MASTEROPPGAVE

M5GLU

August 2022

Diagnostisk undervisning i brøk på 9. trinn

Diagnostic teaching in fractions in the 9th grade

Vitenskapelig masteroppgave

30 stp oppgave

Hege Carina Brodal Holmstrøm

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Sammendrag

Formålet med denne studien har vært å undersøke hvilke misoppfatninger knyttet til brøk som kan forekomme på 9. trinn, og hvordan en diagnostisk prøve om brøk kan brukes i undervisningen. 98 elever på 9.trinn utførte en diagnostisk prøve i brøk i november 2021, og datamaterialet i denne studien består av alle besvarelsene til denne prøven og seks intervjuer, med fire elever og to lærere. Grunnlaget for oppgavens resultater bygger på prøvebesvarelsene, samt elevene og lærernes opplevelser, refleksjoner og erfaringer rundt prøven og det aktuelle temaet. Oppgaven tar for seg faktorer som knytter seg til bruken av diagnostiske prøver i planlegging av undervisning, som misoppfatninger, brøk og påvirkning av motivasjon hos elevene.

For å undersøke dette har jeg benyttet meg av flere metoder. Studien er hovedsakelig en kvalitativ studie, men jeg har også benyttet kvantitativ metode i form av en test. Lærere og elever ble intervjuet individuelt med en semistrukturert tilnærming. Testresultatene ble delt inn i de ulike klassene, deretter sortert etter riktige svar, mulige misoppfatninger, andre ulike feil og ikke besvart. Intervjuene ble transkribert, deretter analysert med Kristi Malterud sin fire-stegs modell for analyse av meningsinnhold (Christoffersen & Johannessen, 2012). Jeg har forsøkt å integrere resultatene fra begge undersøkelsene, som Grønmo (2016) mener er en forutsetning hvis man skal ha best mulig utbytte av å benytte flere metoder.

Resultatene fra den diagnostiske prøven viser at misoppfatninger knyttet til brøk er utbredt blant de 98 elevene. Misoppfatningen «tar ikke hensyn til helheten (eller misforstår den)» skilte seg ut som den misoppfatningen flest av elevene er i. Brøkbegrepet er komplekst og intervjuene fikk frem at elevene hadde utfordringer med å beherske alle aspektene innen brøk. Lærerne ga uttrykk for at diagnostisk undervisning var et godt verktøy for å kartlegge elevenes kompetanse og tilpasse videre undervisning for hver enkelt elev. Til tross for dette var lærerne kritisk til hvor tidkrevende diagnostisk undervisning kan være og de var også bekymret for at diagnostisk undervisning kan svekke elevers motivasjon i matematikk.

Abstract

The purpose of this study has been to investigate which misconceptions related to fractions that can occur in the 9th grade, and how a diagnostic test about fractions can be used in teaching. 98 students in 9th grade performed a diagnostic test in fractions in November 2021, and the data material in this study consists of all the answers to this test and six interviews, with four students and two teachers. The basis for the results of this study is based on the test answers, as well as the students' and teachers' experiences and reflections around the test and the relevant topic. The thesis addresses factors related to the use of diagnostic tests in the planning of teaching, misconceptions, fractions, and the influence of students' motivation.

To investigate this, I have used several methods. The study is mainly a qualitative study, but I have also used a quantitative method in the form of a test. Teachers and students were interviewed individually using a semi-structured approach. The test results were divided into the different classes, then sorted by correct answers, possible misconceptions, other different errors and not answered. The interviews were transcribed, then analysed with Kristi Malterud's four-step model for analysis of meaning content (Christoffersen & Johannessen, 2012). I tried to integrate the results from both surveys, which Grønmo (2016) believes is a prerequisite if one is to have the best possible benefit from using mixeds methods.

The results from the diagnostic test show that misconceptions related to fractions are widespread among the 98 students. The misconception «does not take the whole into account (or misunderstands it)» stood out as the misconception most of the students have. The concept of fractions is complex, and the interviews revealed that the students had challenges mastering all aspects of fractions. The teachers expressed that diagnostic teaching was a good tool for mapping the pupils' competence and adapting further teaching for each individual pupil. Despite this, the teachers were critical of how time-consuming diagnostic teaching can be and they were also concerned that diagnostic teaching could weaken pupils' motivation in mathematics.

Forord

Denne masteroppgaven er det synlige resultatet av fem år på grunnskolelærerutdanningen på OsloMet. På de fem årene har jeg møtt utrolig mange fine mennesker, som på hver sin måte har vært med på å gjøre denne tiden til en tid jeg kommer til å savne. Jeg har hatt så mange «aha» øyeblikk i løpet av disse årene takket være dyktige forelesere, inspirerende praksislærere og gode medstudenter. De har fått meg til å like læreryrket enda mer nå enn da jeg startet. Det har vært noen veldig spennende og ikke minst lærerike år, men det har også til tider vært krevende. To barn og jobb ved siden av studiene gjør hverdagen hektisk, og det har vært mange sene kvelder med oppgaveskriving etter at barna har lagt seg. Målet har hele tiden vært å levere til frist, men denne gangen gikk det ikke. Vårsemesteret ble ikke helt slik som jeg planla, timene på lesesalen ble byttet ut med timer med cellegift, og det ble dermed vanskelig å levere til fristen i mai. Sommeren har også vært preget av ukentlig cellegiftkurer, men takket være en fantastisk samboer som har vært uvurderlig, har jeg nå endelig ferdigstilt denne oppgaven. Jeg hadde ikke klart det uten deg.

Tusen takk til veilederen min, Arne Hole, for uvurderlig støtte, gode råd og fortløpende tilbakemeldinger både i og utenom arbeidstid.

Takk også til mine informanter som gjorde denne oppgaven mulig.

Jeg gleder meg til å starte som lærer, selv om det helt sikkert blir utfordrende med mye nytt i starten. Uansett ønsker jeg den hektiske hverdagen velkommen tilbake.

Oslo, 8. august 2022

Hege Carina Brodal Holmstrøm

Innholdsfortegnelse

Oversikt over figurer og tabeller

1 Innledning

I Norge oppgir en stor del av den voksne befolkningen at de har bruk for matematikk i hverdagen og i arbeidslivet (Ianke & Størset, 2015). Faglige resultater i utdanningen påvirker elevene videre i voksenlivet, og forskning viser at lese- og regneferdigheter påvirker hvor engasjert man er i sosiale aktiviteter slik som politiske eller frivillige verv. Det påvirker også muligheten for å få fast jobb, lønnsnivå og psykisk og fysisk helse (Bynner & Parsons, 2006). Elevers opplevelser i løpet av skolegangen og deres læringsutbytte har stor betydning for resten av deres liv, og læreplanen uttrykker at lærere og skolen skal gjøre sitt ytterste for å hjelpe elever med å legge grunnlaget for et best mulig liv gjennom sosial og faglig læring (Kunnskapsdepartementet, 2017).

Gjennom å være til stede, følge med og observere har man som lærer mulighet til å forstå hvor skoen trykker for hver enkelt elev. Noen elever trenger mest sosial støtte, mens andre elever trenger mer faglig støtte. Innen det faglige, nærmere bestemt matematikk, viser resultater fra undersøkelser de siste tiårene at norske elever har særlige utfordringer med tall og algebra (Grønmo et al., 2004; Grønmo & Hole, 2017; Grønmo et al., 2016; Grønmo et al., 2015; Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo et al., 2012; Grønmo et al., 2010; Kaarstein et al., 2020). I den nye læreplanen i matematikk er tall og algebra sentrale begreper innen matematiske kunnskapsområder, som er ett av seks kjerneelementer som skal gjennomsyre matematikkundervisningen i norske klasserom (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Det er viktig å undersøke de bakenforliggende årsakene til elevers utfordringer, og elevers brøkforståelse er av stor betydning for deres ferdigheter innen emnene tall og algebra (Siegler et al., 2012). Brøkbegrepet er et komplekst begrep med flere ulike aspekter, noe som kan gjøre det utfordrende for elever å beherske brøk (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det er derfor interessant å se på hva elever trenger hjelp med for å utvikle en god forståelse for brøkbegrepet, og hvordan kartlegging av dette kan brukes til å planlegge undervisning.

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Når jeg gikk på ungdomsskolen, var lærer det siste jeg tenkte jeg ville bli. Skole var kjedelig, og jeg ville ikke tilbringe ett sekund lengre der enn det jeg trengte. Jeg søkte meg inn på frisørlinjen, en kort utdanning slik at jeg slapp å bruke mange år til på skolebenken. Jeg fikk tre og fire i de fleste fag på ungdomskolen og jeg syntes at norsk, engelsk og samfunnsfag var urettferdige fag som jeg ikke fikk til, og jeg trodde lærerne ga karaterer basert på hvem de likte best. Jeg fikk alltid dårlig. Men i matematikken der fikk jeg det alltid til, der fikk jeg femmere og seksere. Det var så greit med matematikken, det ga mening og det var en fasit. Men jeg har senere skjønt at for mange gir det ikke alltid mening.

Jeg har jobbet 16 år i frisørsalong. Når man kommer til en frisørsalong og farger håret så skriver frisøren fargen som blir brukt inn i et datasystem, slik at du som kunde skal få mulighet til å få den samme fargen igjen en annen gang. Når jeg skrev inn en farger på kunder skrev jeg opp fargeblandingen med brøk, eks: $\frac{1}{5}$ rød, $\frac{1}{5}$ blå og $\frac{3}{5}$ brun. Det som ofte skjedde hvis det var en annen frisør som hadde kunden neste gang var at de ikke skjønte hvordan de skulle gjøre dette om til hvor mange gram av hver farge de måtte ha. Dette gjelder selvfølgelig ikke alle frisører, men overaskende mange jeg har jobbet med har gitt utrykk for at de synes dette er noe av det vanskeligste med matematikk. Jeg lurer derfor på hva det er som er så vanskelig med brøk? Hva er det som gjør det så fremmed for mange? Hvorfor er det noen som ikke klarer å se størrelsesforholdene og overføre dette til mengde? Handler dette om misoppfatninger som aldri har blitt tatt tak i? Jeg gikk på ungdomskolen sent 1990-tallet, og i senere tid har det vært økt fokus på tilpasset opplæring. Kanskje søkelyset på enkelteleven har vært med på å oppdage misoppfatninger tidligere enn før. Men det finnes fortsatt misoppfatninger innenfor brøk, så hvordan kan man oppdage misoppfatningene og på best mulig måte klare opp i dem uten at man henger ut enkelte elever?

Jeg har tidligere erfart at elever på mellomtrinnet har misoppfatninger knyttet til brøk, og det er interessant å undersøke om elever på ungdomskolen også har disse misoppfatningene, eller om dette er noe de «vokser av seg». Mye i matematikken handler om forståelse, som igjen handler om modning, og det er interessant å se om dette kan gjelde misoppfatninger knyttet til brøk også.

2 Problemstilling og forskningsspørsmål

I dette kapittelet vil jeg presentere oppgavens problemstilling og legge frem de aktuelle forskningsspørsmålene. Problemstillingen for denne oppgaven er:

Hvilke misoppfatninger knyttet til brøk kan man finne blant elever på 9. trinn, og hvordan kan en diagnostisk prøve om brøk på dette trinnet brukes i undervisningen?

Gjennom en diagnostisk prøve ønsker jeg å kartlegge mulige misoppfatninger elever på 9. trinn har innen brøk. I tillegg vil jeg intervjue et utvalg elever for å få en dypere innsikt i deres brøkforståelse og mulige misoppfatninger, samt få kjennskap til deres motivasjon knyttet til matematikkfaget og brøk. Jeg ønsker også å intervjue to lærere for å høre hva lærere tenker om diagnostiske prøver og hvordan dette kan brukes i videre undervisning.

For å besvare problemstillingen min best mulig har jeg formulert to forskningsspørsmål som er med på å synliggjøre eventuelle utfordringer og elever og læreres tanker rundt diagnostisk undervisning og brøk. Forskningsspørsmålene er:

1. *Hvilke tanker har elever og lærere på ungdomstrinnet rundt brøkregning og diagnostisk undervisning?*
2. *Hvilke utfordringer kan lærere oppleve ved å bruke en diagnostisk prøve til å planlegge fremtidig undervisning?*

3 Teoretisk rammeverk

I dette kapittelet presenteres tidligere forskning og relevant teori. I denne oppgaven legger teori knyttet til brøkbegrepet, dets kompleksitet og mulige misoppfatninger i brøk, et viktig grunnlag. Teorikapittelet tar også for seg læreplanen og begrepet forståelse. Til slutt presenteres teori som er relevant for planlegging av undervisning, som tilpasset opplæring, vurdering og motivasjon.

3.1 Tidligere undersøkelser om misoppfatninger knyttet til brøk i Norge

Bård Vinje (2019) utførte en kvantitativ studie i 2019 av 739 elever sine misoppfatninger knyttet til brøk på mellomtrinnet. Hensikten med studien var blant annet å undersøke hvor utbredt tegn på misoppfatninger tilknyttet brøk var hos et utvalg elever på mellomtrinnet. Studien indikerer at misoppfatninger knyttet til brøk er svært vanlig, omtrent 50% av elevene som deltok i studien er i én eller flere misoppfatninger, og da er da er det å være i en misoppfatning definert som at elevene viser samme feiltenkning i flere oppgaver. Fire av de fem misoppfatningene som er undersøkt, har en utbredelse på mer enn 10 %. Studien tyder på at enkelte misoppfatninger virker mer grunnleggende enn andre (Vinje, 2019).

En annen kvantitativ studie som omhandler elevers misoppfatninger knyttet til brøk, er Elisabeth Refvem Kuvåssæters (2021) studie om elever som starter på videregående skole og deres brøkforståelse og holdninger til matematikk. Det var 233 elever, fra yrkesfag og studiespesialiserende studieretninger (1P-Y, 1P og 1T), som gjennomførte en undersøkelse i 2021. Også i denne studien er misoppfatning definert som at elevene viser samme feiltenkning i flere oppgaver. Undersøkelsen viser at det er en del misoppfatninger rundt brøk som henger ingen, selv etter ti år med skolegang. Det var tydeligst tegn til mulig misoppfatning på oppgavene som omhandlet brøk som måling, innenfor denne avgrensingen var de to vanligste misoppfattelsene *«brøkstreken er lik komma»* og *«differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken»* (Kuvåssæter, 2021).

3.2 Læreplanen og internasjonale undersøkelser

Den nye og gjeldende læreplanen trådte i kraft fra august 2020. Læreplanen inneholder elementer av brøk i kompetansemålene og diagnostisk undervisning i forbindelse med vurdering og tilpasset opplæring (Kunnskapsdepartementet, 2019).

I prinsippene for skolens praksis i overordnet del av læreplanen påpekes det at prøving og feiling kan være en fin kilde til læring, noe som er sentralt i forbindelse med diagnostiske oppgaver og misoppfatninger (Kunnskapsdepartementet, 2017). Det kommer også tydelig frem under prinsippene for skolens praksis at vurdering av elevene skal bidra til utvikling og læring for elevene. Kartlegging og observasjon av elever ansees som et godt verktøy i vurderingen av elever (Kunnskapsdepartementet, 2017). Dette samsvarer godt med diagnostiske oppgaver i brøk, som er kartlegging og observasjon av elevene der formålet er å bruke elevers misoppfatninger til å utvikle elevers forståelse for brøk (Brekke, 2002). God vurdering for å sikre utvikling og læring er viktig i forbindelse med tilpasset opplæring, og ved en diagnostisk prøve kan man som lærer finne ut hvilke misoppfatninger hver enkelt elev er i (Brekke, 2002; Kunnskapsdepartementet, 2017).

I læreplanen i matematikk er brøk eksplisitt synlig fra femtetrinn. I kompetansemålene for trinnene før femtetrinn lærer elever om heltall, men noe av det som blir gjennomgått er relevant for brøkregningen som kommer. De to første skoleårene introduseres elevene for tallinje, som er sentralt i forbindelse med brøkregning (Kunnskapsdepartementet, 2019; Lamon, 2012; Petit et al., 2015). I kompetansemålene for tredje- og fjerdetrinn står det at elevene skal bruke ulike måleenheter, beskrive sammenligninger av størrelser og utforske divisjon, både delings- og målingsdivisjon, som også er relevant for brøkforståelse (Kunnskapsdepartementet, 2019). Fra og med femtetrinn møter elevene brøkbegrepet og alle de ulike aspektene av brøk, som utdypes senere i dette kapittelet. I tillegg skal elevene lære ulike representasjonsformer brøk kan ha (Kunnskapsdepartementet, 2019).

TIMSS er den internasjonale undersøkelsen som er tettest koblet til læreplanen, og undersøkelsen viser at det har vært en positiv utvikling i matematikk de senere årene blant norske elever frem til 2015 (Bergem et al., 2016). Rapporten fra TIMSS 2019 viser imidlertid at Norge har hatt en tilbakegang på ungdomstrinnet fra 2015 til 2019 (Kaarstein et al., 2020). På 5. trinn skårer norske elever svakest på det sentrale emneområdet tall, som handler om å beherske de fire regneartene, brøk og desimaltall (Grønmo et al., 2015; Kaarstein et al., 2020). Mens på 9. og 13. trinn er det emneområdet algebra som elevene skårer dårligst på (Grønmo et al., 2016; Kaarstein et al., 2020). Siegler og flere kolleger (2012) har undersøkt hvilke variabler som best predikerer prestasjoner i matematikk. Funn viser at kunnskaper innen brøk er den variabelen som best predikerer 16-åringers kunnskaper om algebra og matematikk generelt enn andre matematiske områder. Divisjon er den variabelen som kommer nærmest brøk, og emne divisjon er nært knyttet til brøk. På dette grunnlaget kan man si at de svake prestasjonene til norske elevene på 9. og 13. trinn innen algebra, kan ha en sammenheng med de svake prestasjonene innenfor emneområdet tall på 5. trinn, og emnet brøk er sentralt for begge områdene.

3.3 Hva er brøk?

Brøk har stor betydning i det daglige liv. Forståelsen av brøk elevene tar med seg fra skolegangen vil påvirke elevene videre ut i yrkeslivet og samfunnet. I tillegg til å påvirke elevenes fremtid vil elevenes forståelse av brøk spille inn på elevenes holdninger til matematikk og deres motivasjon i faget (Lamon, 2012). Lamon (2012) skriver at hvordan brøk påvirker elevene avgjøres av om brøk er noe som gjøres eller noe som forstås. Videre i dette kapittelet gjøres det rede for brøk og undervisning i brøk for å tydeliggjøre hvilken forståelse av brøk og undervisning i brøk denne oppgaven baserer seg på.

I denne oppgaven tas det utgangspunkt i den skolematematiske definisjonen av brøk. I skolematematikken er brøk definert som et relativt begrep som omfatter alle tall som kan skrives på formen, der a og b er hele tall og $b \neq 0$, men matematisk sett kan man snakke om brøker også i andre sammenhenger, der man for eksempel kan tillate at teller og nevner ikke er hele tall (Solem et al., 2017). Telleren vil i dette tilfellet være a, og nevneren er b. Disse begrepene er nyttige for elevene å forstå, da telleren teller hvor mange brøkdeler vi har av enheten eller helheten som nevneren nevner (Hinna et al., 2011). Brøk er viktig i matematikk og i dagliglivet generelt for å kunne angi størrelser som ikke er hele tall og det er behov for å presist kunne uttrykke forholdet mellom ulike størrelser (Birkeland et al., 2018; Brekke, 2002).

3.4 Utfordringer knyttet til brøk

Deler av en helhet og del av en enhet kan være utfordrende for elever å forstå. De første skoleårenes matematikkundervisning preges av naturlige tall, som er mengden av alle positive heltall, og skiller seg dermed fra brøk. Det er ikke før 5.trinn at brøk blir introdusert eksplisitt i læreplanen, og det kan være en vanskelig omstilling for elever å oppdage at matematikk inneholder andre typer tall enn bare naturlige tall (Neagoy, 2017). Det er nettopp denne overgangen fra naturlige heltall til brøk som er en av årsakene til at elever opplever brøk som krevende og i litteraturen kalles dette for «whole number bias» (Ni & Zhou, 2005; Siegler et al., 2011)). Innen den matematikkdidaktiske litteraturen er det bred enighet om at brøk er et problematisk og kritisk tema i matematikkundervisningen (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Clarke & Roche, 2009; Hansen et al., 2017; Hecht & Vagi, 2010; Moss & Case, 1999; Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Det som gjør brøk til et problematisk og kritisk tema, er at brøk påvirker både motivasjon og holdninger knyttet til matematikk og er en viktig del av samfunnet samtidig som svært mange elever har store utfordringer med brøk og er i én eller flere misoppfatninger knyttet til brøk (Brekke, 2002; Lamon, 2012).

I faglitteraturen nevnes tre grunner til at akkurat brøk er utfordrende for elever, der «whole number bias» er én av de tre grunnene. De to andre grunnene er undervisningen i brøk og brøkbegrepets kompleksitet.

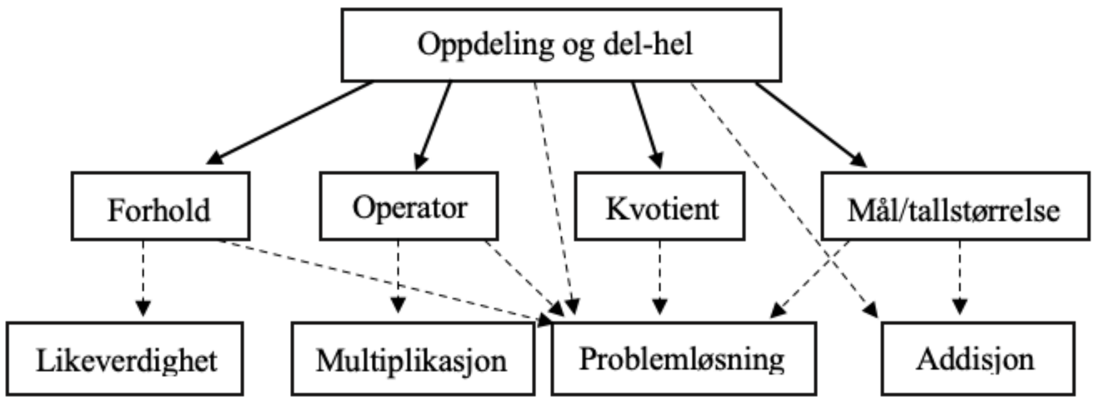
«Whole number bias» betegner en utfordring der elevene tar med seg sine erfaringer med heltall inn i brøkregning. Heltall har andre egenskaper en brøk, noe som utfordrer elevenes allerede etablerte forståelse av talls egenskaper (Hansen et al., 2017; Neagoy, 2017; Ni & Zhou, 2005; Siegler et al., 2011; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Enkelte elever vil hevde at $\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{4}{8}$, fordi de behandler hvert enkelt tall i brøkene som isolerte heltall. Elevenes forståelse av tall som heltall kan være et stort hinder i innlæring og undervisning av brøk. En annen kjent utfordring knyttet til heltallstenkning er vanskeligheter med å sammenligne brøkers størrelse. Elever som benytter seg av heltallstenkning vil si at $\frac{10}{30}$ er en større brøk enn $\frac{3}{4}$, fordi 10 er et større tall enn 3, og 30 er et større tall enn 4.

Undervisningen knyttet til brøk sees på som en annen grunn til at brøk kan være utfordrende for elever. Mye av undervisningen innen brøk er preget av innlæring av ulike algoritmer for å kunne regne med brøk, uten forståelse for selve begrepet brøk (Bjerke et al., 2013; Neagoy, 2017). Undervisning med vekt på repetisjon av algoritmer fremfor dypere matematisk forståelse minner om tradisjonell undervisning og instrumentell forståelse og svekker elevenes muligheter til å utvikle relasjonell forståelse og tenke kritisk rundt sine egne svar og vurderinger i møte med brøk (Skemp, 1976; Skovsmose, 2003). Et annet kritisk moment i undervisning innen brøk er at elevene blir eksponert for få representasjonsformer, og dermed utvikler en snever forståelse av hvordan brøker representeres (Bjerke et al., 2013; Neagoy, 2017). Brøk kan være utfordrende for elever fordi det er abstrakt, og ulike representasjonsformer kan være med på å gjøre brøk mer forståelig (Svingen, 2018). Brøk kan representeres visuelt ved hjelp av ulike figurer og tegninger, ved bruk av konkreter, verbalt, ved å knytte brøk til hverdagssituasjoner og symbolsk (Svingen, 2018). Lite erfaringer med varierte representasjonsformer utvikler heller ikke elevenes relasjonelle forståelse. Både instrumentell og relasjonell forståelse omhandler forståelse i matematikk, men begrepene representerer ulike syn på hva forståelse innebærer. For å tydelig legge frem hva begrepet forståelse innebærer i denne oppgaven, vil begrepene instrumentell og relasjonell forståelse gjøres rede for i et senere delkapittel.

Den siste grunnen til at brøk sees på som utfordrende er brøkbegrepets kompleksitet. Brøkens kompliserte konstruksjon er en av de viktigste faktorene til at elever har vanskeligheter med å lære brøk (Behr et al., 1997; Kieren, 1993; Lamon, 2012). For eksempel så kan brøkdelen $\frac{2}{3}$ tenkes som en del av en helhet (to av tre like deler), som en kvotient (to delt på tre), en operator (to tredjedeler av en mengde), en del av en enhet (to deler til tre deler), og til slutt som tallstørrelse (som et punkt på en tallinje). På grunn av at brøker kan ha så ulike betydninger representeres de derfor ved ulike aspekter (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Behr og flere kollegaer (1983) har utviklet en teoretisk modell hvor brøk deles opp i ulike aspekter; oppdeling og del-hel, forhold, operator, kvotient og mål/tallstørrelse. Disse aspektene gjør at brøk blir komplekst, og for å ha en fullstendig forståelse av brøk bør man beherske alle de fem aspektene ved brøk, noe som forklarer hvorfor det for mange er vanskelig å forstå brøk (Bjerke et al., 2013; Pantziara & Philippou, 2012).

