MASTEROPPGAVE

Masterstudium i skolerettet utdanningsvitenskap med fordypning i matematikk og matematikkdidaktikk

Mai 2022

Dybdelæring i matematikk

- I dybden på elevers løsningsstrategier i multiplikasjon og divisjon

In-depth learning in mathematics

- In depth of pupils' strategies in multiplication and division

Line Undset

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Sammendrag

I Ludvigsen-utvalgets utredninger som la grunnlaget for revideringen av Kunnskapsløftet, har begrepet dybdelæring en sentral rolle. Utredningene resulterte i fagfornyelsen LK20, og nye læreplaner i alle fag ble tatt i bruk høsten 2020. Dybdelæring blir i LK20 definert som at «eleven skal utvikle forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag for å slik kunne bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger.. Hensikten med denne masteroppgaven er å utforske hva dybdelæring vil si i matematikkfaget, med utgangspunkt i det matematiske temaet multiplikasjon og divisjon. Problemstillingen for oppgaven er:

«Hvordan og i hvilken grad reflekteres dybdelæring i elevers tenkemåter og løsningsstrategier i arbeid med oppgaver i multiplikasjon og divisjon på 4.-6.trinn?»

Det brukes en kvalitativ metode, som inkluderer innsamling av elevsvar av oppgaver innenfor multiplikasjon og divisjon, samt elevintervjuer som omhandler elevenes tenkemåter og løsningsstrategier i disse oppgavene. Utvalget består av 52 elever på 4.-6.trinn, 17 av disse elevene ble etter innsamlingen plukket ut til intervju. Innsamlingen foregikk i perioden desember-januar i årsskiftet 21/22.

Oppsummert identifiseres det fire hovedstrategier til hver regneart. I multiplikasjon finner jeg gjentatt addisjon, uformell og formell bruk av assosiativ, kommutativ og distributiv lov, og standardalgoritmen. I divisjon finner jeg tegning, å gå om multiplikasjon (motsatt vei), oppdeling, og standardalgoritmen. Resultatene viser at elevene bruker forskjellige strategier, men at de er lite konsistente når det kommer til om strategien viser dybdelæring eller ikke. Det er også antydning til en utvikling fra elevene på 4.trinn til elevene på 6.trinn, hvor elevene går fra backup-strategier som ikke viser dybdelæring, til retrievalstrategier. Det er også antydning til at elevene utover 5.trinn og 6.trinn i større grad viser utregning, og dermed gir et innblikk i tenkemåter og løsningsstrategier, som kan være et tegn på at de er mer bevist hvilken strategi de bruker når. Dette er også tegn på dybdelæring. En stor del av informantene viser imidlertid ikke utregning, og det er derfor vanskelig å si noe om hvilken kunnskap og hvilke ferdigheter eleven har. En forklaring stiller høyere krav til relasjonell forståelse, refleksjon over hvorfor en bruker akkurat den metoden eller fremgangsmåten for å komme frem til en løsning, og videre en kritisk vurdering på om løsningen kan stemme.

Abstract

In Ludvigsen committee's reports, which laid the foundation for the revision of Kunnskapsløftet, the concept of in-depth learning has a central role. The studies resulted in Fagfornyelsen LK20, and new curricula where introduced in all subjects in the Autumn of 2020. In-depth learning is defined in this document as «students developing their understanding of central elements and concepts within subjects to able to use subject knowledge and skills in familiar and unfamiliar situations». The purpose of this master's thesis is to explore what in - depth learning means in the mathematical themes of multiplication and division. The research question for the thesis is:

«How and to what extent is in-depth learning reflected in students' thought processes and solution strategies within multiplication and division at 4.-6. grade level?»

A qualitative method is used, which includes the collection of student answers to assignments within multiplication and division, as well as interviews dealing with students' thought processes and solution strategies in the given assignments. The sample consists of 52 students in grades 4-6, 17 of which were selected for interview. The collection took place in the period December-January at the turn of the year 21/22.

Summarized four main strategies for each multiplication and division are identified. In multiplication these four are repeated addition, informal and formal use of associative, commutative, and distributive law, and the standard algorithm. In division the four are drawing, using multiplication, splitting and the standard algorithm. The results show that students use different strategies, but are inconsistent when it comes to whether the strategy shows in-depth learning or not. There is also a development from the students in 4th grade to the students in 6th grade, where the students go from backup strategies that do not show in-depth learning, to retrieval strategies. The results also shows that students in 5th and 6th grade to a greater extent show calculation, and thus provide an insight into thought process and solution strategies, which may be a sign that they are more conscious of what strategies they use. However, a large proportion of the informants do not show calculations, making it difficult to conclude what knowledge the student has.

Forord

Etter et helt år med masterskriving er endelig oppgaven ferdig. Det har vært et langt år, som samtidig har gått veldig fort. Arbeidet har vært spennende, interessant og utrolig lærerikt, og jeg tar med meg masse erfaring og kunnskap videre inn i læreryrket.

Det er mange som står bak meg og har støttet, hjulpet, korrekturlest, diskutert, trøstet, motivert og engasjert meg, og som fortjener en stor takk. Først og fremst vil jeg takke min fantastiske veileder Olav, som svarer på e-post til de fleste av døgnets timer, stiller de gode og utforskende spørsmålene og som har veiledet og støttet meg stødig gjennom dette arbeidet.

Tusen takk til min samboer og kjæreste Eirik som holder ut med mitt skiftende humør, og som har bidratt med oppmuntrende ord og støtte. Tusen takk til gode, fleksible og løsningsorienterte kollegaer fra jobb, og til elever som har bidratt som informanter. Tusen takk til venner og familie, for at dere har engasjert og interessert dere i prosjektet og kommet med råd, tips og støtte.

Jeg er stolt av oppgaven og av arbeidet jeg har lagt ned, men også glad for at den endelig er ferdig. Studenttilværelsen er forbi og jeg gleder meg til en hverdag med full oppmerksomhet til jobb og elever fra høsten av igjen.

Drammen, mai 2022

Line Undset

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Jeg har siden jeg selv gikk på barneskolen sagt at når jeg ble stor ville jeg bli lærer. Jeg likte å hjelpe medelever, og den beste følelsen fikk jeg når jeg forklarte noe og jeg kunne se at de forstod. Matematikk og naturfag var favorittfagene mine, det var noe med det at det fantes et svar man kunne sette to streker under. Jeg husker selv at jeg likte å lære «oppskriftene», og kunne pugge regler for både regnearter og regning med brøk, metoder for å gjøre om mellom måleenheter og formler for å regne ut veg, fart og tid. Det var en oppskrift som fungerte hver gang. Det var ikke før på lærerstudiet og pensumlisten inneholdt Skemp (1976) sin artikkel, at jeg innså at forståelse ikke bare er *forståelse,* og at matematikkfaget handler om mer enn å bare huske oppskriftene.

I løpet av min utdanning har Norge gått fra en gjeldende læreplan til en ny og revidert en. Høsten 2020 ble LK06, Kunnskapsløftet, erstattet av LK20, Fagfornyelsen. Sentralt i denne fornyelsen er begrepet dybdelæring. Gilje, Landfald og Ludvigsen (2018) skriver i en artikkel publisert i Utdanningsnytt at «en utfordring for arbeid med dybdelæring i skolen er at det er flere oppfatninger av hva begrepet betyr og hvordan skolen skal legge til rette for dybdelæring». Disse definisjonene er i stor grad generelle, og ikke fagspesifikke.

I min fremtidige jobb som matematikklærer på 5-10.trinn vil innsikt, kunnskap og forståelse for begrepet dybdelæring være viktig. Hva innebærer dybdelæring i matematikkfaget? Hvordan kan jeg undervise for å legge til rette for dybdelæring? Og hvordan kan jeg vite at det jeg gjør fører til at elevene faktisk får en dypere forståelse i matematikkfaget?

1.2 Problemstilling og forskningsspørsmål

I denne masteroppgaven ønsker jeg å få en bedre forståelse av hva dybdelæring er, og hva det innebærer i matematikkfaget. Jeg ønsker å undersøke hvordan dybdelæring kommer til uttrykk gjennom elevenes løsningsmetoder, slik at jeg i planlegging, gjennomføring og evaluering av undervisning kan legge til rette for dybdelæring. Problemstillingen oppgaven skal forsøke å svare på er:

Hvordan og i hvilken grad blir dybdelæring reflektert i elevenes tenkemåte og løsningsstrategi i oppgaveløsning innenfor temaet tema multiplikasjon og divisjon på 4.-6.trinn?

For å kunne svare på problemstillingen diskuteres følgende forskningsspørsmål:

- Hvilke løsningsstrategier bruker elevene?
- Hvilke av løsningsstrategiene elevene bruker kan defineres som dybdelæring?
- I hvilken grad bruker elevene strategier som reflekterer dybdelæring?

1.3 Oppgavens disposisjon

Kapittel to er et teorikapittel der jeg avklarer begrepet dybdelæring med bakgrunn i forskningslitteratur og forsøker å definere hva det betyr i matematikkfaget. Jeg redegjør også for begrepet i prosessen mot revidering av Kunnskapsløftet. Kapittel tre beskriver oppgavens metode, med begrunnelse for valg av metode, valg av informanter og analysemetode. I kapittel fire presenteres og analyseres de innsamlede dataene. I dette kapitlet blir også datamaterialet diskutert med bakgrunn i teorikapitlet og oppgavens forskningsspørsmål. I kapittel fem forsøker jeg å oppsummere og knytte dette til oppgavens problemstilling, oppgavens begrensninger og forslag til videre forskning.

2. Teori

I dette kapitlet blir det gjort rede for dybdelæringsbegrepet, først gjennom internasjonal litteratur av Sawyer (2014), Pellegrino & Hilton (2012) og National Research Council (2000), deretter gjennom utredningene fra Ludvigsen-utvalget (NOU 2014: 7, NOU 2015: 8, Stortingsmelding 28) og Fagfornyelsen (LK20). Videre forsøker jeg å definere hva begrepet innebærer i matematikk, ved hjelp av Nosrati og Wæge (2018) sin artikkel om dybdelæring i matematikk og Kilpatrick et al. (2001) sin trådmodell for matematisk kompetanse. Til slutt ser jeg på det matematiske temaet multiplikasjon og divisjon og hva dybdelæring kan innebære i regneartene, samt regnestrategier i matematikk.

2.1 Dybdelæringsbegrepet

Det finnes mange forskjellige definisjoner på dybdelæring, og ut ifra hvilken definisjon man bruker, vil begrepet tolkes forskjellig. Det er derfor nødvendig med en begrepsavklaring. Jeg har avgrenset litteraturen til i hovedsak den som refereres til i Ludvigsen-utvalgets utredninger, siden dette er de viktigste grunnlagsdokumentene for LK20. I denne litteraturen har jeg identifisert to hovedretninger, dybdelæring som motsetning til overflatelæring, og dybdelæring som overføring.

2.1.1 Dybdelæring som motsetning til overflatelæring

Dybdelæringsbegrepet kan spores tilbake til blant annet forskning gjort av svenskene Säljö og Marton på 1970-tallet (Gilje et al., 2018). I en studie ba de studenter om å lese en akademisk tekst som de deretter skulle få muntlige spørsmål om. Säljö og Marton (1976) var interessert i å utforske forskjellen på *hva* som er lært, i motsetning til *hvor mye* som er lært. I sine resultater så de to tydelige grupperinger, den ene gruppen pugget innholdet i teksten, mens den andre forsøkte å sette det de leste inn i en større sammenheng. Säljö og Marton (1976) betegnet forskjellen på disse to som *surface level prosessing* og *deep level prosessing*, som kan oversettes til overflate- og dybdelæring (Gilje et al., 2018). Overflatelæring kjennetegnes ved fokus på å memorere eller å bruke metoder som ikke involverer refleksjon eller forståelse (Bjuland & Fauskanger, 2018). Elevene ser for seg at kunnskapen består av konkrete fakta som skal huskes, og overflatemetaforen kommer av at elevene var opptatt av å huske kunnskapen, uten å se den i en sammenheng (Gilje et al., 2018). I motsetning vil dybdelæring kjennetegnes ved fokus på å sette kunnskapen inn i en større, meningsfull, faglig sammenheng med intensjon om å forstå (Bjuland & Fauskanger, 2018; Gilje et al., 2018).

Dybdelæring	Overflatelæring
Elever relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer.	Elever jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til hva de kan fra før.
Elever organiserer egen kunnskap i begrepssystemer som henger sammen.	Elever behandler lærestoff som atskilte kunnskapselementer.
Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper.	Elever memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.
Elever vurderer nye ideer og knytter dem til konklusjoner.	Elever har vanskelig for å forstå nye ideer som er forskjellige fra dem de har møtt i læreboka.
Elever forstår hvordan kunnskap blir til gjennom dialog og vurderer logikken i et argument kritisk.	Elever behandler fakta og prosedyrer som statisk kunnskap, overført fra en allvitende autoritet.
Elever reflekterer over sin egen forståelse og sin egen læringsprosess.	Elever memorerer uten å reflektere over formålet eller over egne læringsstrategier.

Tabell 1: Tabell fra Sawyer (2014), oversettelse hentet fra NOU 2014 (NOU 2014:7)

Sawyer (2014) beskriver et teknologisk samfunn, der memorering av fakta og prosedyrer ikke lenger er nok for å kunne delta i samfunnet. Skolen og utdanningen må endre seg for å bedre passe til dagens samfunn, og elever trenger en dyp konseptuell forståelse av konsepter, og evnen til å jobbe kreativt med dette for å kunne skape nye ideer, teorier, produkter og kunnskap. I arbeid med dette trekker Sawyer (2014) frem dybdelæring som sentralt. Sawyer (2014) setter dybdelæring opp mot overflatelæring i en tabell, se tabell 1, referert til i Ludvigsen-utvalgets utredninger (NOU 2014:7; Sawyer, 2014). Tabell 1 er hentet fra NOU 2014, og oversatt av Ludvigsen-utvalget. I oversettelsen er «learning knowledge deeply» oversatt til dybdelæring, og «traditional classrooom practices» oversatt til overflatelæring. På venstre side i tabellen listes det opp kjennetegn på dybdelæring, som sier noe om hvordan elevene lærer og behandler kunnskapen de tilegner seg. På høyre side er kjennetegn på overflatelæring, som viser motsetningene til punktene om dybdelæring. Det fremstår som et tydelig skille, der dybdelæring er å foretrekke.

National Research Council (2000) fremhever læring med forståelse. De mener lærebøker og læreplaner legger opp til memorering av fakta, og når elevenes kunnskap skal testes, så er det deres evne til å huske disse faktaene som testes, ikke forståelsen. Videre avvises det at læring av fakta ikke er viktig for tenking og problemløsing. National Research Council (2000) peker på forskning på eksperters kunnskap på områder som sjakk, matematikk og historie, som viser at ekspertenes evne til å tenke og løse problemer avhenger av rik kunnskap innenfor faget. Men det poengteres at denne kunnskapen ikke er det samme som en liste med fakta, det er kunnskap som er satt i begrepssystemer og organisert rundt sentrale konsepter innenfor faget. Denne forståelsen av læring utfordrer synet på at memorering av fakta er det samme som overflatelæring (Bjuland & Fauskanger, 2018).

Selv om det kanskje ikke er så svarthvitt som at dybdelæring og overflatelæring er motpoler, blir denne motsetningen med begrepene som ytterpunkter ofte brukt i litteraturen for å peke på spesifikke problemstillinger (Bjuland & Fauskanger, 2018).

