritme, prøving og feiling, gjentatt subtraksjon og telling*. Når det kommer til tilpasningsevner viser elevene dette i varierende grad, avhengig av hvilke strategier som er ansett som mest egnet til de ulike oppgavene. Det ser ut til at elevene er tilpasningsdyktige når de løser oppgaver hvor det er en strategi de er godt kjent med som egner seg best.

Hovedfunnene antyder at elevene har utviklet sin hoderegningskompetanse i divisjon fra femte til tiende trinn, i samsvar med to av kompetansene ved strategiutvikling presentert av Lemaire og Siegler (1995). Elevene bruker i stor grad de samme strategiene, men tiendeklassingen har utvidet hvilke oppgaver de bruker strategiene på. Dette er også i samsvar med det læreplanen sier om at elevene på tiende trinn skal ha arbeidet mer med hoderegning og utvikling av strategier enn det femtetrinnelevne skal ha gjort (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det er altså forskjell i prestasjonene til elevene på femte trinn og elevene på tiende

trinn, men dette er forventet da tiendetrinnselevne har hatt fem år mer med matematikkundervisning, og øvd på både ferdigheter i hoderegning og divisjon. Basert på dette viser både femtetrinns- og tiendetrinnselevne moderate ferdigheter i hoderegning av divisjon. De fleste elevene bruker mer enn én strategi når de regner, og strategiene elevene bruker er i hovedsak retrievalstrategier. Samtidig kan elevene utvikle enda flere og bedre strategier. I tillegg til at de viser tidvis gode tilpasningsevner, kan også de fleksible evnene utvikles og forbedres.

I likhet med funnene fra (Heirdsfield et al., 1999b) sin studie, viser elevene i min studie lite bruk av *helhetlige* strategier. Dette er omtalt som en av de mest fleksible og anvendelige strategiene. Dette betyr at det er noe elevene kan ha utbytte av å arbeide mer med.

Kritisk blikk på arbeidet og videre forskning

Gjennom arbeidet med denne oppgaven har jeg gjort ulike erfaringer angående min egen studie og videre forskning. Årsaken til at jeg ønsket å undersøke elevers hoderegning av divisjon handlet om at dette er den regnearten det finnes minst forskning på (Robinson et al., 2006). Etter å ha fullført denne studien er hoderegning av divisjon noe jeg tenker det er interessant å forske mer på. Det var spennende å se hvilke strategier elevene brukte, og hvordan dette var forskjellig fra femte til tiende trinn. Kunnskap om dette kan gi informasjon om hvordan undervisningen i skolen kan og bør utvikles. Mangler ved studien, og ideer til videre forskning presenteres i de neste avsnittene.

En av svakhetene ved studien kan være at jeg laget et oppgavesett som skulle passe til både femte og tiende trinn. Da dette ble nevnt for noen av femteklassingene, så det ut til å ha en negativ effekt på motivasjonen til elevene. Dette ble ikke nevnt i noen av de andre femteklassene hvor hoderegningstesten ble gjennomført. Det kan tenkes at det i fremtidig forskning burde fokuseres på et enkelt trinn, eller at man lager ulike oppgavesett til de ulike trinnene. Samtidig fungerte hoderegningstestene godt da det ikke ble nevnt at femteklassingene skulle gjøre samme test som tiendeklassingene, og så lenge man i analysen tar hensyn til at man kan forvente bedre prestasjoner av tiendeklassingene sammenlignet med det man kan forvente av femteklassingene vil jeg påstå at det er gjennomførbart med samme oppgavesett til begge trinn.

Når man skal undersøke fleksibilitet handler det om å undersøke elevers kjennskap til strategier, samt elevers tilpasningsevner i arbeide med strategier (Rathgeb-Schnierer & Green, 2019). Gjennom arbeidet med denne studien erfarte jeg at det er vanskelig å undersøke både kjennskap til strategier og tilpasningsevne samtidig. Jeg lagde et oppgavesett som la til rette for å bruke flest mulig strategier. Under analysen erfarte jeg at det var interessant å undersøke elevenes tilpasningsevner i tillegg til hvor mange og hvilke strategier de brukte. Til videre forskning vil jeg anbefale å heller skreddersy en studie som kan undersøke elevers tilpasningsevner, istedenfor en studie som undersøker hvor mange strategier elevene kjenner til. Dette kan gjøres ved å lage oppgaver, hvor det tydelig er en strategi som utpeker seg som bedre egnet enn de resterende strategiene. Man kan også lage et hierarki med hvilke strategier som egner seg best, og dermed vurdere tilpasningsevne ved å se hvor langt oppe i hierarkiet elevene plukker strategier fra. I tillegg kan det være lurt å lage flere oppgaver hvor samme strategi egner seg best, men med ulik vanskelighetsgrad på oppgavene. Slik kan man undersøke om elevene er tilpasningsdyktige på oppgaver med den gitte strategien avhengig av vanskelighetsgrad på oppgaven. Årsaken til at elevene viser lav grad av tilpasningsevne på oppgave 14 (95: 19) kan skyldes at dette er en vanskelig oppgave.