3.5 Brøkbegrepets ulike aspekter

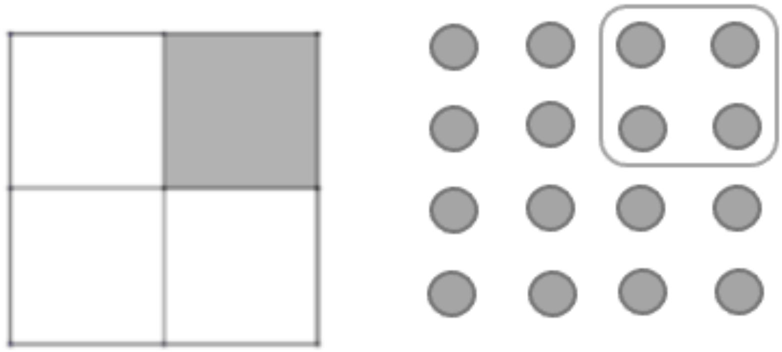
Kieren (1976) ses på som den første i matematikklitteraturen som har skrevet om ulike aspekter ved brøkbegrepet. Ifølge Kieren (1976) danner aspektet oppdeling og del av en hel fundamentet for de andre aspektene og er et overordnet aspekt. Brøkforståelse innebærer forståelse for hvert enkelt aspekt i tillegg til å se sammenhengene mellom aspektene. Kierens (1976) teori om brøk som et sammensatt begrep har blitt videreutviklet av blant annet Behr og flere kollegaer (1983) som i sitt arbeid har utviklet en modell (Figur 1) som viser de ulike aspektene sammen med bruksområder for brøk (likeverdighet, multiplikasjon, problemløsning og addisjon) og sammenhengene mellom disse.



Figur 1: Teoretisk modell for aspekter ved brøkbegrepet. Oversatt fra Behr et al (1983).

3.5.1 Del av helheten

Del-hel aspektet er fundamentet i brøk, hvor brøken $\frac{a}{b}$ representerer a deler av b like deler. Aspektet del-hel går ut på å dele opp kontinuerlige enheter eller diskrete objekter i delmengder med lik størrelse (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2012).



Figur 2: Representasjoner av aspektet del-hel.

En kontinuerlig enhet kan deles opp slik som på bildet til venstre i Figur 2. Bildet viser et kvadrat delt inn i fire like deler der én av delene er markert. Denne inndelingen og markeringen av én av delene representerer brøken $\frac{1}{4}$. Bildet til høyre i Figur 2 viser hvordan man kan dele opp diskrete objekter. Bildet består av 16 prikker, der fire av prikkene er markert og dermed er brøken $\frac{1}{4}$ representert. Van de Walle med kollegaer (2020) poengterer at brøk beskriver forholdet mellom den aktuelle delen (teller) og det hele (nevneren), og at dette er kritisk for elevene å forstå. Videre forklares det at elever kan se på brøk som et mål på størrelsen av helheten, hvis de ikke har forståelse for at brøk er del av en helhet (Van de Walle et al., 2020). Innen brøk er det veldig viktig at helheten er oppdelt i like deler, for at brøkene skal representere riktig del av helheten (Lamon, 2012). For elever kan det være vanskelig å forstå at begge bildene i Figur 2 representerer $\frac{1}{4}$ når representasjonenes form og størrelse er ulik. Bilde til høyre utfordrer elevene ved at det er et sett av diskrete objekter. For elever kan det være en utfordring med diskrete objekter og del-hel aspektet at helheten er alle prikkene og ikke hver enkelt prikk (Petit et al., 2015). I tillegg er likeverdige brøker viktig innen del-hel aspektet, fordi det også kan være utfordrende for elever å forstå at $\frac{1}{4}$ og $\frac{2}{8}$ representerer samme størrelse, slik likeverdige brøker gjør. At to brøker er likeverdige vil si at de har ulike symbol for samme størrelse. Likeverdbegrepet er viktig når elever skal jobbe med oppgaver knyttet til sammenligning, ordning og andre regneoperasjoner med brøker. Det kan være nyttig å demonstrere at likeverdige brøker har samme verdi ved å plassere de på samme sted på en tallinje. Tegninger og visuelle figurer kan også hjelpe elevene å se mønstre og sammenhenger (Petit et al., 2015).

3.5.2 Brøk som forhold

Aspektet forhold omhandler brøkens egnethet til å sammenligne to størrelser eller mengder (Behr et al., 1983; Lamon, 2012). Det skilles hovedsakelig mellom sammenligning av størrelser med ulik måleenhet (minutter og kilometer) og størrelser med lik måleenhet (liter). Innledningsvis i denne oppgaven trekkes frisøryrket frem som ett av mange yrker der brøkregning er en sentral del av yrket. Eksempelet som ble trukket frem handler om blandingsforhold av farger i forbindelse med farging av hår. Fargene måles som oftest i gram, og blandingsforholdet er altså i denne situasjonen en sammenligning av størrelser med lik måleenhet (gram).

Innen sammenligning av størrelser med lik måleenhet skilles det mellom del-hel sammenligning og del-del sammenligning. For å bygge videre på frisøreksempelet kan en blondfarge bestå av deler av golden og ask (navn på farger) i forholdet 2 til 1, som kan skrives 2:1 og $\frac{2}{1}$. Blandingen består dermed av 2 deler golden og 1 del ask. Blandingen $\frac{2}{1}$ er en del-del sammenligning som viser forholdet mellom golden og ask. Blandingen består totalt av 3 deler, og det trengs $\frac{2}{3}$ golden og $\frac{1}{3}$ ask for å lage den ønskelige fargen. Representasjonen $\frac{1}{3}$ ask er en del-hel sammenligning som viser hvor stor del av den totale mengden ask utgjør. At man med størrelser av samme type kan sammenligne en del med både helheten og en annen del, noe som representeres ved ulike brøker, kan for flere elever være forvirrende og vanskelig å forstå (Lamon, 2012).

I forbindelse med sammenligning av størrelser med ulike måleenheter er begrepet rate sentralt. En rate er en sammensetning av ulike måleenheter som gir et tall for å videre kunne sammenligne med andre rater hvor de samme to ulike enhetene er involvert (Lamon, 2012). Hvis man på en løpetur løper 24 kilometer på 2 timer får man en rate på $\frac{24}{2}$ som indikerer at man har løpt med en gjennomsnittsfart på 12 km/t.

3.5.3 Brøk som operator

En brøk kan også være en operator, det vil si at en brøk kan være et uttrykk for en regneoperasjon, der brøken inneholder informasjon om hvilke regneoperasjoner som skal utføres (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Brøk som operator kan endre et angitt tall, en angitt mengde eller objekter ut ifra brøkens verdi. Endringene fører til økninger eller minkinger av for eksempel mengde, tallstørrelse eller objekt (Lamon, 2012). For at elever skal kunne beherske brøk som operator skriver Lamon (2012) at de må ha opparbeidet seg en forståelse av brøkers ulike uttrykksformer, og forståelse for at multiplikasjon er det motsatte av divisjon. Brøken $\frac{1}{4}$ vil som operator påvirke tallet 8, slik at det minker til 2. Operatoren $\frac{1}{4}$ fører til at 8 multipliseres med 1 og divideres med 4.

Lamon (2012) hevder at brøk som operator er sentralt i forbindelse med forståelse av multiplikasjon av brøk. Multiplikasjon av brøk læres ofte instrumentelt, og flere elever mangler forståelse for hvordan multiplikasjon av brøk egentlig fungerer. I situasjoner der naturlige tall multipliseres med brøk, som for eksempel $7 \cdot \frac{2}{5}$, skriver Lamon (2012) at elever benytter seg av gjentatt addisjon som metode for å finne en løsning. I arbeid med naturlige tall og brøk er dette en effektiv og forståelig metode, men elever vil ha utfordringer med å forstå hva som skjer når brøk multipliseres med brøk. Eksempelvis kan det by på store utfordringer om elever skal regne $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9}$ ved hjelp av gjentatt addisjon. Bjørnstad (2011) skriver at elevenes syn på multiplikasjonstegnet som gjentatt addisjon vanskeliggjør multiplikasjon av brøk. For å hjelpe elevene med å forstå multiplikasjon av brøk kan det være hensiktsmessig å omformulere oppsettet fra $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9}$ til $\frac{5}{7}$ av $\frac{4}{9}$, slik at elevene lettere skjønner at de skal finne ut av hvor mye $\frac{5}{7}$ er av helheten, før de skal finne $\frac{4}{9}$ av denne delen (Bjørnstad, 2011).

3.5.4 Brøk som kvotient

I aspektet kvotient sees en brøk på som svaret i et divisjonsstykke, $a : b = \frac{a}{b}$, der a og b er dividenden og divisoren, mens svaret $\frac{a}{b}$ er kvotienten (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Fundamentet i brøk, nemlig del-hel aspektet, er viktig innen brøk som kvotient, fordi aspektet forutsetter at elevene forstår at en brøk består av like deler og at både teller og nevner kan være større eller lik hverandre (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det er også relevant for elevene å ha kjennskap knyttet til divisjon og de ulike divisjonsformene, målingsdivisjon og delingsdivisjon, i forbindelse med brøk som kvotient (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

I målingsdivisjon er målet å finne ut hvor mange grupper det skal deles i. Et eksempel på målingsdivisjon er å fordele 5 kg jordbær i kurver som rommer $\frac{1}{2}$ kg. Hvor mange kurver trenger man? $5: \frac{1}{2}$ gir svaret 10, som er kvotienten, og antall kurver på $\frac{1}{2}$ kg som trengs for 5 kg jordbær.

I delingsdivisjon er totalmengden og antall det skal deles på kjent gjennom dividenden og divisoren. Eksempelvis skal 4 liter brus deles likt på 5 personer. Hvor mange liter brus får hver person? Regnestykket $4: 5$ besvares med kvotienten $\frac{4}{5}$, som viser at hver person får $\frac{4}{5}$ liter brus.

3.5.5 Brøk som et mål eller en tallstørrelse

Ifølge Lamon (2012) bør elever beherske det å plassere brøker på en tallinje, for å ha forståelse for aspektet brøk som måling og tallstørrelse. Brøk på tallinje kan være utfordrende fordi elever med heltallstenkning ikke har erfaring med at det er uendelig med tall mellom for eksempel 8 og 9. I forbindelse med slike utfordringer kan bruk av tallinje i undervisning være nyttig for å utvikle elevers forståelse av at rasjonale tall også er tall og brøkers størrelse (Petit et al., 2015). Videre kan også tallinje være et godt verktøy for å synliggjøre brøkenes verdi, og se de i sammenheng med andre brøker. I tillegg vil elevene kunne se at likeverdige brøker er plassert samme sted på tallinjen (Dahl & Nohr, 2010). En meterstokk vil kunne være et fysisk eksempel på brøk som måling. 30 centimeter på en meterstokk tilsvarer $\frac{30}{100}$, og kan illustrere at $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ ved at 3 desimeter tilsvarer 30 centimeter (McIntosh et al., 2007).

3.6 Diagnostisk undervisning i et konstruktivistisk perspektiv

Misoppfatninger kartlegges gjennom diagnostisk undervisning og målet er at elevene skal lære og utvikle seg ved å bli utsatt for en kognitiv konflikt (Brekke, 2002). Kognitive konflikter kan sees i sammenheng med konstruktivismen, og dette læringssynet legges derfor til grunn for diagnostisk undervisning og misoppfatninger i denne oppgaven (Kirsti, 2013). Videre i dette delkapittelet gjøres det rede for konstruktivisme, diagnostisk undervisning og misoppfatninger.

3.6.1 Konstruktivisme

I konstruktivismen er akkomodasjon og assimilasjon sentrale begreper, som forklarer de tankemessige strukturene bak elevers kognitive utvikling (Imsen, 2020; Wittek & Brandmo, 2021). Jan Piaget knyttes til konstruktivismen og hans betraktninger om individers tanker som mentale skjemaer er grunnlaget for begrepene assimilasjon og akkomodasjon. Begrepene knyttes til hvordan læring skjer i møte med det ukjente, enten assimileres de eksisterende skjemaene, eller så akkomoderes de. Assimilasjon skjer når elevene knytter det nye og ukjente til tidligere erfaringer og allerede etablerte skjemaer. Hvis disse allerede eksisterende skjemaene ikke består av tilstrekkelige erfaringer til å inkludere det nye og ukjente, må elevene modifisere og videreutvikle sine egne oppfatninger og skjemaer. Det er denne modifiseringen og videreutviklingen av skjemaer som er akkomodasjon (Imsen, 2020; Wittek & Brandmo, 2021). I forbindelse med diagnostisk undervisning og misoppfatninger er assimilasjon og akkomodasjon interessant. Elever vil alltid prøve å knytte nye begreper og nye inntrykk til tidligere erfaringer, også når det kommer til brøk. Når elever for eksempel prøver å knytte brøk til sin allerede etablerte forståelse av tall kan det oppstå misoppfatninger fordi elevenes tanker om tall kanskje kun baserer seg på heltall. Det vil da oppstå en kognitiv konflikt og elevene må endre de etablerte mentale skjemaene (akkomoderes) (Brekke, 2002; Imsen, 2020).

3.6.2 Diagnostisk undervisning

Hensikten med diagnostisk undervisning er å kartlegge elevers forståelse knyttet til ulike matematiske kunnskapsområder, deriblant brøk. Kartleggingen viser om elevene er i ulike misoppfatninger, slik at disse kan fanges opp og elevene kan hjelpes ut av misoppfatningene slik at deres matematiske forståelse videreutvikles (Brekke, 2002; Hinna et al., 2011). Diagnostisk undervisning kan bestå av fire ulike faser; identifisering av elevers misoppfatninger, tilrettelegging av undervisning for å skape kognitiv konflikt, diskusjon og refleksjon knyttet til de kognitive konfliktene og benyttelse av utvidet forståelse (Brekke, 2002; Hinna et al., 2011).

Diagnostiske oppgaver har til hensikt å avdekke misoppfatninger hos elever. Begrepet diagnostiske oppgaver kan kanskje diskuteres, da det kan indikere at det er snakk om å finne en diagnose hos elever, nesten som en utredning. Kilborn (1991) skriver at diagnose «er et samlenavn for all den informasjonen man samler inn om elevene for å forbedre undervisningen». Hvis man er grundig når man diagnostiserer, vil det være til stor hjelp når man skal tilpasse undervisningen til hver enkelt elev. I selve kartleggingen av elevenes misoppfatninger kan både oppgaveløsning og samtaler benyttes. Det viktige i kartleggingen er å skille mellom gjentakende feil og tilfeldige feil, og misoppfatninger og misforståelser.

Diagnostiske oppgaver er utformet for å kunne forstå elevers tankemønstre, og det bør ikke være mulig å komme frem til riktig svar uten å ha nødvendig forståelse av begrepet. Ved feilsvar skal det også være mulig å forstå hvordan eleven har tenkt (Hinna et al., 2011). Diagnostiske oppgaver kan brukes før undervisningsperioder og det er viktig å presisere for elevene at oppgavene skal bidra til læring gjennom å oppdage ulike tanker og at lærer får kjennskap til elevers utfordringer. I tillegg er det viktig å påpeke at oppgavene ikke knyttes til noe form for summativ vurdering (Brekke, 2002). Oppgaver sammen med samtale kan gi lærere verdifull informasjon om elevers tanker og mulige misoppfatninger, som igjen er viktige for planlegging og tilrettelegging av undervisning (Brekke, 2002; Hinna et al., 2011).

3.7 Misoppfatninger

I litteraturen har det vært en todelt forståelse av misoppfatninger, enten som noe positivt eller som noe negativt (Leonard et al., 2014). Den negative forståelsen av misoppfatninger ser på det som noe negativt, eller som en feil som vil hindre elevenes læring. Den positive forståelsen av begrepet ser på misoppfatninger som noe konstruktivt som kan være grunnlag for læring og som verdifull informasjon for lærere (Cockburn & Littler, 2008; Ryan & Williams, 2007). I denne oppgaven tas det utgangspunkt i den positive forståelsen av misoppfatninger, der det er en viktig kilde til læring. Det er viktig å skille mellom misforståelser og misoppfatninger i matematikk. Misforståelser kan være resultat av slurv, mens misoppfatninger er ufullstendige og feilaktige tankemønstre. Misoppfatninger kan avdekkes ved at eleven utfører systematiske feil som gjentas (Brekke, 2002). I en læringsprosess kan misoppfatninger endre seg og forsvinne, avhengig av de kognitive strukturene de er bygget på (Pines, 1985). Lærere kan hjelpe elever ut av misoppfatninger, men misoppfatninger kan følge elever over lengre tid (Brekke, 2002). Misoppfatninger kan forekomme i de fleste temaer, til min oppgave er det misoppfatninger knyttet til brøk som vil være relevant. Oppgavene jeg vil benytte meg av er hentet fra Matematikksenteret (u.å-a). Ifølge Matematikksenteret henger ofte misoppfatninger knyttet til brøkbegrepet sammen med elevers tidligere erfaring med hele tall, og samme tankegangen blir benyttet også her (Matematikksenteret, u.å-b). I denne oppgaven inkluderes seks misoppfatninger knyttet til brøk.

3.7.1 Nevner representerer antall deler – uavhengig av størrelse

Elever i misoppfatningen om at nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse tar for seg aspektet del av en hel. Elever som er i denne misoppfatningen har utfordringer med å forstå at alle deler av en brøk er like store og tar dermed ikke brøkdelens størrelse med i betraktningen (Matematikksenteret, u.å-b). Oppgave 1 (Figur 3, side 25) i oppgavesettet er et eksempel på en slik oppgave.

3.7.2 Jo større nevner eller teller, jo større eller mindre brøk

Denne misoppfatningen henger tett sammen med elevenes heltallstenkning der tallene har større verdi desto større tallene er. I forbindelse med brøk kan ikke elevene benytte seg av den allerede etablerte heltallskunnskapen de har, her må også forholdet mellom teller og nevner tas med i vurderingen. Elever i misoppfatningen jo større nevner eller teller, jo større eller mindre brøk ser på alle tall som isolerte tall (Matematikksenteret, u.å-b). For eksempel kan elever da mene at brøken $\frac{1}{10}$ er større enn $\frac{1}{3}$ fordi det naturlige tallet 10 er større enn 3. Elever kan også mene at $\frac{6}{19}$ er en større brøk enn $\frac{5}{6}$ fordi 6 er et større tall enn 5, og 19 er et større tall enn 6. Elever kan også tenke at $\frac{2}{1}$ er en mindre brøk enn $\frac{4}{5}$ fordi både teller og nevner i $\frac{2}{1}$ er mindre enn teller og nevner i $\frac{4}{5}$.

3.7.3 Brøkstrek er lik desimalkomma

En brøk skrives med en teller, brøkstrek og nevner, og selve skrivemåten blir ikke elever introdusert for etter flere skoleår. Elevene ser på brøkens deler isolert fra hverandre. Selve tallene klarer de å lese, men brøkstreken kan skape utfordringer for flere elever. En vanlig misoppfatning blant elever er at de ser på brøkstreken som et komma, og ikke som en delestrek. Fra tidligere har elever kjennskap til komma, som noe som skiller tall, og dermed kan en del elever se på $\frac{3}{7}$ som 3,7. Denne misoppfatningen kan ha som konsekvens at elever ser på $\frac{3}{7}$ som større enn $\frac{3}{4}$ fordi 3,7 er større enn 3,4 (Matematikksenteret, u.å-b).

3.7.4 Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken

Oppgaver der elever skal finne likeverdige brøker eller sammenligne ulike brøkers størrelse kan være med på å avdekke misoppfatningen om at differansen mellom teller og nevner avgjør brøkens størrelse (Matematikksenteret, u.å-b). Elever som er i denne misoppfatningen bruker differansen og ikke forholdet mellom teller og nevner for å avgjøre brøkens størrelse og denne tenkemåten blir i matematikklitteraturen beskrevet som "gap thinking" (Bjerke et al., 2013). Et eksempel på en slik misoppfatning kan være at elever mener at $\frac{3}{6}$ og $\frac{9}{12}$ er likeverdige brøker på bakgrunn av at differansen mellom teller og nevner er lik. I forbindelse med sammenligning av brøker kommer misoppfatningen frem ved at elever mener at $\frac{1}{3}$ er større enn $\frac{7}{10}$ fordi differansen mellom 1 og 3 er mindre enn differansen mellom 7 og 10. Elever kan også tenke at det i $\frac{1}{3}$ bare er to deler opp til en hel, mens det i $\frac{7}{10}$ er tre deler opp til en hel, og dermed konkluderer med at $\frac{1}{3}$ er størst fordi den mangler færrest deler til en hel. På brøker med felles nevner vil en slik fremgangsmåte gi riktig vurdering av hvilken brøk som er størst, noe som bidrar til denne misoppfatningens utbredelse (Matematikksenteret, u.å-b).

3.7.5 Teller (eller nevner) er et isolert tall

Denne misoppfatningen kan i likhet med forrige misoppfatning i enkelte tilfeller gi riktig svar, noe som kan bidra til å forsterke misoppfatningen. Elever kan se på teller eller nevner som isolerte tall og unngår å se på helheten, noe som kan føre til at elevene bruker brøk feil i aspektet forhold, nærmere bestemt del-hel sammenligning. Elever kan bli bedt om å skravere $\frac{1}{5}$ av et rektangel bestående av fem deler. Elever som er i misoppfatningen ser på brøken isolert sett og bruker 1 i teller, og skraverer 1 av de 5 delene av rektangelet og oppnår riktig svar. Elever med denne strategien vil ikke oppnå riktig svar hvis de blir bedt om å skravere $\frac{1}{5}$av et rektangel bestående av 10 deler. Det kan også forekomme at elever i denne misoppfatningen bruker nevneren og skraverer 5 av de 10 delene av et rektangel (Matematikksenteret, u.å-b).

3.7.6 Tar ikke hensyn til helheten (eller misforstår den)

Elever som er i denne misoppfatningen, kan se på to ulike brøker uten å tenke på hvor stor helheten er for de ulike brøkene. Elever bør få erfaring med å se brøk som en relativ størrelse. Et eksempel er at elever i misoppfatningen alltid vil si at $\frac{1}{2}$ er større enn $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$ er større enn $\frac{1}{4}$ hvis brøkene sees på som tallstørrelser eller har lik helhet. Misoppfatningen blir synlig hvis elever skal vurdere om Yasin (som har brukt $\frac{1}{2}$ av pengene sine) eller Herman (som har brukt $\frac{1}{4}$ av pengene sine) har brukt mest penger. Siden helheten ikke er nevnt, kan man ikke svare på oppgaven, men elever i misoppfatningen ville hevdet at Yasin har brukt flest penger, siden $\frac{1}{2}$ er større enn $\frac{1}{4}$. Hadde Yasin i utgangspunktet hatt 10 kroner, har han bare brukt 5 kroner, mens om Herman hadde hatt 100 kroner, har han brukt 25 kroner, altså mer enn Yasin (Matematikksenteret, u.å-b).

3.8 Matematisk forståelse i denne oppgaven

Diagnostisk undervisnings formål innen brøk er å utvikle elevers forståelse for brøkbegrepet. Forståelse er et begrep som vurderes ulikt. Skemp (1976) beskriver to forskjellige typer forståelse, instrumentell og relasjonell forståelse. Han beskriver instrumentell forståelse som «rules whithout reasons». Denne typen forståelse er knyttet til tradisjonell matematikkundervisning, der elevene lærer hva de skal gjøre i konkrete situasjoner innenfor matematikken og følge en oppskrift til en spesifikk oppgave. Innen brøk kan elever lære oppskriften på hvordan man utfører multiplikasjon og divisjon med brøk, uten å lære hvilken matematikk som skjer når man bruker disse oppskriftene og reglene. Skemp (1976) beskriver relasjonell forståelse som noe som tar lenger tid å tilegne seg, men som gir elever en dypere forståelse og mer helhetlig bilde av matematikken. En slik forståelse gir elever mulighet til å løse oppgaver i alle ulike situasjoner, og er i tråd med en mer undersøkende måte å undervise matematikk på (Skemp, 1976). Relasjonell forståelse av brøk er å forstå hvorfor de ulike reglene og oppskriftene faktisk fungerer, og å kunne se sammenhenger mellom de ulike aspektene av brøk. Relasjonell og instrumentell forståelse kan være viktig å gjøre rede for i denne oppgaven fordi det kan være med på å forklare hvorfor noen elever kan svare riktig på oppgaver, men allikevel ikke forstå brøkbegrepet. Forståelse forstås i denne oppgaven som relasjonell forståelse, og diagnostisk undervisning og fokus på misoppfatninger ønsker å utvikle elevenes relasjonelle forståelse av brøkbegrepet.