2.1.2 Dybdelæring som overføring av kunnskap

Pellegrino og Hilton (2012) definerer dybdelæring som «prosessen der et individ blir kapabelt til å ta det som ble lært i en situasjon og bruke det i en annen situasjon.» (s.5). Essensen i dybdelæring slik de definerer begrepet er ordet «transfer» eller overføring. Dybdelæring som overføring av kunnskap tas også opp av National Research Council (2000). Prosessen inkluderer overføring av både fagkunnskap og prosedyrekunnskap, som innebærer kunnskap om hvordan, hvorfor, og når en metode kan anvendes i løsningen av et problem.

Pellegrino og Hilton (2012) viser til forskning på forskjellen mellom utenatlæring (rote learning), læring som innebærer å blindt følge en prosedyre, og meningsfull læring (meaningful learning), læring som involverer dypere forståelse av problemets struktur og løsningsmetoden (Pellegrino & Hilton, 2012). Sistnevnte leder til overføring, førstnevnte gjør ikke. De bruker et eksempel med areal av et parallellogram. I utenatlæring vil lære elevene formelen, mens meningsfull læring viser elevene hvordan hjørnet på parallellogrammet kan «kuttes av og flyttes». I oppgaveløsning med «vanlige» parallellogram mener Pellegrino og Hilton (2012) at både utenatlæring og meningsfull læring gi riktige svar, men bare meningsfull læring vil kunne overføre kunnskapen til oppgaver der formen på parallellogrammet er «unormal», selv om formelen også da vil virke.

National Research Council (2000) beskriver målet med overføringen i bred forstand, elevene skal overføre fra en situasjon til en ny ukjent situasjon, fra ett skoleår til det neste, fra skolen til hjemme, og fra skolen til arbeidslivet. Dette viser at det elevene lærer på skolen må ha en hensikt å lære, kunnskapen må være anvendbar også utenfor skolen.

2.1.3 Bakgrunnsdokumenter for revidering av Kunnskapsløftet

I 2013 ble Ludvigsen-utvalget oppnevnt med mandat om å vurdere grunnopplæringens fag opp mot krav til kompetanse i et fremtidig samfunns- og arbeidsliv (NOU 2014:7, s. 14). Ludvigsen-utvalgets utredninger, NOU 2014:7 Elevenes læring i fremtidens skole – Et kunnskapsgrunnlag og NOU 2015:8 Fremtidens skole – Fornyelse av fag kompetanser, er grunnlaget for stortingsmelding nr. 28 (2015-2016) Fag – Fordypning – Forståelse, En fornyelse av Kunnskapsløftet (Meld.St 28 (2015-2016); NOU 2014:7; NOU 2015: 8).

Ludvigsen-utvalget mener i NOU 2014:7 at utvikling i samfunnet ikke er noe nytt, men at det hurtige tempoet utviklingen skjer i kan skape utfordringer i arbeidslivet (NOU 2014:7). Et av problemene som ble fremhevet var at det ble lagt til mer og mer innhold i fagene, uten å ta noe bort. Dette førte til det utvalget referer til som stofftrengsel, det var for mye innhold i fagene som skulle gjennomgås på for kort tid. Dette blir en utfordring for skolen når det skal legges til rette for varig læring med en god progresjon (NOU 2014:7).

Litteraturen utvalget baserer seg på viser til at dybdelæring har betydning for elevenes læring og progresjon, både i og på tvers av fag. Dybdelæring blir presentert som det motsatte av overflatelæring, og definert som at «elevene gradvis utvikler sin forståelse av begreper og sammenhenger innfor et fagområde» (NOU 2014:7).

I 2015 kom hovedutredningen, som skulle svare på hva elever vil ha behov for å lære på skolen i et perspektiv på 20-30 år (NOU 2015: 8). Utvalget kommer med anbefaling til fire kompetanseområder, (1) fagspesifikk kompetanse, (2) kompetanse i å lære, (3) kompetanse i å kommunisere, samhandle og delta, og kompetanse i å utforske og skape (NOU 2015: 8). Disse anbefales som grunnlag i fornyelsen av skolens innhold.

Med fagspesifikk kompetanse menes det at elevene skal utvikle kompetanse innenfor sentrale fagområder, deriblant matematikk. Utvalget poengterer at fag og fagområder endrer seg raskt. Elevene bør derfor utvikle god kompetanse om fagets sentrale metoder og tenkemåter, begreper og prinsipper. Om denne kunnskapen brukes begrepet byggesteiner (NOU 2015: 8), som resulterte i fagenes kjerneelementer i de reviderte læreplanene. Matematikk nevnes spesifikt som et fag utvalget mener bør styrkes i skolen og at den matematiske kompetansen må synliggjøres bedre i fag der denne kompetansen er sentral, for eksempel i naturfag og samfunnsfag (NOU 2015: 8).

Kompetanse i å lære handler om metakognisjon (NOU 2015: 8). Elevene skal reflektere over egen læring og hensikten med det de lærer. Dette skal gjøre at elevene utvikler et bevist forhold til egen læring. Kompetanse i å kommunisere, samhandle og delta handler om skrive-, lese- og muntlige kompetanser. Den siste kompetansen innebærer at elevene utvikler kreativitet, nysgjerrighet, engasjement, kritisk tenkning og problemløsning. Alle disse kompetansene er reflektert i det som nå heter fagets kjerneelementer.

Utvalget beskriver at det sentrale poenget med å tilegne seg kompetanse, er å kunne anvende den. Dette betyr at elevene skal kunne anvende ferdigheter og kompetanse de tilegner seg i kjente og ukjente situasjoner. Videre knytter de dybdelæring og kompetanse sammen, ved å si at «kompetanseoppnåelse forutsetter dybdelæring» (NOU 2015: 8).

NOUene la grunnlaget for stortingsmelding 28, som ble publisert i april 2016. Her defineres dybdelæring som at «elevene gradvis og over tid utvikler sin forståelse av begreper og sammenhenger innenfor et fag». Forskjellen fra definisjonen i NOUene er at forståelsen skal utvikles *over tid*. Definisjonen bygger på internasjonal forskning av blant annet Sawyer (2014) og Pellegrino og Hilton (2012). Også her beskrives begrepet dybdelæring som motsetning til overflatelæring (Meld.St 28 (2015-2016); NOU 2015: 8; Sawyer, 2014).

Stortingsmeldingen konstaterer at alle fag skal fornyes. Dette skal gjøre at skolen kan legge til rette for å kunne gå i dybden, for at elevene skal utvikle god forståelse av det de lærer, og prioriteringene i faget skal tydeliggjøres (Meld.St 28 (2015-2016)). I denne fornyelsesprosessen ble det jobbet mye med å kartlegge og konkretisere hva fagenes sentrale begreper, metoder og konsepter er. Fagene ble delt i fire grupper, der matematikk ble grupper med naturfag og teknologi. Dette var et forsøk på å skape mer sammenheng mellom fagene (Meld.St 28 (2015-2016)).

2.1.4 Dybdelæring i læreplanen

I 2017 ble ny Overordnet del av læreplanen fastsatt og tatt i bruk i skolen. Den utdyper verdigrunnlaget i opplæringslovens formålsparagraf og de overordnede prinsippene for opplæring (Kunnskapsdepartementet, 2017).

I kapitlet prinsipper for opplæringen under kompetanse i fagene står det at:

> *Skolen skal gi rom for dybdelæring slik at eleven utvikler forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag, og slik lærer de å bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger. Dybdelæring i fag innebærer å anvende kunnskaper og ferdigheter på ulike måter, slik at elevene over tid kan mestre ulike typer faglige utfordringer individuelt og i samspill med andre* (Kunnskapsdepartementet, 2017).

Også i denne definisjonen nevnes det at elevene skal se sammenhenger, noe både Sawyer (2014), Pellegrino og Hilton (2012) og National Research Council (2000) også poengterer. Dette vil gjøre at elevene vil kunne se sammenhenger både i og mellom fag, og skape et mer helhetlig syn på skolefagene. Definisjonen tar også opp det faktum at elevene skal kunne anvende kunnskapen og ferdighetene i både kjente og ukjente sammenhenger, som kan knyttes til det Pellegrino og Hilton (2012) kaller overføring. Definisjonen inkluderer mange av elementene Ludvigsen-utvalget pekte på i utredningene, og setter læring inn i en fremtidsrettet retning. Den gir muligheten til å lære og tilegne seg kompetanse for et fremtidig samfunn, et samfunn vi i dag ikke er sikre på hvilke ferdigheter og hvilken kunnskap som trengs.

2.1.5 Dybdelæring og kompetansebegrepet

Definisjonene av begrepene dybdelæring og kompetanse har likheter og overlapper hverandre. Maugesten og Nordbakke (2019) mener begrepene utfyller hverandre, men at «kompetansen handler om resultatet eleven skal oppnå etter endt opplæring» (Maugesten & Nordbakke, 2019, s. 60). Videre mener de at begrepet dybdelæring innebærer en prosess og en utvikling, og «at produktet som oppnås gjennom dybdelæringen, er den matematiske kompetansen» (Maugesten & Nordbakke, 2019, s.59).

Det finnes flere prosjekter som har forsket på det som omtales som kompetanser for det 21. århundre. Bakgrunnen er samfunnets hurtige utvikling, og at man har sett et behov for å kartlegge fremtidige kompetansebehov. Flere av prosjektene stiller spørsmål ved om innholdet i skolen i tilstrekkelig grad forbereder elevene på livet etter skolen (NOU 2014:7). Pellegrino og Hilton (2012) forsøker å definere kompetanser for det 21. århundre og kobler dette sammen med dybdelæring. Kompetansebegrepet blir sett på som en blanding av kunnskaper og ferdigheter. Kunnskap innebærer både «content knowledge», fagkunnskap, og «procedural knowledge», prosedyrekunnskap, som inkluderer kunnskap om hvordan, hvorfor og når denne kunnskapen kan brukes. De mener dybdelæring er prosessen der denne overførbare kunnskapen utvikles.

I den Overordnede delen av læreplanen defineres kompetansebegrepet slik:

> *Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning.* (Kunnskapsdepartementet, 2017)

Kunnskaper forstås som fakta, begreper, teorier, ideer og sammenhenger i og mellom fag, og tilsvarer det Hilton og Pellegrino (2012) kaller fagkunnskap. Ferdigheter handler om metodene og prosessene som trengs for å løse oppgaver og problemer, og innebærer både kognitive, praktiske, sosiale, kreative, språklige og motoriske ferdigheter, som tilsvarer prosedyrekunnskap.

2.1.6 Oppsummering

I de ulike definisjonene av dybdelæring er det mange felles komponenter, der den viktigste er sammenheng. Dybdelæring handler i stor grad om å se ny kunnskap i sammenheng med eksisterende kunnskap, sette begreper i sammenheng med andre begreper og i sammenheng med konsepter. Dette handler om at elevenes læring ikke består av adskilte og fragmenterte deler, men at læringen blir en helhet som gir mening. Fagene i skolen bygger på hverandre, noe de grunnleggende ferdighetene i læreplanen prøver å vise, med at for eksempel regning og lesing skal være en del av alle fag.

For det andre er elevenes bakgrunnskunnskap en viktig faktor i dybdelæringen. I tabell 1 av Sawyer (2014) er et av punktene for dybdelæring at elevene kan relatere nye ideer og begreper til kunnskap de har fra før. National Research Council (2000) skriver at læring med forståelse innebærer å bygge på kunnskapen eleven allerede har. Pellegrino og Hilton (2012) sier at overføring av læring innebærer evnen til å bruke tidligere læring til støtte for ny læring eller problemløsning. Oppsummert kan vi si at dybdelæring i stor grad handler om å koble ny læring og ny kunnskap til det elevene har kjennskap til fra før. Dette fører videre til neste punkt som er felles, å organisere begreper i system. Dette er et av Sawyers (2014) punkter, noe som også nevnes hos de to andre (National Research Council, 2000; Pellegrino & Hilton, 2012).

En tredje felleskomponent er metakognisjon og selvregulering, at elevene i læringsprosessen må være bevisst egen læring, bevisst hvilken læringsstrategi de bruker, bevisst hva de forstår og hva de ikke forstår. Dette ser vi er Sawyers (2014) siste komponent i tabellen, tabell 1. Både

Pellegrino og Hilton (2012) og National Research Council (2000) nevner metakognisjon som et viktig aspekt ved dybdelæring, og som en viktig del av graden av overføring av kunnskap.

2.2 Dybdelæring i matematikk

Med mange forskjellige definisjoner av dybdelæring, kan det være vanskelig å si nøyaktig og fullstendig hva dybdelæring i matematikk er (Nosrati & Wæge, 2018). I forbindelse med revidering av nye læreplaner og implementeringen av disse, er det behov for fagspesifikke definisjoner av dybdelæring. Nosrati og Wæge (2018) tar utgangspunkt i Sawyers tabell (2014) og forskningsbaserte modeller for læring i matematikk, og trekker frem «fem sentrale komponenter i den matematiske læringsprosessen som kan beskrive hva dybdelæring i matematikk kan være.» Disse fem komponentene er (1) begrepsmessig forståelse, (2) prosedyrekunnskap, (3) anvendelse, (4) resonnering og (5) metakognisjon og selvregulering (Nosrati & Wæge, 2018). Disse fem har mye til felles med trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001). I denne danner fem tråder det Kilpatrick et al. (2001) kaller «mathematical proficiency», som kan oversettes til matematisk kompetanse eller kyndighet.

2.2.1 Matematisk forståelse

Nosrati og Wæge (2018) betegner det som begrepsmessig forståelse, Kilpatrick et al. (2001) som «conceptual understanding». Begge beskriver at elevene skal bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer. Denne forståelsen handler om mer enn å kunne isolerte fakta og regler. Ifølge Nosrati og Wæge (2018) vil dybdelæring gi en forståelse for fakta og metoder som gjør det lettere å huske og bruke, fordi fakta og metoder knyttes sammen og settes i sammenheng med hverandre. Dette betyr også at elever kan bruke og forstå ulike matematiske representasjoner og oversette mellom dem.

Mange har skrevet om og forsøkt å beskrive forståelse i matematikk. Skemp (1976) skiller mellom instrumentell og relasjonell forståelse. Skemp (1976) definerer relasjonell forståelse som det å både vite hva du skal gjøre og hvorfor, mens instrumentell forståelse innebærer å vite hva du skal gjøre, men ikke hvorfor. Nosrati og Wæge (2018) knytter instrumentell og relasjonell forståelse til dybdelæring og overflatelæring, der relasjonell forståelse vil gi dybdelæring og instrumentell forståelse vil gi overflatelæring. Ifølge Skemp (1976) vil elever kunne komme langt i matematikk med instrumentell forståelse. Problemet oppstår i den situasjonen der det er en mismatch hvor lærer underviser for relasjonell forståelse, mens elevene er fornøyde med instrumentell, eller motsatt.

Andre begreper som brukes om forståelse i matematikk er prosedyre- og konseptuell forståelse, utenatlæring og «ekte forståelse» (Bjuland & Fauskanger, 2018). Fauskanger og Bjuland (2018) sammenlikner de ulike begrepene og mener de har mye til felles. «Rote learning» eller utenatlæring kobles til å memorere, huske og pugge, og dermed til overflatelæring. I tillegg brukes utenatlæring parallelt med prosedyrekunneskap og prosedyreforståelse. Ekte forståelse brukes parallelt med konseptuell kunnskap og konseptuell forståelse. Ofte blir begrepene fremstilt som motsetninger, og at den ene, relasjonell, konseptuell, ekte forståelse, er til å foretrekke over den andre.