Basert på at elevene i liten grad benytter seg av strategiene *helhetlig* og *prøving og feiling*, og at (Heirdsfield et al., 1999b) omtaler dette som strategier elever kan ha godt utbytte av å lære, kan det til videre forskning være interessant å se nærmere på hvorfor elever ikke bruker de strategiene mer enn det de gjør. I tillegg kan det på generell basis være interessant å se nærmere på hvorfor elevene bruker de strategiene de bruker. Dette kan for eksempel gjøres ved å intervjuere elevene mens de løser oppgavene. Dette kan gi mer detaljert informasjon om hvilke strategier elevene kjenner til, og tilpasningsevnen deres. Årsaken til at de ikke bruker strategier trenger ikke å henge sammen med at de ikke kjenner til strategien, det kan for eksempel handle om at elevene foretrekker å bruke andre strategier.

Opgavesamlingen jeg laget består bare av oppgaver uten kontekst. Dette er også noe man kan vurdere å endre i videre forskning. Læreplanen legger stor vekt på dybdelæring og det fokuseres i større grad på matematikk i praktiske situasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det kan dermed være interessant å se nærmere på hoderegning i forbindelse med oppgaver med kontekst. Hoderegning omtales som en ferdighet som man har utbytte av i hverdagssituasjoner når man har behov for å gjøre raske utregninger (Randriantsaralaza &

Totohasina, 2018; Wigley, 1996), og dette kan også være et argument for å fokusere på hoderegning forbundet med praktiske situasjoner.

Som tidligere nevnt kunne det også vært interessant å undersøke elevers evne til å kommunisere i matematikk. Denne studien fokuserer på elevbesvarelser og elevers løsningsstrategier. En viktig forutsetning for at elevene skulle være i stand til å løse oppgavesettet i denne studien, var at de har god evne til å kommunisere hvordan de tenker. Dette skal elevene ifølge læreplanen være i stand til (Utdanningsdirektoratet, 2020), og i hvilken grad elevene har besvart oppgavesettet, kan ha blitt påvirket av deres evne til å kommunisere hvilke strategier de har brukt. Det kunne derfor vært interessant å undersøke om elevene strever med å kommunisere egen tankemåte eller ikke. Dette kan bli undersøkt gjennom intervju med elever, hvor elevene løser ulike oppgaver. Ved at elevene både løser oppgavene og forklarer tankene sine i et intervju, kan strategiene deres synliggjøres på en bedre måte. På denne måten kan man fange opp strategier elevene selv ikke klarer å kommunisere, og man får et bilde av hvordan elever evner å kommunisere i matematikk.

Videre forskning kan også undersøke hvordan strategiutvikling skjer i skolen. Studien min viser at det er forskjell i femte-og tiendeklassingenes bruk av strategier. Dette tyder på at det har skjedd en utvikling. Studien min sier ikke noe om hvordan dette har skjedd, altså om elevene har utviklet strategier på egen hånd, eller om lærerne har undervist elevene om ulike strategier. Dette kan man blant annet undersøke ved å intervju lærere om hvordan de oppfyller det læreplanen sier om strategiutvikling hos elevene.

Den mest ambisiøse, men kanskje også mest interessante forskningen man kan gjøre basert på denne studien er å finne ut av om det å trene forskjellige hoderegningstrategier i divisjon vil gi forståelse av andre sider av matematikken, spesielt algebra. Hva slags algebrakunnskap trengs for effektiv divisjonshoderegning, og kan divisjonshoderegning støtte opp om elevenes algebraforståelse?

Jeg håper en fremtidig masterstudent kan bli inspirert av å lese noen av disse forslagene til fremtidig forskning, for jeg synes tematikken og metoden egnet seg godt til en masteroppgave.