3.9 Planlegging av undervisning

For at diagnostisk undervisning med fokus på misoppfatninger innen brøk skal kunne fungere kreves det god planlegging av undervisningen. Brekke (2002) skriver at det i diagnostisk undervisning er viktig å kartlegge elevers misoppfatninger og planlegge videre undervisning slik at elevene utsettes for kognitive konflikter som kan føre til læring. Sammen med kartleggingsoppgaver er det viktig med en samtale med elevene for å finne ut i hvilken grad en elev er i én eller flere misoppfatninger, for å best mulig kunne planlegge videre undervisning (Brekke, 2002; Hinna et al., 2011). Videre undervisning planlegges for å utfordre elevene slik at de utvikler en dypere forståelse og kommer seg ut av de aktuelle misoppfatningene. Både oppgaver og diskusjoner kan bidra med å skape kognitive konflikter for elevene. Ønsket om å skape kognitive konflikter for å skape læring kan sees i sammenheng med konstruktivismen (Imsen, 2020). I planleggingen må det blant annet tas hensyn til undervisningsopplegget, tilpasset opplæring og vurdering for læring.

3.9.1 Undervisningsopplegg

Smith & Stein (2018) har utarbeidet en oversikt over viktige punkter å ta hensyn til i planlegging og gjennomføring av undervisning. Punktene de har utarbeidet, omtales som de fem praksiser. Disse praksisene er; forutse, overvåke, utvelgelse, ordne og vise og analysere.

Forutse er en viktig del av forarbeidet, og handler om at man som lærer må forutse ulike elevsvar på de aktuelle oppgavene. I forbindelse med misoppfatninger i brøk er det relevant å forutse mulige feilsvar og mulige riktige svar. Det å kunne forutse mulige svar, gjør at man som lærer stiller forberedt slik at man vet hvilken hjelp elevene trenger ut ifra hvordan de har løst de aktuelle oppgavene (Brekke, 2002; Rowland & Zazkis, 2013; Smith & Stein, 2018).

Praksisen overvåkning består av å observere elevers løsninger, blant annet gjennom å se på utregningene og/eller snakke med elevene (Skemp, 1976; Smith & Stein, 2018). Observasjon av elevers løsningsstrategier kan være med på å forstå hvordan de tenker (Hinna et al., 2011).

De tre siste praksisene; utvelgelse, ordne og vise og analysere er deler av undervisning der elever og lærere samtaler og diskuterer ulike løsninger for å utvikle forståelsen (Smith & Stein, 2018). Dialog er med på å skape kognitive konflikter ved at elever utsettes for medelevers tanker og løsninger. Dialog kan fremme fokuset på strategier og involverer elevene i læringsprosessen (Streitlien, 2009). Gjennom samtale får elever mulighet til å reflektere og språk er derfor viktig for utvikling av matematisk forståelse (Ball et al., 2005).

Et eksempel på en undervisningsaktivitet som kan knyttes til misoppfatninger og diskusjon er «my favorite no» (Caniglia, 2020). «My favorite no» er en undervisningsmetode der man tar utgangspunkt i et feil elevsvar og gjør det om til en viktig del av læringsprosessen. Metoden foregår slik at elevene svarer på en oppgave eller et problem på et ark som læreren samler inn.

Læreren deler arkene i to bunker, en med feil svar og en med riktige svar. Deretter velger læreren ut sitt «favorite no». Elevene jobber deretter med sammen i grupper, der de skal finne ut hva som er riktig i svaret og hvor medeleven har feilet eller misforstått og hvorfor. Elevene lærer å lære av sine egne feil i stedet for å bli frustrert av å ikke få det til. Målet med metoden er å skape engasjement hos elevene og at de skal bli opptatt av selve prosessen og ikke bare sluttproduktet, som kan føre til mer dybdelæring enn hvis man bare er opptatt av å få riktig svar. Jeg tenker at «My favorite no» kan være en fin måte å se på elevenes misoppfatninger, uten skam, og gjøre misoppfatningene om til læringsmuligheter. Elevfeil kan være et viktig verktøy når det gjelder å hjelpe elevene til å lære (Kunnskapsdepartementet, 2017).

3.10 Tilpasset opplæring

Alle elever er ulike og har ulik forståelse av brøkbegrepet. Gjennom opplæringslovens konstateres det at undervisningen skal tilpasses alle elevene og deres forutsetninger slik at alle skal få lik mulighet til å forstå brøk (Opplæringslova, 1998). Departementet uttrykker at dette skal skje innenfor rammen av fellesskapet på skolen, og med et stort mangfold i skolen kan dette være utfordrende. Elever lærer ulikt og enkelte trenger mer tid og hjelp enn andre, og dette er elementer lærere må ta stilling til slik at alle elever får den undervisningen de har rett til (Slemmen, 2010). Kartlegging av elevers misoppfatninger gir lærer informasjon om elevenes individuelle forståelse av brøk og mulige misoppfatninger som igjen kan brukes for å tilpasse undervisningen i brøk til hver enkelt elev og deres behov (Brekke, 2002; Hinna et al., 2011).

3.11 Vurdering for læring

En kartlegging av elevenes brøkforståelse kan også sees på som en vurdering av elevenes brøkforståelse. Vurdering er et overordnet begrep der de ulike betydningene har ulike formål. I skolen er det to former for vurdering, formativ og summativ. Den formative vurderingen kalles vurdering FOR læring, mens den summative kalles vurdering AV læring. Hovedforskjellen mellom disse formene for vurdering er at den formative skjer underveis i undervisningsprosessen, mens den summative skjer i slutten av en undervisningsprosess eller periode (Slemmen, 2010). En diagnostisk kartleggingsprøve av elevenes brøkforståelse og mulige misoppfatninger har en klar hensikt om å utvikle elevenes forståelse knyttet til brøk.

Diagnostisk undervisning og misoppfatninger bruker feil som en viktig kilde til læring og videre utvikling (Brekke, 2002). På bakgrunn av formålet med diagnostisk undervisning og fokus på misoppfatninger faller en slik vurdering inn under formativ vurdering fordi elevene reflekterer og utvikler sin egen forståelse. Vurderingen er dermed læringsfremmende (Slemmen, 2010).

3.12 Motivasjon i matematikk

Begrepet motivasjon kan defineres på flere måter, hvordan man definerer det avhenger av sammenhengen det blir brukt, men et fellestrekk er at det beskriver faktorer som driver ens atferd i ulik grad (Skaalvik & Skaalvik, 2021). I arbeids- og undervisningssammenheng kan motivasjon ses på som faktorer som bidrar til at man blir aktivert til å nå et mål, og i hvilken grad man jobber med å nå dette målet (Einarsen et al., 2017; Skaalvik & Skaalvik, 2021).

Det behavioristiske perspektivet på motivasjon er at handlinger som blir utført bygger på belønninger og insentiver (Imsen, 2020). Insentiver er hendelser eller objekter som enten oppmuntrer eller forhindrer atferd. Ytre kilder til motivasjon vektlegges i behaviorismen, til motsetningen av det humanistiske perspektivet til motivasjon, der indre kilder vektlegges. Maslows hierarkiske behovsteori er en sentral teori innenfor humanistiske motivasjonsteorier. Teorien går ut på at vi mennesker har behov som vi søker å dekke. Maslows behovspyramide illustrerer menneskets behov i et hierarki med fysiologiske behov, trygghetsbehov, sosiale behov, anerkjennelse og selvrealisering. Når de mest grunnleggende behovene våre er dekket får vi nye mer avanserte behov, slik fungerer behovene som motivasjon. Ifølge Imsen (2020) kan lærere "bruke" elevenes behov, som å høre til, føle seg verdifull, bli sett og hørt, for å skape og øke motivasjon. Konstruktivistiske teorier om motivasjon går ut på at mennesker lærer gjennom aktivitet, og man har selv et ønske om å gjennomføre aktiviteter, og man er motivert for å gjøre noe som man selv synes er gøy eller givende.

Motivasjon er ikke noe man kan observere direkte, men elevers motivasjon kan gi seg til kjenne i handlinger, følelser eller tanker som de kan formidle. Eksempler på hvordan man kan identifisere elevers motivasjon er blant annet hvor lenge de klarer å konsentrere seg og hvilken innsats de legger i arbeidet sitt, når elever viser glede, engasjement eller redsel i forbindelse med en aktivitet, eller når elever formidler tanker om fag eller spesifikke emner (Wæge & Nosrati, 2018).

De fleste elever har en følelse knyttet til matematikkfaget, og de har også gjerne en tanke om hva det vil si å lære matematikk før de kommer inn i klasserommet. Hvis matematikkundervisningen ikke er slik elevene tenker at den skal være, kan det påvirke motivasjonen deres i svært stor grad (Wæge & Nosrati, 2018). Wæges (2007) studie av elevers motivasjon viser, i likhet med andre internasjonale studier, at elever opplever indre motivasjon og økt glede over å arbeide med matematikkoppgaver hvis de selv har et ønske om å oppnå relasjonell forståelse i matematikk (Stipek et al., 1998; Wæge, 2007; Wæge & Pantziara, 2013). Elevenes egne mål i matematikk er derfor veldig viktig for motivasjonen.

En måte å motivere elever til å sette seg mål og ville lære matematikk på er å relatere emne de skal lære, til et emne de allerede er interesserte i. Hvis emnene henger sammen, vil elevenes entusiasme for det emne de allerede er interessert i, smitte over til det emne de skal lære, og gjøre det spennende (Kosheleva & Villaverde, 2017).

4 Metode

I dette kapittelet vil den metodiske tilnærmingen beskrives, dette er for at leseren skal få et grunnlag for å vurdere verdien av studiens funn. Samfunnsvitenskapelige studier slik som denne kan betraktes som kvantitative hvis de i hovedsak bygger på kvantitative data, og som kvalitative hvis de i hovedsak bygger på kvalitative data (Grønmo, 2016). Jeg har valgt å benytte en kombinasjon av kvantitativ og kvalitativ metode i denne studien, noe som kalles metodetriangulering (mixed-methods) (Creswell et al., 2003; Grønmo, 2016). Den kvantitative delen inneholder ikke så store data som ofte forbindes med kvantitativ forskning, og oppgavens problemstilling er av en kvalitativ art, jeg mener derfor at denne studien kan ses på som en kvalitativ studie. Oppgaven hadde dog ikke vært den samme uten den kvantitative delen, de kvantitative og kvalitative dataene i studien komplimenterer hverandre, og bidrar til en mer samlet og helhetlig forståelse (Grønmo, 2016). Nærmere om hvorfor jeg har valgt et slikt forskningsdesign vil jeg gjøre rede for i dette kapittelet, samt de valgene jeg har tatt underveis i arbeidet med datainnsamling og bearbeiding. Studiens validitet, reliabilitet og etiske hensyn vil også bli belyst.

4.1 Metodevalg og forskningsdesign

Når man skal velge metode i et forskningsprosjekt må man ta stilling til hva og hvem som skal undersøkes, samt hvordan man skal undersøke det. Dette blir i forskning beskrevet som forskningsdesign og omhandler alt som knyttes til datainnsamling (Johannessen et al., 2021). I starten av dette forskningsprosjektet hadde jeg et ønske om å få gjennomføre en diagnostisk prøve i brøk på en ungdomsskole. For å få til dette kontaktet jeg en kjenning på en skole i utkanten av Oslo, og fikk mulighet til å utføre en slik prøve i fire klasser på 9. trinn på denne skolen. Planen var opprinnelig at jeg skulle stå for gjennomføringen av prøven i de fire klassene, men for at det ikke skulle bli en uvanlig situasjon for elevene bestemte jeg i samråd med min veileder at det var best at matematikklærerne i de klassene som skulle ta prøven sto for gjennomføringen. Dette gjorde også at jeg ikke fikk noe kjennskap til elevene, og dermed kunne bedømme prøvene på en mer objektiv måte enn hvis jeg hadde visst hvem elevene var. Jeg satt sammen den diagnostiske prøven, og sendte denne til lærerne sammen med et informasjonsskriv til elevene og en instruks til lærerne om hvordan prøven skulle gjennomføres. På denne måten ble prøven utført på tilnærmet lik måte i alle klassene. Hver prøve fikk et ID-siffer, slik at lærerne kunne identifisere hvilke prøver som tilhørte hvilke elever, mens jeg fikk kun prøvene med ID-siffer slik at elevene kunne forbli helt anonyme.

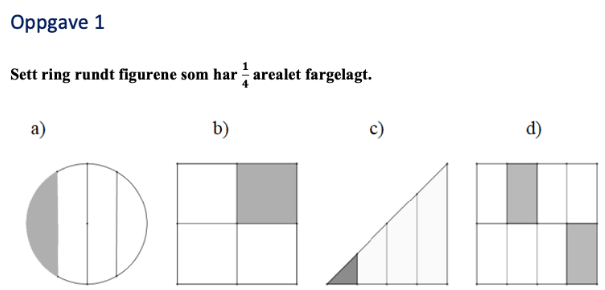
Prosjektets problemstilling må tas hensyn til når man skal velge hvilken metode som egner seg best for å samle inn de nødvendige dataene (Christoffersen & Johannessen, 2012). I denne studien ville jeg undersøke hvilke misoppfatninger knyttet til brøk man kunne finne blant elever på ungdomsskolen, og hvordan en diagnostisk prøve om brøk kunne brukes i undervisningen, og det var derfor hensiktsmessig å få tilgang til en slik prøve. For å få dypere innsikt og forståelse valgte jeg i tillegg å intervjue matematikklærerne som gjennomførte prøven og et mindre utvalg elever. Det var 98 elever som gjennomførte den diagnostiske prøven i brøk, av de 98 elevene var det 4 elever som deltok på intervju og 2 lærere. Dette er altfor få elever til å si noe om misoppfatninger knyttet til brøk blant elever på ungdomsskolen generelt, og studiens formål er ikke å generalisere, men å bidra med innsikt med tanke på misoppfatninger knyttet til brøk og hvordan noen utvalgte elever og lærere opplever bruk av diagnostiske prøver. Selv om studien ikke kan generaliseres, så kan den allikevel ha en verdi for meg og mine lærerkollegier. Informantene vil trolig også ha nytte av å ha deltatt i studien, elevene fikk reflektert over oppgavene sammen med meg og noen av de fikk kanskje også tilegnet seg ny kunnskap som følge av samtalen. Lærerne fikk statistikk over mulige misoppfatninger elevene deres har, en slik kunnskap om elevene kan være av verdi for både lærerne og elevene, begge lærerne sa de ville benytte seg av det i senere undervisning. I tillegg kan det å være med på et slikt forskningsprosjekt medføre undring, øke deres forskningsbaserte syn på undervisning, samt økt bevissthet omkring egen praksis (Kvale et al., 2015). Målet med forskning er å bringe frem kunnskap som ikke bare er gyldig for en selv, men også for andre (Postholm et al., 2018).

4.2 Kvantitativ forskningsmetode

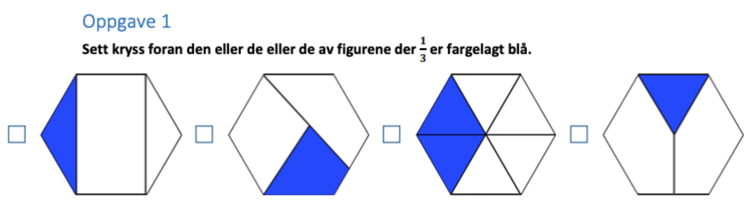
Forskningsmetoder i lærerutdanning deles ofte i to hovedtyper: kvantitative og kvalitative metoder. Aliaga og Gunderson (2006) definerer kvantitativ forskningsmetode som en metode som har til hensikt å forklare et fenomen ved å samle inn numeriske data som analyseres ved hjelp av matematiske metoder, veldig ofte statistikk. Både kvantitativ og kvalitativ forskning handler om at vi vil forklare eller beskrive et fenomen, men det er de målbare dataene og de matematiske metodene som gjør at kvantitativ forskning skiller seg fra kvalitativ forskning. I denne studien ble de kvalitative dataene samlet inn ved hjelp av en test, testen ble målt ved å gi poeng for riktig utført oppgave, som jeg deretter laget statistikk av. Hvis man ser nærmere på hver enkelt oppgave i denne testen er det enkelte ting som ikke kommer frem ved en slik måling, for eksempel følgefeil i utregninger eller tegninger som viser at elever har evne til å visualisere og ikke minst forklaringer som viser at de forstår brøkbegrepet. Allikevel kan det å lage statistikk gi et oversiktsbilde over hvilke misoppfatninger knyttet til brøk som er mest vanlige i de klassene det gjelder. Kvantitative metoder er godt egnet til å skaffe overblikk hos et utvalg (Creswell, 2014).

4.2.1 Den diagnostiske prøvens oppgavesett

Jeg tok utgangspunkt i matematikksenteret sine diagnostiske oppgaver knyttet til brøk og prosent, men valgte å bytte ut noen oppgaver, samt legge til noen oppgaver som jeg synes kunne gi meg mer utfyllende datamateriale til min masteroppgave. Oppgavene er enten hentet direkte eller inspirert av oppgaver fra «*Brøk og prosent: læringsstøttende prøve i matematikk*» fra matematikksenteret, masteroppgaven til Kuvåssæter (2021) *«brøkforståelse og holdninger til matematikken hos elever som starter på videregående skole»* eller masteroppgaven til Vinje (2019) *«Misoppfatninger tilknyttet brøk på mellomtrinnet»*. Oppgavene har jeg valgt å sortere ut ifra de mest kjente misoppfatningene knyttet til brøk og prosent, som jeg har beskrevet tidligere. Jeg har laget et åpent felt under hver oppgave der elevene blir oppfordret til å vise hvordan de tenker, dette for at jeg skal kunne få mulighet til å forstå hvordan elevene har tenkt, og ut ifra det avdekke om eleven er i en misoppfatning eller ikke. Oppgavesettet ligger som vedlegg 6.



Figur 3: Oppgave hentet fra «brøkforståelse og holdninger til matematikken hos elever som starter på videregående skole» (Kuvåssæter, 2021).



Figur 4: Oppgave hentet fra Brøk og prosent: læringsstøttende prøve i matematikk (Matematikksenteret, u.å-a).

Oppgave 1, 2 og 16a kan avdekke om elever har misoppfatningen «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse». Oppgave 1 og oppgave 16a er hentet fra Kuvåssæter (2021) sin masteroppgave. Oppgave 1 er opprinnelig hentet fra en lærerveiledning til *«Kartlegging i regning for VG1»*, men siden den er på samme vanskelighetsnivå og veldig lik en oppgave som er beregnet til 8-10.trinn fra matematikksenteret sine diagnostiske oppgaver knyttet til *Brøk og prosent* (Figur 4, side 25), så valgte jeg å bruke denne oppgaven selv om prøven skulle utføres på 9.trinn. Matematikksenteret sin oppgave spesifiserer ikke at elevene skal markere de figurene som har $\frac{1}{4}$ av arealet fargelagt, og jeg synes derfor oppgaven jeg valgte å bruke var tydeligere formulert, og den gir også mulighet for å se om elevene forstår at ulike brøker kan ha samme verdi. Oppgave 2 er hentet fra matematikksenteret. Oppgaven krever at eleven skal kunne visualisere hvor mange av den «lille trekanten» øverst i pyramiden som får plass i den nederste delen av pyramiden, og har nok noe høyere vanskelighetsgrad enn oppgave 1.

Oppgave 3

Henrik og Kasper deler likt $\frac{1}{2}$ L brus.

Hvor mange liter får de hver?

Figur 5: Eksempel på oppgave som kan avdekke misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk eller mindre brøk» hentet fra Brøk og prosent: læringsstøttende prøve i matematikk (Matematikksenteret, u.å-a).

Oppgave 3, 4, 13 og 14 kan avdekke om elever har misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk eller mindre brøk».

Oppgave 5

Hvilket tall har samme verdi som $\frac{3}{4}$?

☐ 0,75 ☐ 3 ☐ 3,4

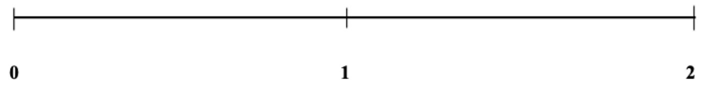
Figur 6: Eksempel på oppgave som kan avdekke misoppfatningen «brøkstrek er likt desimalkomma» hentet fra Brøk og prosent: læringsstøttende prøve i matematikk (Matematikksenteret, u.å-a).

Oppgave 5 og 6 kan avdekke om elever har misoppfatningen «brøkstrek er lik desimalkomma».

Oppgave 13

Plaser brøkene på tallinjen.

$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{4}{3}$



Figur 7: Oppgave som måler flere misoppfatninger. Inspirert av oppgave fra Kuvåssæter (2021) sin masteroppgave.

Oppgave 7 kan avdekke om elever har misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken». Oppgave 13 (Figur 7) kan også være med å avdekke denne misoppfatningen hvis elevene for eksempel plasserer $\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{5}$ samme sted på tallinjen. Oppgave 13 var egentlig en oppgave der man fikk beskjed om å sette ring rundt en brøk som var større enn $\frac{3}{4}$ men mindre enn 1, men jeg ville at oppgaven skulle kunne måle flere misoppfatninger. For hvis eleven gjør feil på en av oppgavene kan det ha flere årsaker, men hvis eleven gjør samme feilen på flere av oppgavene kan det tyde på at eleven er i en misoppfatning (Brekke, 2002).

Oppgave 9

I kantina på skolen til Truls har prisen for juice økt fra 10 kr til 15 kr.

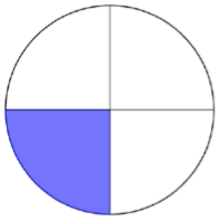
Hvor mange prosent har prisen økt med?

Figur 8: Eksempel på oppgave som kan avdekke misoppfatningen «teller (nevner) eller prosent er et isolert tall».

Oppgave 8 og 9 kan avdekke om elever har misoppfatningen «teller (nevner) eller prosent er et isolert tall».

Oppgave 16

a) Fargelegg $\frac{1}{6}$ av det hvite området i sirkelen.



b) Hvor stor del av hele sirkelen har du nå fargelagt?

Figur 9: Eksempel på oppgave som kan avdekke misoppfatningen «Tar ikke hensyn til helheten», fra «brøkforståelse og holdninger til matematikken hos elever som starter på videregående skole» *(Kuvåssæter, 2021).*

Oppgave 10 har til hensikt å avdekke om elever har misoppfatningen «Tar ikke hensyn til helheten». Den samme hensikten har oppgave 16b, som er en fortsettelsesoppgave til oppgave 16a.

Oppgave 15

I et bakeri ble $\frac{1}{3}$ av melet bruk til å bake brød, og $\frac{1}{4}$ av melet ble bruk til å bake kaker.
Hvor stor brøkdel av melet har blitt brukt?

Figur 10: Eksempel på oppgave som kan avdekke andre problemer som elever kan ha med brøk.

Oppgave 11, 12 og 15 kan avdekke andre problemer som elever kan ha med brøk. Oppgave 11 tester om elevene klarer å angi en brøk mellom to brøker, med samme nevner, og oppgave 12 og 15 tester regning med brøk. Ingen av disse er typiske misoppfatninger, men jeg valgte allikevel å ha de med siden de kan bidra med å gi et mer helhetlig bilde av elevens forståelse av brøk.

4.2.2 Oppgavesettets validitet

Validitet refererer til datamaterialets gyldighet med hensyn til problemstilling og eventuelle forskningsspørsmål som skal belyses (Grønmo, 2016). Oppgavesettets validitet handler om hvor vidt oppgavene måler det de er ment til å måle, i dette tilfelle om de gir et datamateriale som kan bidra til å svare på oppgavens problemstilling og forskningsspørsmål. Det er viktig at oppgavene er tilpasset de elevene som skal gjennomføre prøven, det vil si at oppgavene ikke kan være for lette, men heller ikke for vanskelig. Jeg hadde derfor et møte med en av lærerne i forkant av prøven, der vi gikk gjennom oppgavene, og diskuterte vanskelighetsgrad. Oppgavene i oppgavesettet har blitt brukt i diagnostiske prøver tidligere, noe som styrker validiteten. De oppgavene som er endret, har jeg endret for at teksten skulle være tydeligere eller for at oppgaven skulle kunne måle flere misoppfatninger, slik som for eksempel oppgave 13 (Figur 7, side 27). Prøvesvarene til elevene viser at oppgavesettet måler om elevene er i en eller flere misoppfatninger, men det er enkelte oppgaver som har noen svakheter. For at oppgavene skal kunne avdekke misoppfatninger bør elevene ikke kunne svare riktig hvis de ikke kan det (Hinna et al., 2011). Oppgave 5 og 14 har svaralternativer, noe jeg i ettertid ser kan være en svakhet. Oppgave 16b er også en oppgave jeg ville endret. Ut ifra resultatene og forklaringene til elevene, er det mange som har misforstått denne oppgaven.

4.3 Kvalitativ forskningsmetode

Det finnes flere ulike forskningsdesign innenfor kvalitativ metode (Christoffersen & Johannessen, 2012). Jeg ønsket å utforske og beskrive mennesker og deres forståelse og erfaringer med brøk og andre utfordringer knyttet til temaet, og valgte derfor et fenomenologisk design. Innenfor fenomenologisk metode vil forskeren forsøke å forstå meningen med et fenomen gjennom andre sine øyne, i dette tilfelle gjennom intervju. Ifølge Creswell (2014) er de viktigste stegene i en fenomenologisk metode: forberedelse, datainnsamling, analyse og rapportering.