2.2.2 Prosedyrekunnskap

Nosrati og Wæge (2018) beskriver prosedyrekunnskap som kunnskap om matematiske prosedyrer. Kunnskapen innebærer å kunne utføre dem nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig. Det innebærer også kunnskap om når og hvordan prosedyrene skal brukes. Dette tilsvarer det Kilpatrick et al. (2001) kaller precedural fluency, som kan oversettes til beregning (Maugesten og Nordbakke, 2019). Et kjennetegn på dybdelæring er at elevene kan veksle mellom forskjellige metoder, og velge den som er mest hensiktsmessig i en gitt situasjon (Nosrati og Wæge, 2018). Ifølge Kilpatrick et al. (2001) bør elever kunne effektive og nøyaktige prosedyrer, der regning med de fire regneartene både med og uten penn og papir nevnes spesifikt. Videre mener de at det ikke lenger er like kritisk at elever kan utføre regneoperasjoner med store tall for hånd, men mye matematikk i hverdagen krever kunnskap om algoritmer for å regne i hodet.

Både Nosrati og Wæge (2018) og Kilpatrick et al. (2001) understreker viktigheten av at elever lærer forskjellige prosedyrer, og flere strategier for regning, for eksempel gode regnestrategier for multipler av 10. Noen ganger er det nødvendig med strategier og metoder for å finne et nøyaktig svar, andre ganger trengs bare et overslag. Andre ganger igjen vil det ikke være hensiktsmessig å regne i hodet, men bedre å bruke hjelpemidler som kalkulator. Poenget er at elevene bør lære mange og varierte prosedyrer, og ha kunnskap om når, hvordan og hvorfor denne strategien eller prosedyren vil være mest hensiktsmessig.

Forståelse og prosedyrekunnskap henger tett sammen med hverandre, forståelse gjør læring av metoder lettere, og motsatt trengs det en viss ferdighet for å lære mange matematiske konsepter

(Kilpatrick et al., 2001). De to blir ofte sett på som motsetninger, som vist over i avsnittet om forståelse. Ifølge Kilpatrick et al. (2001) vil elever ha problemer med å utvikle en dypere forståelse uten en tilstrekkelig prosedyrekunnskap. Et eksempel som brukes her er forskjellen på å lære en prosedyre med eller uten forståelse, der det kan trekkes linjer til Skemp (1976) og instrumentell og relasjonell forståelse. Algoritmene til de fire regneartene kan læres med eller uten å forstå hvorfor de kan brukes til å få riktig svar. Lærer elevene disse prosedyrene med instrumentell forståelse er de avhengige av å huske alle stegene i riktig rekkefølge for at metoden skal gi riktig svar, de lærer ny kunnskap som isolerte deler. Dette kan føre til en oppfatning av at matematikk handler om å lære nye regler for hver minste prosedyre, og at du må huske alle disse reglene. Dette kan også skape en avstand mellom matematikken de lærer på skolen og matematikken som trengs i hverdagslivet. Lærer de prosedyren med relasjonell forståelse vet de hvorfor algoritmen virker og gir riktig svar, og det er mindre sannsynlig at de glemmer viktige steg (Kilpatrick et al., 2001).

2.2.3 Anvendelse

Den tredje tråden fra Kilpatrick et al. (2001) beskriver at matematikken elevene lærer skal kunne anvendes både på skolen, men minst like viktig i hverdagen. Det handler om at elevene kan formulere og gjenkjenne, representere og løse matematiske problemer. Ifølge Nosrati og Wæge (2018) og Kilpatrick et al (2001) blir dette ofte kalt problemløsning eller problemformulering i forskningslitteratur.

Kilpatrick et al. (2001) skiller mellom rutineoppgaver og ikke-rutineoppgaver. Rutineoppgaver er oppgaver som elevene kjenner igjen, og har erfaring med å løse. Motsatt er ikke-rutineoppgaver oppgaver der eleven ikke gjenkjenner typen oppgave, og må lage eller finne en må en måte å løse problemet på. En elev med det Kilpatrick et al. (2001) kaller «strategic competence», vil kunne finne flere forskjellige måter å løse en ikke-rutineoppgave. Komponenten anvendelse trekker linjer til dybdelæring som overføring, fordi elevene overfører en strategi fra en kjent situasjon til en ukjent (Pellegrino & Hilton, 2012).

2.2.4 Resonnering

Resonnering innebærer at elevene kan forklare hvordan de tenker, reflektere over løsningsstrategier, og begrunne løsninger på problemer ved hjelp av logiske argumenter og resonnementer (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018). Kilpatrick et al. (2001) kaller det adaptive reasoning, som også innebærer å se sammenhenger.

2.2.5 Metakognisjon og engasjement

Den siste komponenten hos Nosrati og Wæge (2018) handler om metakognisjon og selvregulering. Det innebærer at elevene kan reflektere over hva de lærer, hvordan de lærer, og hvorfor de lærer det. Ifølge Nosrati og Wæge (2018) kjennetegnes eksperter innenfor fagfelt, også matematikk, av at de vet når de ikke forstår noe. Videre vet eksperter hvordan de i disse situasjonene kan bruke ulike strategier for å finne informasjon som kan hjelpe dem med å rette opp den manglende forståelsen. Den siste tråden er oversatt til engasjement, og omfatter både lærere og elevers holdning om at matematikkfaget er nyttig og verdifullt, og at innsats bidrar til læring (Maugesten & Nordbakke, 2019). Maugesten og Nordbakke (2019) mener dette samsvarer med metakognisjon og refleksjon over egen læring og forståelse.

2.2.6 Matematisk kompetanse

I 2002 prøvde det danske prosjektet KOM (Niss, 2002) å finne ut hva det vil si å mestre matematikk. De kom frem til at det var å ha matematisk kompetanse. Prosjektet klassifiserte matematisk kompetanse i åtte kompetanser, (1) tenke matematisk, (2) lage og løse matematiske problemer, (3) matematisk modellering, (4) matematisk resonnering, (5) representere matematiske enheter, (6) behandle matematiske symboler, (7) kommunisere i, med og om matematikk, og (8) kunne bruke matematiske verktøy, inkludert digitale (Niss, 2002). De åtte kompetansene til Niss (2002) var inspirasjon da kompetansemålene i L97 ble revidert og Kunnskapsløftet LK06 ble skrevet (Svingen & Gilje, 2018).

Felles for Niss (2002) og Kilpatrick et al. (2001) er at de prøver å dekke alle sider av matematisk kompetanse, og de beskriver mye av det samme (Svingen & Gilje, 2018). De tre første kompetansene til Niss (2002) kan sammenliknes med Kilpatricks (2001) tråd om anvendelse, det kan også nummer 6, å behandle matematiske symboler. I tillegg kan det å tenke matematisk og det å behandle matematiske symboler kobles til tråden om forståelse, det kan også nummer 5, å representere matematiske enheter. Nummer 2 hos Niss (2002) kan også sees i sammenheng med tråden om beregning. Å resonnere matematisk og kommunikasjon kan kobles til Kilpatrick et al. (2001) sin tråd resonnering. Kilpatricks (2001) siste tråd, engasjement, finner vi ikke igjen hos

Niss (2002). Den matematiske kompetansen som beskrives gjennom de åtte kompetansene, gjenspeiles i matematikkfagets kjerneelementer i læreplanen etter Fagfornyelsen (LK20).

2.2.7 Endringer fra LK06 til LK20

I august 2020 ble nye læreplaner (LK20) i alle fag innført i grunnskolen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Disse erstatter læreplanene fra Kunnskapsløftet, LK06, og de er revidert og fornyet etter anbefaling fra Ludvigsen-utvalgets utredinger. I utredningene står begrepet dybdelæring sentralt. Jeg har sammenliknet læreplanen i matematikk fra LK06 og LK20 for å se hva de største endringene er og hvordan disse endringene kan legge til rette for dybdelæring.

For det første er det laget trinnspesifikke læreplaner til grunnskolen. I LK06 var kompetansemålene samlet i planer etter 2.trinn, 4.trinn, 7.trinn og 10.trinn. De trinnspesifikke planene skal gjøre det tydeligere hva elevene skal lære når og dermed vise progresjonen elevene skal ha gjennom de ulike årstrinnene. Dette fører til at det etter 4., 5., 6. og 7.trinn er 10 kompetansemål per trinn (Utdanningsdirektoratet, 2019), mens det i LK06 var 17 kompetansemål etter 4.trinn og 21 etter 7.trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013).

I LK06 var kompetansemålene sortert under tema, som tall og algebra, geometri, måling og statistikk (Utdanningsdirektoratet, 2013). I LK20 er temaoverskriftene tatt bort, og som følge av at planene er trinnspesifikke, er temaene i større grad porsjonert utover de forskjellige trinnene. Eksempelvis er begrepet divisjon sentralt i tre av ti kompetansemål på 4.trinn, og begrepet brøk sentralt i seks av ti kompetansemål på 5.trinn (Utdanningsdirektoratet, 2019), se tabell 2.

Ser man på selve formuleringen av kompetansemålene og hvilke begreper som er brukt, er det ikke så store forskjeller. Et begrep som blir brukt flere ganger i LK20 er formuleringen at elevene skal utforske. I LK06 blir dette bare brukt innenfor temaet geometri (Utdanningsdirektoratet, 2013). Utdanningsdirektoratets forklaring av verbet å utforske innebærer at elevene skal oppleve og eksperimentere, sanse, søke, oppdage, observere og granske. Begrepet skal også ivareta nysgjerrighet og undring. I tillegg kan det innebære å teste eller prøve ut og evaluere arbeidsmetoder, produkter eller utstyr (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Et viktig poeng som presiseres i bakgrunnsdokumentene er stofftrengselen (NOU 2014:7; NOU 2015: 8). Målene i LK20 er formulert på mindre omfangsrike måter, noe som vil lette på stofftrengselen.

Læreplan/Trinn	LK06	LK20
Etter 4.trinn	- Utvikle og bruke varierte metoder for multiplikasjon og divisjon, bruke dem i praktiske situasjoner og bruke den lille gangetabellen i hoderegning og oppgaveløsning - Finne informasjon i tekster eller praktiske sammenhenger, velge regneart og grunngi valget, bruke tabellkunnskap og utnytte sammenhenger mellom regneartene, vurdere resultatet og presentere løsningen	- Utforske og bruke målings- og delingsdivisjon i praktiske situasjoner - Representere divisjon på ulike måter og oversette mellom de ulike representasjonene - Utforske, bruke og beskrive divisjonsstrategier - Utforske og forklare sammenhenger mellom de fire regneartene og bruke sammenhengene hensiktsmessig i utregninger - Modellere situasjoner fra sin egen hverdag og forklare tenkemåtene sine
Etter 5.trinn		- Utvikle og bruke ulike strategier for regning med positive tall og brøk og forklare tenkemåtene sine
Etter 6.trinn		- Utforske strategier for regning med desimaltall og sammenlikne regnestrategier for hele tall - Formulere og løse problemer fra sin egen hverdag som har med desimaltall, brøk og prosent å gjøre, og forklare egne tenkemåter - Utforske areal og volum i praktiske situasjoner og presentere dem på ulike måter
Etter 7.trinn	- Utvikle, bruke og diskutere metoder for hoderegning, overslagsregning og skriftlig regning og bruke digitale løsninger - Gjøre overslag over og måle størrelser for lengde, areal, masse, volum, vinkel og tid og bruke tidspunkt og tidsintervall i enkle beregninger, diskutere resultatene og vurdere hvor rimelige de er - Finne informasjon i tekster eller praktiske sammenhenger, stille opp og forklare beregninger og fremgangsmåter, vurdere resultatet og presentere og diskutere løsningen	- Utvikle og bruke hensiktsmessige strategier i regning med brøk, desimaltall og prosent og forklare tenkemåtene sine - Bruke tallinje i regning med positive og negative tall - Bruke ulike strategier for å løse lineære ligninger og ulikheter og vurdere om løsninger er gyldige

Tabell 2: Tabellen viser kompetansemålene i LK06 og LK20 som går inn under multiplikasjon og divisjon.

Helt nytt i faget er at sentrale metoder, begreper og konsepter blir tydeliggjort gjennom fagets kjerneelementer. Kjerneelementene er overordnet kompetansemålene, og skal være en del av matematikkundervisningen gjennomgående i alle trinn. I matematikk er kjerneelementene: (1) utforskning og problemløsing, (2) modellering og anvendelser, (3) resonnering og argumentasjon, (4) representasjon og kommunikasjon, (5) abstraksjon og generalisering, og (6) matematiske kunnskapsområder.

Utforsking og problemløsning innebærer at elevene skal «lete etter mønster, finne sammenhenger og diskutere seg frem til en felles forståelse» (Utdanningsdirektoratet, 2019). Dette kjenner vi igjen fra Sawyers tabell, at elevene bruker bakgrunnskunnskap og tidligere erfaringer, og at de leter etter mønster og underliggende prinsipper (Sawyer, 2014). Fokuset skal legges på fremgangsmåtene, løsningsstrategiene og metodene elevene bruker, fremfor svarene. Elevene skal utvikle metoder for å kunne løse forskjellige problemer de ikke kjenner fra før. Det handler om å tilegne seg strategier for å trekke ut informasjon, utforske ulike mulige metoder for å løse problemet, og å vurdere om løsningene de finner er gyldige. Her kan vi trekke linjer til flere komponenter beskrevet i seksjon 2.2.1-2.2.5, både forståelse, prosedyrekunnskap og anvendelse (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018). I multiplikasjon og divisjon innebærer dette at elevene får lære ulike regnemetoder for multiplikasjon og divisjon, at de kan anvende og overføre metodene i ulike situasjoner, og at de kan vurdere hvilke metoder som egner seg best til de ulike situasjonene.

Modellering og anvendelser handler om kunnskap om matematiske modeller som beskriver virkeligheten med et matematisk språk, og elevene skal få innsikt i hvordan slike modeller brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet. De skal også kunne anvende disse modellene i ulike situasjoner både i og utenfor matematikkfaget, samt vurdere modellene og begrensningene kritisk (Utdanningsdirektoratet, 2019). Dette kjerneelementet kan knyttes til seksjon 2.2.3 om anvendelse, og punkt 1, 3 og 4 i Sawyers tabell (Sawyer, 2014). Det kan også knyttes til kjerneelementet om problemløsning, fordi modellering og anvendelse kan være en del av og et resultat av problemløsningsprosessen (Maugesten & Nordbakke, 2019). Modellering i multiplikasjon og divisjon innebærer å kunne bruke disse regneartene til å modellere situasjoner fra egen hverdag, og kunne lage regneuttrykk til situasjonene.

Resonnering og argumentasjon handler om at elevene skal kunne resonnere og argumentere matematisk. Dette betyr at de kan følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker og at de kan begrunne fremgangsmåter, resonnementer og løsninger og forklare hvorfor de er gyldige (Utdanningsdirektoratet, 2019). Resonnering kan knyttes til Sawyers (2014) punkt om å organisere egen kunnskap i begrepssystemer som henger sammen, og å vurdere ny informasjon og knytte dette til konklusjoner. I tillegg kan argumentasjon knyttes til punkt fem hos Sawyer (2014), om å forstå hvordan kunnskap blir til gjennom dialog og vurdere logikken i et argument kritisk. Det kan også knyttes til seksjon 2.2.4 om resonnering. Innenfor multiplikasjon og divisjon betyr dette at elevene skal kunne se sammenhengen mellom regneartene i tillegg til sammenhengen til addisjon og subtraksjon. De må også kunne begrunne valget av løsningsmetode og argumentere for hvorfor metoden vil kunne gi riktig svar.

Representasjon og kommunikasjon i matematikk betyr at elevene kan flere forskjellige måter å representere matematiske begreper, sammenhenger og problemer på, og kan kommunisere dette til andre. Elevene skal kunne bruke matematiske begreper og et matematisk språk. Dette innebærer å organisere kunnskapen i begrepssystemer som henger sammen (Sawyer, 2014). I tillegg vil kommunikasjon handle om å forstå hvordan kunnskap blir til gjennom dialog. Representasjon og kommunikasjon vil også komme inn under anvendelse slik Kilpatrick et al. (2001) beskriver. Multiplikasjon og divisjon kan representeres på ulike måter, og elevene må kunne bruke disse og veksle mellom dem, både som regnestykker, tegninger og modeller, svar på tallform og bokstavform, og kunne bruke dem til å forklare situasjoner fra hverdagen. Innenfor divisjon vil et eksempel være skillet mellom målings- og delingsdivisjon, og hva forskjellen mellom disse innebærer. Elevene må kunne forklare representasjonen ved bruk av et presist matematisk språk, der kunnskap om sifrenes verdi, tegnsetting, posisjonssystemet og utregningsalgoritmer er sentralt.