Litteraturliste

- Backe-Hansen, E. (2009, 01.09.2009). *Barn*. De nasjonale forsknisketiske komiteene. Hentet 13.01 fra <https://www.forskningsetikk.no/ressurser/fbib/bestemte-grupper/barn/>
- Bryman, A. (2016). *Social Reaserch Methods* (5. . utg.). Oxford University Press.
- Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. & Bell, R. C. (2011). *Research methods in education* (7th. utg.). Routledge.
- Dalland, C. & Andersson-Bakken, E. (2021). *Metoder i klasseromsforskning : forskningsdesign, datainnsamling og analyse*. Universitetsforlaget.
- Ding, Y., Liu, R.-D., Xu, L., Wang, J. & Zhang, D. (2017). Working memory load and autimaticity in relation to mental multiplication. *The Journal of Educational Reaserch*, 110(5), 554-564. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1080/00220671.2016.1149794>
- Erdem, E. (2017). Mental Computation: Evidence from Fifth Graders. *International journal of science and mathematics education*, 15(6), 1157-1174. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9722-1>
- Guba, E. G. & Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. *Handbook of qualitative research*, 2(163-194), 105.
- Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.(MERGA-30). I,
- Heirdsfield, A. M., Cooper, T. J. & Irons, C. J. (1999a). *Traditional Pen-and-Paper vs. Mental Approaches to Computation: The Lesson of Adrian*. The Proceedings of the Australian Associataion for Reaserch in Educational Conference, Melbourne, Australia.
- Heirdsfield, A. M., Cooper, T. J., Mulligan, J. & Irons, C. J. (1999b). *Children's mental multiplication and division strategies* Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference, Haifa, Israel.
- Hickendorff, M., Putten, C. M. v., Verhelst, N. D. & Heiser, W. J. (2010). Individual Differneces in Strategy Use on Division Problems: Mental Versus Written Computation. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 438-452. <https://doi.org/10.1037/a0018177>
- Haara, F. O. (2000). Hoderegning og valg av arbeidsmetode ved elementære utregninger i addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 8(2), 33-51.
- Haara, F. O. (2006). Valg av hoderegning som metode. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 11(2), 53-69. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/11_2_053070_haara.pdf
- Kamii, C., Lewis, B. A. & Livingston, S. J. (1993). PRIMARY ARITHMETIC: CHILDREN INVENTING THEIR OWN PROCEDURES. *The Arithmetic teacher*, 41(4), 200-203. <https://doi.org/10.5951/AT.41.4.0200>
- Lemaire, P. & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: contributions to children's learning of multiplication. *Journal of experimental psychology: General*, 124(1), 83.

- Lemonidis, C., Tsakiridou, H., Panou, F. & Griva, E. (2014). Prospective teacher's efficiency and flexibility in prep and mental calculation of two-digit multiplications. *MENON: Journal of Educational Research, Thematic Issue(1)*, 110-125. https://www.researchgate.net/publication/271864982_Prospective_teacher's_efficiency_and_flexibility_in_prep_and_mental_calculation_of_two-digit_multiplications
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. sage.
- Lucangeli, D., Tressoldi, P. E., Bendotti, M., Bonanomi, M. & Siegel, L. S. (2010). Effective strategies for mental and written arithmetic calculation from the third to the fifth grade. *An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 23(5), 507-520. <https://doi.org/https://doi.org/10.1080/0144341032000123769>
- Moser, H. E. (1953). Developing the Ability to Comute Mentally *The Journal of Educational Reaserch*, 136(3), 79-82. <https://www.jstor.org/stable/42748740>
- Månsson, A. (2022, February). *Categorization reliability of teacher students' use of mental computation addition strategies on natural numbers using written test*. Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Bozen-Bolzano, Italy. <https://hal.science/hal-03746623v2>
- Newman, S. D. (2016). Does finger sense predict addition performance? *Cognitive processing*, 17, 139-146.
- Ostad, S. A. (2010). *Matematikkvansker : en forskningsbasert tilnærming*. Unipub.
- Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblick - Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Høyskoleforlaget.
- Randriantsaralaza, S. R. & Totohasina, A. (2018). Learning and teaching of mental computation: using a schematization of mental multiplication and analysis of learners' productions using IRM. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*, 3(10), 382-391.
- Rathgeb-Schnierer, E. & Green, M. G. (2019). Developing flexibility in mental calculation. *Educação & Realidade*, 44. <https://doi.org/https://doi.org/https://doi.org/10.1590/2175-623687078>
- Robinson, K. M., Arbuthnott, K. D., Rose, D., McCarron, M. C., Globa, C. A. & Phonexay, S. D. (2006). Stability and change in children's division strategies. *J Exp Child Psychol*, 93(3), 224-238. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2005.09.002>
- Sikt. (2023a). *Barnehage- og skoleforskning*. Sikt - Kunnskapssektorens tjenesteleverandør. Hentet 1. mai fra <https://sikt.no/barnehage-og-skoleforskning>
- Sikt. (2023b, 30.01.23). *Meldeskjema for personopplysninger i forskning*. Sikt - Kunnskapssektorens tjenesteleverandør. <https://sikt.no/fylle-ut-meldeskjema-personopplysninger>
- Swan, P. & Sparrow, L. (2001). Strategies for going mental. *The Australian Association of Mathematics Teachers Inc.*, 236.
- Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2009). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *ZDM*, 41(5), 581-590. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0187-3>
- Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob>