4.3.1 Intervju som forskningsmetode

Forskningsintervju er den vanligste metoden å samle inn kvalitative data (Christoffersen & Johannessen, 2012). Man kan ikke observere noe som allerede har skjedd, og det er heller ikke så lett å observere tanker. Intervju kan være en god måte å samle inn data fra tidligere hendelser, eller tanker om et emne. Et intervju kan være mer eller mindre strukturert. Et strukturert intervju ligner nesten på et prekodet spørreskjema, der tema, spørsmål og rekkefølge er satt, men det er stort sett ikke formulert svaralternativer på forhånd. Et ustrukturert intervju er uformelt og ligner mer en vanlig samtale, spørsmålene og rekkefølgen er ikke bestemt på forhånd og i noen tilfeller er heller ikke intervjuet planlagt (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Det var viktig for meg å ha mulighet til å tilpasse intervjuene til hver enkelt informant, samtidig som jeg ville ha en plan for hvilke temaer og spørsmål som skulle gjennomgås for å belyse problemstillingen. Jeg valgte derfor å planlegge og gjennomføre et semistrukturert intervju. Det vil si at jeg hadde en intervjuguide som et utgangspunkt for intervjuet, men mulighet til å tilpasse spørsmålene etter individuelle forskjeller og ut ifra hvilke svar jeg fikk (Grønmo, 2016).

4.3.2 Intervjuenes og studiens validitet

For å vurdere validiteten av et intervju må man se om intervjuet faktisk reflekterer de fenomenene som vi ønsker å studere (Kvale et al., 2015). Før, underveis og etter intervjuene ble det foretatt vurderinger i forhold til om spørsmålene var relevante for å kunne belyse det de var ment til, noe som kan tenkes å styrke validiteten. Siden jeg valgte å gjennomføre et semistrukturert intervju, hadde jeg mulighet til å bruke oppfølgingsspørsmål, på den måten kunne jeg bekrefte riktig forståelse, samt oppklare uklarheter.

Validering skal gjennomsyre hele forskningsprosessen (Kvale et al., 2015). Gjennom hele dette forskningsprosjektet har jeg reflektert over hvorvidt de benyttede metodene, teoriene datamaterialet, fortolkningene og kodingene har vært relevante i forhold til problemstilling og forskningsspørsmål i denne oppgaven, og tatt valg ut ifra dette. For å styrke validiteten valgte jeg å blant annet samle inn datamaterialet både i form av en diagnostisk prøve, intervjuer av elever som hadde gjennomført prøven og matematikklærerne til klassene som hadde gjennomført prøven. Kvaliteten på datamaterialet løftes dersom flere innfallsvinkler benyttes til å belyse samme fenomen (Grønmo, 2016).

4.4 Forberedelse og gjennomføring av datainnsamling

Selv om jeg hadde en tanke om hvordan intervjuene skulle foregå, så planla jeg ikke den kvalitative datainnsamling før etter jeg hadde samlet inn den kvantitative dataen og analysert den. Jeg ville sørge for at jeg hadde satt meg godt inn i oppgavene, og at jeg hadde laget oversiktlig statistikk over resultater av den diagnostiske prøven og mulige misforståelser. Dette både fordi jeg ville ha god bakgrunnskunnskap om det jeg skulle intervjue lærerne og elevene om, men også slik at jeg kunne sende statistikk til lærerne slik at de fikk en ryddig oversikt, og dermed kunne forberede seg til intervjuet. Statistikken jeg sende til lærerne ligger i som vedlegg 7 i slutten av oppgaven. Lærerne kunne dermed se på det på forhånd, istedenfor at de skulle bruke tid på det under intervjuet, noe som kunne vært stressende for lærerne i en intervjusituasjon. Forberedelsen til kvalitativ datainnsamling innebar blant annet å velge informanter og utforme intervjuguider, dette samt gjennomføringen av intervjuene kommer jeg til å utdype videre i dette delkapittelet. Jeg vurderte også å ha et pilotintervju, men siden informantene besto av både lærere og elever ville jeg måtte ha to pilotintervjuer, noe som ble vanskelig å få til med tanke på tid. Jeg valgte derfor å ikke utføre et pilotintervju, selv om det kunne gi meg erfaring og en mulig forbedring av intervjuguiden. En annen viktig del av forberedelsen var å søke NSD for godkjenning. Når dette var gjort, kunne jeg sende ut samtykkeskjemaer, å begynne og forberede meg til intervjuene.

4.4.1 Utvalg kvantitativ metode

Utvelgelsen av informanter er en viktig del av all samfunnsforskning, både i kvantitative og kvalitative undersøkelser (Christoffersen & Johannessen, 2012). Populasjonen som problemstillingen retter seg mot, er elever på 9.trinn. Jeg ville undersøke om det var elever på 9.trinn som hadde misoppfatninger knyttet til brøk og hvordan en diagnostisk prøve kan påvirke lærere og elever i planlegging og i matematikk. Det var viktig at de klassene som skulle være med i undersøkelsen nylig ikke hadde hatt om brøk. Elever som ikke har en forståelse for brøkbegrepet, men som nylig har jobbet med emne, kan ha en instrumentell forståelse til begrepet som gjør at misoppfatninger ikke blir oppdaget (Brekke, 2002). Ingen av de fire 9.klassene som ble med i undersøkelsen hadde hatt brøk som tema på 9.trinn, de hadde kun repetert litt til en tentamen de hadde i desember 2021, den diagnostiske prøven ble gjennomført før dette. Videre var planen å intervjue lærerne som underviste de aktuelle klassene, og lærerne ønsket å bli intervjuet. Før prøven diskuterte en av lærerne og jeg om de elevene som hadde IOP i matematikk skulle delta eller ikke, og kom frem til at de ikke skulle delta på prøven fordi de elevene ikke ville ha noe utbytte av å delta på en slik prøve, heller tvert imot, og jeg synes det da ikke blir riktig å sette de i en slik situasjon. Det var heller ikke nødvendig i forhold til problemstillingen.

4.4.2 Utvalg kvalitativ metode

Dalen (2011) skriver at i den kvalitative forskningen har informantene en spesielt viktig rolle. Problemstillingen i kvantitativ forskning avgjør størrelsen på utvalget, det var derfor viktig å velge ut informanter som kunne gi den informasjonen som trengs til å kunne dekke problemstillingen i oppgaven (Creswell & Guetterman, 2019). For å kunne svare på problemstillingen synes jeg det var viktig å få snakke med lærerne som hadde gjennomført den diagnostiske prøven. Både fordi jeg ville ha informasjon om prøven og akkurat hvordan den ble gjennomført, og fordi jeg ville vite litt om lærerne og deres tanker rundt brøk og diagnostiske prøver. Siden de fire klassene hadde to matematikklærere, ble antall lærere som skulle intervjues to. Elevenes tanker og utsagn om brøk og prøven var relevant for å kunne få et mer helhetlig bilde, det ble derfor valgt ut fire elever til intervju. Elevene som ble plukket ut til å være med på intervju hadde et ulikt ferdighetsnivå i brøk, dette for å kunne ha muligheten til å se på forskjeller hvis det var det. Det er ikke alle elever som er så snakkesalige i én til én samtale med en voksen som de ikke kjenner. Siden lærerne kjenner elevene fra før, ville jeg at de skulle velge ut de elevene som de visste var komfortable med å snakke med meg. Dette var både av etisk hensyn, men også for å sikre at jeg fikk den kunnskapen jeg trengte for å kunne svare på problemstillingen.

4.4.3 Informantene

Jeg hadde ingen tiknytning til noen av informantene, men jeg snakket flere ganger med lærerne før gjennomføringen av prøven og intervjuene. Jeg fikk ingen informasjon om elevene før intervjuet, bortsett fra at jeg hadde fått tilgang til prøvene deres. Jeg spurte heller ikke om det, da jeg ville danne meg et bilde av elevene uten å bli påvirket av hva lærerne for eksempel sa om deres faglige nivå.

Begge lærerne var matematikklærere for to klasser på 9.trinn. Robert hadde jobbet som lærer i nesten 30 år, og hadde lang erfaring som ungdomsskolelærer. Ari ble ferdigutdannet lærer våren 2021, men hadde tidligere jobbet flere år som vikar på en annen ungdomsskole.

Prøveresultatene til elevene som ble valgt ut til intervju var følgende:

- Edvard utførte 5 av 17 oppgaver riktig på prøven.
- Lise utførte 16 av 17 oppgaver riktig på prøven.
- Tin utførte 11 av 17 oppgaver riktig på prøven.
- Amina utførte 7 av 17 oppgaver riktig på prøven.

4.4.4 Intervjuguide

I denne studien er lærerne og elevenes beskrivelser en del av det datamateriale som danner utgangspunkt for analysedelen, det var derfor avgjørende å sikre spørsmålenes relevans ved å knytte de til teori om brøk, misoppfatninger og diagnostiske oppgaver (Kvale et al., 2015). Intervjuguidene ligger som vedlegg 4 og 5. Siden jeg skulle intervjue både lærere og elever lagde jeg to forskjellige intervjuguider, en til lærerne og en til elevene. I tillegg til dette valgte jeg å sette meg nøye inn i hver enkelt elev sitt oppgavesett, og lage notater og spørsmål til dem. Å vise genuin interesse for informantene, og vise de at jeg hadde satt meg godt inn i arbeidet de hadde gjort med oppgaven var viktig for at informantene kunne få tillit til meg og muligens åpne seg i større grad. Et av de viktigste verktøyene for et vellykket intervju er å vise genuin interesse for informantene, ved å gi bekreftelse gjennom kommentarer, blikk og positiv tilstedeværelse (Dalen, 2011).

4.4.5 Gjennomføring av intervju med lærere og elever

Konteksten intervjuene blir gjennomført i er ikke uvesentlig, rommet, omgivelsene og livssituasjonen til forskeren og informantene vil påvirke intervjusituasjonen (Kvale et al., 2015). Intervjuene med lærerne ble gjennomført på et grupperom inne på lærerværelse på skolen hvor lærerne jobbet. Intervjuet med Robert varte i 30 min og intervjuet med Ari varte i 15 min. Intervjuene med elevene ble gjennomført på et grupperom tilhørende klasserommet deres. Intervjuet med elevene varte i 15-20 min.

4.5 Behandling av datamaterialet

Resultatet av datainnsamlingen var 98 besvarte oppgavesett, seks lydfiler med intervju og notater fra tre av intervjuene.

De besvarte oppgavesettene hentet jeg på den aktuelle skolen dagen etter prøven ble gjennomført. Retting og analysering av prøvene brukte jeg i overkant to uker på, i dette tidsrommet sørget jeg for å jobbe med oppgavesettene på samme sted hver gang slik at jeg ikke måtte frakte de rundt omkring. På den måten sikret jeg at oppgavesettene ikke kom på avveie. Det er kun jeg som har hatt tilgang på oppgavesettene siden jeg fikk de overlevert.

Det ble tatt lydopptak av intervjuene. Jeg brukte nettskjema sin lydopptaker, og valgte å benytte meg av to opptaksenheter for å sikre et datagrunnlag dersom den ene sluttet å virke underveis. Lydopptak av intervjuene gir mulighet for pålitelige og eksakte transkripsjoner, samtidig er det noe non-verbal kommunikasjon som ikke kommer frem. Jeg valgte derfor å lytte til opptakene rett etter intervjuene, da jeg fortsatt hadde et ferskt minne og kunne notere det viktigste. Oppgavesettene vil bli makulert og lydopptakene vil bli slettet med en gang dette forskningsprosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er høsten 2022.

4.6 Vurdering av relabilitet og generaliserbarhet

Kvaliteten på forskning avhenger av validiteten og relabiliteten, samt hvilken grad av overførbarhet den har (Postholm, 2010). Det vil si om dataene som blir samlet inn er gyldige og pålitelige, dette er helt avgjørende for forskningsresultatene (Christoffersen & Johannessen, 2012). Jeg har tidligere sett på validiteten, og jeg vil nå se nærmere på relabiliteten og generaliserbarheten.

4.6.1 Relabilitet

Reliabilitet handler om hvor pålitelig datamaterialet er (Christoffersen & Johannessen, 2012). Vurdering av relabiliteten skal bygges på kritiske drøftinger rundt datamaterialet og empiriske undersøkelser av stabilitet og ekvivalens (Grønmo, 2016). Om man for eksempel veier samme melkekartong flere ganger med samme vekt forventer man å få samme resultat, hvis vekten ikke gir samme resultat kan man si at relabiliteten til vekten er lav. Det finnes flere ulike måter å teste relabiliteten, en måte kalles test-retestreliabilitet, som innebærer at man utfører samme undersøkelse med samme gruppe på to ulike tidspunkt. I denne studien vil det si at elevene som tok den diagnostiske prøven hadde tatt den på nytt etter 2-3 uker, hvis resultatene hadde blitt de samme tyder det på høy reliabilitet. Sjansen for at elevene hadde lært noe av den første prøven er stor, og vurderte dette som lite hensiktsmessig for denne studien. En annen måte å teste reliabiliteten på er at flere forskere undersøker samme fenomen, hvis flere kommer frem til samme resultat er det et tegn på høy reliabilitet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Datamaterialet i en kvalitativ studie er mindre strukturert enn i kvalitative studier, og påvirkes av forskerens analyse og tolkning. Siden datamaterialet og undersøkelsesopplegget påvirkes av når og hvem som utfører og deltar i undersøkelsen, blir det derfor umulig å foreta en helt lik undersøkelse basert på samme undersøkelsesopplegg (Grønmo, 2016).

4.6.2 Generaliserbarhet

«To generalize is to claim that what is the case in one place or time, will be so elsewhere or in another time» (Payne & Williams, 2005, s. 296). Dette betyr at for denne studien skal kunne være generaliserbar, så skal man kunne bruke samme forskningsdesign med fire andre niende klasser å få samme resultat. Det kan være at man ville fått lignende resultat på den kvantitative delen, men sjansen for at den kvalitative delen hadde blitt lik er kanskje ikke så stor. I forskning skiller man mellom deduktiv og induktiv generalisering, der deduktiv generalisering er sikkert (steiner kan ikke fly) og induktiv generalisering er basert på sannsynlighet (alle barn liker is). Den sosiale verden er kompleks og preget av tilbakemeldingsmekanismer, vår bevissthet produserer meningsfylt atferd, og forskjellige elever, lærere eller forskere kan tillegge de samme handlingene ulike omstendigheter eller betydning (Payne & Williams, 2005). Jeg har samlet inn data fra 98 elever og to lærere som går på 9.trinn. Det er over 60 000 elever som går på 9.trinn i Norge i 2022, hvis jeg skulle kunne si noe generelt om brøkkunnskapene til elever som går på 9.trinn i Norge, så måtte utvalget vært betraktelig større. En vanlig innvending mot kvalitativ forskning er antall deltagere. Det er derfor viktig å se etter andre sammenhenger som viser resultatenes relevans (Thagaard, 2018). Jeg benytter flere metoder til å belyse problemstillingen, noe som styrker kvaliteten på datamaterialet (Grønmo, 2016). Funnene i denne oppgaven kan ikke overføres til all forskning om misoppfatninger knyttet til brøk på ungdomstrinnet, men resultatene kan bidra til større innsikt om temaet, samt øke oppmerksomheten rundt omkringliggende problemområder.

4.7 Etiske retningslinjer

Etiske retningslinjer står sentralt i all forskning som omhandler mennesker. Vi som forskere er derfor underordnet juridiske og etiske prinsipper (Johannessen et al., 2021). Dette betyr at vi må sørge for at informantene ikke blir satt i noen uheldige situasjoner som følge av forskningen. Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har utarbeidet forskningsetiske retningslinjer som skal hjelpe forskeren ta etiske hensyn i et forskningsprosjekt. Det at det har vært elever med i studien medfører flere og større etiske overveielser enn om det kun hadde vært lærere som hadde deltatt (Christoffersen & Johannessen, 2012).

4.7.1 Søknad til Norsk senter for forskningsdata

Hvis man skal behandle personopplysninger i et forskningsprosjekt må dette meldes til Norsk senter for forskningsdata (NSD). «Personopplysninger er enhver opplysning som kan knyttes til en person» (NSD). Stemme på lydopptak går inn under dette. Masteroppgaven er meldt inn og godkjent av NSD. I meldeskjemaet i søknaden beskrev jeg studiens forløp, hvordan jeg planla å samle data og oppbevaring av disse. Godkjenningen fra NSD ligger som vedlegg.

4.7.2 Samtykke

Innhenting av samtykke i forbindelse med datainnsamling er etisk praksis (Creswell, 2014). Det er også et krav fra personopplysningsloven, som sier blant annet at deltagere i et forskningsprosjekt skal informeres om formålet med prosjektet, og hva det innebærer å delta (Christoffersen & Johannessen, 2012). Samtykke bør gis uten ytre press, deltagelse skal ikke føre til noen fordeler eller ulemper for informantene. Hvis forskeren er til stede, kan det gi et slikt press. Jeg var som nevnt ikke til stede når elevene utførte den diagnostiske prøven, det var også lærerne som valgte ut og spurte elever om de ville delta på intervju. Det at jeg ikke var til stede eliminerer ikke all ytre press, det kan fortsatt være at elever føler på press fra lærer, eller at man føler man må delta fordi andre gjør det.

Det ble gitt ut et informasjonsskriv til elevene i forkant av den diagnostiske prøven, der de fikk informasjon om formålet med studien og at de som valgte å delta ville bli anonymisert. Det ble presisert at deltagelsen var frivillig, og at det ikke ga noen negative konsekvenser hvis man ikke ville delta. Prøvene ble nummererte på forhånd slik at lærerne kunne identifisere hvilken elev som hadde utført hvilken prøve, men jeg hadde ikke tilgang på navnene til elevene. Siden det ikke skulle innhentes noen personopplysninger i forbindelse med den diagnostiske prøven, trengte jeg ikke innhente skriftlig samtykke i denne delen av prosjektet.

Det ble valgt ut fire elever til intervju, lærerne sendte ut et informasjonsskriv og samtykkeerklæring om deltagelse til intervju til de elevene det gjaldt. Det ble igjen gitt informasjon om studiens formål, samt informasjon om intervjuet og hva det innebar for de å delta. Siden alle elevene var under 15 år, er det krav om samtykke fra foreldre eller foresatte.

Det ble spurt om samtykke til at jeg skulle få tilgang til den enkelte elev sin prøve i brøkregning fra før jul, og deltagelse til et intervju om oppgavene i denne prøven. En av kriteriene for informert samtykke er å gi tilstrekkelig og tydelig informasjon om studiens formål til deltagerne (Creswell, 2014).

Informasjonsskriv til lærerne og samtykkeerklæring ble sendt til begge lærerne i forkant av intervjuene slik at de kunne lese gjennom dette på forhånd. Før alle intervjuene gikk vi nøye gjennom samtykkeerklæringen, lærerne og elevene fikk mulighet til å spørre hvis de synes det var noe uoppklart. Jeg avsluttet med å presisere at de måtte ta kontakt hvis det var noe de lurte på i forbindelse med prosjektet, og at de når som helst kunne trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Informasjonsskriv og samtykkeerklæring ligger som vedlegg 1 og 2.

4.7.3 Konfidensialitet

Informasjon som kan tilbakeføres til enkeltpersoner, som eventuelt kommer frem under et intervju med en informant, er taushetsbelagt (Christoffersen & Johannessen, 2012). Datamaterialet skal ikke identifisere informantene, verken før, under eller etter forskningsprosjektet. For å sikre oppgavens konfidensialitet er det viktig at forskeren og informantene er enige om hvordan datamaterialet blir behandlet (Kvale et al., 2015). Deltagere i denne studien har fått informasjon om at det er kun masterstudent og veileder som har tilgang til datamaterialet, og at det ikke vil være mulig å identifisere noen av deltagerne i noen publikasjoner tilknyttet dette prosjektet. Opplysningene skal kun brukes i arbeidet med dette prosjektet, og vil bli slettet når masteroppgaven er godkjent. Det var viktig for meg at lærerne og elevene skulle føle seg trygge på å delta i studien. For å beskytte deltagerne i prosjektet er datamaterialet konfidensielt. Alle elever og lærere vil bli anonymisert i denne oppgaven, navnene som brukes er pseudonymer. Det kan komme frem sensitiv informasjon i samtaler med informanter, da er det viktig at dette blir slettet fra lydopptaket med en gang. Det kom ikke frem noen form for sensitiv informasjon under noen av intervjuene som ble gjennomført i forbindelse med dette prosjektet.

4.7.4 Forskerrollen

Det er viktig å være bevist på rollen som forsker. Innenfor forskning kan forskerens integritet og etiske beslutninger være avgjørende for kvaliteten på den vitenskapelige kunnskapen (Kvale et al., 2015). Jeg var bevist på min rolle under intervjuene, og forsøkte etter beste evne å innta en aktiv lyttende forskerolle, ved å komme med anerkjennende nikk eller respondere på en måte som gjorde at de følte seg hørt. Samtidig var jeg bevisst på å ikke legge noen føringer, og gi de god tid til å tenke seg om før de svarte. Dette for at informantene skulle få snakke mest mulig fritt, og ikke skulle føle noen hast på å svare. Målet mitt var at de skulle føle seg komfortable og at de var viktige for prosjektet. God forskingsadferd er avgjørende for å få frem kunnskapen fra informantene. Ærlighet, rettferdighet, kunnskap og erfaring er faktorer som kan være avgjørende for at informanter åpner seg (Kvale et al., 2015).

5 Fenomenologisk analyse av data

Forskere leser ofte dataene med et fortolkende blikk og ønsker å forstå meningene til informantene på et dypere nivå (Christoffersen & Johannessen, 2012). Analyse av meningsinnholdet er vanlig i fenomenologiske designer. Det finnes flere fremgangsmåter å analysere et kvalitativt materiale på, men jeg har valgt å benytte Kirsti Malterud (2011) sin fire-stegs modell for analyse av meningsinnhold. De fire hovedstegene er:

1. Helhetsinntrykk og sammenfatning av meningsinnhold
2. Koder, kategorier og begreper
3. Kondensering
4. Sammenfatning

Målet med disse stegene har vært å finne innhold i datamaterialet fra intervjuene som kan bidra til å besvare oppgavens problemstilling og forskningsspørsmål. Ved å bruke denne modellen er det lettere for meg å dokumentere hvordan jeg har kommet frem til tolkninger av materialet, noe som gir forskningen høyere reliabilitet (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Første steget er å skaffe seg et *helhetsinntrykk og sammenfatning av meningsinnholdet*, data materialet ble lest gjennom og jeg noterte ned sentrale og interessante temaer. I neste steg ble dataene *kodet og kategorisert*. Koding defineres som en prosess der data blir brutt ned, konseptualisert og deretter satt sammen igjen (Dalen, 2011). Ved å kode transkripsjonen fra intervjuene kunne jeg sortere utsagn etter de ulike temaene, og trekke ut det som knyttet seg til begrep eller tema som var relevant for oppgaven. Kategorier som utledes fra problemstilling, hypoteser og nøkkelbegreper kalles deduktiv koding, og kategorier som blir utledet fra selve datamaterialet kalles induktive koder. Jeg benyttet en blanding, noe som kalles en abduktiv tilnærming. Etter kodingen ble følgende kategorier fremstilt: Fordeler med diagnostisk prøve, ulemper med en diagnostisk prøve, forståelse for brøkbegrepet og motivasjon for matematikk. Dette er en del av *kondenseringen*, som er det tredje steget. Datamaterialet ble sortert i en tabell etter de ulike kategoriene, slik som i eksempelet under (*Tabell 1*). Det siste steget handler om å *sammenfatte* dataene. I dette steget vurderte jeg om min sammenfattede beskrivelse var i tråd med det inntrykket som kom frem i det opprinnelige datamaterialet.

Tabell 1: Utklipp av data

Tema	Informant	Utsagn
Fordeler med en diagnostisk prøve	Ari (lærer) Edvard (elev)	«Jeg kunne gjort det i et tema hvis de virkelig trenger det» «Det er jo fint å se hva elevene kan. Det kan man se på en vanlig prøve også, men da er det kanskje ikke så lett å jobbe med det etterpå. Jeg ser at det kan være stor verdi i en sånn prøve» «Jeg sleit litt på den der prøven, det kan hende jeg hadde gjort det bedre hvis jeg hadde hatt om brøk før prøven» «Hvis jeg hadde fått vite at jeg skulle hatt denne prøven om en uke nå så hadde jeg jo øvd mye mer»
Ulemper med en diagnostisk prøve	Ari (lærer) Robert (lærer)	«Jeg tror det hadde vært veldig fint å bruke en diagnostisk prøve til å planlegge undervisning, men samtidig tenker jeg på tidsbruk da» «Det er mye elevene skal gjennom på kort tid, så det må prioriteres litt også» «Hvis noen elever synes det er vanskelig fra før, også får de en prøve som de ikke har noen forutsetninger for å fikse så er jeg redd det gjør vondt verre, skal jeg være ærlig»
Forståelse for brøkbegrepet	Ari (lærer) Edvard (elev) Lise (elev)	«Jeg tenker at brøk er sånn i midten et sted, og de som sliter med brøkregning sliter ofte med mange andre ting også, blant annet algebra, det henger mye sammen» «Jeg tenker på en viss del av 100 prosent» «Jeg forbinder det på en måte med prosent, eller hvor mange deler det blir av en ting da» «Jeg ser for meg en brøk, et tall over og under brøkstreken. Og hvor mye noe er av en helhet»
Motivasjon for matematikk	Tin (elev) Tin (elev) Amina (elev) Robert (lærer)	«Det er jo egentlig gøy da, spesielt når du kan det, spesielt når du kan det, da er det jo gøy da, fordi du blir interessert. Men når du ikke kan det og liksom føler deg litt utafor, det synes jeg er kjedelig da» «Det er gøy når man mestrer det» «Når man synes noe er vanskelig, også spør man om hjelp, også får man det til, så blir det gøy å bli utfordret». «Hvor vanvittig viktig det er å jobbe med motivasjon for de elevene som føler at brøk er det verste, og dette kan dem ikke» «Å bygge opp motivasjonen, det er kanskje det viktigste vi mattelærere gjør»
Andre interessante utsagn	Lise (elev)	«Å ja, DU nå, det var det jeg hadde fargelagt ja» «Da hadde jeg svart $\frac{1}{8}$»

6 Resultater

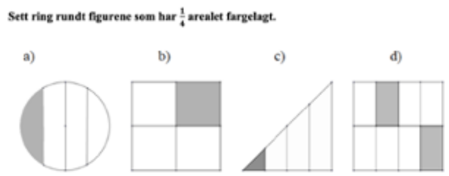
Forskningsdesignet inneholder en kombinasjon av kvantitative og kvalitative undersøkelser. For å utnytte de flersidige og helhetlige fordelene med en slik kombinasjon, er det ifølge Grønmo (2016) en forutsetning at man legger vekt på integrering og sammenlikning av resultatene fra begge undersøkelsene. I dette kapittelet vil jeg presentere resultatene fra den diagnostiske prøven i brøk som elevene gjennomførte og funnene fra analysen av intervjuene. Jeg vil først presentere testresultatet fra den diagnostiske prøven som jeg anser som relevant for oppgaven, fullstendig testresultat ligger som vedlegg 7 i slutten av oppgaven. Jeg vil se på resultatene for alle fire klassene samlet. Enkeltoppgaver og området som helhet for de ulike misoppfatningene vil også bli analysert. Jeg vil til slutt se på funnene fra intervjuene.