Gjennom **abstraksjon og generalisering** skal elevene utvikle formalisering av tanker, strategier og matematisk språk og de skal gjennom utforskning oppdage sammenhenger og strukturer (Utdanningsdirektoratet, 2019). Dette kjerneelementet kan knyttes til punkt 3 og 4 i Sawyers (2014) tabell, om å se etter mønster og underliggende prinsipper og vurdere ny informasjon og knytte denne til konklusjoner. Det kan også knyttes til prosedyrekunnskap og resonnering fra Kilpatrick et al. (2001) og Nosrati og Wæge (2018). For temaet multiplikasjon og divisjon betyr dette at elevene skal utforske ulike løsningsstrategier for regnestykker og gjennom arbeid med disse generalisere metodene slik at de blir generelle for regneartene. Dette innebærer at de får kjennskap til ulike måter å regne med multiplikasjon og divisjon, at de kan sammenlikne de forskjellige metodene og forklare likhetene og forskjellene, og at de kan begrunne hvilken de mener er mest hensiktsmessig i de gitte situasjonene.

De **matematiske kunnskapsområdene** omfatter tall og tallforståelse, algebra, funksjoner, geometri, statistikk og sannsynlighet. «Kunnskapsområdene danner grunnlaget som elevene trenger for å utvikle matematisk forståelse ved å utforske sammenhenger innenfor og mellom kunnskapsområdene» (Utdanningsdirektoratet, 2019). Regneartene multiplikasjon og divisjon er sentrale temaer innenfor alle disse kunnskapsområdene.

2.3 Multiplikasjon og divisjon

De fire regneartene, addisjon og subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, er viktige i matematikken på barneskolen. Multiplikasjon og divisjon er sentrale regnearter som legger grunnlag for mye matematisk læring i skoleløpet. Et mål for undervisningen er at elevene utvikler relasjonell forståelse, strategier og fleksible tenkemåter.

2.3.1 Multiplikasjon

Multiplikasjon av tall følger de tre regnelovene kommutativ, assosiativ og distributiv lov.

Kommutativ lov sier at $a \cdot b = b \cdot a$, og betyr at rekkefølgen til faktorene er likegyldig. Denne gjelder for også for addisjon.

Assosiativ lov sier at $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Dette betyr at i utregning av regnestykker med flere enn to faktorer, så spiller det ingen rolle hvilke faktorer som multipliseres sammen først. Eksempelvis kan regnestykket $2 \cdot 3 \cdot 4$ regnes på denne måten $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4$ eller slik $2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12$. Assosiativ lov forklarer regelen i multiplikasjon med tierpotenser «å legge til en null». I regnestykket $4 \cdot 50$ kan 50 skrives som $5 \cdot 10$.
Vi får $4 \cdot 50 = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 20 \cdot 10 = 200$.

Distributiv lov sier at $a(b + c) = ab + ac$. Denne loven binder sammen addisjon og multiplikasjon. I arbeid med multiplikasjon kan denne brukes på flere måter. Et eksempel er multiplikasjon med større tall, da kan tallet deles opp, her med oppgave 1 fra oppgavesettet, $12 \cdot 38$. En mulighet er å se at 12 kan deles i $10 + 2$, og dermed få regnestykkene $(10 \cdot 38) + (2 \cdot 38)$. Her er strategien at det er enklere å multiplisere med 10 og 2 enn med 12.

Solem et al. (2017) viser til at elever tar i bruk varierte strategier i løsning av multiplikasjonsoppgaver, der rutenett nevnes i forbindelse med distributiv lov. I et rutenett kan elevene tegne figurer for å representere tallene som skal multipliseres, og bruke rutene til å dele opp tallene. Når tallene blir større blir det naturlig å overføre strategien til et tomt rutenett, slik at man går fra telling til mer abstrakt tenkning (Solem et al., 2017). I denne utviklingen vil ikke størrelsesforholdet være riktig, det er strukturen i metoden som er viktig for elevene å forstå.

2.3.2 Divisjon

I divisjon skilles det mellom delings- og målingsdivisjon. Oppgave 3 fra oppgavesettet, vedlegg 3, kan vise et eksempel på delings-divisjon. Der har vi et antall klinkekuler som skal deles på et gitt antall bokser og spørsmålet er hvor mange klinkekuler det da blir i hver boks. En kan dele ut en og en klinkekule til det ikke er flere igjen, og vi ser hvor mange klinkekuler det er i hver boks.

Oppgave 4 om en skredder som syr skjerf kan vise et eksempel på målingsdivisjon. Skredderen har 6 meter stoff og bruker $\frac{1}{2}$ meter stoff per skjerf, hvor mange skjerf kan han sy? Da er det naturlig å måle opp stoffet, $\frac{1}{2}$ meter og $\frac{1}{2}$ meter og så videre, og vi kan telle at det blir 12 skjerf.

Solem et. al (2017) mener at det ikke er så viktig å lære forskjellen mellom målings- og delingsdivisjon til elevene, men at man som lærer må kunne forskjellen fordi elevene må få oppgaver som utfordrer begge tenkemåtene. Et eksempel er divisjon med desimaltall og brøk, der konteksten har mye å si for å kunne forstå oppgaven. Regnestykker 2: $\frac{1}{4}$ gir mening når for eksempel 2 liter saft skal deles på flasker som tar $\frac{1}{4}$ liter hver, men det gir ikke mening å si at 2 liter is skal deles på $\frac{1}{4}$ barn (Solem et al., 2017).

Regnelovene gjelder ikke på samme måte for divisjon som multiplikasjon, fordi faktorenes rekkefølge har noe å si. Allikevel vil man kunne bruke elementer fra distributiv lov i regning med divisjon. Høyre-distributivitet i divisjon kan skrives slik $(a+b): c = a : c + b : c$. Grunnen til dette er at divisjon kan sees som multiplikasjon med brøkdelen $\frac{1}{c}$, $(a+b) : c = (a+b) \cdot \frac{1}{c}$.

2.3.3 Algoritmene

Begge regneartene har en standardalgoritme for utregning. Undervisning om de fire regneartene innebærer ofte innlæring av disse algoritmene (Kjøsnes, 1997; Solem et al., 2017). Ved hjelp av algoritmene kan elever regne ut hvilket som helst regnestykke, enten fordi de forstår hva de gjør, hvorfor de gjør det og hvordan (relasjonell forståelse), eller fordi oppskriften er pugget (instrumentell forståelse) (Skemp, 1976).

Det finnes ulike varianter av standardalgoritmene. Ifølge Solem et al. (2017) vil man som lærer møte elever fra mange forskjellige bakgrunner som har ulike måter å regne på. Det er viktig å ha kunnskap om de ulike metodene, og vite hvordan de ulike metodene fungerer.

Ifølge Kjøsnes (1997) blir det brukt mye tid på å lære disse algoritmene, og han stiller spørsmål ved hvordan det undervises. Også Solem et al. (2017) setter spørsmål ved dette, som de skriver «så galt kan det gå». Algoritmene er komprimerte, og hensikten er å effektivisere regneoperasjonen. Men algoritmene gir lite mening, og kan for mange elever bare bli enda en regel som skal huskes. Algoritmene bygger på mye annen kunnskap, multiplikasjon med den lille gangetabellen, addisjon, subtraksjon, og posisjonssystemet.

Solem et al. (2017) kommer med et forslag til fordel for standardalgoritmen i divisjon, som de kaller oppstykkingsdivisjon, som likner det Kjøsnes (1997) beskriver i sin artikkel. I begge eksemplene brukes penger som skal fordeles som kontekst. Metoden bryter med algoritmens mønster, fordi man ikke nødvendigvis må begynne med den bakerste faktoren i tallet, og fordi den åpner opp for at elevene i større grad styrer selve utdelingen. Dette betyr at elevene må resonnere og prøve seg frem for mye de kan dele ut hver gang. Oppstykkingsdivisjon henger tettere sammen med å dele ut konkreter eller å tegne opp og visualisere, og kan derfor gi mer mening for elever enn standardalgoritmen som er en effektivisering av oppstykkingsdivisjonen.

2.3.4 Løsningsstrategier

Ifølge Ostad (2010) drøftes strategier i matematikk med fokus på det som foregår når elever løser matematikkoppgaver, mer presist et uttrykk som knyttes til selve løsningsprosessen. Goldman (1989) deler inn strategibegrepet i to hovedkategorier, generelle strategier og oppgavespesifikke strategier. Generelle strategier beskrevet som et generelt rammeverk for å tilnærme seg matematiske oppgaver samt å skaffe seg informasjon om progresjonen i løsningsprosessen (Goldman, 1989). De blir også beskrevet som metakognitive strategier, og brukes om det metodiske opplegget i undervisningen og lærebøkene (Askeland, 2009; Ostad, 2010). Generelle strategier omfatter dermed standardalgoritmene.

Oppgavespesifikke strategier rommer de alternative fremgangsmåtene eleven har tilgjengelig når den står ovenfor en matematikkoppgave (Askeland, 2009; Ostad, 2010). Ifølge Ostad (2010) viser forskning at disse strategiene kan være varierte og sammensatte. En vanlig måte å klassifisere disse strategiene på, er å skille mellom backup- og retrievalstrategier (Ostad, 2010; Siegler, 1988). Retrievalstrategier kjennetegnes ved at elevene gjenkjenner oppgaven og kan hente frem svaret automatisk. Et eksempel på dette er automatiseringen av den lille gangetabellen. Bakcupstrategier er alle andre strategier som ikke er retrievalstrategier (Siegler, 1988).

Ostad (2008) presenterer følgende liste av strategier i multiplikasjon, listen er gjengitt i Askeland (2009), se tabell 3. Gjentatt addisjon, tellestrategien og regelstrategien er klassifisert som backupstrategier, mens dekomposisjon og direkte retrieval er klassifisert som retrievalstrategier.

Strategi	Beskrivelse
Gjentatt addisjon	Eleven adderer den ene operanden så mange ganger som er indikert av den andre operanden. $3 \cdot 4$ løses ved å tenke $4 + 4 + 4 =$
Telleseriestrategien	Eleven har lært en tallserie og benytter denne under oppgaveløsningen. Eleven synger eller sier tallserien inni seg til den kommer frem til svaret. Oppgaven $3 \cdot 4$ løses ved å tenke 4-8-12
Regelstrategien	Eleven har lært en regel for hvordan den kan komme frem til svaret. 0-regelen: når vi multipliserer et tall med null, blir svaret alltid null 9-regelen: svarene (siste tallet) i tabellen 9-18-27-36-45-64-63-72-90, danner tallrekken 9-9-7-6-5-4-3-2-1-0. 5-regelen: når vi multipliserer med 5, blir det siste takket i svaret enten 5 eller 0
Dekomposisjonsstrategien	Eleven benytter en kjent kombinasjon som den henter frem fra minnet og utleder svaret fra. Oppgaven $6 \cdot 7$ kan løses ved å hente frem $6 \cdot 6 = 36$, for så å legge til 6. i oppgaven $8 \cdot 9$ henter eleven frem $8 \cdot 10 = 80$, for så å trekke fra 8.
Direkte retrieval	Eleven henter frem svar eller oppgaven og svaret direkte fra langtidsminnet.

Tabell 3: Multiplikasjonsstrategier hentet fra Ostad (2008) og Askeland (2009).

Ifølge Ostad (2010) er de fleste strategiene som knyttes til oppgaveløsning i matematikk på grunnskolenivå omfattende og sammensatte, for eksempel vil en divisjonsoppgave med flersifrede tallforutsette at eleven behersker en rekke strategier innen både addisjon, subtraksjon og multiplikasjon.

Lemaire og Siegler (1995) viser til tidligere forskning om at nordamerikanske elever på 3. og 4.trinn bruker mange forskjellige strategier i multiplikasjon, og nevner gjentatt addisjon, skrive problemet, og hoppetelle. Ifølge Lemaire og Siegler (1995) endres frekvensen på hvilke strategier som er brukt med læring, fra høyest frekvens av backupstrategier, til høyest frekvens av retrievalstrategier. I denne utviklingen ser de også at antallet som svarer «jeg vet ikke» minker, og at flere elever forsøker å løse problemet. De viser også til en sammenheng om at jo mer avansert problemet er, jo høyere er frekvensen av backupstrategier.

Ostad (2010) beskriver det han betegner som «normal» utvikling av strategibruk. Utviklingen kjennetegnes ved at nye strategier dannes når eleven blir eldre, og eleven vil gradvis få et rikere utvalg av strategier den kan bruke. Han beskriver yngre elevers strategikunnskaper med strategifattigdom, og eldre elevers med strategirikdom, og utviklingen kjennetegnes ved avtagende bruk av backupstrategier, og at retrievalstrategier etter hvert vil få en større rolle. Utviklingen kjennetegnes også ved gradvis større effektivitet (Ostad, 2010).

I denne masteroppgaven ser jeg etter hvilke løsningsstrategier elevene bruker i oppgaver med multiplikasjon og divisjon, og diskuterer om disse strategiene viser dybdelæring eller ikke. Bruk av backupstrategier vil være tegn på manglende dybdelæring. En elev som over tid ensidig benytter samme strategi, kan være tegn på strategifattigdom eller strategirigiditet. Dette kan også skyldes at strategikunnskapene ikke er lagret funksjonelt (Ostad, 2010).

3 Metode

I dette kapitlet blir valg av metoder for innsamling begrunnet og beskrevet. Det beskrives også hvordan utvalg av informanter ble gjort. I tillegg diskuteres oppgavens validitet og reliabilitet, og jeg drøfter forskningsetiske utfordringer knyttet til oppgaven.

3.1 Metoder for datainnsamling

Ulike forskningsmetoder vil gi forskjellige typer data. Et hovedskille går mellom kvantitative og kvalitative metoder. Kvantitative data er målbare, som vil si at de må kunne uttrykkes i tall eller andre mengdedata, og gir fordelen av å kunne foreta beregninger for å finne gjennomsnitt og avvik. Kvalitative data sier noe om de ikke-tallfestbare egenskapene hos undersøkelsesenhetene, i form av tekst eller utsagn og skal fange opp mening eller opplevelse. Det viktigste skille går derfor mellom om dataene kan uttrykkes gjennom tall eller tekst (Dalland, 2021; Halvorsen, 2008).

I denne masteroppgaven ønsker jeg å undersøke elevers løsningsstrategier i arbeid med oppgaver innenfor et avgrenset matematisk tema for å se hvordan dybdelæring kommer til uttrykk. Jeg har valgt å samle inn ved hjelp av to metoder, både skriftlige oppgaver elevene løser på skolen og intervju med utvalgte elever i etterkant av oppgaveløsningen, der intervjuet fokuserer på elevenes svar på oppgavene. Dataene blir i hovedsak kvalitative, det er tekst som elevene har skrevet eller sagt. Det er elevenes tenkemåter og løsningsstrategier jeg er interessert i å analysere, ikke nødvendigvis om svarene er rette eller gale, og dermed vil det være fordeler ved kvalitativ metode.

3.1.1 Oppgavesett

Jeg lagde et oppgavesett bestående av 9 oppgaver som omhandlet multiplikasjon og divisjon. Oppgavene er hentet fra forskjellige steder, med inspirasjon fra matematikksenteret (Matematikksenterert & Naturfagssenteret; Matematikksenteret), pensumlitteratur (Lampert, 2001; Skott et al., 2018) og læreverket brukt ved skolen, Multi for 5. og 6. klasse (Alseth et al., 2013, 2014). Oppgavene varierer i formulering, design og matematisk nivå, og elevene skulle svare på arket. Mer utfyllende om oppgavene og begrunnelse kommer i seksjon 3.4 om analysemetode. Oppgavesettet ligger som vedlegg 3.