Wigley, A. (1996, 24th May). Last chant for times tables. *Tes Magazine*
<https://www.tes.com/magazine/archive/last-chant-times-tables>

Vedlegg 1 – Hoderegningstesten

Hoderegningstest

Gjør så mange oppgaver du rekker. Når du er ferdig, rekker du opp hånden.

Slik løser du oppgavene:

1. Regn ut svaret i hodet. Du skal ikke skrive noe når du gjør dette.
2. Skriv ned svaret på arket.
3. Forklar matematisk hvordan du regnet oppgaven i hodet. Nå skal du skrive på arket.

Oppgave 1

$$78 : 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Forklaring: _____

Oppgave 2

$$20 : 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Forklaring: _____

Oppgave 3

$$24 : 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Forklaring: _____

Oppgave 4

$$100 : 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Forklaring: _____

Oppgave 5

$240 : 5 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 6

$450 : 6 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 7

$346 : 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 8

$112 : 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 9

$81 : 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 10

$2000 : 5 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 11

$96 : 8 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 12

$666 : 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 13

$81 : 27 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 14

$95 : 19 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 15

$630 : 9 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 16

$64 : 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 17

$440 : 8 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 18

$228 : 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Oppgave 19

$504 : 63 = \underline{\hspace{2cm}}$

Forklaring: _____

Refleksjonsspørsmål:

4. Hva synes du er utfordrende med å regne divisjon i hodet?

5. Hvilket av divisjonsstykkene du akkurat har regnet synes du var vanskeligst, og hvorfor?

6. Bruker du din kunnskap om multiplikasjon når du regner divisjon i hodet?

Vil du delta i forskningsprosjektet

Hoderegning i divisjon på 5. og 10. trinn

Dette er et spørsmål til deg, og ditt barn, om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på hvordan elever i 5. og 10. trinn regner divisjon i hodet. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg og ditt barn.

Formål

Formålet med prosjektet er å se nærmere på hvordan elever på ulike trinn regner divisjon i hodet. Jeg ønsker å undersøke hvor fleksible elever er når de regner divisjon i hodet. Med andre ord, hvor mange ulike strategier de bruker når de regner divisjon i hodet.

Datamaterialet jeg henter inn skal brukes i forbindelse med min masteroppgave i matematikdidaktikk ved grunnskolelærerutdanningen på OsloMet.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

OsloMet (Oslo Metropolitan University – storbyuniversitetet) er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Jeg skal undersøke 5. og 10. trinns elevers hoderegning. Derfor har jeg kontaktet ulike grunnskoler jeg har kjennskap til. Ditt barn går på en av skolene som har takket ja til å være med i prosjektet mitt, og dermed får du spørsmål om ditt barn vil delta.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å la barnet ditt delta i prosjektet innebærer det at du gir tillatelse til at ditt barn kan delta på en hoderegningstest. Det vil ta cirka 45 minutter og gjennomføres sammen med de andre elevene i klassen som takker ja til å delta. Testen består av ulike divisjonsoppgaver som eleven skal regne i hodet, for så skrive ned hvordan eleven tenkte inni hodet. Testene gjennomføres anonymt.

Dersom du som foresatt ønsker å se hvordan testen ser ut, er det mulig å ta kontakt med meg på forhånd.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det

vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta, eller senere velger å trekke deg. Hvis du ønsker å trekke samtykket kan du ta kontakt med meg (Marianne Aasland), på mail (s334617@oslomet.no) eller på telefon (40452408).