6.1 Resultater fra diagnostisk prøve knyttet til brøk

Jeg har valgt å dele opp testresultatene hovedsakelig i riktige svar og mulige misoppfatninger. Grunnen til at jeg skriver mulige misoppfatninger og ikke kun misoppfatninger, er fordi det kan også være at eleven kun har tatt feil på denne oppgaven, og at det ikke er en gjentagende feil eleven gjør. Det er først når en elev gjør den samme feilen gjentatte ganger at jeg vil kalle det en misoppfatning. Det kan være at noen av oppgavene avdekker andre mulige misoppfatninger enn det den er ment til å avdekke. Feilsvar som ikke kan kategoriseres som den aktuelle mulige misoppfatningen er ikke er tatt med i noen av diagrammene.

6.1.1 Nevner representerer antall deler – uavhengig av størrelse

Oppgave 1, 2 og 16a er ment til å kunne avdekke misoppfatningen nevner representerer antall deler - uavhengig av størrelse.



	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: b og d	18	12	8	15	53
a, b og d	4	4	2	0	10
b	3	1	1	1	6
a og b	0	0	0	1	1
a, b og c (mulig misoppfatning)	1	3	5	2	11
Alle (mulig misoppfatning)	1	4	6	5	16
Ikke svart	0	0	1	0	1
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 11: Oppgave 1

På oppgave 1 (Figur 11) er svarene b og d regnet som riktig svar, og svarene a, b og c eller alle er regnet som mulige misoppfatninger.

Oversikten viser hvilket kosthold kaniner bør ha.

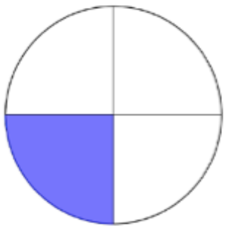
Hvor storbrøkdel av kostholdet til kaniner bør være høy, ifølge oversikten?

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 3/4	6	9	3	6	24
Riktig svar, men oppgir svaret i prosent (75%)	3	0	0	0	3
Oppgir svaret i prosent (60-70%), men feil svar.	2	1	2	0	5
Mer enn halve (5/8, 2/3, 3/5, 4/7 eller 7/10)	5	8	6	6	25
Halve (1/2)	7	2	3	2	14
1/4 (mulig misoppfatning)	0	2	5	3	10
1/4, men har argumentert med at det ikke er areal.	1	0	0	0	1
Annet	0	0	4	3	7
Ikke svart	3	2	0	4	9
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 12: Oppgave 2

På oppgave 2 (Figur 12) er svaret $\frac{3}{4}$ regnet som riktig svar, og svaret $\frac{1}{4}$ er regnet som mulig misoppfatning.

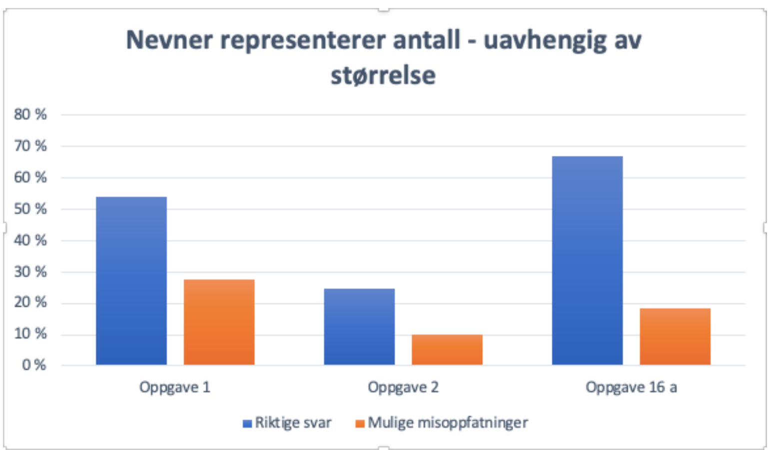
a) Fargelegg $\frac{1}{6}$ av det hvite området i sirkelen.



	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: fargelegger 1/6 av det hvite området i sirkelen	18	16	14	18	66
Fargelegger for liten eller for stor del (mulig misoppfatning)	6	4	4	4	18
Ikke svart	3	4	5	2	14
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 13: Oppgave 16a

På oppgave 16a (Figur 13) er riktige svar der det er fargelagt 1/6 av det hvite området i sirkelen, de som har fargelagt for liten eller for stor del er regnet som mulig misoppfatning.



Figur 14: Diagram over antall riktige svar og mulige misoppfatninger til oppgaver som er ment til å kunne avdekke misoppfatningen: nevner representerer antall deler - uavhengig av størrelsen.

Figur 14 (side 42) viser en oversikt over oppgave 1, 2 og 16a og elevenes riktige svar og mulige misoppfatninger. Som figuren viser, er det noe variasjoner i antall mulige misoppfatninger for hver av oppgavene. Det kommer frem av oppgavene at mellom 10 og 30 prosent av elevene er i misoppfatningen om at nevner representerer antall, uavhengig av størrelse (Figur 14, side 42). Det kan også være verdt å merke seg at over 60 prosent av elevenes besvarelser på oppgave 2 ikke regnes som riktig eller som mulige misoppfatninger.

6.1.2 Jo større nevner (eller teller), jo større eller mindre brøk

Oppgave 3, 4, 13 og 14 er ment til å kunne avdekke misoppfatningen jo større nevner (eller teller), jo større eller mindre brøk.

Henrik og Kasper deler likt $\frac{1}{2}$ L brus.

Hvor mange liter får de hver?

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1/4 eller 0,25 liter hver	20	18	17	19	74
0,5 liter hver (mulig misoppfatning)	4	5	3	2	14
75 ml hver	1	0	0	0	1
7,25 dl hver	1	0	0	0	1
0,75 liter hver (1/2 = 15 eller 1,5)(mulig misoppfatning)	1	0	1	0	2
2,5 liter hver	0	0	1	0	1
1/5 liter hver	0	0	0	1	1
Annet	0	1	0	1	2
Ikke svart	0	0	0	2	2
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 15: Oppgave 3

På oppgave 3 (Figur 15) er $\frac{1}{4}$ L eller 0,25 liter riktig svar, og 0,5 liter eller 0,75 liter er regnet som mulige misoppfatninger.

Faren til Hanna spør om hun kan pante flaskene som ligger i garasjen.

Hvis Hanna panter flaskene, skal hun få $\frac{1}{5}$ av panten som lønn.

Hanna ønsker mer enn det i lønn.

Hvor stor brøkdel kan Hanna foreslå at hun skal få?

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: alt over 1/5 til og med 1	26	23	18	19	86
2/10 (mulig misoppfatning)	0	1	0	0	1
1/6 (mulig misoppfatning)	0	0	1	1	2
1/5 (misforstått?)	0	0	1	0	1
Ikke svart	1	0	3	4	8
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 16: Oppgave 4

På oppgave 4 (Figur 16) er alt over $\frac{1}{5}$ til og med 1 regnet som riktig svar. De som har svart $\frac{2}{10}$ eller $\frac{1}{6}$ har jeg regnet som mulig misoppfatning.

Plasser brøkene på tallinjen.

$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{4}{3}$

0 1 2

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 5/8, 2/3, 7/10, 4/5, 4/3	5	8	4	3	20
Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken	5	2	0	0	7
Jo høyere siffer, jo høyere verdi har brøken	0	0	1	1	2
Har alle riktig utenom én	3	4	5	5	17
Har to eller tre rette	3	5	3	3	14
Setter 4/3 utenfor tallinjen (Ser kanskje på tallinjen som én hel)	4	4	3	2	13
Gjetter?	2	1	2	4	9
Ikke svart	5	0	5	6	16
Tilsammen	27	24	23	24	98

Figur 17: Oppgave 13

Oppgave 13 (Figur 17) kan avdekke flere mulige misoppfatninger, og jeg har derfor delt opp feilsvar etter de ulike misoppfatningene. Riktig svar i stigende rekkefølge er: $\frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{7}{10}\ \frac{4}{5}\ \frac{4}{3}$ Brøkene trengte ikke være plassert helt nøyaktig på tallinjen, men hvis noen for eksempel hadde plassert $\frac{4}{5}$ etter 1 eller $\frac{4}{3}$ før 1, så ble det regnet som feil selv om brøkene var i riktig rekkefølge. Det var kun to elever som hadde tegn på misoppfatningen jo større nevner (eller teller), jo større eller mindre brøk, og de hadde plassert brøkene langs tallinjen etter stigende siffer på både teller og nevner, slik som dette: $\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{7}{10}$

Sett en ring rundt den største brøken.

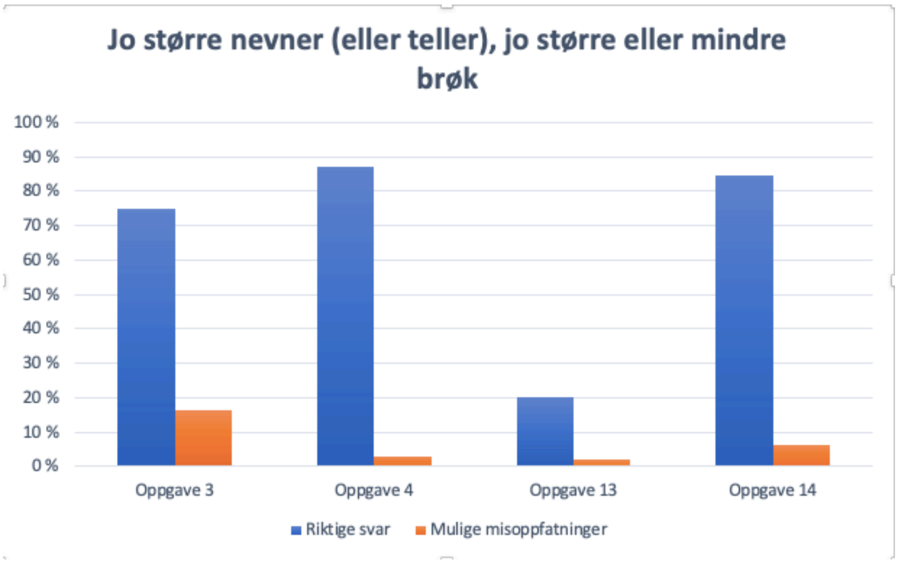
$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{11}$

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1/5	24	20	18	21	83
Feil svar: 2/11 (mulig misoppfatning)	1	1	2	2	6
De er like store	2	3	0	1	6
Ikke svart	0	0	3	0	3
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 18: Oppgave 14

Oppgave 14 (Figur 18) gir to svaralternativer, der $\frac{1}{5}$ er riktig svar, men det er også noen som har valgt å sette ring rundt begge. Jeg har ikke regnet dette med som mulig misoppfatning, da det ikke gjelder noen av de omtalte misoppfatningene. Kun de som har svart $\frac{2}{11}$ regnes med som mulige misoppfatninger.

Resultatene for oppgavene knyttet til misoppfatningen jo større nevner (eller teller), jo større eller mindre brøk viser at misoppfatningen er lite utbredt blant de 98 elevene på 9. trinn (Figur 19, side 45). Oppgave 3 er den av de fire oppgavene som har størst utslag for mulige misoppfatninger, mens oppgave 13 har færrest mulige misoppfatninger. Oppgave 13 skiller seg derimot ut ved at under 25 prosent av elevbesvarelsene enten har riktig svar eller kan knyttes til mulige misoppfatninger. Samlet sett utgjør mulige misoppfatninger i denne kategorien (27 mulige misoppfatninger) om lag 7 prosent av alle svarene på disse fire oppgavene (98 besvarelser og fire oppgaver gir 392 svar). Dette gjør "jo større nevner (eller teller), jo større eller mindre brøk" til den kategorien med færrest mulige misoppfatninger.



Figur 19: Diagram over antall riktige svar og mulige misoppfatninger til oppgaver som er ment til å kunne avdekke misoppfatningen: Jo større nevner (eller teller), jo større eller mindre brøk.

6.1.3 Brøkstrek er lik desimalkomma

Oppgave 5 og 6 er ment til å kunne avdekke misoppfatningen brøkstrek er lik desimalkomma.

Hvilket tall har samme verdi som $\frac{3}{4}$?

☐ 0,75 ☐ 3 ☐ 3,4

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 0,75	26	22	23	22	93
Både 0,75 og 3	1	2	0	0	3
Feil svar: 3 (mulig misoppfatning)	0	0	0	1	1
Feil svar: 3,4 (mulig misoppfatning)	0	0	0	1	1
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 20: Oppgave 5

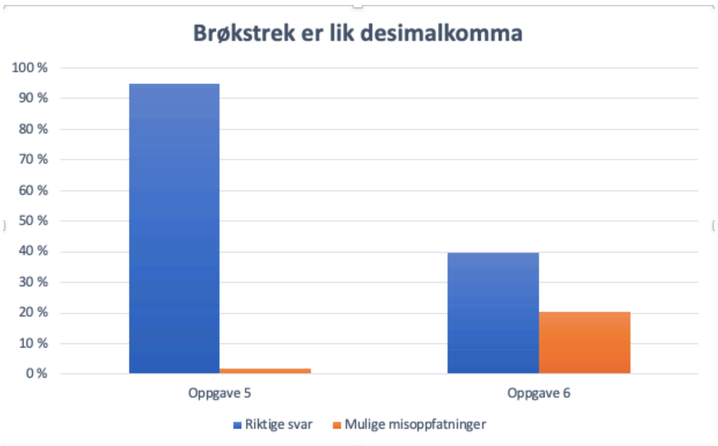
På oppgave 5 (Figur 20) er riktig svar 0,75. 3,4 er regnet som mulig misoppfatning, det er det én elev som har svart. Det er én elev som har svart 3. Jeg valgte å regne dette også som en mulig misoppfatning.

Skriv en brøk som har samme verdi som 1,4.

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1 4/10, 1 2/5, 14/10 eller 7/5	11	13	8	7	39
1/4 eller 2/8 (mulig misoppfatning)	2	3	2	3	10
1,4/10, 14/100, 14/104 eller 4/10 (mulig misoppfatning)	3	3	0	3	9
14/20 (Addert nevnerne i regnestykket 10/10 + 4/10)	2	2	1	0	5
1/5, 7/10, 7/7, 1/7 eller 2/2,8 (Har prøvd å regne det ut)	3	0	3	2	8
3/5, 5,4/5, 0,25, 1,4/5 eller 6/4 (mangler hvordan hen tenker)	2	1	3	1	7
1 1/4 (mulig misoppfatning)	0	0	1	0	1
ikke svart	4	2	5	8	19
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 21: Oppgave 6

Riktig svar på oppgave 6 (Figur 21) er $1\frac{4}{10}$, $1\frac{2}{5}$, $\frac{14}{10}$ eller $\frac{7}{5}$. Denne oppgaven hadde veldig mange ulike feilsvar, de som jeg har tatt med som mulige misoppfatninger er $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{1{,}4}{10}$, $\frac{14}{100}$, $\frac{14}{104}$, $\frac{4}{10}$ eller $1\frac{1}{4}$, selv om det er svarene $\frac{1}{4}$ og $\frac{2}{8}$ som kanskje er de som tydeligst indikerer at eleven er i en misoppfatning.



Figur 22: Diagram over antall riktige svar og mulige misoppfatninger til oppgaver som er ment til å kunne avdekke misoppfatningen: Brøkstrek er lik desimalkomma.

Resultatene for oppgave 5 og 6 (Figur 22) viser store forskjeller mellom de to oppgavene og mulige misoppfatninger. På oppgave 5 har over 90 prosent av elevene riktige svar og kun 2 av 98 elever har avgitt et svar som kan vise mulige misoppfatninger. Resultatene for oppgave 6 viser derimot at om lag kun 40 prosent av de avgitte svarene er riktige, og hele 20 prosent av svarene kan være mulige misoppfatninger. En forskjell i oppgavenes formulering er at oppgave 5 (Figur 20, side 44) har svaralternativer, mens oppgave 6 (Figur 21) ikke har svaralternativer.

6.1.4 Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken

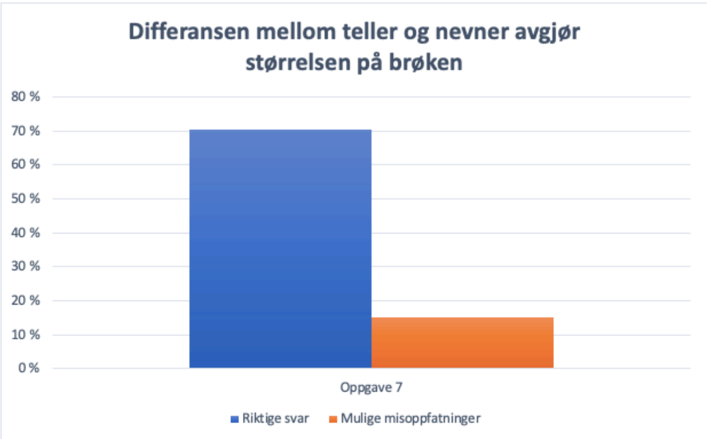
Oppgave 7 (Figur 23) er ment til å kunne avdekke misoppfatningen differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken.

Skriv en brøk som har samme verdi som $\frac{6}{7}$.

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 12/14, 60/70	17	18	16	18	69
4/5, 9/10 eller 3/4 (mulig misoppfatning)	6	3	4	1	14
7/6 (mulig misoppfatning)	0	0	1	0	1
svarer med prosent eller desimaltall	1	2	0	0	3
ikke svart	3	1	2	5	11
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 23: Oppgave 7

Riktig svar på oppgave 7 er eksempelvis $\frac{12}{14}$ eller $\frac{60}{70}$. De som har gitt et svar der differansen mellom teller og nevner er én ($\frac{4}{5}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{4}$ eller $\frac{7}{6}$) har jeg regnet som mulige misoppfatninger.



Figur 24: Diagram over antall riktige svar og mulige misoppfatninger til oppgaver som er ment til å kunne avdekke misoppfatningen: Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken.

"Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken" er den eneste av de mulige misoppfatningene som kun er representert med én oppgave. Resultatene viser (Figur 24) at om lag 70 prosent av elevene har svart riktig og at omtrent 15 prosent av elevene kan være i misoppfatningen og anser differansen mellom teller og nevner som viktig for å vurdere brøkens størrelse.

6.1.5 Teller (eller nevner) eller prosent er et isolert tall

Oppgave 8 og 9 er ment til å kunne avdekke misoppfatningen teller (eller nevner) eller prosent er et isolert tall.

I 7. klasse ved Toppen skole er 6 av 24 elever gutter.

Hvor mange prosent av elevene er gutter?

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 25%	15	12	16	11	54
Svart med brøk: 1/4	2	4	1	2	9
6 % eller 24% (mulig misoppfatning)	0	0	2	2	4
4% eller 40% fordi 6*4 =24 eller 24/6=4	3	3	0	1	7
Regnet feil	6	2	2	4	14
Ikke svart	1	3	2	4	10
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 25: Oppgave 8

Riktig svar på oppgave 8 (Figur 25) er 25%. Jeg har regnet 6% eller 24% som mulige misoppfatninger.

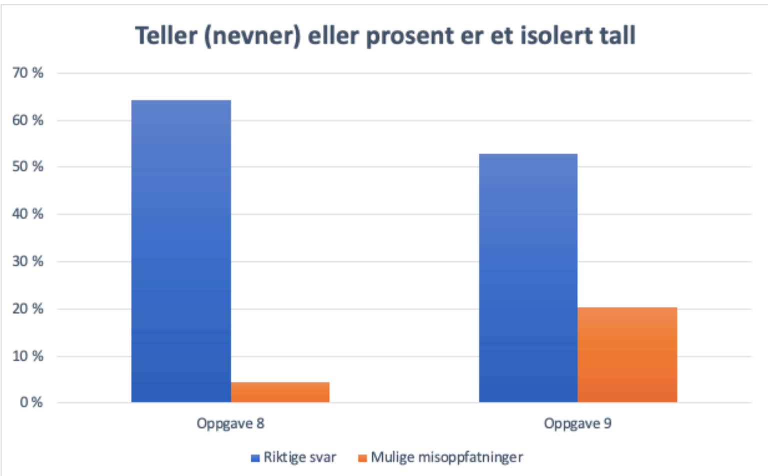
I kantina på skolen til Truls har prisen for juice økt fra 10 kr til 15 kr.

Hvor mange prosent har prisen økt med?

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 50%	15	12	13	12	52
5% fordi 1 = 1% (mulig misoppfatning)	4	3	6	6	19
15% siden 10 = 100% (mulig misoppfatning)	0	0	0	1	1
Regnet feil	5	9	4	2	20
Ikke svart	3	0	0	3	6
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 26: Oppgave 9

På oppgave 9 (Figur 26) er det riktige svaret 50%. Av feilsvar så har jeg valgt å ta med 5% og 15% som mulige misoppfatninger.



Figur 27 Diagram over antall riktige svar og mulige misoppfatninger til oppgaver som er ment til å kunne avdekke misoppfatningen: Teller (eller nevner) eller prosent er et isolert tall.

Figur 27 viser en oversikt over riktige svar og mulige misoppfatninger på oppgave 8 og 9. Kun fire av svarene på oppgave 8 kan være mulige misoppfatninger, mens hele 20 prosent av elevsvarene på oppgave 9 kan være mulige misoppfatninger. På oppgave 8 og 9 er det henholdsvis 24 og 26 elever som har svart feil eller ikke svart.

6.1.6 Tar ikke hensyn til helheten (eller misforstår den)

Oppgave 10 og 16b er ment til å kunne avdekke misoppfatningen tar ikke hensyn til helheten (eller misforstår den). Oppgave 10 krever at elevene kan regne med prosent, mens oppgave 16b krever at elevene kan oversette fra brøk til illustrasjon. Begge oppgavene krever en fleksibilitet i hva som blir oppfattet som helhet.

En butikk selger t-skjorter. I november kostet ei t-skjorte 100 kr.

I desember satte butikken ned prisen på t-skjorta med 20%. I januar satte butikken ned prisen med nye 20 %.

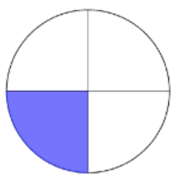
Hvor mye kostet t-skjorta i januar?

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 64 kr	4	6	5	2	17
60 kr (mulig misoppfatning)	14	11	13	12	50
80 kr (trekker fra 20% kun én gang)	4	1	0	2	7
Regnet feil	4	1	4	3	12
Ikke svart	1	5	1	5	12
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 28: Oppgave 10

Riktig svar på oppgave 10 (Figur 28) er 64 kr, og det kan virke som denne oppgaven var vanskelig for mange, da det kun var 17 elever som hadde riktig svar. Jeg har regnet svarene 60 kr og 80 kr som mulige misoppfatninger. Det var veldig mange elever som klarte å regne ut den første prisjusteringen, men når de måtte bytte helhet så var det 50 av elevene som fortsatte å regne med 100 kr som helhet.

a) Fargelegg $\frac{1}{6}$ av det hvite området i sirkelen.

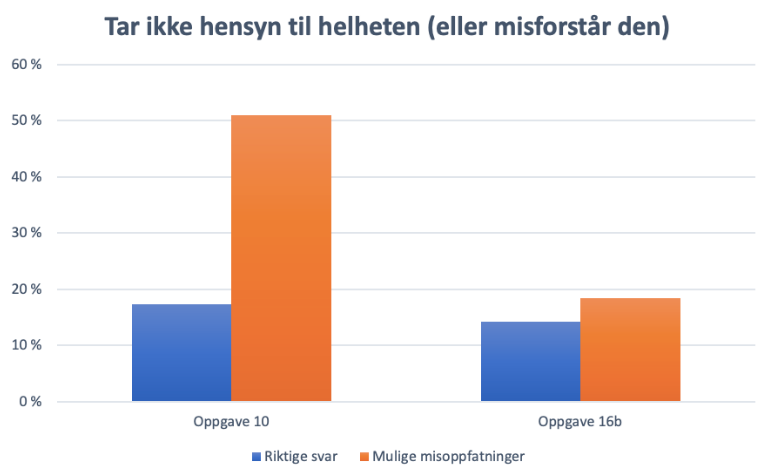


	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1/8	4	4	2	4	14
3/8 (Har tatt med det blå feltet)	4	6	9	5	24
1/6 (mulig misoppfatning)	3	5	2	8	18
Andre diverse feil	6	4	3	1	14
Ikke svart	10	5	7	6	28
Til sammen	27	24	23	24	98

b) Hvor stor del av hele sirkelen har du nå fargelagt?