3.1.2 Intervju

Intervju er den mest brukte metoden å samle inn kvalitative data på, det er en fleksibel metode som kan gi fyldige og detaljerte beskrivelser. Formålet med kvalitative forskningsintervju er å beskrive eller å forstå noe. Fordelen med intervju er at informantene har større frihet til å uttrykke seg. Det skilles mellom ustrukturert, semistrukturert og strukturert intervju. I ustrukturerte intervjuer er strukturen åpen, spørsmålene og rekkefølgen er ikke satt på forhånd (Christoffersen & Johannessen, 2012). Atmosfæren er uformell som gjør at informanten letter åpner seg og praten flyter fint. Motsatt er både spørsmålene og rekkefølgen fastsatt i strukturerte intervjuer. Fordelen her er at analyseprosessen blir mindre krevende, men fleksibiliteten blir begrenset. Mellom disse er semistrukturerte intervjuer. Spørsmålene og rekkefølgen er planlagt som et utgangspunkt, men både spørsmålene og rekkefølgen kan endres underveis.

Kvale og Brinkmann (2015) peker på ulike problemer i intervjusituasjoner med barn. De viser til Eder og Fingerson (2002) som påpeker det skjeve maktforholdet mellom voksen og barn, og nødvendigheten av at barnet ikke oppfatter intervjuer som en lærer fordi det kan føre til en oppfatning hos barnet om at det bare finnes ett riktig svar. Det er vanskelig for meg som intervjuer å ikke fremstå eller oppfattes som lærer, når jeg enten er læreren til elevene eller jobber som lærer ved skolen og er kollega med læreren til eleven. Å separere rollene som intervjuer og lærer er noe jeg er klar over, men som jeg tror det kan være vanskelig for å eleven å forholde seg til. Når det gjelder oppfatningen av at det bare finnes ett svar, var dette noe jeg la veldig vekt på både under oppgaveløsning og i intervju. Det er ikke de matematiske svarene jeg egentlig er ute etter, men hvordan elevene tenker.

Intervjuene skal i hovedsak handle om to til fire av de oppgavene eleven har løst. Intervjuguide ligger som vedlegg 4. Intervjuene i denne masteroppgaven kan kategoriseres som semistrukturerte intervjuer. Det tas utgangspunkt i de samme spørsmålene til hver oppgave, men det er forskjellig fra elev til elev hvilke oppgaver de intervjues om. På den måten blir intervjuguiden skreddersydd til hver elev. Ut ifra elevenes svar, kan jeg velge å følge etter resonnementer og forklaringer med oppfølgingsspørsmål.

Det finnes flere måter å registrere et intervju på. Videoopptak vil fange opp tale til både informant og intervjuer, i tillegg til kroppsspråk, ansiktsuttrykk og reaksjoner. Lydopptak gir fordelen av å ta opp alle lyder, all nøling, alle ord og alle formuleringer. I denne oppgaven er hensikten at intervjuene skal være korte samtaler om elevenes løsningsstrategier. Med dette i tankene i tillegg til at det er elever under 18år, valgte jeg å notere elevenes svar på pc, i stedet for å ta lydopptak eller videoopptak. Det er også oppfordret til å i minst mulig grad samle inn personopplysninger, noe stemmer og bilde er. Det betyr en mer krevende rolle for meg som intervjuer, fordi jeg må notere samtidig som jeg intervjuer. Tiden rett etter intervjuet blir kritisk fordi intervjuer sitter igjen med mange inntrykk (Christoffersen & Johannessen, 2012) og man husker utsagn eller beskrivelser det er viktig å notere umiddelbart etter intervjuet.

3.2 Utvalg

I problemstillingen min vil jeg undersøke løsningsstrategier i tema multiplikasjon og divisjon. Utvalget består av elever på 4.-6.trinn. På 4.trinn legges det et viktig grunnlag i regning med de fire regneartene, og det er derfor svært relevant også for mellomtrinnet. Over sommeren 2021 fikk jeg fast jobb som faglærer på 4.trinn, og det ble naturlig å bruke elevene ved skolen jeg jobber. Teamene på 4., 5. og 6. trinn ble spurt om elevene kunne delta på bakgrunn av matematisk tema de skulle gjennomgå høsten 2021. Alle tre trinn skulle innom multiplikasjon og divisjon. Teamene var positive med en gang, det samme var ledelsen, representert ved rektor og inspektør for 4. til 7.trinn.

4.trinn består av to klasser, 4a og 4b. 4a består av 21 elever, 12 gutter og 9 jenter. 4b består av 19 elever, 10 gutter og 9 jenter. Av de 40 elevene leverte 28 elever skriftlig samtykke fra foresatte. 26 av disse var til stede på innsamlingsdagen. Alle 26 har samtykket til at oppgavene kan brukes i forskningen, 20 av dem har samtykket til intervju.

5.trinn består også av to klasser, 5a og 5b, der 5a består av 18 elever, 9 gutter og 9 jenter, mens 5 b er en klasse på 19 elever, 10 gutter og 9 jenter. Av de 37 elevene leverte 26 elever skriftlig samtykke fra foresatte. 22 av disse var til stede på innsamlingsdagen. 21 har samtykket til at oppgavene kan brukes i forskningen, 19 av dem har samtykket til intervju.

6.trinn består av to klasser, 6a og 6b, der 6a er en klasse med 17 elever, 9 gutter og 8 jenter, og 6b har 15 elever i klassen, 8 gutter og 7 jenter. Av de 32 elevene leverte seks elever skriftlig samtykke fra foresatte, og fem av disse var til stede på innsamlingsdagen. Alle fem har samtykket til at oppgavene kan brukes i forskningen, to av dem har samtykket til intervju.

Av alle elevene som har levert samtykke og var til stede på innsamlingsdagen, har 40 elever samtykket til at jeg både kan bruke oppgavene i analyse og at de er åpne for å stille til intervju. Det er 12 elever som bare samtykket til at jeg kan bruke oppgavene og en elev som bare har samtykket til intervju. Totalt er 52 besvarelser analysert.

Disse 52 elevbesvarelsene er dermed skjevfordelt, med 26 elever fra 4.trinn, 22 elever fra 5.trinn og 5 elever fra 6.trinn.

Hvilke elever velges ut til intervju

Jeg valgte intervju som metode i tillegg til oppgavesettet, fordi jeg ønsket at intervjuene skulle utfylle de skriftlige besvarelsene. Det var forventet at mange elever svarte på oppgavene uten å vise eller forklare hvordan de hadde tenkt. I tillegg vil det å forklare strategien sin muntlig være annerledes enn å gjøre det skriftlig, og min tanke var at elevene lettere forklarer seg muntlig. Det var også flere svar jeg var interessert i å høre elevene forklare.

I utvelgelsen tok jeg utgangspunkt i flere kriterier. Det første kravet var at foresatte hadde samtykket til samtale. Videre valgte jeg elever av ulike kjønn, ulike klasser og ulike trinn. I tillegg måtte elevens besvarelse fylle minst ett av følgende kriterier:

- Svar uten å vise eller forklare fremgangsmetode
- Interessant løsningsstrategi
- Interessant svar

Etter analysen av besvarelsene, tok jeg for meg trinn for trinn og valgte ut rundt tre elever jeg ønsket å intervju per oppgave og per trinn. Til slutt stod jeg igjen med 17 elever, åtte fra 4.trinn, syv fra 5.trinn og to fra 6.trinn. På 6.trinn var det bare disse to som hadde samtykket til intervju.

3.3 Gjennomføring av innsamling

Etter at prosjektet var godkjent av NSD, avtalte jeg med alle klassene om å få komme inn og informere elevene om prosjektet. Jeg ønsket å presentere meg og prosjektet, og engasjere elevene til at dette var spennende å delta på. Elevene fikk med seg informasjonsskriv med samtykkeskjema hjem til foresatte, og beskjed om å ta med skriftlig samtykke tilbake til skolen så snart som mulig. Deretter avtalte jeg tid med lærerne for å komme inn og gjennomføre innsamlingen med oppgavesettet. Jeg informerte elevene igjen om at det var frivillig å delta, at det var løsningsstrategiene deres og ikke nødvendigvis svaret jeg var interessert i, at jeg ikke forventet at alle skulle bli ferdig eller få til alt, og at de skulle gjøre sitt beste. Jeg var til stede i alle klasser i gjennomføringen og svarte på spørsmål elevene hadde.

Elevene fikk en skoletime, 60 minutter, på å løse oppgavene individuelt. Noen elever på hvert trinn følger egne undervisningsopplegg av forskjellige grunner. På 4.trinn fikk åtte elever forkortede oppgavesett med fem oppgaver i stedet for ni. På 5.trinn og 6.trinn deltok de ikke i innsamlingen.

På 4.trinn besluttet jeg å forenkle oppgave 1 og 9. Dette gjorde jeg fordi jeg har god kjennskap til mange av elevenes matematiske nivå, og kjennskap til hva de har gjennomgått av multiplikasjon og divisjon. Etter innsamlingen på 4.trinn gjorde jeg endringer på bildene til oppgave 2 for å tydeliggjøre hva oppgaven spurte om. Ellers har alle fått like oppgaver. Endringen vises i vedlegg 3.

I løpet av innsamlingen har jeg innsett at noen av oppgavene var for vanskelige og for langt unna hva elevene til daglig er vant med i matematikkundervisningen. Dette gjelder spesielt oppgave 4, 5 og 8. I ettertid tenker jeg at rekkefølgen til oppgavene kanskje har mer å si enn jeg tenkte før innsamling. Etter innsamling på alle trinn ser jeg at oppgavenes nivå passet godt til 6.trinn.

Gjennomføringen skjedde i løpet av desember. Det var i denne perioden mye sykdom, både influensa og covid-19.

Etter at oppgavesettene ble samlet inn og gjennomgått, valgte jeg ut elever jeg ønsket å intervjue. Kriteriene for utvelgelse er skissert i seksjon 3.2. Jeg avtalte igjen med de aktuelle lærerne om når jeg kunne hente elevene ut til en samtale. Intervjuene tok gjennomsnittlig 20 minutter og ble gjennomført i skoletiden i egnede grupperom i nærheten av der resten av klassen hadde undervisning.

3.4 Analysemetode

I arbeid med oppgavesettet gikk jeg igjennom oppgavene hver for seg. Jeg skrev ned alle løsningsstrategier jeg tenkte elevene kunne komme til å bruke. Deretter gikk jeg gjennom hver løsningsstrategi og forsøkte å kategorisere strategien som dybdelæring eller ikke dybdelæring, med utgangspunkt i Sawyers tabell (2014). Til hver oppgave vises det en tabell med oversikt over mulige løsningsstrategier jeg forventer, med begrunnelse for hvorfor jeg mener det reflekterer eller ikke reflekterer dybdelæring. Et viktig aspekt med denne klassifiseringen er at selv om elever bruker løsningsstrategier som ikke klassifiseres som dybdelæring, kan det hende eleven også har andre strategier som vil kunne vise dybdelæring. Kursiv i tabellene viser utdrag fra Sawyers (2014) tabell. Noen av løsningene er ikke helt klart om de viser dybdelæring eller ikke, og det argumenteres for begge deler. Etter å ha analysert elevsvarene har jeg i analysedelen lagt til og endret noen kategorier.

- Oppgave 1

Oppgavetekst:

Regn ut og forklar med egne ord hvordan du kan finne svar på denne oppgaven

$12 \cdot 38$ eller $6 \cdot 38$

Denne oppgaven ble tatt med fordi det er en oppgave uten mye tekst. Det er samtidig veldig tydelig hva eleven skal gjøre, og det legges ikke føringer for hvordan de skal regne. Tallene 12 og 38 er valgt fordi begge er tosifrede, 12 spesielt, fordi det er nærliggende 10 og kan vise ulike strategier med multiplikasjon med 10. For 4.trinn ble 12 forenklet til 6. Tabell 4 viser hvilke strategier jeg på forhånd antok elevene kom til å bruke i utregning av denne oppgaven.

Dybdelæring	Ikke dybdelæring
	Standardalgoritme Argument: *Eleven memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.* Kan gjøres uten forståelse. Pugging av algoritmen uten å forstå hvorfor den virker.
Distributiv lov Argument: *Eleven relaterer nye ideer*, multiplikasjon av to tosifrede tall, *til tidligere kunnskap og erfaringer* om multiplikasjon som regneart, og at det er enkelt å multiplisere	

med 10. Viser sammenhengen mellom addisjon og multiplikasjon.	
Tomt rutenett Argument: *Eleven ser etter mønstre og underliggende prinsipper.* Tallene deles for eksempel i tiere og enere, og alle tall multipliseres med hverandre for så å adderes sammen.	Tomt rutenett. Argument: *Elever memorer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.* Denne kan gjøres uten forståelse fordi eleven har lært seg metoden uten å vite hvorfor den fungerer.
	Tegning For eksempel tegne opp grupper og telle, 12 grupper på 38 eller 38 grupper på 12. Argument: *Eleven behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer.*
	Gjentatt addisjon 38 addert 12 ganger, eller 12 addert 38 ganger. Argument: *Eleven behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer.*
	Feilaktig overføring fra addisjonsalgoritmen Argument: *Eleven behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer.* Eleven har lært en algoritme for addisjon, og overfører denne til multiplikasjon uten å ta høyde for at addisjon og multiplikasjon ikke er det samme.
Dobling Argument: *Eleven ser etter mønstre og underliggende prinsipper, relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer.* Eleven dobler for eksempel 38, først · 2 så · 4 så · 8, og til slutt · 8 + · 4 som blir · 12.	Dobling Argument: *elever behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer.* Eks: blande det å doble tallet i oppgaven, for eksempel 38, med å doble summen, i dette eksempelet 76, 152 og så videre.

Tabell 4: Strategikategorier og klassifisering av oppgave 1

- Oppgave 2, er hentet fra Realfagsløyper: prinsipper for ambisiøs undervisning (Matematikksenterert & Naturfagssenteret)

Oppgavetekst (for medfølgende bilder se vedlegg 3):

Her er to bilder av esker med epler. Finn et regnestykke som viser hvor mange epler det er i hver av eskene. Kan du finne flere regnestykker som viser hvor mange epler det er?

Oppgaven er hentet fra nettsiden realfagsløyper. Dette er en nettbasert ressurs laget av matematikksenteret og naturfagssenteret for didaktisk kompetanseheving i realfagene. Oppgaven er hentet fra pakken ambisiøs og utforskende undervisning, fra pakke 1 som heter ambisiøs undervisning i matematikk. Opprinnelig var det sjokolade på bildene, jeg har samme antall i samme type esker, men har brukt epler i stedet. Oppgaven er tiltenkt 3.-5.trinn. Modulen har ifølge nettsiden som mål at man skal reflektere over egen praksis og få bedre innsikt i hva prinsipper for ambisiøs matematikkundervisning er. Ambisiøs matematikkundervisning handler om hvordan lærer kan legge til rette for at elevene utvikler forståelse av viktige matematiske tenkemåter. Neste modul handler om dybdelæring i matematikk, og disse henger sammen.

Oppgaven ble valgt fordi det er flere måter å løse den på og den skal vise at det finnes flere mulige regnestykker til å vise hvor mange epler det er. Den viser også sammenhengen mellom areal og multiplikasjon og mellom addisjon og multiplikasjon, og er et fint eksempel på bruk av assosiativ lov og kommutativ lov. Tabell 5 viser hvilke løsningsstrategier jeg forventer at elevene bruker.