Dersom du ikke ønsker at ditt barn skal delta vil eleven få utdelt samme test som resten av klassen, slik at opplæringen er tilsvarende de andre elevene i klassen, men jeg vil ikke samle inn elevens besvarelse.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Tester og samtykkeskjemaer vil aldri oppbevares sammen. Samtykkeskjemaer vil oppbevares i et låst skap, og vil bli makulert så fort testene er gjennomført og samtykkeskjemaene ikke lenger trengs. Det vil kun være meg, Marianne Aasland, masterstudent som vil ha tilgang til samtykkeskjemaene.

Testene gjennomføres anonymt. Dette innebærer at testene gjennomføres uten å knyttes til navn, og det vil ikke være mulig å koble tester til enkelte elever.

Dersom svar fra testene skal gjengis i masteroppgaven vil de omskrives eller digitaliseres slik at håndskrift ikke vil være gjenkjennelig.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?

Prosjektet vil etter planen avsluttes 19. juni. Samtykkeerklæringene vil makuleres etter at testene er gjennomført. Testene vil makuleres ved prosjektets avslutning.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra OsloMet har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- OsloMet ved Marianne Aasland på epost s334617@oslomet.no eller på telefon [redacted] eller veileder Anders Månsson på epost [redacted] eller på telefon: [redacted]

- Vårt personvernombud: Ingrid Jacobsen på epost [redacted] eller på telefon: [redacted]

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Anders Månsson
(Forsker/veileder)

Marianne Aasland
(masterstudent)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Hoderegning i divisjon på 5. og 10. trinn*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- at _____ (navn på elev) deltar i en hoderegningstest på 45 minutter.

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

(Signert av en av prosjektdeltakers foresatte, dato)

Vedlegg 3 – Godkjenning fra Sikt



[Meldeskjema](#) / [Hoderegning i multiplikasjon og divisjon på 5. og 10. trinn](#) / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer
165366

Vurderingstype
Standard

Dato
26.01.2023

Prosjektittel

Hoderegning i multiplikasjon og divisjon på 5. og 10. trinn

Behandlingsansvarlig institusjon

OsloMet – storbyuniversitetet / Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier / Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Prosjektansvarlig

Anders Månsson

Student

Marianne Aasland

Prosjektperiode

01.01.2023 - 19.06.2023

Kategorier personopplysninger

Alminnelige

Lovlig grunnlag

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 19.06.2023.

[Meldeskjema](#)

Kommentar

OM VURDERINGEN

Sikt har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

FORELDRE SAMTYKKER FOR BARN

Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

Vi har vurdert at du har lovlig grunnlag til å behandle personopplysningene, men husk at det er institusjonen du er ansatt/student ved som avgjør hvilke databehandlere du kan bruke og hvordan du må lagre og sikre data i ditt prosjekt. Husk å bruke leverandører som din institusjon har avtale med (f.eks. ved skylagring, nettspørreskjema, videosamtale el.)

Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1 f) og sikkerhet (art. 32).

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Se våre nettsider om hvilke endringer du må melde: <https://sikt.no/melde-endringer-i-meldeskjema>

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 4 – Risikovurdering av personopplysninger

Risikovurdering av personopplysninger		
Virksomhet: OsloMet	Avdeling: GFU, Matematikkseksjonen	
Tjeneste-/systemeier (risikoeier):	Telefon/epost:	
Hva er risikovurdert: Datamateriale til Masteroppgave	Hva er lagret hvor (personopplysninger): I et låst skap.	
Vurdert av: Marianne Aasland	Avdeling: GFU, Matematikkseksjonen	Telefon/epost: S334617@oslomet.no , 40452408
Dato: Januar 2023		

Forhold (uønsket hendelse) som er vurdert		Betydning for	Risikonivå (L,M,H)	Nødvendig med tiltak (Ja/Nei)									
Legg til de forhold som er vurdert. Hendelse 1 til 6 er eksempler som kan endres.		Sett kryss	Sannsynlighet (horisontalt) Konsekvens (vertikalt) Sett ett kryss.										
1	Noen bryter seg inn i låst skap med samtykkeskjemaer.	<input checked="" type="checkbox"/> _Konfidensialitet <input type="checkbox"/> _Integritet <input type="checkbox"/> _Tilgjengelighet	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	x									Ja
x													

Beskrivelse av tiltak (I prioritert rekkefølge. Føy til flere linjer ved behov)		Ref. linjenummer over	Betydning/Kommentar
1	Bruker hengelås med firesifret kode.	1	Det vil være vanskelig å bryte seg inn i skapet, og sannsynlighet for innbrudd senkes.