Figur 29: Oppgave 16b

I oppgave 16b må eleven bytte helhet fra oppgave 16a, der helheten var kun $\frac{3}{4}$ av sirkelen, til hele sirkelen. Riktig svar på denne oppgaven er $\frac{1}{8}$, det var det kun 14 elever som svarte. Det var 24 elever som svarte $\frac{3}{8}$, jeg har ikke regnet med det som en mulig misoppfatning, da jeg har mistanke om at det skyldes en misforståelse. Selv om jeg understreket «du nå» i oppgaveteksten, så ser det ut som mange av elevene har tatt med det blå feltet. Det at oppgaven er den siste oppgaven i oppgavesettet kan også bidra til at elevenes konsentrasjon ikke er så god som den ville vært hvis den hadde kommet tidligere i oppgavesettet. Jeg har kodet svaret $\frac{1}{6}$ som mulig misoppfatning, da de ikke har tatt hensyn til helheten eller ikke har klart å bytte helhet.



Figur 30: Diagram over antall riktige svar og mulige misoppfatninger til oppgaver som er ment til å kunne avdekke misoppfatningen: Tar ikke hensyn til helheten (eller misforstår den).

Resultatene over elevenes svar på oppgave 10 og 16b (Figur 30) knyttet til misoppfatningen "tar ikke hensyn til helheten (eller misforstår den)" skiller seg fra de andre resultatene ved at det på alle oppgavene er større andel svar som kan være mulige misoppfatninger enn det er riktige svar. På oppgave 10 har over 50 prosent av de 98 elevene svart at t-skjorta kostet 60 kroner i januar, noe som kan være en mulig misoppfatning der elevene ikke tar hensyn til helheten. På oppgave 16b er det også større andel mulige misoppfatninger enn det er riktige svar, men andelen mulige misoppfatninger er litt under 20 prosent, og skiller seg dermed ikke særlig fra flere av de andre oppgavene. Oppgaven skiller seg derimot fra alle andre oppgaver ved at det er hele 28 av 98 elever som ikke har besvart oppgaven, noe som gjør det til den oppgaven flest elever ikke har svart på.

6.1.7 Andre problemer knyttet til brøk

Oppgave 11, 12 og 15 er ment til å kunne avdekke andre problemer knyttet til brøk.

Skriv en brøk som har en verdi mellom $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$.

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1/2, 15/30 eller 3/6	19	17	13	12	61
svart det samme eller utvidet brøkene: feks. 1/3, 2/6 og 4/6	2	2	3	2	9
Brukt desimaltall som teller: 1,5/3	2	3	2	3	10
Svaret er lavere enn den minste brøken	0	1	0	0	1
Svaret er høyere enn den største brøken	0	1	0	0	1
Ikke svart	4	0	5	7	16
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 31: Oppgave 11

Riktig svar på oppgave 11 (Figur 31) er for eksempel $\frac{1}{2}$, $\frac{15}{30}$ eller $\frac{3}{6}$. Oppgaven har til hensikt å avdekke om elevene klarer å angi en brøk mellom to brøker, med samme nevner. Jeg har derfor regnet alle feilsvar som mulige misoppfatninger, og ut ifra Solem med kollegaers (2017) definisjon på brøk anses $\frac{1,5}{3}$ som feilsvar, selv om dette er et feilsvar som kanskje viser mer forståelse for brøkbegrepet en de andre feilsvarene.

Regn ut:

$$2 \cdot \frac{3}{6} =$$

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1 eller 6/6	9	11	10	8	38
6/12 (utvidet brøken)	16	11	8	10	45
6/3 eller 12/6 (Har snudd brøken og regnet feil)	0	0	1	0	1
72 (2 * 36 = 72)	0	1	0	0	1
Har prøvd å løse det som en ligning	0	1	1	0	2
Har regnet riktig, men har svart at det blir 6	0	0	0	1	1
Ikke svart	2	0	3	5	10
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 32: Oppgave 12

Oppgave 12 (Figur 32) tester regning med brøk, spesifikt multiplikasjon av brøk. Oppgaven krever ikke at eleven må kunne en algoritme for multiplikasjon av to brøker, men da må eleven eksempelvis inneha kunnskapen om at $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, og resonere seg frem til at to halve blir en hel. 38 elever svarte 1 eller $\frac{6}{6}$, det får meg til å lure på om de elevene som svarte $\frac{6}{6}$ ikke har en like stor forståelse for brøkbegrepet som de som svarte 1. Også på denne oppgaven har jeg regnet alle feilsvar som mulige misoppfatninger.

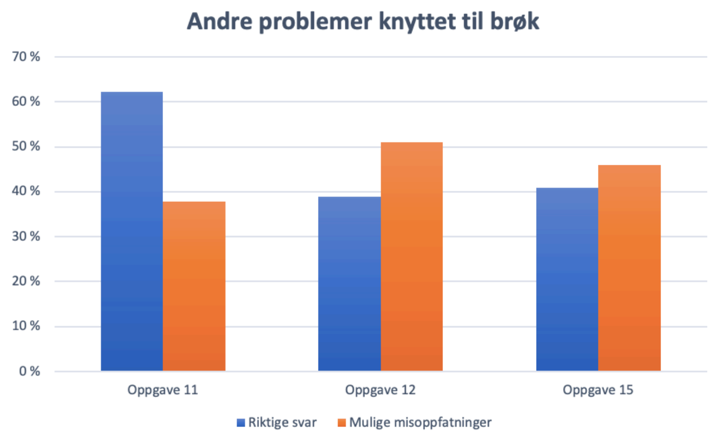
I et bakeri ble $\frac{1}{3}$ av melet bruk til å bake brød, og $\frac{1}{4}$ av melet ble bruk til å bake kaker.

Hvor stor brøkdel av melet har blitt brukt?

	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 7/12	8	14	7	11	40
addert tellere og nevnere uten å gjøre om nevnere først: 2/7	6	0	4	4	14
lagt sammen tellere og tatt med den største nevneren: 2/4	2	3	0	2	7
Svart i prosent: 58%	3	0	0	0	3
addert eller multiplisert tellere og multiplisert nevnerne: 2/12	1	0	0	1	2
Andre diverse feil	5	5	7	2	19
Ikke svart	2	2	5	4	13
Til sammen	27	24	23	24	98

Figur 33: Oppgave 15

Oppgave 15 (Figur 33) er også en oppgave som tester regning med brøk. Denne oppgaven krever at elevene kan addere to brøker med ulik nevner, for å forstå addisjon av brøk er det viktig med en god forståelse for brøk og likeverdige brøker. Den mest vanlige misoppfatningen i denne prosessen er at elevene adderer teller med teller og nevner med nevner. Dette skyldes at de ser på teller og nevner som separate tall som operere uavhengig av hverandre, og ikke hele brøken som et tall. Når elevene i tillegg må utvide brøkene slik at de får samme nevner kan det oppstå flere feil (McIntosh et al., 2007). Alle feilsvar på denne oppgaven er regnet som mulige misoppfatninger.



Figur 34: Diagram over antall riktige svar og mulige misoppfatninger til oppgaver som er ment til å kunne avdekke misoppfatningen: Andre problemer knyttet til brøk.

Figur 34 viser en oversikt over resultatene for oppgave 11, 12 og 15, som alle undersøker andre utfordringer knyttet til brøkbegrepet. Alle oppgaver har en stor andel av svar som kan være mulige misoppfatninger. I oppgave 11 kan over 35 prosent av svarene være misoppfatninger, og i oppgave 12 og 15 kan henholdsvis om lag 50 og 45 prosent av svarene være misoppfatninger. Oppgave 12 og 15 har større andel mulige misoppfatninger enn riktige svar. De tre oppgavene om andre problemer knyttet til brøk skiller seg fra de andre oppgavene i oppgavesettet ved at alle feilsvar regnes som mulige misoppfatninger.

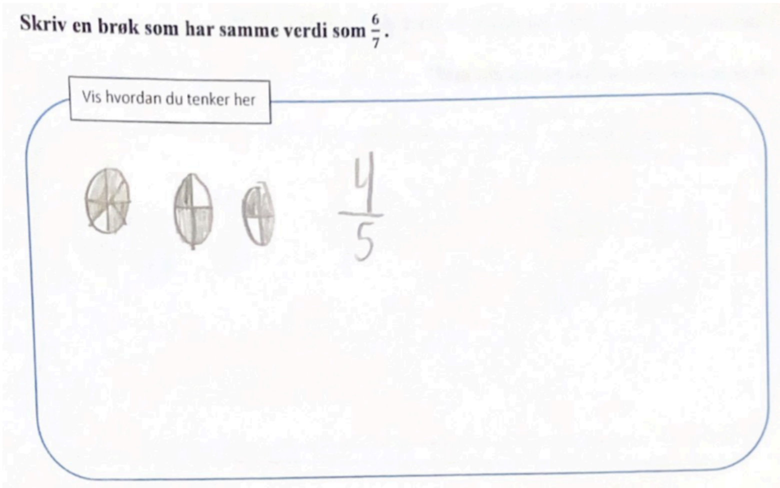
6.2 Resultater fra intervju med elever og lærere

Jeg vil presentere resultatene fra analysen av intervjuet med elevene ut ifra sentrale temaer som er relevante for problemstillingen og forskningsspørsmålene i oppgaven. De ulike temaene er forståelse av brøkbegrepet, motivasjon for brøk i matematikk og fordeler og utfordringer med diagnostisk prøve. Resultatene vil bli presentert med direkte sitater fra elevene og lærerne, beskrivelser de har om sine tanker og følelser om brøk, matematikk og den diagnostiske prøven, og eventuelle oppfølgingsspørsmål. Ved lengre utdrag av direkte sitater vil det brukes forkortelser på lærernes pseudonymer, for eksempel A for Ari. Intervjuer vil bli tiltalt som H for Hege. Jeg vil også vise noen eksempler av oppgavene fra prøvene til elevene.

6.2.1 Forståelse av brøkbegrepet

Brøk er et komplekst begrep som gjør at elevene kan ha flere og ulike misoppfatninger knyttet til emne, noe begge lærerne gir utrykk for under intervjuene. De sier at brøk er noe de ser elevene streve med, og at forkorting av brøk er det mange elever som sliter med. Regning med brøk sier de også det er en del elever som ikke forstår, og at det kan være vanskelig å få elevene til å forstå. Noe Robert (lærer) gir utrykk for i følgende beskrivelse av noen elevers forståelse for brøkbegrepet: *«De blander veldig, de tror man skal ha fellesnevner når det er ganging og deling og sånn. Kanskje det vanskeligste å forstå er det med at ganging og deling er motsatte operasjoner, og snu bakerste brøken og sånn når man deler. Plusse brøk kan man jo tegne opp og prøve å vise hvert fall. Men det er mye forvirring rundt brøkregning, det synes jeg»*. Det kan også virke som det kan være vanskelig for lærerne å skjønne hva elevene tenker feil, Robert forklarer *«hvis det er minus, også står det to femtedeler så blir det tre femtedeler, assa det er mye rart, mye man ikke skjønner hva de har tenkt»*. En vanlig misoppfatning blant elever er at teller og nevner er uavhengig av hverandre, dette bekrefter Robert *«Mange elever ser ikke på brøk som et tall, som en verdi, det er bare en sånn greie, det ser man jo på ligninger med brøk. De kan regne ligninger veldig fint egentlig, også introduserer man et brøkledd i den ligningen og da stopper det for 70% av elevene, da får de bare helt sperre med en gang og aner ikke hva de skal gjøre og skjønner ikke hva dette er* *slags rare greier. Hadde det stått 0,75 der så hadde det vært greit, men står det ¾ så stopper det. Dem ser ikke helt de logiske greiene, og det har noe med modenhet å gjøre»*. På spørsmål om brøk er vanskeligere eller lettere enn andre emner i matematikk, så svarer Ari (lærer) *«Jeg tenker at brøk er sånn i midten et sted, og de som sliter med brøkregning sliter ofte med mange andre ting også, blant annet algebra, det henger mye sammen»*. Han sier også at det er mange elever som ikke forstår brøk, og at han blant annet har opplevd at elever ikke forstår at brøkstreken er et deletegn.

Tin klarer å komme frem til mange riktige svar på en del av oppgavene ved å visualisere, han bruker tegninger og logiske resonnementer for å komme frem til løsninger, men han klarer sjeldent å forklare hvorfor. Han sier det første han tenker på når han hører ordet brøk er deling *«Det var en ting jeg lærte på barneskolen litt sånn sent, det var en sånn video»* Så fortsetter han med å synge *«deling og brøk det er det samme»*. Han bruker sirkler som hjelpemiddel på mange av oppgavene, på spørsmål om det sier han *«Det er sikkert en gammel vane fra barneskolen»*. Han sier selv at han det ikke blir så nøyaktig, og at han kanskje innimellom gjetter, som i samtalen under om oppgave 7 (Figur 35).



Figur 35: Oppgave 7 - fra Tin sin prøve.

H: *«Hvordan har du kommet frem til det?»*

T: *«Der var det kanskje også litt sånn gjetting da, jeg prøvde å tegne det da, jeg prøvde å finne en brøk som var lik.»*

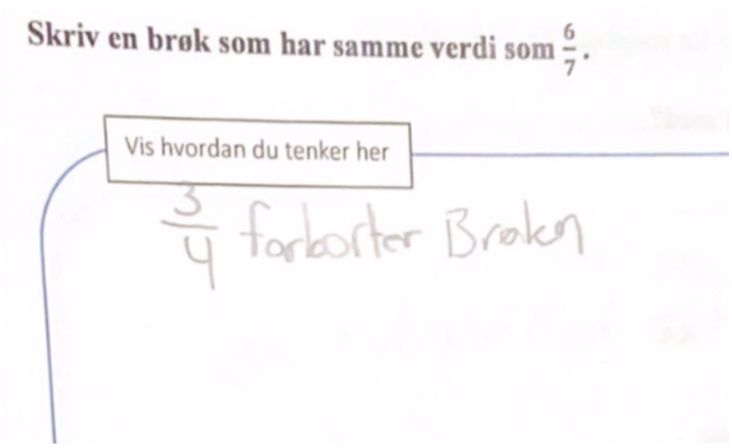
H: *«Er det en annen måte du kunne gjort det på, uten å tegne?»*

T: *«Kunne jeg ha delt seks på syv også, eller?»*

H: *«Da hadde du funnet verdien av brøken som et desimaltall.»*

T: *«Ja, da blir det det samme.»*

Selv om eleven ser ut til å kunne være i misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken» så viser det seg under samtalen at eleven ikke klarer å se brøken som en verdi i seg selv. Han bruker forskjellige strategier for å «oversette» brøkene til verdiutrykk som han forstår, han tegner sirkler eller gjør om brøkene til desimaltall eller brøk, på den måten klarer han mange oppgaver uten å nødvendigvis ha en fullstendig forståelse for brøkbegrepet. På denne måten kan det virke som han har god forståelse for brøk på mange av oppgavene uten å ha det. Han hadde riktig på oppgave 13, som var en av de oppgavene med færrest riktige svar, bare to andre oppgaver hadde færre riktige svar. Men strategiene han benytter seg av kommer til kort når han skal skrive egne brøker.



Figur 36: Oppgave 7 - fra Amina sin prøve.

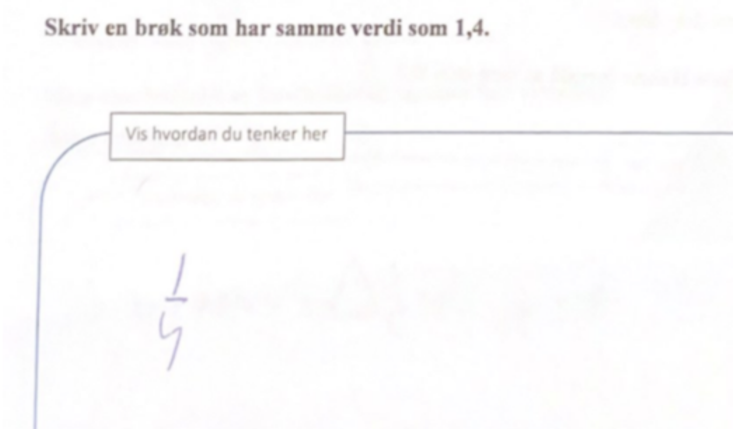
Amina ser også ut til å kanskje være i misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken», hun har svart $\frac{3}{4}$ på oppgave 7 (Figur 36). Men i motsetning til tilfelle med Tin, så ser det ut til at det stemmer at Amina er i misoppfatningen, noe utdraget fra intervjuet med Amina om oppgaven 7 under kan tyde på.

> H: *«Kan du vise meg hvordan du forkorter en brøk?»*
>
> A: *«Ja, det er jo $\frac{6}{7}$. Også delte jeg den på tre, nei to var det jeg delte den på.»*
>
> H: *«Ok, så du delte seks på to?»*
>
> A: *«Ja, eller?» Amina tar en liten pause, før hun fortsetter «Jo, jeg har delt den på to og fått tre, også siden det var $\frac{6}{7}$ så må det bli $\frac{3}{4}$.»*
>
> H: *«Ja, ok. Så de er like?»*
>
> A: *«mhm» Amina nikker.*
>
> H: *«Hvordan er de like?»*

A: *«Her mangler det én, og det gjør det her også.»*

Amina er litt beskjeden og sier ofte under intervjuet at hun ikke skjønner. Hun er heller aldri helt sikker i svarene sine, og ser flere ganger på meg for å se etter en bekreftelse på om det hun sier er riktig eller ikke. På oppgave 1 har Amina svart at figur a), b) og d) har $\frac{1}{4}$ av arealet fargelagt. Når vi prater om oppgaven peker jeg på figur c) og spør hvorfor den fargelagte delen ikke er $\frac{1}{4}$, hun svarer *«de er vel ikke like store alle delene da, eller?»*. Amina har helt rett, men klarer ikke se at delene i figur a) er heller ikke like store. På oppgave 9 har hun skrevet *«jeg skjønner ikke helt hvordan jeg gjør sånne oppgaver»*, men når vi snakker litt om oppgaven så virker det som hun forstår. Hun spør meg også *«er det så lett?»*, som får meg til å tenke at Amina kan ha evnen til å forstå mer enn hun selv tror.

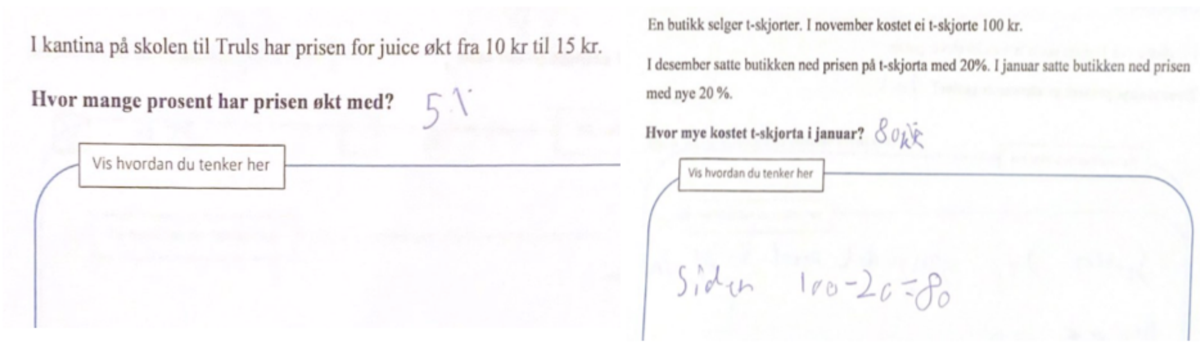
Lise bruker begreper riktig og viser god forståelse av brøkbegrepet, hun sier *«Jeg ser for meg en brøk, et tall over og under brøkstreken. Og hvor mye noe er av en helhet»* når hun blir spurt om hva hun tenker når hun hører ordet brøk. Hun har svart $\frac{3}{8}$ på oppgave 16b, og når jeg spør henne om dette leser hun oppgaven på nytt og sier *«Å ja, DU nå, det var det jeg hadde fargelagt ja»*. Jeg spør hva hun ville svart hvis hun skulle svart på nytt, hun sier tydelig *«Da hadde jeg svart* $\frac{1}{8}$*»*. Det var 24 stykker som svarte det samme som Lise på oppgave 16b, jeg kan ikke si noe om hva de ville svart, men siden det også var den oppgaven med dårligst svaroppslutning så kan det virke som mange misforsto oppgaven.



Figur 37: Oppgave 6 – fra Edvard sin prøve.

Edvard har tegn til flere mulige misoppfatninger i prøveheftet sitt, han sier også selv at han synes prøven var vanskelig. Han gir utrykk for at matematikk er mye pugging, og om oppgavene i prøven sier han *«noen må man jo tenke utenfor boksen på»*, uten at han klarer å forklare hva han mener med det. Han sier selv han har blitt mye bedre i matematikk de siste månedene fordi han har øvd mye, og han virker ganske sikker i svarene sine. Edvard har krysset av riktig på oppgave 5, men han har svart feil på oppgave 6, som begge er ment for å kunne avdekke misoppfatning «brøkstrek er lik desimalkomma». Når jeg spør han om oppgave 6 (Figur 37, side 56) så klarer han ikke gi en forklaring på svaret sitt, og han viser generelt en svak forståelse av brøkbegrepet. Det virker i noen tilfeller at han er bevist på at han tidligere har tenkt feil, men ikke helt vet hvordan han skal gjøre det nå. Som på oppgave 9 og 10 (Figur 38). I utdraget under prøver Edvard å forklare hvordan han ville regnet det ut nå.

> E: *«Hadde det vært meg da så hadde jeg sikkert sagt 5%, men egentlig så skal jeg vel først finne 1%»*
>
> H: *«Ok, hvordan ville du gjort det nå da?»*
>
> E: *«Jeg skulle vel først tatt og delt enten 10 eller 15 med 10»*.


I kantina på skolen til Truls har prisen for juice økt fra 10 kr til 15 kr.

Hvor mange prosent har prisen økt med? 5 %

Vis hvordan du tenker her

En butikk selger t-skjorter. I november kostet ei t-skjorte 100 kr.

I desember satte butikken ned prisen på t-skjorta med 20%. I januar satte butikken ned prisen med nye 20 %.

Hvor mye kostet t-skjorta i januar? 80 kr

Vis hvordan du tenker her

Siden 100-20=80

Figur 38: Oppgave 9 og 10 - fra Edvard sin prøve

Edvard hadde helt klart lært en del om prosent, og han viste at det var noen regler som han egentlig skulle bruke, men han husket bare ikke helt nøyaktig hvordan de var. Så selv om han kanskje ikke lenger var helt i misoppfatningen «teller, nevner eller prosent er et isolert tall», så viste han heller ikke hvordan han kunne løse slike oppgaver.

Det var flere av elevene som ikke kunne forklare hvordan de kom frem til svaret eller hvordan de tenkte. Det virket som det kunne være mer utfordrende enn selve oppgaven for noen, noe Tin bekreftet, *«det er litt vanskelig noen ganger»*, når jeg spurte han om hvorfor han ikke hadde skrevet noe på hvordan han tenkte. Lærer Robert forklarte at han var veldig opptatt av viktigheten med å kunne se sammenhenger, og han var tydelig på at det er lite vits å skulle pugge seg til en femmer på en prøve hvis man ikke klarer å anvende det. Han sier også følgende om vurdering av elevene og kunnskapsnivå *«Hvis du ikke kan si noe om hvorfor det er sånn, så er det sånn at uansett hvor bra det er så kan man maksimalt være karakteren fire, det er det høyeste det går an å komme hvis du ikke kan begrunne og kan prate litt rundt det»*.

6.2.2 Fordeler med diagnostisk prøve

Lærerne hadde ulike tanker om bruken av diagnostisk prøve til planlegging av undervisning, men det virket som de var ganske enig i at fordelen med en diagnostisk prøve, er mulighetene det kan gi i med tanke på tilpasset undervisning. Både Ari og Robert mener at det gir læreren mulighet til å se hva elevene kan. Ari sier videre *«man kan se det på en vanlig prøve også, men da er det kanskje ikke så lett å jobbe med det etterpå»*. Dette fordi vanlig prøver ofte blir gjennomført på slutten av et emne. Begge lærerne sier at de ser at en slik prøve kan ha en stor verdi, men Roger synes ikke at det bør komme i form av en egen prøve, han synes heller at man kan eksempelvis bruke tentamen som en diagnostisk prøve. Roger sier han synes det er interessant med den statistikken som jeg har laget over prøveresultatene, og er tydelig på at han vil sette av tid til det i undervisningen. Ari sier han kunne planlagt undervisning i et emne ved hjelp av diagnostisk prøve *«hvis de virkelig trenger det»*. Han sier at en diagnostisk prøve vil kunne gi *«stor oversikt over hva de trenger av undervisningsopplegg, og hva de trenger å lære. Man kan tilpasse litt og ha bedre undervisning på den måten»*.