Dybdelæring	Ikke dybdelæring
	Telle Argument: *eleven jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til hva de kan fra før.*
	Gjentatt addisjon Argument: *Elever behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer.*
	Hoppetelle med 3-, 4- eller 6-gangen Argument: *Elever behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer.*
	Regnestykke, $3 \cdot 4 = 12$, $12 \cdot 2 = 24$ og $24 \cdot 2 = 48$ Argument: *Elever behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer.*
Kommutativ og/eller assosiativ lov. Argument: *Eleven ser etter mønster og underliggende prinsipper*. Det er flere måter å se mønstre på i denne oppgaven, for eksempel bilde 1 kan man se $3 \cdot 4$ i hver boks, og multiplisere med 2, mens man på bilde 2 kan se $3 \cdot 4$ og deretter multiplisere med 4. Antallet kan også deles inn i 6ere, altså $2 \cdot 6 \cdot 2$ for bilde 1 og $2 \cdot 6 \cdot 4$ for bilde 2. Det er likegyldig hvilken rekkefølge tallene multipliseres i.	

Tabell 5: Strategikategorier og klassifisering av oppgave 2

- Oppgave 3, hentet fra Realfagsløyper: prinsipper for ambisiøs undervisning (Matematikksenterert & Naturfagssenteret)

Oppgavetekst (for medfølgende bilder, se vedlegg 3):

Her er det fire bokser med klinkekuler.

a) Hvor mange klinkekuler er det i disse fire boksene til sammen?
b) Her er det tatt ut noen kuler, 5 kuler fra to av boksene. Hvor mange kuler er det igjen i de fire boksene til sammen?
c) En dag blir kulene brukt i et friminutt. Etter friminuttet teller læreren opp klinkekulene, og nå er det bare 162 igjen. Kan læreren fordele de 162 kulene likt i de fire boksene? Hvordan kan læreren fordele kulene i de fire boksene?

Denne er hentet fra samme sted som oppgave 2 (Matematikksenterert & Naturfagssenteret), og den er tiltenkt 6.-7.trinn. I den opprinnelige oppgaven var det to bilder og kun oppgave a) og b) og teksten «skriv et regnestykke som viser hvor mange klinkekuler det er til sammen i boksene. I beskrivelsen av gjennomføring skulle man også spørre elevene om de kunne komme med flere ulike regnestykker. I min versjon er det lagt til litt tekst, samt oppgave c).

Oppgaven ble tatt med fordi det er flere måter å komme frem til riktig svar på. Slik deloppgave a) og b) er formulert vil de ha lite potensiale til å vise dybdelæring. Det interessante er oppgave c), og resonneringen til elevene om hvordan læreren kan fordele kulene i boksene, siden divisjonen ikke går opp. Tabell 6 viser hvilke strategier jeg antar elevene kommer til å bruke. Det er en praktisk situasjon, som det går an å relatere til, men den er muligens gjort mer avansert enn nødvendig.

Dybdelæring	Ikke dybdelæring
	Gjentatt addisjon 50+50+50+50=200 Argument: *elever jobber med nytt lærestoff uten å relatere til hva de kan fra før.*
$4 \cdot 50$ eller $50 \cdot 4$ Argument: avhengig av hvordan eleven regner ut. Mulig ved hjelp av distributiv lov, $(4 \cdot 25) + (4 \cdot 25)$ da brukes *kunnskap elevene har fra før*, $(2 \cdot 50) + (2 \cdot 50)$.	4*50 eller 50*4 Argument: avhenger av hvordan eleven regner ut. Eks: skriver multiplikasjonsstykket, men bruker gjentatt addisjon.
Hopp med 50-gangen, 50-100-150-200 Argument: Overfører kunnskap fra 5-gangen. *Eleven organiserer kunnskap i begrepssystemer.*	Hopp med 50-gangen, 50-100-150-200 Argument: *Elever behandler lærestoff som atskilte kunnskapselementer.*

	Subtraksjon 200-10=190 Argument: viser bare at eleven har lest og forstått informasjonen i oppgaveteksten.
$(2 \cdot 50) + (2 \cdot 45)$ eller $(3 \cdot 50) + 40$ Argument: *Elevene relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer.* Hvordan ser elevene boksene med klinkekuler etter at noen av kulene er tatt ut? Hvordan kan de da sette opp et multiplikasjonsstykke?	
	Tegne opp og fordele kulene i boksene Argument: *elever behandler lærestoff som atskilte kunnskapselementer og jobber med nytt lærestoff uten å relatere til hva de kan fra før*
	Gjentatt subtraksjon, 162-50=112 112-50=62 62-50=12 Kulene blir fordelt 50-50-50-12 Argument: *jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til hva de kan fra før.*
Standardalgoritmen i divisjon med rest. Argument: *Resonnering og argumentasjon for gyldigheten av en løsning.* Klinkekulene kan ikke deles opp i halve kuler.	Standardalgoritmen i divisjon med rest Argument: *Elever memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.*
Oppstykkingsdivisjon, Kjøsnes (1997) Argument: *Eleven relaterer nye ideer og begreper, til tidligere kunnskap og erfaringer*	

Tabell 6: Strategikategorier og klassifisering av oppgave 3

- Oppgave 4, hentet fra nettsiden til matematikksenteret (Matematikksenteret)

Oppgavetekst:

En skredder har 6 meter stoff og skal sy skjerf.

a) Til hvert skjerf trenger skredderen ½ meter stoff. Hvor mange skjerf kan han sy?
b) Skredderen skal i tillegg sy små skjerf til dukker. Han trenger ¼ meter stoff for hvert skjerf. Blir det flere eller færre skjerf enn i sted? Kan man finne ut hvor mange skjerf det blir uten å regne på nytt? Forklar og begrunn.

c) For en tredje type skjerf trengs det ¾ meter stoff for hvert skjerf. Blir det flere eller færre skjerf enn i a)? Blir det flere eller færre skjerf enn i b)? Kan man finne ut hvor mange skjerf det blir uten å regne (helt) på nytt? Forklar og begrunn.

Denne oppgaven er hentet fra matematikksenteret (Matematikksenteret). Det er en oppgave som går inn under temaene divisjon med brøk, resonnering og argumentasjon. Matematikksenteret skriver at hensikten er å se på ulike løsningsstrategier i divisjon og sammenhengen mellom disse. De løsningsstrategiene jeg antar elevene vil bruke er vist i tabell 7. Det er en oppgave som inneholder brøk, som alle trinn har vært borti, men de eldste mer enn de yngste. Den inneholder også mye tekst, og er egentlig beregnet som en samarbeidsoppgave. Det er derfor en oppgave som kan være for vanskelig for flere av elevene, men jeg synes den representerer divisjon på en god måte, og åpner for mange ulike tilnærminger til løsning.

Dybdelæring	Ikke dybdelæring
	Feilsvar Argument: *Elever har vanskelig å forstå nye ideer som er forskjellige fra dem de har møtt i læreboka.* Dette er en oppgave med mye tekst og regning med tall mindre enn 1.
Bare svar Argument: *elever relaterer nye ideer og begreper,* divisjon med tall mindre enn 1*, til tidligere kunnskap og erfaringer,* divisjon med hele tall.	Bare svar Argument: *Elever memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.* Eleven kan regne ut divisjon med tall mindre enn 1, men vet ikke hvorfor eller kan ikke forklare hvordan.
Divisjon med brøk Argument: *elever relaterer nye ideer og begreper,* divisjon med tall mindre enn 1*, til tidligere kunnskap og erfaringer,* divisjon med hele tall.	Divisjon med brøk Argument: *Elever memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.*
Divisjon med desimaltall Argument: *elever relaterer nye ideer og begreper,* divisjon med tall mindre enn 1*, til tidligere kunnskap og erfaringer,* divisjon med hele tall. *Elevene organiserer egen kunnskap i begrepssystemer som henger sammen.* Eleven kjenner til sammenhengen mellom brøk og desimaltall og synes det er lettere å regne med desimaltall.	Divisjon med desimaltall Argument: *Elever memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.*
Tegning og resonnering. Argument: *Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper,* eleven tegner opp et stykke stoff og deler det i biter. Visualiserer brøkdelene og ser at 1m stoff vil gi 2 skjerf i oppgave a), 4 skjerf i oppgave b) og 1 skjerf med litt reststoff	Tegning og resonnering. Argument: *Elever behandler fakta og prosedyrer som statisk kunnskap, overført fra en allvitende autoritet.* Elevene har blitt vist strategien med å visualisere og tegne opp, men viser ikke noe forståelse for hvorfor dette er en god strategi.

i oppgave c). Kan ut ifra dette begrunne og argumentere for sine svar. *Organiserer egen kunnskap i begrepssystemer som henger sammen dobling/halvering, (En viss dybdelæring, en mellomting.)*	Intervju kan vise hva slags forståelse eleven har.
Elevene sammenlikner brøkene. Argument: *Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper* *Relaterer nye ideer og begreper til kunnskaper* *Dele på et tall mindre enn én er en ny ide.* Forklaringer om hvordan å dele på tall mindre enn en vil gi et større tall i svar, jo mindre tall jo større svar. Når skredder bruke halvparten så mye stoff per skjerf vil han få dobbelt så mange skjerf, sammenlikning av ½ og ¼	

Tabell 7: Strategikategorier og klassifisering av oppgave 4

- Oppgave 5, hentet fra Delta (Skott et al., 2018), opprinnelig Lampert (2001)

Oppgavetekst:
En lærer skal dele elevene inn i grupper. Hjelp læreren med å finne ut hvor mange elever det skal være på de ulike gruppene og hvor mange grupper det skal være.

a) 10 grupper på 6 elever= ___grupper på 12 elever
b) ___grupper på 4 elever= 30 grupper på 2 elever
c) ___grupper på 7 elever =___grupper på 21 elever
d) Hvor mange løsninger kan du finne på oppgave c)? Ser du et mønster i løsningene du har funnet?

Oppgaven hentet fra Lampert (2001) består av deloppgave a) til c), mens deloppgave d) er inspirert fra Delta (Skott et al., 2018). I både Lampert (2001) og Delta (2018) blir oppgaven gitt uten instruksjoner og presentert på denne måten: 10 grupper på 6 = __ grupper på 12

Teksten og situasjonen med lærere og elever har jeg lagt til. Lampert (2001) bruker oppgaven som et innledende problem i en matematikktime, og hensikten hennes er at oppgaven får elevene til å jobbe med tallmønstre og tallsammenhenger, sammenhengen mellom addisjon og multiplikasjon, sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon, 6-gangen, gjentatt addisjon med 2, 4 og 12, og ulike måter å representere tall på (Skott et al., 2018). Oppgave c) og d) er mer utfordrende, og elevene jobber i tillegg med argumentasjon og resonnering, og mønster og underliggende prinsipper. Hvilke strategier jeg antar elevene bruker vises i tabell 8.

Dybdelæring	Ikke dybdelæring
Likning $10 \cdot 6 = x \cdot 12$ Argument: *Elever relaterer nye ideer og begreper, til tidligere kunnskap og erfaringer.* Bruker kunnskap om likninger de har fra før til å løse oppgavene. Kunnskap om likhetstegnet, det skal være likt på begge sider, *organiserer begreper i begrepssystemer.*	
Dobling og halvering Argument: *Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper,* ser sammenhengen mellom at 10 grupper med 6 skal bli x antall grupper med 12. Dobling av 6 til 12, betyr at 10 må halveres til 5. *Eleven organiserer egen kunnskap i begrepssystemer som henger sammen,* ser sammenhengen mellom dobling og halvering.	
Tegning Argument: *Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper.* Tegner opp 10 grupper med 6, og ser at de kan fordele på nytt som 12 grupper med 5.	Tegning Argument: *Elever behandler fakta og prosedyrer som statisk kunnskap, overført fra en allvitende autoritet.* Tegner opp 10 grupper med 6, som de kan fordele på nytt som 12 grupper med 5
Elevene prøver seg frem Argument: *Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper*	Elevene prøver seg frem Argument: *Eleven jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til hva de kan fra før,* de viser ikke en spesifikk struktur og plan i utprøvingen
Lager tabell for å følge utviklingen Argument: *Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper,* finner et mønster i utviklingen, sammenhengen mellom 7 og 21 er at 21 er tre ganger større enn 7.	
Forklaring som at når antallet elever i grupper med 21 øker med 1, øker antallet elever i grupper med 7 med 3, fordi $7 \cdot 3 = 21$. Argument: *Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper*	

Tabell 8: Strategikategorier og klassifisering av oppgave 5

- Oppgave 6, inspirert av en oppgave i læreverket Multi grunnbok 5B, (Alseth et al., 2013)

Oppgavetekst:

a) En padde starter på null og hopper 6 om gangen på en tallinje. Hvor langt har den kommet etter tre hopp? Så hopper den tre hopp til, hvor langt er den kommet nå?
b) Etter disse seks hoppene møter padden en frosk. Frosken har kommet like langt, men har hoppet 9 hopp. Hvor langt hopper frosken på hvert hopp? Har de møttes før på denne strekningen?

Oppgaven er basert på oppgave 7.4, (Alseth et al., 2013, s. 76). I oppgavesettet er det lagt ved en tallinje som elevene kan bruke. Hensikten er å se sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon, samt sammenhengen mellom multiplikasjonstabellene 4 og 6. Hvilke strategier jeg antar elevene bruker er samlet i tabell 9.

Dybdelæring	Ikke dybdelæring
	Multiplikasjon, $6 \cdot 3, \quad 2 \cdot 18, \quad 6 \cdot 6$ Argument: *Eleven behandler lærestoff som atskilte kunnskapselementer.*
	Gjentatt addisjon, $6+6+6=18, \;\; 6+6=12$ og $12+6=18, \;\; 18+18=36$ Argument: *Behandler lærestoff som atskilte kunnskapselementer.*
	Hoppetelle med 6-gangen Argument: *Behandler lærestoff som atskilte kunnskapselementer.*
	Gjentatt subtraksjon, 36-9=27 27-9=18 18-9=9 9-9=0 Argument: *Elever behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer,*
Divisjon, $36 : 9 = 4$ Argument: *Elever relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og ideer.* Elevene ser sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon med tallet 36, og kobler det til kunnskap den har om den lille gangetabellen.	
Frosken hopper med 4-gangen og padden med 6-gangen. Disse gangetabellene har flere like tall, og frosken og padden møtes på 12 og 24 i tillegg til 36. 12, 24 og 36 er alle multipler av 4 og 6, og er derfor delelig med begge tall. Argument: *Relaterer nye ideer og begreper,* likheter mellom produkter i 4 og 6 gangen, *til tidligere kunnskap og erfaringer,* MFM og SSF. *Elever ser etter mønstre og underliggende*	

prinsipper. Hva er likt i 4 og 6 gangen? Hvorfor er de like? *Forstår hvordan kunnskap blir til gjennom dialog og vurderer logikken i argumentet kritisk.*	
Bruker tallinjen Argument: *Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper*. Ser sammenhengen mellom de to gangetabellene, og ser at frosken og padden møtes der de gjør fordi faktorene i tallene 12, 24 og 36 er delelig med både 4 og 6.	Bruker tallinjen Argument: Viser det instrumentell eller relasjonell forståelse? *Eleven memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor*. Tallinjen er en kjent konkret fra matematikktimene, det kan hende de har lært å bruke den uten forståelse.
Bruker likning, $6 \cdot 6 = 9 \cdot x$ Argument: *Relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer*. Bruker informasjonen de får i oppgaven og bruker kunnskap om likninger til å sette opp et uttrykk for å komme frem til svaret.	

Tabell 9: Strategikategorier og klassifisering av oppgave 6

- Oppgave 7, inspirert av en oppgave fra læreverket Multi 5B, (Alseth et al., 2013)

Oppgavetekst (for bilder se vedlegg 3):
Erik sykler til sammen 96km hver uke. Han sykler like langt hver dag, bortsett fra lørdagene og søndagene. Lørdager sykler han ikke, og søndagene sykler han 21km. Hvor langt sykler han hver av de andre dagene? Hvem har regnet riktig?

Oppgaven er basert på oppgave 7.74 d), (Alseth et al., 2013, s. 99). I oppgavesettet er det lagt ved tre forskjellige utregninger, og elevenes oppgave er å finne ut hvilket alternativ som er regnet riktig. I den skriftlige delen av innsamlingen spørres det bare etter hvem som har regnet riktig. Mange elever vil nok bare svare hvem de mener det er, uten noe mer forklaring på hvorfor. Noen vil mest sannsynlig også bare gjette. Denne oppgaven vil vise mer av elevenes tenkemåter og strategier i intervjusituasjonen, og tabell 10 er derfor ikke like utfyllende som de andre. Oppgaven er tatt med fordi elevene skal ta stilling til utregninger og må dermed vise at de kan trekke ut riktig informasjon fra en tekst, og de må vise at de kan anvende riktig regneart for å finne svaret på oppgaven. I intervjuet vil elevene bli stilt spørsmål om de kan forklare hvordan de tre ulike har tenkt.

Dybdelæring	Ikke dybdelæring
Utregning og argumenter for sitt svar.	

Argument: *Elever vurderer nye ideer og knytter dem til konklusjoner. Vurderer logikken i et argument kritisk*	
	Feil svar Argument: *Elever har vanskelig for å forstå nye ideer som er forskjellige fra dem de har møtt i læreboka.*
	Bare svar Argument: mulighet for at eleven bare gjetter, eleven kan ha flaks og gjette riktig.

Tabell 10: Strategikategorier og klassifisering av oppgave 7

- Oppgave 8, inspirert av en oppgave fra læreverket Multi 6A, (Alseth et al., 2014)

Oppgavetekst: Hvilket tall er jeg?

a) Jeg er et tosifret tall. Summen av sifrene mine er 11. Jeg kan deles på både 4 og 7. Er tallet du kom fram til det eneste tallet som kan være riktig? Hvorfor eller hvorfor ikke?
b) Jeg er et tosifret tall som kan deles på både 4, 6 og 7. Er tallet du kom fram til det eneste tallet som kan være riktig? Hvorfor eller hvorfor ikke?
c) Jeg er et tosifret tall. Summen av sifrene mine er 9 og jeg kan deles på 6 og 9. Er tallet du kom fram til det eneste tallet som kan være riktig? Hvorfor eller hvorfor ikke?

Deloppgave a) og b) er hentet fra Multi 6a, oppgave 1.82 a) og b) (Alseth et al., 2014, s. 27), mens deloppgave c) er lagt til av meg. Tilleggsspørsmålet «er tallet du kom frem til det eneste tallet som kan være riktig? Hvorfor eller hvorfor ikke?» er også lagt til av meg, som et forsøk på å få elevene til å resonnere, bevise og argumentere for eller imot at det svaret de kommer fram til er det eneste riktige svaret. Jeg ser kun etter positive løsninger, selv om oppgavene også har negative løsninger. Tabell 11 viser hvilke strategier jeg antar elevene kan bruke i løsning av oppgaven. Det er en avansert oppgave som krever mye forkunnskaper og begrepsforståelse. Elevene må vite hva et siffer er, hva et tall med to siffer er, og at sum betyr å addere. Kunnskap om primtall, delelighet, minste felles multiplum og største felles faktor vil være til god hjelp. Oppgaven inneholder mye tekst og elevene må kunne trekke ut relevant informasjon og bruke den riktig. Jeg anser dette som en av de vanskeligste oppgavene i settet, og jeg regner med at de som prøver vil bruke mye gjetting, prøving og feiling, og sannsynligvis uten struktur, som strategi.

Dybdelæring	Ikke dybdelæring
Elevene prøver seg frem Argument: eleven viser en spesifikk plan, *eleven ser etter mønster og underliggende prinsipper.* Viser i sin utregning at de systematisk leter etter sammenhenger mellom tallene, for eksempel at eleven begynner med å finne ut hvilke tosifrede tall som kan deles på både 4 og 7.	Elevene prøver seg frem Argument: *Eleven har vanskelig for å forstå nye ideer som er forskjellige fra dem de har møtt i læreboka.* Eleven viser ikke en spesifikk struktur i prøving og feiling. Tegn på flaks og gjetting.
Delelighet Argument: Hvilke tall kan deles på både 4 og 7? Alle tall med faktorene $2 \cdot 2 \cdot 7$, 28-gangen. Hvilke av disse er tosifrede og hvilke tverrsummer gir svaret 11? *Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper*, hva er felles for tallene? *Relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer* om delelighet, primtall og minste felles multiplum.	
Svaret mitt er det eneste mulige fordi tallet må være delelig med 4 og 7, 28-gangen. Det må være tosifret, det er det bare tre som er, 28, 56 og 84. Bare ett av disse har tverrsum 11. Argument: *Forstår hvordan kunnskap blir til gjennom dialog* (intervju) *og vurderer logikken i argumentet kritisk*	

Tabell 11: Strategikategorier og klassifisering av oppgave 8

- Oppgave 9

Oppgavetekst:

Regn ut og forklar med egne ord hvordan du kom frem til svaret.

2520:4= eller 252:4=

Dette er en ren utregningsoppgave som åpner opp for at elevene kan regne ut på den måten de ønsker. Tabell 12 viser hvilke strategier jeg forventer at elevene kommer til å bruke. Tallet 2520 ble valgt fordi det går opp i fire, samt fordi det har en null på slutten. Ved bruk av standardalgoritmen, som jeg forventer at noen elever vil bruke, vil det siste sifferet kanskje være noe elevene glemmer å ta med. Denne oppgaven ble også forenklet til 4.trinn.

Dybdelæring	Ikke dybdelæring
	Standardalgoritmen. Argument: *Eleven memorere fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor*, algoritmen kan gjøres uten forståelse.

	Feilsvar ved bruk av standardalgoritmen 2520:4=63 Argument: *Eleven memorere fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor*, glemmer «å trekke ned» 0 og dele på 0 og får dermed feil svar.
	Tegne opp og fordele på 4 Argument: *Elever jobber med nytt lærestoff*, divisjon med flersifrede/store tall, *uten å relatere det til hva de kan fra før.*
Kjøsnes (1997) fra Tangenten Argument: *Eleven relaterer nye ideer og begreper,* divisjon med flersifrede/store tall, *til tidligere kunnskap og erfaringer,* eleven finner en hensiktsmessig måte å dele opp på, basert på bakgrunnskunnskap om regneartene og deling.	
Dele antall enere, tiere, hundrere og tusener på 4 og legge svarene sammen. Argument: *Elever relaterer nye ideer og begreper,* divisjon med store tall, *til tidligere kunnskap og erfaringer*, kunnskap om divisjon, kunnskap om delelighet, sifrenes plass og verdi.	Dele antall enere, tiere, hundrere og tusener på 4 og legge svarene sammen. Argument: *Elever behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer.*

Tabell 12: Strategikategorier og klassifisering av oppgave 9

I regning med multiplikasjon og divisjon forventer jeg bruk av standardalgoritmen. Selv om den ikke viser dybdelæring, kan jeg ikke utelukke dybdelæring hos elevene. Dette vil jeg kunne undersøke i intervjuene.

3.5 Reliabilitet og validitet

Innen forskning vil det alltid stilles spørsmål om dataens reliabilitet og validitet. Dataens reliabilitet er et spørsmål om hvor pålitelig dataen i forskningen er. Reliabilitet knyttes til nøyaktigheten av undersøkelsens data, hvilke data som brukes, metoden som brukes i innsamlingen og bearbeidingen av den innsamlede dataen (Christoffersen & Johannessen, 2012), og innebærer at alle leddene i prosessen må være fri for unøyaktigheter (Dalland, 2021).

Dataene i denne masteroppgaven kommer fra innsamling av skriftlige elevbesvarelser og elevintervjuer. Oppgavesettet, vedlegg 3, oppfordrer elevene til å vise og skrive sin tanker og strategier underveis i løsning av oppgavene. Tanken var at elevene gjennom arbeidet skriver, tegner, prøver og feiler, og at disse notatene vil vise tankemåter og strategier. Elevintervjuene har som hensikt å utdype de skriftlige elevsvarene, og spørsmålene elevene fikk handlet i stor grad om hvordan de tenkte da de løst oppgavene. For å sikre pålitelige svar, forsøkte jeg å formulere spørsmålene på en slik måte at de var korte og enkle å forstå. I tillegg var jeg nøye med å be elevene gjenta svaret sitt eller å få dem til å forklare en gang til, slik at jeg fikk notert ned svaret deres så nøyaktig som mulig. I bearbeidingen av datamaterialet har jeg forsøkt å vise resultatene fra innsamlingen på en oversiktlig og troverdig måte. Jeg har derfor i mange tilfeller valgt å legge ved figurer og bilder.

Validitet stiller spørsmål om metoden egner seg til å undersøke det den skal undersøke (Kvale & Brinkmann, 2015). Oppgavesettet ble satt sammen av 9 forskjellige oppgaver, med hensikt om å kunne fremstille elevenes tenkemåter og strategier i regning med multiplikasjon og divisjon. Jeg forsøkte i oppgaveformuleringene å åpne opp for at elevene fritt kunne velge hvordan de ønsket å løse oppgavene, og oppgavesettet gav rom for å kunne skrive, tegne, regne og kladde.

Selv om oppgavene er inspirert fra eksisterende oppgaver og hentet direkte fra blant annet matematikksenteret, har jeg ikke fått testet oppgavene før jeg gjennomførte datainnsamlingen. I ettertid viser datamaterialet at en stor del av elevene bare skrev et svar, som ikke gir meg innblikk i tenkemåter og løsningsstrategier. I gjennomgang, analyse og diskusjon har jeg funnet flere elementer jeg ville endret på til en annen gang. Dette gjelder både oppgavenes rekkefølge, vanskelighetsgrad og formulering.

Jeg valgte å gjennomføre elevintervjuer i tillegg til oppgaveinnsamlingen. Jeg har ingen erfaring med elevintervju fra før, men synes de utfyller elevbesvarelsene godt. Intervju er en fleksibel metode, som åpner opp for at informantene kan uttrykke seg som de ønsker. Jeg opplevde at mange av elevene syntes det var lettere å forklare tankene sine muntlig, og fikk flere gode samtaler om hvordan elevene hadde tenkt.

Jeg valgte å registrere intervjuene ved å notere på pc, som jeg har begrunnet i seksjon 3.1.2. Selv om intervjuene var korte og bestod av få spørsmål, så vil noe informasjon gå tapt i denne registreringen.

3.6 Forskningsetiske vurderinger

Prosjektet er meldt til og godkjent av Norsk Senter for Forskningsdata, NSD. I søknaden ble hensikten og formålet med oppgaven gjort rede for, og innsamlingsmetode for data ble beskrevet. Godkjenningen fra NSD ligger som vedlegg 1. Informasjonsskriv til foresatte med samtykke, oppgavesett og intervjuguide var vedlagt søknaden og finnes som vedlegg 2, 3 og 4.

I oppgaven er elevenes navn anonymisert og kodet med tall. Alle besvarelsene er kun lagret på papir. Intervjuene er registrert med notater på pc.

3.6.1 Forskning med elever under 18 år

I godkjenningen fra NSD understrekes det at elevene må få informasjon om prosjektet tilpasset dem. Som skrevet i beskrivelsen av gjennomføring besøkte jeg alle klassene og gav elevene informasjon tilpasset dem. I og med at alle elevene er under 18 år, måtte jeg innhente samtykke fra elevenes foresatte. Dette ble gjort med skriftlig samtykke på samtykkeskjema gitt ut i forbindelse med at jeg presenterte prosjektet.

3.6.2 Forskning på egen arbeidsplass

Å forske på egen arbeidsplass bringer med seg flere etiske utfordringer. Jeg forhørte meg med veileder til masterskissen før sommeren 2021, samt min tildelte veileder til prosjektet om dette. Jeg har også gjort meg kjent med utfordringene som NSD lister opp på sine nettsider.

For det første kan det være vanskelig å ivareta frivillig deltakelse, fordi det kan være vanskeligere å si nei til noen du kjenner. I dette tilfellet er det elevene og ikke lærerne jeg bruker som informanter. Både lærerne ved teamene og ledelsen var positive fra første stund, og jeg har gjort mitt beste for å gjøre dette til en så god opplevelse som mulig for alle parter. Angående elevene og min relasjon til dem, så har jeg skoleåret 2021/2022 jobbet som faglærer på 4.trinn. Disse elevene har jeg derfor tette relasjoner med. De andre trinnene har jeg ikke vært innom, og jeg har derfor ikke like nære relasjoner til dem.

For det andre vil jeg i dette prosjektet ha en dobbeltrolle, som forsker og ansatt. De to rollene må skilles, og elevene må være klar over hvilken rolle jeg har i hvilken situasjon. I ansattrollen har jeg i tillegg tilgang på opplysninger om elevene. Underlagt taushetsplikt gjennom arbeidsplassen kan ikke opplysninger jeg får i jobb brukes i oppgaven.

I og med at jeg får lov å bruke elever ved egen arbeidsplass ønsker jeg at elevene som deltar får et utbytte av deltakelsen. Min intensjon er at elevene gjennom deltakelsen får noe igjen for å være med og at skolen som helhet også kan få utbytte av hva jeg finner ut om dybdelæring i matematikkfaget. Innsamlingen ble gjort som en del av undervisningen, slik at alle elevene har fått samme undervisning og skriftlige oppgaver. I forskningen er det bare besvarelsene fra elevene som har samtykket som er tatt med.

4 Resultat, analyse av elevsvar på enkeltoppgaver og diskusjon

I dette kapitlet presenteres resultatene fra innsamlingsmetodene. Dette er i hovedsak resultater fra de skriftlige oppgavene, men resultatene fra elevintervjuene også er en viktig del. Resultatene utdypes med utdrag fra elevintervjuene og bilder av elevsvar fra oppgavene. Svarene til elevene er gruppert etter hvilken løsningsstrategi de har brukt. Grupperingen tar utgangspunkt i kategoriene presentert i analyseverktøyet i seksjon 3.4. Deretter analyseres og diskuteres elevsvarene fra enkeltoppgavene med bakgrunn i teori presentert i kapittel 2 og klassifiseringen fra analyseverktøyet fra seksjon 3.4. Kapitlet tar for seg én og én oppgave, og presenterer først resultatene og deretter analysen. For hver oppgave presenteres en tabell som viser strategiene jeg har identifisert, hvor mange elever som bruker hver strategi, og om strategien viser dybdelæring eller ikke.

Siste del av kapitlet er resultater og en diskusjon på tvers av oppgavene som tar utgangspunkt i forskningsspørsmålene presentert i kapittel 1, (1) hvilke løsningsstrategier bruker elevene, (2) hvilke av løsningsstrategiene kan klassifiseres som dybdelæring og (3) i hvilken grad bruker elevene strategier som kan klassifiseres som dybdelæring i regneartene multiplikasjon og divisjon.

I alt er det 52 skriftlige elevsvar. I tabell 13 vises en oversikt over hvor mange av elevene som svarer på hver oppgave. Av disse ble 17 elever plukket ut til intervju, 8 fra 4.trinn, 7 fra 5.trinn og 2 fra 6.trinn. En oversikt over hvor mange elever som er intervjuet om hver oppgave vises i tabell 14. På 4.trinn fikk noen elever et forkortet sett, dette gjelder elev 1 og 21.