Når det kom til elevene, så var det ingen av elevene som synes det var noe veldig annerledes med denne prøven enn alle andre prøver. Lise, Amina og Tin sa at de kanskje ikke pleide å ha så mye av et emne, dette bekreftet også lærer Robert: *«Vi pleier aldri å ha prøve i kun et tema»*. En av forutsetningene for at en diagnostisk prøve skal kunne avsløre misoppfatninger er at eleven ikke har fått muligheten til å pugge regler før prøven. Edvard sa dette om hvordan han synes det gikk på prøven: *«Jeg sleit litt på den der prøven, det kan hende jeg hadde gjort det bedre hvis jeg hadde hatt om brøk før prøven. Hvis jeg hadde fått vite at jeg skulle hatt* *denne prøven om en uke nå så hadde jeg jo øvd mye mer».* Hvis Edvard hadde fått muligheten til å øve så kan misoppfatninger som kom frem av denne prøven, være uoppdaget.

6.2.3 Ulemper med diagnostisk prøve

Selv om lærerne så fordeler med en diagnostisk prøve, så ga de utrykk for en del utfordringer rundt bruken av det. Ari nevnte flere ganger under intervjuet tidsbruken *«Ulempen er kanskje tidsbruken først og fremst»*. Jeg bekreftet også det til han, at det hadde tatt ganske lang tid å gå gjennom alle prøvene. Han virket positiv til bruken av det hvis det ikke hadde krevd så mye tid i planleggingsprosessen. *«Jeg tror det hadde vært veldig fint å bruke en diagnostisk prøve til å planlegge undervisning, men samtidig tenker jeg på tidsbruk da.»* Han begrunner det med *«Det er mye elevene skal gjennom på kort tid, så det må prioriteres litt også»*. En viktig faktor å ta hensyn til er om man har tid til å gi elevene tilbakemelding, for som Ari sier *«Det kan være de tror de har fått riktig hvis de ikke får rettet og de ser at de har gjort feil. Da kan de være overbevist om at de har gjort oppgaven riktig»*. Og da kan kanskje elever i verste fall få forsterket en misoppfatning de er i. Robert ga utrykk for at han var bekymret for bruken av slike prøver i matematikk, men at det kan være fint i andre fag.

> H: *«Har du brukt diagnostiske prøver før?»*
>
> R: *«Jeg har ikke brukt det så mye i matte, for da føler jeg at for de aller fleste så blir det at du drar dem helt ned.»*
>
> H: *«Hvordan da?»*
>
> R: *«I naturfag da, hvis du spør, hva kan du om menstruasjon, hva er menstruasjon? Som vi har om akkurat nå. Assa alle kan si eller skrive noe om det, alle har hørt om eller kan et eller annet. Men hvis du kommer med en stor brøk som kanskje skal faktoriseres og forkortes som dem ikke har noen forutsetninger for å klare, eller hvert fall, i sitt hode ikke har det. Så er det maks fem da, nå er vi 28, 29 i hver klasse, og hvis det er fem stykker der da som sitter å klarer det, og andre sitter bare å se på hverandre og føler seg som en dritt så er jeg litt skeptisk til å bruke det.»*

Robert snakket en god del om motivasjon, og virket som han hadde mye tanker og erfaring rundt det med elevenes motivasjon. Han var ikke direkte negativ til diagnostiske prøver, men heller bekymret for hva det kunne gjøre med elevenes motivasjon for faget, spesielt hvis det var elever som syntes brøk var vanskelig fra før, han sier *«jeg er redd det gjør vondt verre, skal jeg være ærlig»*.

Når jeg stilte elevene spørsmål om hva de syntes om matematikkfaget svarte alle elevene at de synes det var gøy eller morsomt, men tre av elevene pekte på at man måtte klare det for at det skulle være gøy. Tin svarte *«Det er jo egentlig gøy da, spesielt når du kan det, da er det jo gøy fordi du blir interessert. Men når du ikke kan det og liksom føler deg litt utafor, det synes jeg er kjedelig da».* Også Edvard sier at han synes *«det er gøy når man mestrer det»*, selv om han sier at han synes det kan være vanskelig og at han egentlig aldri har vært noe glad i matte, videre sier han *«men det er for fordi jeg ikke har vært så særlig god i matte».* Han sier selv han ikke kunne matte før, men at han har fått hjelp hjemmefra, og at det har hjulpet han sånn at han nå kan det. Amina sier også at hun synes det er litt vanskelig, men at *«det er gøy selv om det er vanskelig»*. Hun forklarer det med: *«Når man synes noe er vanskelig, også spør man om hjelp, også får man det til, så blir det gøy å bli utfordret».*

7 Diskusjon

I dette kapittelet vil jeg diskutere resultatene fra analysen opp mot relevant teori og tidligere forskning.

7.1 Hvilke mulige misoppfatninger knyttet til brøk kan man finne blant elever på ungdomskolen?

I enkelte studier undersøkes utbredelse av misoppfatninger hos elever relatert til enkeltoppgaver (Aliustaoğlu et al., 2018; Makonye & Fakude, 2016; Mohyuddin & Khalil, 2016; Ryan & Williams, 2007). Studien til Vinje (2019) tar utgangspunkt i en definisjon der elevene må ha gjentatte feil for at man skal kunne si om de har en misoppfatning eller ikke. Denne oppgaven tar utgangspunkt i samme definisjon som Vinje (2019), men resultatene viser kun mulig misoppfatninger og går ikke i dybden for å se hvor mange elever som har gjentakende svar som kan være misoppfatninger. Derfor brukes begrepet mulige misoppfatninger. Diskusjonen vil ta for seg hver enkelt misoppfatning.

7.1.1 Nevner representerer antall deler – uavhengig av størrelse

Resultatene (Figur 14, side 42) viser at mellom 10 og 30 prosent av elevene kan være i denne misoppfatningen der elevene ikke tar brøkdelens størrelse med i beregningen (Matematikksenteret, u.å-b). Oppgave 2, der om lag 10 prosent av elevene har svart at $\frac{1}{4}$ av kostholdet til kaniner bør være høy, gir interessant innsikt i de utvalgte elevenes forståelse for at delene av helheten i en brøk skal være like store (Lamon, 2012). Alle oppgavene (1, 2 og 16a) er representert med figurer, for å kunne gjøre det mer forståelig, og særlig i oppgave 2 kan det visuelle hjelpe elever med hvilke svar som kan være realistiske (Svingen, 2018). Ved å se på figuren (Figur 12, side 42) kan man se at delen merket med «høy» utgjør over halvparten av figuren. Elevene som svarer $\frac{1}{4}$ på denne oppgaven kan være i misoppfatningen der nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelsen, men de har også utfordringer med brøk som en tallstørrelse fordi figuren tydelig viser at over halvparten av figuren er markert med «høy» (Lamon, 2012). Oppgave 2 er i tillegg knyttet til en virkelighetsnær kontekst, noe som også skal hjelpe elevene med forståelsen (Svingen, 2018). Blant elevene som ble intervjuet uttalte Amina *«de er vel ikke like store alle delene da, eller?»*, når hun snakket om oppgave 1. Svaret viser at hun er litt usikker på om delene faktisk er like store, men hun forstår også at det har noe å si om delene er like store eller ikke.

7.1.2 Jo større nevner (eller teller), jo større eller mindre brøk

Resultatene (Figur 19, side 45) viser at svært få elever har denne misoppfatningen. Det er interessant at så få elever viser tegn til misoppfatningen om at jo større nevner (eller teller), jo større eller mindre brøk fordi misoppfatningen er nært knyttet til elevers heltallstenking, som ofte er utbredt blant elever (Hansen et al., 2017; Lamon, 2012; Matematikksenteret, u.å-b; Neagoy, 2017). Oppgave 3, 4 og 14 har høy andel riktige svar, men oppgave 13 skiller seg ut ved at kun 20 av 98 elever har svart riktig og kun to av elevene viste tegn til mulige misoppfatninger. 76 av 98 elever har dermed gitt andre svar eller ikke svart, noe som kan bety at oppgaven har vært utfordrende. Det er verdt å merke seg at oppgave 13 er den eneste av de fire oppgavene hvor tallinje er involvert. Som Lamon (2012) skriver, bør elever beherske å plassere brøker på tallinje for å forstå aspektet brøk som måling og tallstørrelse. Tallinje fremmes som et godt verktøy for å utvikle forståelse for brøkbegrepet, og oppgave 13 kan være et godt utgangspunkt for diskusjon og videre læring (Dahl & Nohr, 2010; Petit et al., 2015).

7.1.3 Brøkstrek er lik desimalkomma

Resultatene knyttet til misoppfatningen «brøkstrek er lik desimalkomma» (Figur 22, side 46) viser at det er store forskjeller mellom oppgave 5 og 6. Oppgave 5 viser at svært mange av elevene har gitt riktig svar og dermed er det også veldig få svar som kan være mulige misoppfatninger.

Det som kan være en svakhet med oppgave 5 er at oppgaven har svaralternativer, noe som gjør at elevene kan svare riktig uten å ha den nødvendige forståelsen for brøk, noe som ikke bør være mulig på diagnostiske oppgaver ifølge Hinna og flere kollegaer (2011).

Edvards besvarelse viser at man kan løse oppgave 5 uten å nødvendigvis ha forståelse for brøkbegrepet fordi han har svart på oppgave 6 at 1,4 er det samme som $\frac{1}{4}$ (Figur 37, side 56) og viser tegn til misoppfatningen der elever kan se på brøkstreken som et desimalkomma (Matematikksenteret, u.å-b). Elever i denne misoppfatningen har ikke forståelse for aspektet brøk som kvotient, der det er sentralt at brøkstreken fungerer som et divisjonstegn (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). I oppgave 5 skal elevene gjøre om fra brøk til desimaltall, mens i oppgave 6 skal elevene gjøre om fra desimaltall til brøk, og kanskje opplever elevene det som vanskeligere siden under halvparten av de 98 elevene har svart riktig på oppgave 6.

7.1.4 Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken

"Gap thinking" refererer til matematikklitteraturens beskrivelse av elevers strategi der de bruker differansen mellom teller og nevner for å vurdere brøkens størrelse (Bjerke et al., 2013). 15 av de 98 elevene (Figur 23, side 47) viser tendenser til «gap thinking» og anser for eksempel $\frac{6}{7}$ og $\frac{5}{6}$ som likeverdige brøker fordi begge brøkene kun har 1 i differanse mellom teller og nevner (Bjerke et al., 2013; Matematikksenteret, u.å-b). Besvarelsene til Tin (Figur 35, side 54) og Amina (Figur 36, side 55) viser dette.

7.1.5 Teller, nevner eller prosent er et isolert tall

Kartleggingen av denne misoppfatningen gir heller ikke et godt nok bilde av elevenes mulige misoppfatninger fordi begge oppgavene (7 og 8) tar for seg prosent, og ingen av oppgavene tar for seg brøk. På oppgave 9 (Figur 26, side 48) er det om lag 20 prosent av elevsvarene som kan være mulige misoppfatninger der de ikke ser hvor stor del 15 kroner er av 10 kroner, men heller ser på tallene som isolerte tall (Matematikksenteret, u.å-b). Edvard er en av dem som har svart at juicen som øker fra 10 til 15 kroner har økt med 5 prosent, noe som kan være en mulig misoppfatning. Under samtalen med eleven forklarer han at; *«Jeg skulle vel først tatt og delt enten 10 eller 15 med 10»*, noe som indikerer at han ikke har forståelse for forskjellen på om han deler 10 eller 15 med 10, og han ser dermed på tallene som isolerte og ikke som en del av helheten (Matematikksenteret, u.å-b).

7.1.6 Tar ikke hensyn til helheten (eller misforstår den)

Denne misoppfatningen skiller seg ut blant resultatene (Figur 30, side 50) ved at flere svar kan være mulige misoppfatninger enn det er riktige svar. Over 50 prosent av elevene har på oppgave 10 avgitt svar som kan være mulige misoppfatninger der elevene ikke ser totalprisen som en relativ størrelse (Matematikksenteret, u.å-b). På oppgave 16b har 14 elever svart riktig, mens 18 elever viser tegn på misoppfatningen fordi de kun tenker på den hvite delen av sirkelen og ikke tenker på hvor stor helheten er (Matematikksenteret, u.å-b).

7.1.7 Andre problemer knyttet til brøk

De resterende oppgavene viser at elevene også har andre utfordringer knyttet til brøk. Resultatene for oppgave 12 (Figur 32, side 51) viser at om lag halvparten av elevene ikke har god nok forståelse for brøk som operator, og at elevene trenger hjelp til å beherske brøkers ulike uttrykksformer (Lamon, 2012). 40 elever har svart riktig på oppgave 15 (Figur 33, side 52), men enda flere viser tegn til mulige misoppfatninger ved at de ikke ser på delene som deler av en målbar helhet (Lamon, 2012).

7.2 Bruken av diagnostiske prøver i matematikkundervisning

For mange elever kan brøk være et utfordrende tema i matematikken. Heltallstenkning, undervisningen og brøkbegrepets kompleksitet er grunner til at temaet er krevende for flere elever (Bjerke et al., 2013; Hansen et al., 2017; Lamon, 2012). Resultatene fra intervjuene med lærere og elever (kapittel 6.2.1) viser at begge lærerne gir uttrykk for at brøk er vanskelig for mange elever og elevene sliter med å forklare og begrunne sine handlinger og svar.

Edvard sier i intervjuet (kapittel 6.2.2) at han ser på matematikk som pugging, og sliter med å forklare svarene sine og viser liten forståelse for brøk. Tanken om at matematikk er pugging, kan sees i sammenheng med instrumentell forståelse der innlæring av matematiske regler har hovedfokuset (Skemp, 1976). Instrumentell forståelse legger ikke vekt på hvorfor man får svaret man får, men hvordan man kjapt kan få riktig svar. Robert uttrykker en relasjonell forståelse ved at han verdsetter elevenes evner til å se sammenhenger og begrunne sine egne svar og handlinger som viktige matematiske kompetanser (Skemp, 1976).

Med den instrumentelle forståelsen som utgangspunkt for videre lesning er det læreres oppgave å videreutvikle elevers matematiske forståelse. Dette kan være krevende innen brøk, fordi mange elever har utfordringer med brøkbegrepet. Det er her diagnostisk undervisning kommer inn som et viktig hjelpemiddel. Diagnostisk undervisning kan kartlegge elevers forståelse og fange opp mulige misoppfatninger (Brekke, 2002; Hinna et al., 2011). Elevers feilsvar og mulige misoppfatninger brukes på en konstruktiv måte for å skape forståelse, noe som samsvarer med et konstruktivistisk læringssyn (Cockburn & Littler, 2008; Ryan & Williams, 2007; Wittek & Brandmo, 2021). Lærerne ga i intervjuene (kapittel 6.2.3) uttrykk for at diagnostiske prøver kan være verdifullt fordi det gir en tydelig oversikt over hva elevene kan og hva de trenger å lære. Begge lærerne så på diagnostiske prøver som et godt utgangspunkt for å planlegge undervisning og kunne drive med tilpasset opplæring, slik at hver enkelt elev kunne hjelpes på best mulig måte. Det er interessant å se at lærernes tanker om diagnostisk undervisning som godt utgangspunkt for planlegging og tilpasning samsvarer med det Brekke (2002) og Hinna et al. (2011) skriver om fordeler med diagnostisk undervisning.

Til tross for lærernes positive tanker om diagnostisk undervisning uttrykte de også en viss skepsis til bruk av denne typen undervisningspraksis. Ari (kapittel 6.2.4) var tydelig på at en ulempe med diagnostisk undervisning er at det krever mye tid. Roberts bekymring knyttet til diagnostiske oppgaver var hvordan det kan påvirke elevenes motivasjon. Flere av elevene sa i intervjuene at matematikk er gøy når man kan det, og enkelte sa at de ikke har vært særlig glad i matematikk fordi de ikke har fått det til. Elevenes utsagn viser at deres motivasjon henger tett sammen med glede og engasjement i matematikk (Wæge & Nosrati, 2018). Lærer Roberts bekymring er at elevenes motivasjon skal påvirkes negativt når deres egne feil og misoppfatninger er utgangspunktet for læring, men diagnostisk undervisnings fokus på den enkelte elev kan gi elevene økt motivasjon ved at de føler seg sett og hørt (Imsen, 2020). Lærerne uttrykte i tillegg et fokus på relasjonell forståelse, noe som kan påvirke elevers motivasjon positivt. Gjennom å bruke diagnostiske oppgaver for å utvikle elevers relasjonelle forståelse og evne til å se sammenhenger kan elevene utvikle et ønske om å selv oppnå relasjonell forståelse, som igjen bidrar til økt motivasjon (Wæge & Pantziara, 2013). Dette kan støttes av Aminas utsagn (Tabell 1) om at matematikk oppleves gøy når man blir utfordret og når noe er vanskelig og man etter hvert får det til.

8 Avslutning

Avslutningsvis oppsummeres arbeidets funn i tillegg til at studiens begrensninger kommenteres og tankene mine rundt videre forskning innen diagnostisk undervisning og brøk deles.

8.1 Oppsummering

Resultatene fra den diagnostiske prøven viser tydelig at misoppfatninger innen brøk er utbredt blant 9.klassingene. Misoppfatningen om at jo større nevner (eller teller), jo større eller mindre brøk er den misoppfatningen færrest elever muligens har, og svært mange elever har svart riktig på oppgavene knyttet til misoppfatningen. Motsatt, altså der flest elever viser tegn på mulig misoppfatning, er misoppfatningen «tar ikke hensyn til helheten (eller misforstår den)». På oppgave 10, viser hele 50 prosent av elevene tegn på misoppfatningen, noe som er høyere enn for de andre misoppfatningene der prosentandelen for mulige misoppfatninger hovedsakelig ligger mellom 10 og 20 prosent. Intervjuene bekrefter at enkelte elever er i misoppfatninger og at de sliter med forståelse for brøkbegrepet.

Til tross for variasjoner mellom de ulike misoppfatningene viser resultatene at en stor del av elevene i undersøkelsen er i én eller flere av de undersøkte misoppfatningene, noe som i diagnostisk undervisning ikke er negativt, men heller kan sees på som et godt utgangspunkt for videre undervisning bestående av diskusjon og tilpasset opplæring for å videreutvikle elevenes matematiske forståelse. I intervjuene uttalte lærerne at diagnostiske prøver var et godt verktøy for planlegging og tilpasning av undervisning fordi prøvene kunne gi en god oversikt over elevenes faktiske forståelse og fremhevet hvor elevene har behov for ekstra støtte. Derimot var lærerne også tydelig på at diagnostisk undervisnings ulemper er at det kan være tidkrevende og kan påvirke elevenes motivasjon negativt. Lærerne var bekymret for at diagnostiske prøver kan hindre elevers følelse av mestring, og ifølge elevene er motivasjonen for matematikk tett knyttet til nettopp mestring. På en annen side uttalte elevene at de opplevde mestring når de fikk til noe de strevde med, og at når de følte seg utfordret, noe et langsiktig undervisningsløp med fokus på relasjonell forståelse kan bidra til. Det er dermed viktig for lærere å være bevisst på hver enkelt elevs motivasjon i matematikk i forbindelse med bruk av diagnostiske prøver for å planlegge og tilrettelegge undervisningen.

8.2 Begrensninger i studien

Det diagnostiske oppgavesettet ble arbeidet med av 98 elever fordelt på fire klasser på samme skole. Studiens omfang bidrar til at dette er en kvalitativ studie og muligheten for å generalisere svekkes av dette.

Hensikten med den diagnostiske prøven var å kartlegge mulige misoppfatninger. Elevsvarene ble analysert og registrert for å holde en oversikt over mulige misoppfatninger. En svakhet med studien er at det ikke ble kontrollert om elever med én mulig misoppfatning innen et av temaene også hadde andre mulige misoppfatninger innen samme tema. Dette kunne gitt en mer presis oversikt over mulige misoppfatninger blant elevene, men av hensyn til disponibel tid og oppgavens problemstilling ble ikke dette gjort.

8.3 Videre forskning

Studiens begrensninger er tett knyttet til videre forskning innen diagnostisk undervisning i brøkregning. Det kunne vært interessant å gjennomføre større kvantitative studier for å kartlegge elevers misoppfatninger knyttet til brøk for å få et tydeligere bilde på hvilke utfordringer norske elever på ungdomsskolen har i forbindelse med brøk.

Det kan også være muligheter for å gjennomføre kvalitative studier om diagnostisk undervisning og brøk der klasser og lærere observeres i deres arbeid med diagnostisk undervisning over tid, for å se hvilken effekt slik undervisning kan ha.

Litteraturliste

Aliaga, M. & Gunderson, B. (2006). *Interactive statistics* (3. utg.). Pearson Prentice Hall.

Aliustaoğlu, F., Tuna, A. & Biber, A. C. (2018). The Misconceptions of Sixth Grade Secondary School Students on Fractions. *International electronic journal of elementary education*, *10*(5), 591-599. https://doi.org/10.26822/iejee.2018541308

Ball, D. L., Hill, H. & Bass, H. (2005). Who Knows Mathematics Well Enough to Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator*, *29*(1), 14-17, 20-22, 43-46. https://doi.org/<http://hdl.handle.net/2027.42/65072>

Behr, M. J., Khoury, H. A., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1997). Conceptual Units Analysis of Preservice Elementary School Teachers' Strategies on a Rational-Number-as-Operator Task. *Journal for research in mathematics education*, *28*(1), 48-69. https://doi.org/10.2307/749663

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. . I R. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s. 91-126). Academic Press.

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag: resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Universitetsforl.

Birkeland, P. A., Breiteig, T. & Venheim, R. (2018). *Matematikk for lærere 1* (6. utg.). Universitetsforl.

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2013). *Når brøk ikke er tall - Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse*.

Bjørnstad, Ø. (2011). Kan multiplikasjon innføres på en enhetlig måte? *Tangenten - Tidsskrift for matematikkundervisning*, *3*, 6-8; 39.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Læringssenteret.

Bynner, J. & Parsons, S. (2006). Does Numeracy Matter More? I. National Research and Development Centre for adult literacy and numeracy, Institute of Education, University of London.

Caniglia, J. (2020). Promoting self-reflection over re-teaching: Addressing students' misconceptions with 'my favorite no'. *Journal of Mathematics Education*, *5*(2), 70-79. https://doi.org/http://doi.org/10.31327/jme.v5i2.1230

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational studies in mathematics*, *64*(3), 293-316. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt forl.

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' Fraction Comparison Strategies as a Window into Robust Understanding and Possible Pointers for Instruction. *Educational studies in mathematics*, *72*(1), 127-138. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9198-9

Cockburn, A. D. & Littler, G. (2008). *Mathematical Misconceptions: A Guide for Primary Teachers*. SAGE.

Creswell, J., Clark, V., Gutmann, M. & Hanson, W. (2003). Advance Mixed methods Research Designs. I (s. 209-240).

Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4. utg.). SAGE.

Creswell, J. W. & Guetterman, T. C. (2019). *Educational research : planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (6. utg.). Pearson.

Dahl, H. H. & Nohr, M. E. (2010). Perlesnor og tom tallinje. *Tangenten - Tidsskrift for matematikkundervisning*, *1*, 2-7.

Dalen, M. (2011). *Intervju som forskningsmetode* (2. utg.). Universitetsforl.

Einarsen, S., Martinsen, Ø. L. & Skogstad, A. (2017). *Organisasjon og ledelse*. Gyldendal akademisk.

Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli, M. & Turmo, A. (2004). *Hva i all verden har skjedd i realfagene?: Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003*. Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Grønmo, L. S. & Hole, A. (2017). *Prioritering og progresjon i skolematematikken: En nøkkel til å lykkes i realfag: Analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier*. Cappelen Damm akademisk/NOASP. https://doi.org/https://doi.org/10.23865/noasp.26

Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2016). *Ett skritt fram og ett tilbake: TIMSS Advanced 2015: Matematikk og fysikk i videregående skole*. Cappelen Damm Akademisk/NOASP (Nordic Open Access Scholarly Publishing). https://doi.org/10.17585/noasp.7.16

Grønmo, L. S., Lindquist, M., Arora, A. & Mullis, I. V. S. (2015). TIMSS 2015 Mathematics Framework. I I. V. S. Mullis & M. O. Martin (Red.), *TIMSS 2015 Assessment Frameworks* (s. 11-27). TIMSS & PIRLS International Study center. https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/t15_fw_chap1.pdf

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2009). *Tegn til bedring: Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Unipub.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram: Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Akademika.

Grønmo, L. S., Pedersen, I. F. & Onstad, T. (2010). *Matematikk i motvind: TIMSS advanced 2008 i videregående skole*. Unipub.

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2. utg.). Fagbokforl.

Hansen, N., Jordan, N. C. & Rodrigues, J. (2017). Identifying learning difficulties with fractions: A longitudinal study of student growth from third through sixth grade. *Contemporary educational psychology*, *50*, 45-59. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.11.002

Hecht, S. A. & Vagi, K. J. (2010). Sources of Group and Individual Differences in Emerging Fraction Skills. *J Educ Psychol*, *102*(4), 843-859. https://doi.org/10.1037/a0019824

Hinna, K., Gustavsen, T. S. & Rinvold, R. A. (2011). *QED 5-10: matematikk for grunnskolelærerutdanningen: B. 1*. Høyskoleforl.

Ianke, P. E. & Størset, H. (2015). *Hvordan forholder vi oss til regning: Befolkningsundersøkelse om regning og egne regneferdigheter*. VOX. https://www.kompetansenorge.no/statistikk-og-analyse/publikasjoner/hvordan-forholder-vi-oss-til-regning/

Imsen, G. (2020). *Elevens verden: innføring i pedagogisk psykologi* (6. utg.). Universitetsforlaget.

Johannessen, A., Christoffersen, L. & Tufte, P. A. (2021). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (6. utg.). Abstrakt forlag.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. Number and measurement. Papers from a research workshop, Columbus, Ohio.

Kieren, T. E. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. I T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Red.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (Bd. 1, s. 49-84). Routledge. https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9780203052624

Kilborn, W. (1991). Noe om diagnostisk undervisning. *Tangenten - Tidsskrift for matematikkundervisning*, (nr.3), 10-12. http://www.caspar.no/tangenten/1991/t1991-3.pdf

Kirsti, K. (2013). *Hva vet vi om god undervisning? Rapport fra klasseroms-forskningen* (Praktisk-pedagogisk utdanning: en antologi, Issue. Fagbokforlaget.

Kosheleva, O. & Villaverde, K. (2017). How to Enhance Student Motivations by Borrowing from Ancient Tradition: Egyptian Fractions. I (s. 51-63) (Studies in Computational Intelligence). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-55993-2_6

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del - verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05)*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nno

Kuvåssæter, E. R. (2021). *Brøkforståelse og holdninger til matematikk hos elever som starter på videregående skole* [Masteroppgave, The University of Bergen].

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Gyldendal akademisk.

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.-C. W. G., Nilsen, T. & Bergem, O. K. (2020). *TIMSS 2919 - Kortrapport*. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3rd. utg.). Routledge.

Leonard, M. J., Kalinowski, S. T. & Andrews, T. C. (2014). Misconceptions Yesterday, Today, and Tomorrow. *CBE Life Sci Educ*, *13*(2), 179-186. https://doi.org/10.1187/cbe.13-12-0244

Makonye, J. P. & Fakude, J. (2016). A Study of Errors and Misconceptions in the Learning of Addition and Subtraction of Directed Numbers in Grade 8. *SAGE open*, *6*(4), 215824401667137. https://doi.org/10.1177/2158244016671375

Malterud, K. (2011). *Kvalitative metoder i medisinsk forskning : en innføring* (3. utg.). Universitetsforl.

Matematikksenteret. (u.å-a). *Diagnostiske oppgaver knyttet til Brøk og prosent* Hentet 15. oktober fra https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/diagnostiske-oppgaver-knyttet-til-br%C3%B8k-og

Matematikksenteret. (u.å-b). *Vanlige misoppfatninger knyttet til Brøk og prosent*. Hentet 11. juni fra https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/vanlige-misoppfatninger-knyttet-til-br%C3%B8k-og

McIntosh, A., Settemsdal, M. R., Stedøy, I., Arntsen, T. J. & Nasjonalt senter for matematikk i, o. (2007). *Alle teller!: håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen: kartleggingstester og veiledning om misoppfatninger og misforståelser på området: tall og tallforståelse*. Matematikksenteret.

Mohyuddin, R. G. & Khalil, U. (2016). Misconceptions of Students in Learning Mathematics at Primary Level. *Bulletin of education and research*, *38*(1), 133.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for research in mathematics education*, *30*(2), 122-147. https://doi.org/10.2307/749607

Neagoy, M. (2017). *Unpacking Fractions: Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding*. Alexandria: Association for Supervision & Curriculum Development.

Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational psychologist*, *40*(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

NSD. *Fylle ut meldeskjema for personopplysninger*. Hentet 20. mai fra https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger

Opplæringslova. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa* (LOV-1998-07-17-61). https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61?q=opplæringslova

Pantziara, M. & Philippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational studies in mathematics*, *79*(1), 61-83. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9338-x

Payne, G. & Williams, M. (2005). Generalization in Qualitative Research. *Sociology*, *39*(2), 295-314. https://doi.org/10.1177/0038038505050540

Petit, M. M., Laird, R. E., Marsden, E. L. & Ebby, C. B. (2015). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom*. London: Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315746098

Pines, A. L. (1985). Towards a taxonomy of conceptual relations and the implications for the evaluation of cognitive structures. I L. H. T. West & A. L. Pines (Red.), *Cognitive structure and conceptual change* (s. 101-116). Academic Press.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode : en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Universitetsforl.

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I. & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Rowland, T. & Zazkis, R. (2013). Contingency in the Mathematics Classroom: Opportunities Taken and Opportunities Missed. *Canadian journal of science, mathematics and technology education*, *13*(2), 137-153. https://doi.org/10.1080/14926156.2013.784825

Ryan, J. & Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15*. McGraw-Hill Education. http://ebookcentral.proquest.com/lib/hioa/detail.action?docID=316320

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I. & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychol Sci*, *23*(7), 691-697. https://doi.org/10.1177/0956797612440101

Siegler, R. S., Thompson, C. A. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cogn Psychol*, *62*(4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding: Faux Amis. *Mathematics teaching*, (77), 20.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I O. Skovsmose & M. Blomhøy (Red.), *Kan det virkelig passe? - om matematiklæring* (s. 143-158). L&R Uddannelse.

Skaalvik, E. M. & Skaalvik, S. (2021). *Skolen som læringsarena: selvoppfatning, motivasjon, læring og livsmestring* (4. utg.). Universitetsforlaget.

Slemmen, T. (2010). *Vurdering for læring i klasserommet* (2. utg.). Gyldendal akademisk.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions* (2nd. utg.). National Council of Teachers of Mathematics.

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E. & Smestad, B. (2017). *Tall og tanke 2: Matematikkundervisning på 5. til 7. trinn* (Bd. 2). Gyldendal akademisk.

Stipek, D., Salmon, J. M., Givvin, K. B., Kazemi, E., Saxe, G. & MacGyvers, V. L. (1998). The Value (and Convergence) of Practices Suggested by Motivation Research and Promoted by Mathematics Education Reformers. *Journal for research in mathematics education*, *29*(4), 465-488. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.29.4.0465

Streitlien, Å. (2009). *Hvem får ordet og hvem har svaret?: om elevmedvirkning i matematikkundervisningen*. Universitetsforl.

Svingen, O. E. L. (2018). Representasjoner i matematikk. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P4_M1Representasjoner-i-matematikk_fagtekst.pdf

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitative metoder* (5. utg.). Fagbokforl.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction*, *28*, 181-209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2020). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally* (Tenth edition.; Global edition. utg.). Pearson.

Vinje, B. (2019). *Misoppfatninger tilknyttet brøk på mellomtrinnet* [Masteroppgave, NTNU].

Wittek, L. & Brandmo, C. (2021). Ulike tilnærminger til læring: Et historisk riss. I J. Heldal & L. Wittek (Red.), *Pedagogikk: En grunnbok* (Bd. 2, s. 27-46). Cappelen Damm akademisk.

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning* [Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk].

Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Universitetsforl.

Wæge, K. & Pantziara, M. (2013). Students' motivation and teachers' practices in the mathematics classroom *In Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in mathematics Education (CERME 8), 6-10 February. Antalya, Turkey.*

Vedlegg

1. NSDs godkjenning
2. Informasjonsskriv til elever/foresatte
3. Informasjonsskriv til lærere
4. Intervjuguide elever
5. Intervjuguide lærere
6. Diagnostisk prøve i brøk
7. Oversikt over oppgaver, mulige misoppfatninger og resultater

Vedlegg 1 – NSDs godkjenning

Meldeskjema / Brøkregning på ungdomstrinnet / Vurdering

Vurdering

Dato
15.02.2022

Type
Standard

Referansenummer
176783

Prosjekttittel
Brøkregning på ungdomstrinnet

Behandlingsansvarlig institusjon
OsloMet – storbyuniversitetet / Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier / Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Prosjektansvarlig
Arne Hole

Student
Hege Carina Brodal Holmstrøm

Prosjektperiode
01.10.2021 - 31.12.2022

Meldeskjema

Kommentar
Personverntjenester har en avtale med den institusjonen du forsker eller studerer med. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at gjennomføringen av prosjektet ditt er lovlig etter personvernforordningen (GDPR).

Personverntjenester har på vegne av din institusjon vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette meldeskjemaet er lovlig. Hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

Dette betyr at du kan starte med prosjektet ditt.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger frem til 31.12.2022

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 1
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 nr. 11 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse, som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

For alminnelige personopplysninger vil lovlig grunnlag for behandlingen være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 a.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 2 (elever)
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om elevene. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake. Eleven vil også selv kunne trekke seg selv om foreldre/foresatte har gitt sitt samtykke.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
Personverntjenester vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen:

- om lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet

- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet.

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Vi vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må prosjektansvarlig følge interne retningslinjer/rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilken type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema

Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson: Gry Henriksen

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2 - Informasjonsskriv til elever/foresatte

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Brøkregning på ungdomstrinnet»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt om brøkregning i **matematikkfaget på ungdomstrinnet**. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltagelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med prosjektet er å undersøke elevers arbeid med brøkregning og brøkregningens rolle i matematikken på ungdomstrinnet. Prosjektet skal munne ut i en masteroppgave i matematikkdidaktikk i lærerutdanningen ved OsloMet - Storbyuniversitetet.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

OsloMet - Storbyuniversitetet er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Jeg (masterstudenten) ønsker å intervjue 4-5 elever og lærerne deres om arbeidet med brøkregning i klassen. Blant annet vil jeg snakke med elevene om hva de synes om brøk, og hva de tenker om en prøve i brøkregning som ble gjennomført i klassene høsten 2021.

Hva innebærer det for deg som elev å delta?

Hvis du deltar innebærer det at jeg får tilgang til en prøve om brøkregning som dere hadde før jul, og at vi snakker sammen om prøven (ca.15 min) i skoletiden. Underveis vil du få noen tips og råd om brøkregning. Intervjuet vil være avklart med lærer. Jeg tar lydopptak og notater fra intervjuet.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Deltakelse i prosjektet vil ikke påvirke karakterer eller ditt forhold til skolen generelt.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Kun masterstudent og veileder vil ha tilgang til dine opplysninger. Det vil ikke være mulig å identifisere deg i noen publikasjoner tilknyttet dette prosjektet.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene slettes når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er sommeren 2022.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra OsloMet - Storbyuniversitetet har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- OsloMet ved Hege Carina Brodal Holmstrøm (hegecarina@gmail.com) og Arne Hole (arne.hole@ils.uio.no).
- Vårt personvernombud: Ingrid Jacobsen (ingrid.jacobsen@oslomet.no).

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Hege Carina Brodal Holmstrøm	Arne Hole
(Masterstudent)	(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Brøkregning på ungdomstrinnet*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ at masterstudenten får tilgang til prøven min i brøkregning fra før jul, og at jeg deltar i et intervju om oppgavene i denne prøven.

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3 - Informasjonsskriv til lærere

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Brøkregning på ungdomstrinnet»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt om brøkregning i **matematikkfaget på ungdomstrinnet**. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltagelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med prosjektet er å undersøke elevers arbeid med brøkregning og brøkregningens rolle i matematikken på ungdomstrinnet. Prosjektet skal munne ut i en masteroppgave i matematikkdidaktikk i lærerutdanningen ved OsloMet - Storbyuniversitetet.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

OsloMet - Storbyuniversitetet er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Jeg ønsker å intervjue 4-5 elever og lærerne deres om arbeidet med brøkregning i klassen. Blant annet vil jeg snakke med elevene om hva de synes om brøk, og hva de tenker om en prøve i brøkregning som ble gjennomført i klassene høsten 2021.

Hva innebærer det for deg som lærer å delta?

Hvis du deltar, innebærer det et intervju på ca. 30 min. Jeg tar lydopptak og notater fra intervjuet.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Kun masterstudent og veileder vil ha tilgang til dine opplysninger. Det vil ikke være mulig å identifisere deg i noen publikasjoner tilknyttet dette prosjektet.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene slettes når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er sommeren 2022.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra OsloMet - Storbyuniversitetet har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- OsloMet ved Hege Carina Brodal Holmstrøm (hegecarina@gmail.com) og Arne Hole (arne.hole@ils.uio.no).
- Vårt personvernombud: Ingrid Jacobsen (ingrid.jacobsen@oslomet.no).

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Hege Carina Brodal Holmstrøm	Arne Hole
(Masterstudent)	(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Brøkregning på ungdomstrinnet*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 4 – Intervjuguide elever

Intervjuguide for semistrukturert intervju med elever

1. Hva synes du om brøkregning og matematikk?
2. Husker du når du hadde brøkregning første gang? Var det annerledes da enn nå?
3. Her legger jeg inn spørsmål om en prøve om brøkregning som elevene gjennomførte før jul. Spørsmålene vil variere fra elev til elev.
   Eksempler:
   «Hvordan tenkte du her?»
   «Var det noe du synes var vanskelig med prøven?»
   «Var det noe du synes var lett med prøven?»

Vedlegg 5 – Intervjuguide lærere

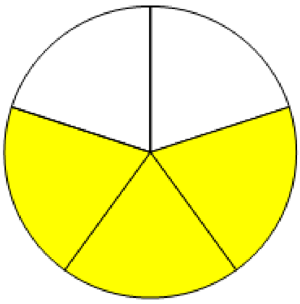
Intervjuguide for semistrukturert intervju med lærere

1. Når var sist gang dere hadde brøkregning?
2. Var denne prøven annerledes enn de vurderingssituasjonene eleven er vant med fra tidligere?
3. Hvilke utfordringer pleier det å være i forbindelse med brøkregning?
4. Har du brukt diagnostiske oppgaver om brøkregning til å planlegge undervisning før?
5. Ser du potensiale i å bruke slike prøver til å planlegge undervisning?
6. Hvordan var resultatene på denne prøven sammenlignet med sist gang dere hadde brøk?
7. Kan pandemien ha påvirket elevenes utvikling knyttet til brøk?

Navn:

Matematikkprøve

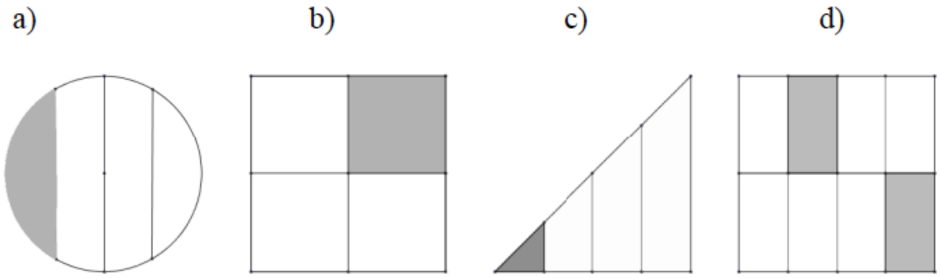
9.trinn



- Les oppgaveteksten nøye på alle oppgaver.
- Gjør så godt du kan på alle oppgaver! Det er flott om du avgir et svar, selv om du er usikker.
- Vis/forklar svaret ditt der du får beskjed om dette.
- Det er valgfritt om du vil bruke blyant eller penn.

Oppgave 1

Sett ring rundt figurene som har $\frac{1}{4}$ arealet fargelagt.

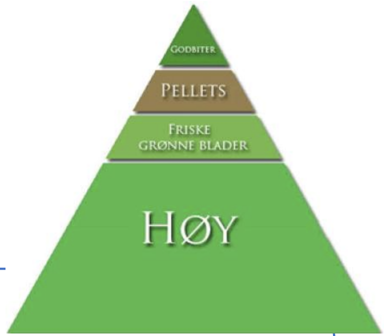


Vis hvordan du tenker her

Oppgave 2

Oversikten viser hvilket kosthold kaniner bør ha.

Hvor stor brøkdel av kostholdet til kaniner bør være høy, ifølge oversikten?



Vis hvordan du tenker her

Oppgave 3

Henrik og Kasper deler likt $\frac{1}{2}$ L brus.

Hvor mange liter får de hver?

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 4

Faren til Hanna spør om hun kan pante flaskene som ligger i garasjen.

Hvis Hanna panter flaskene, skal hun få $\frac{1}{5}$ av panten som lønn.

Hanna ønsker mer enn det i lønn.

Hvor stor brøkdel kan Hanna foreslå at hun skal få?

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 5

Hvilket tall har samme verdi som $\frac{3}{4}$?

☐ 0,75 ☐ 3 ☐ 3,4

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 6

Skriv en brøk som har samme verdi som 1,4.

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 7

Skriv en brøk som har samme verdi som $\frac{6}{7}$.

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 8

I 7. klasse ved Toppen skole er 6 av 24 elever gutter.

Hvor mange prosent av elevene er gutter?

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 9

I kantina på skolen til Truls har prisen for juice økt fra 10 kr til 15 kr.

Hvor mange prosent har prisen økt med?

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 10

En butikk selger t-skjorter. I november kostet ei t-skjorte 100 kr.

I desember satte butikken ned prisen på t-skjorta med 20%. I januar satte butikken ned prisen med nye 20 %.

Hvor mye kostet t-skjorta i januar?

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 11

Skriv en brøk som har en verdi mellom $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$.

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 12

Regn ut:

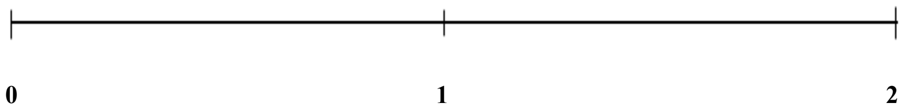
$2 \cdot \frac{3}{6} =$

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 13

Plasser brøkene på tallinjen.

$\frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{5}{8}$ $\quad$ $\frac{4}{5}$ $\quad$ $\frac{7}{10}$ $\quad$ $\frac{4}{3}$



Vis hvordan du tenker her

Oppgave 14

Sett en ring rundt den største brøken.

$\frac{1}{5}$ $\quad$ $\frac{2}{11}$

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 15

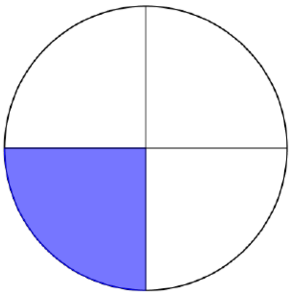
I et bakeri ble $\frac{1}{3}$ av melet bruk til å bake brød, og $\frac{1}{4}$ av melet ble bruk til å bake kaker.

Hvor stor brøkdel av melet har blitt brukt?

Vis hvordan du tenker her

Oppgave 16

a) Fargelegg $\frac{1}{6}$ av det hvite området i sirkelen.



b) Hvor stor del av hele sirkelen har du nå fargelagt?

Vis hvordan du tenker her

Vedlegg 7 - Oversikt over oppgaver, mulige misoppfatninger og resultater

Misoppfatning	**Oppgaver**
Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse	1, 2 og 16a
Jo større nevner (eller teller), jo større eller mindre brøk	3, 4, 13 og 14
Brøkstrek er lik desimalkomma	5 og 6
Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken	7 (13)
Teller (nevner) eller prosent er et isolert tall	8 og 9
Tar ikke hensyn til helheten	10 og 16b
Andre problemer knyttet til brøk	11*, 12** og 15**

*Oppgave 11 tester om elevene klarer å angi en brøk mellom to brøker, med samme nevner.

** Oppgave 12 og 15 tester regning med brøk.

Oppgave 1	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: b og d	18	12	8	15	53
a, b og d	4	4	2	0	10
b	3	1	1	1	6
a og b	0	0	0	1	1
a, b og c (mulig misoppfatning)	1	3	5	2	11
Alle (mulig misoppfatning)	1	4	6	5	16
Ikke svart	0	0	1	0	1
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 2	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 3/4	6	9	3	6	24
Riktig svar, men oppgir svaret i prosent (75%)	3	0	0	0	3
Oppgir svaret i prosent (60-70%), men feil svar.	2	1	2	0	5
Mer enn halve (5/8, 2/3, 3/5, 4/7 eller 7/10)	5	8	6	6	25
Halve (1/2)	7	2	3	2	14
1/4 (mulig misoppfatning)	0	2	5	3	10
1/4, men har argumentert med at det ikke er areal.	1	0	0	0	1
Annet	0	0	4	3	7
Ikke svart	3	2	0	4	9
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 3	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1/4 eller 0,25 liter hver	20	18	17	19	74
0,5 liter hver (mulig misoppfatning)	4	5	3	2	14
75 ml hver	1	0	0	0	1
7,25 dl hver	1	0	0	0	1
0,75 liter hver (1/2 = 15 eller 1,5)(mulig misoppfatning)	1	0	1	0	2
2,5 liter hver	0	0	1	0	1
1/5 liter hver	0	0	1	0	1
Annet	0	1	0	1	2
Ikke svart	0	0	0	2	2
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 4	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: alt over 1/5 til og med 1	26	23	18	19	86
2/10 (mulig misoppfatning)	0	1	0	0	1
1/6 (mulig misoppfatning)	0	0	1	1	2
1/5 (misforstått?)	0	0	1	0	1
Ikke svart	1	0	3	4	8
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 5	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 0,75	26	22	23	22	93
Både 0,75 og 3	1	2	0	0	3
Feil svar: 3 (mulig misoppfatning)	0	0	0	1	1
Feil svar: 3,4 (mulig misoppfatning)	0	0	0	1	1
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 6	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1 4/10, 1 2/5, 14/10 eller 7/5	11	13	8	7	39
1/4 eller 2/8 (mulig misoppfatning)	2	3	2	3	10
1,4/10, 14/100, 14/104 eller 4/10 (mulig misoppfatning)	3	3	0	3	9
14/20 (Addert nevnerne i regnestykket 10/10 + 4/10)	2	2	1	0	5
1/5, 7/10, 7/7, 1/7 eller 2/2,8 (Har prøvd å regne det ut)	3	0	3	2	8
3/5, 5,4/5, 0,25, 1,4/5 eller 6/4 (mangler hvordan hen tenker)	2	1	3	1	7
1 1/4 (mulig misoppfatning)	0	0	1	0	1
ikke svart	4	2	5	8	19
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 7	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 12/14, 60/70	17	18	16	18	69
4/5, 9/10 eller 3/4 (mulig misoppfatning)	6	3	4	1	14
7/6 (mulig misoppfatning)	0	0	1	0	1
svarer med prosent eller desimaltall	1	2	0	0	3
ikke svart	3	1	2	5	11
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 8	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 25%	15	12	16	11	54
Svart med brøk: 1/4	2	4	1	2	9
6 % eller 24% (mulig misoppfatning)	0	0	2	2	4
4% eller 40% fordi 6*4 =24 eller 24/6=4	3	3	0	1	7
Regnet feil	6	2	2	4	14
Ikke svart	1	3	2	4	10
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 9	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 50%	15	12	13	12	52
5% fordi 1 = 1% (mulig misoppfatning)	4	3	6	6	19
15% siden 10 = 100% (mulig misoppfatning)	0	0	0	1	1
Regnet feil	5	9	4	2	20
Ikke svart	3	0	0	3	6
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 10	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 64 kr	4	6	5	2	17
60 kr (mulig misoppfatning)	14	11	13	12	50
80 kr (trekker fra 20% kun én gang)	4	1	0	2	7
Regnet feil	4	1	4	3	12
Ikke svart	1	5	1	5	12
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 11	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1/2, 15/30 eller 3/6	19	17	13	12	61
svart det samme eller utvidet brøkene: feks. 1/3, 2/6 og 4/6	2	2	3	2	9
Brukt desimaltall som teller: 1,5/3	2	3	2	3	10
Svaret er lavere enn den minste brøken	0	1	0	0	1
Svaret er høyere enn den største brøken	0	1	0	0	1
Ikke svart	4	0	5	7	16
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 12	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1 eller 6/6	9	11	10	8	38
6/12 (utvidet brøken)	16	11	8	10	45
6/3 eller 12/6 (Har snudd brøken og regnet feil)	0	0	1	0	1
72 (2 * 36 = 72)	0	1	0	0	1
Har prøvd å løse det som en ligning	0	1	1	0	2
Har regnet riktig, men har svart at det blir 6	0	0	0	1	1
Ikke svart	2	0	3	5	10
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 13	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 5/8, 2/3, 7/10, 4/5, 4/3	5	8	4	3	20
Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken	5	2	0	0	7
Jo høyere siffer, jo høyere verdi har brøken	0	0	1	1	2
Har alle riktig utenom én	3	4	5	5	17
Har to eller tre rette	3	5	3	3	14
Setter 4/3 utenfor tallinjen (Ser kanskje på tallinjen som én hel)	4	4	3	2	13
Gjetter?	2	1	2	4	9
Ikke svart	5	0	5	6	16
Tilsammen	27	24	23	24	98

Oppgave 14	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1/5	24	20	18	21	83
Feil svar: 2/11 (mulig misoppfatning)	1	1	2	2	6
De er like store	2	3	0	1	6
Ikke svart	0	0	3	0	3
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 15	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 7/12	8	14	7	11	40
addert tellere og nevnere uten å gjøre om nevnere først: 2/7	6	0	4	4	14
lagt sammen tellere og tatt med den største nevneren: 2/4	2	3	0	2	7
Svart i prosent: 58%	3	0	0	0	3
addert eller multiplisert tellere og multiplisert nevnerne: 2/12	1	0	0	1	2
Andre diverse feil	5	5	7	2	19
Ikke svart	2	2	5	4	13
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 16a	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: fargelegger 1/6 av det hvite området i sirkelen	18	16	14	18	66
Fargelegger for liten eller for stor del (mulig misoppfatning)	6	4	4	4	18
Ikke svart	3	4	5	2	14
Til sammen	27	24	23	24	98

Oppgave 16b	9A	9B	9C	9D	Alle
Riktig svar: 1/8	4	4	2	4	14
3/8 (Har tatt med det blå feltet)	4	6	9	5	24
1/6 (mulig misoppfatning)	3	5	2	8	18
Andre diverse feil	6	4	3	1	14
Ikke svart	10	5	7	6	28
Til sammen	27	24	23	24	98