Oppgavenummer	Antall svar 4.trinn (Totalt 26 elever)	Antall svar 5.trinn (Totalt 21 elever)	Antall svar 6.trinn (Totalt 5 elever)	Antall svar totalt (Totalt 52 elever)
1	22	20	5	47
2	25	21	5	51
3a	25	20	5	50
3b	23	20	5	48
3c	19	16	5	40
4a	14	13	4	31
4b og c	10	9	3	22
5	14	9	3	26

6a	18	14	5	37
6b	11	9	3	23
7	14	15	4	34
8	9	6	4	19
9	14	8	4	26

Tabell 13: Oversikt over hvor mange elever som svarer på hvilke oppgaver.

Oppgavenummer	4.trinn	5.trinn	6.trinn	Antall elever intervjuet totalt
1	4	4	1	9
2	5	4	1	10
3	4	3	1	8
4	2	5	0	7
5	4	3	0	7
6	3	2	1	6
7	3	2	2	7
8	0	0	0	0
9	4	2	1	7

Tabell 14: Oversikt over antall elever som er intervjuet til hver oppgave.

4.1 Oppgave 1

4.1.1 Resultat

Dette er oppgaven flest elever har svart på, fem elever har ikke svart. Elevene på 5. og 6.trinn fikk den opprinnelige oppgaven $12 \cdot 38$, mens 4.trinn fikk et forenklet regnestykke, $6 \cdot 38$. Oversikt over metodebruk vises i tabell 15.

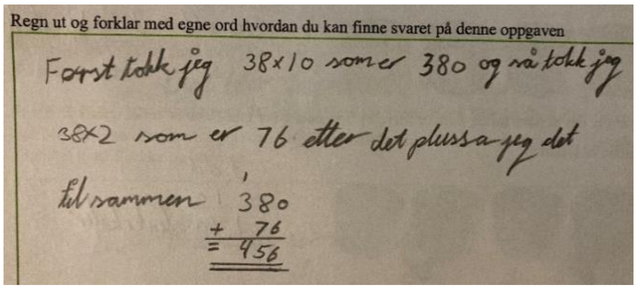
Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Distributiv lov	29	Dybdelæring
Dobling	6	Noe dybdelæring
Rutenett	2	Noe dybdelæring
Standardalgoritme og variasjoner av den	4	Ikke dybdelæring
Gjentatt addisjon	2	Ikke dybdelæring
Overforenkling	2	Ikke dybdelæring
Bare svar	2	Ikke dybdelæring
Blank	5	

Tabell 15: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for oppgave 1

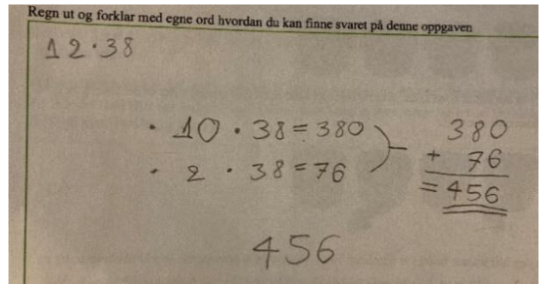
- Distributiv lov

Det er mulig å dele opp tallene på mange forskjellige måter og elevene har også utnyttet dette.

Seks elever på 5. og 6. trinn har delt opp tallet 12 i 10 og 2, eksempel på dette er gitt i figur 1 og 2.



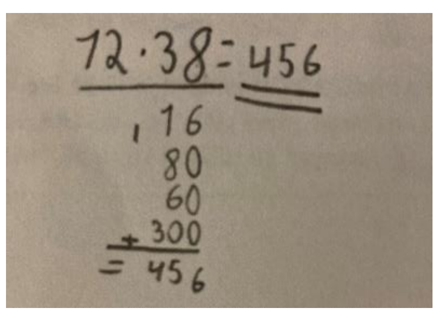
Figur 1: Elev 48 sin utregning på oppgave 1. Eleven bruker distributiv lov som strategi og forklarer med egne ord hvordan den har tenkt.



Figur 2: Elev 38 sin utregning på oppgave 1. Eleven bruker distributiv lov som strategi og viser oversiktlig hvordan den har delt opp tallet 12 i 10 og 2.

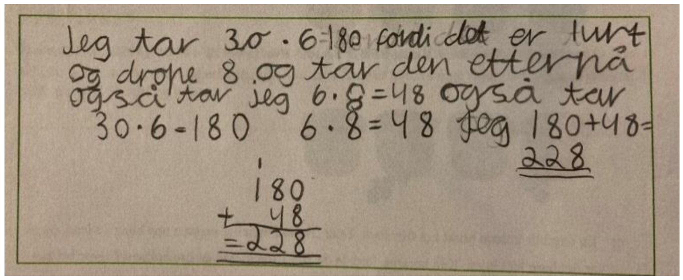
Et eksempel på videre regning er elev 48 som skriver: «Først tokk jeg 38 · 10 som er 380 og så tokk jeg 38 · 2 som er 76 etter det plussa jeg det til sammen.» Se figur 1.

Elev 52 har delt opp tallet 38 i 30 og 8 i tillegg til å dele opp 12 i 10 og 2. Eleven begynner med 2 multiplisert med 8, og skriver mellomregningene under hverandre. Videre multipliseres 10 med 8, 2 med 30 og til slutt 10 med 30. Til slutt summeres produktene, se figur 3. I intervju med denne elever sier den at «nullen bare settes på». På oppfølgingsspørsmål forklarer eleven at det er fordi «ellers blir det feil». Jeg spør en gang til om hvorfor det blir feil, og eleven svarer at «her ganger jeg jo med 30».



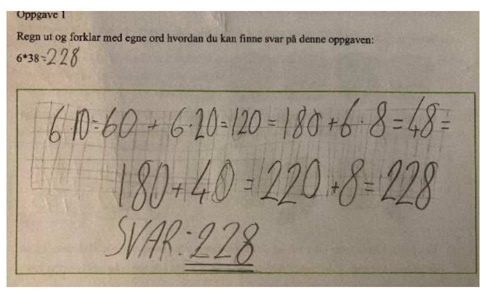
Figur 3: Elev 52 sin utregning av oppgave 1 ved bruk av distributiv lov. Eleven deler opp begge tallene i enere og tiere og multipliserer alle faktorer med hverandre.

Av elevene på 4.trinn, deler fire opp tallet 38 i 30 og 8. Et eksempel er elev 10, se figur 7. Teksten på figur 4 beskriver elevens strategi: «Jeg tar $30 \cdot 6 = 180$ fordi det er lurt og drope 8 og tar den etterpå også tar jeg $6 \cdot 8 = 48$ også tar jeg 180+48=228.»



Figur 4: Elev 10 sin utregning av oppgave 1 ved bruk av distributiv lov. Eleven går på 4.trinn og har et forenklet regnestykke. Eleven deler opp 38 i 30 og 8 og multipliserer begge med 6.

En annen måte å dele opp 38 på er i 10, 20 og 8, vist med elev 5 på figur 5. Eleven setter alt opp som et langt regnestykke, og misbruker dermed likhetstegnet. Ser man nøye etter har eleven begynt med en strategi som kan likne på å tegne et rutenett, men visket det ut, og delt opp tallet i stedet.

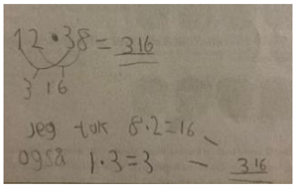


Figur 5: Elev 5 sin utregning av oppgave 1 ved bruk at distributiv lov. Eleven deler opp tallet 38 i 10, 20 og 8, og multipliserer alle med 6.

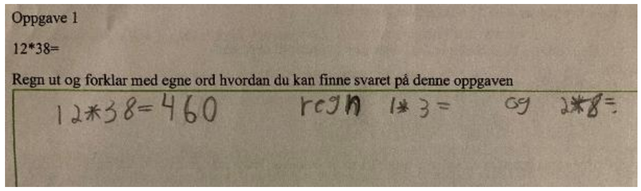
Det er 10 av 29 elever som har brukt distributiv lov har fått riktig svar. De resterende 19 elevene har delt opp tallene, men ikke kommet helt i mål med utregningen sin.

Av feil som går igjen, er elever som ikke multipliserer alle sifre med hverandre. De multipliserer tallene på enerplassen med hverandre, og tallene på tierplassen med hverandre, før de adderer de to produktene sammen. Det er to forskjellige fremgangsmåter. I den første blir tallet 2 multiplisert med 8, som er 16, og 1 multiplisert med 3, som er 3. Som svar skriver elevene 3-

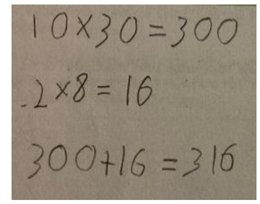
tallet først, og 16 etterpå, 316. Et eksempel er elev 29 på figur 6. En annen variant av denne er elev 33, som har fått svaret 460. Eleven skriver at den har multiplisert 1 · 3 og 2 · 8, se figur 7. I den andre fremgangsmåten bevares tallenes verdi, 10 multipliseres med 30, der produktet er 300. Deretter multipliseres 2 med 8, som er 16. Elevene adderer produktene og får 316. Et eksempel på dette er elev 27 vist på figur 8.



Figur 6: Elev 29 sin utregning av oppgave 1. Eleven har delt opp tallene i enere og tiere, men bare multiplisert ener med ener og tier med tier.

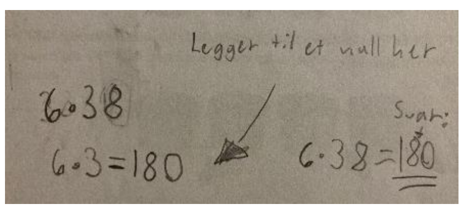


Figur 7: Elev 33 sin utregning av oppgave 1. Eleven deler opp og multipliserer tallene uten å beholde sifrenes verdi.



Figur 8: Elev 27 sin utregning av oppgave 1. Eleven deler opp tallene i enere og tiere, og multipliserer ener med ener og tier med tier

En feil elever på 4.trinn gjør er å dele opp 38 i 30 og 8, men å ikke multiplisere begge tallene med 6. Et eksempel på dette er elev 22 vist i figur 9. Det er seks elever som gjør dette.

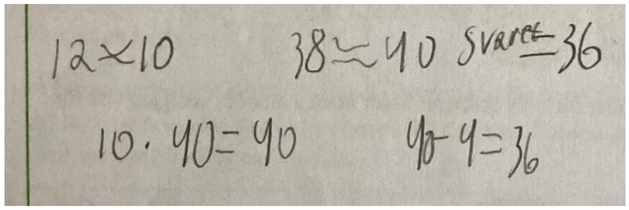


Figur 9: Elev 22 sin utregning av oppgave 1. Eleven deler opp tallet 38 i 30 og 8, men multipliserer bare 30 med 6. Eleven viser hvordan den tenker når den multipliserer med en potens av 10, ved å legge til en null.

Elev 44 har delt 12 i 10 og 2, og først multiplisert 38 med 10. Deretter har eleven multiplisert dette svaret, med 2. Det eleven har gjort kan beskrives slik:

$$(38 \cdot 10) \cdot 2 = 380 \cdot 2 = 760.$$

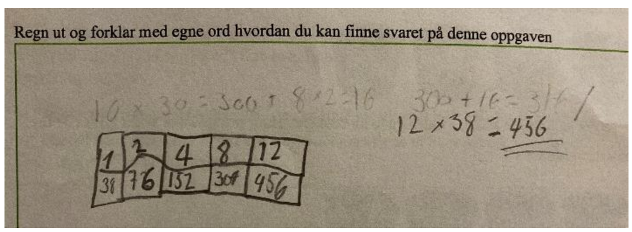
Elev 46 har først rundet av tallet 12 til 10 og rundet opp tallet 38 til 40. Eleven har multiplisert 10 med 40, og fått svaret 40. Deretter har eleven tatt 40-4 og fått 36, se figur 10.



Figur 10: Elev 46 sin utregning av oppgave 1. Eleven runder av tallene før den multipliserer dem sammen. Eleven trekker fra 4.

- Dobling

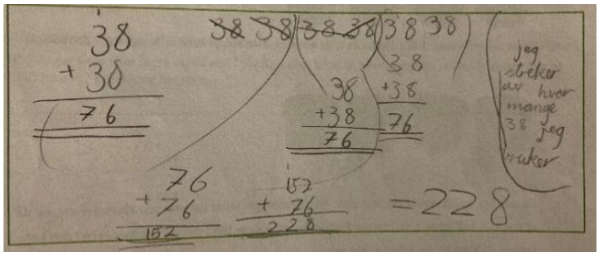
De seks elevene har brukt litt forskjellige strategier. Elev 28 har tegnet opp en tabell som vises på figur 11. Tabellen kan sees som en effektivisering av gangetabellen.



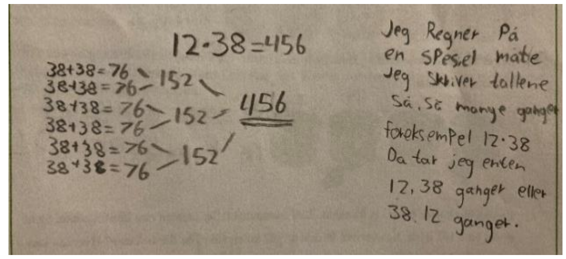
Figur 11: Elev 28 sin utregning av oppgave 1. Eleven bruker en tabell som holder orden på hvor mange ganger tallet 38 er doblet.

Elev 8 har først multiplisert 3 · 30 og 3 · 8, og addert produktene. Til slutt dobler eleven svaret sitt.

Figur 12 og 13 viser elev 7 og 50 som har liknende strategi for dobling. De har begge tatt utgangspunkt i hvor mange av 38 de skal ha. Elev 7 skriver ved siden av utregningen «Jeg streker av hvor mange 38 jeg bruker.» Elev 50 skriver: «Jeg regner på en spesiel måte. Jeg skriver tallene så. Så mange ganger for eksempel 12 · 38. Da tar jeg enten 12 38 ganger eller 38 12 ganger.»

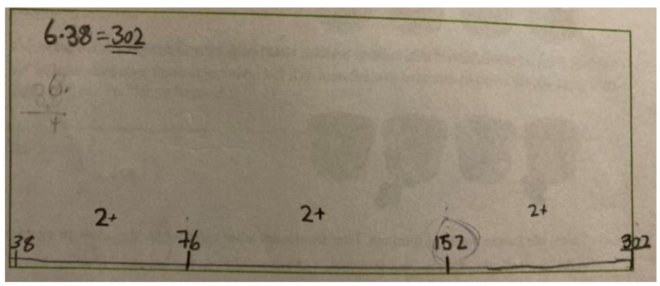


Figur 12: Elev 7 sin utregning av oppgave 1. Eleven bruker dobling som strategi. Den holder orden på antall doblinger ved å krysse ut 38erne som er brukt.



Figur 13: Elev 50 sin utregning av oppgave 1.Eleven bruker dobling som strategi.

Elev 26 har tegnet opp en tom tallinje som den bruker i doblingen, se figur 14. I intervju med eleven kan den ikke huske strategien sin og forteller at den har lært en ny metode, som den viser på ark og forklarer. Metoden i intervjuet kan kategoriseres som distributiv lov.

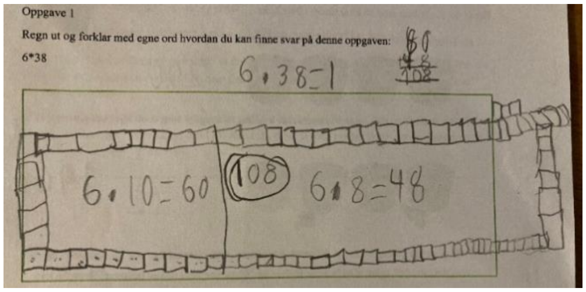


Figur 14: Elev 26 sin utregning av oppgave 1. Eleven bruker dobling, og holder orden på antall doblinger med en tom tallinje.

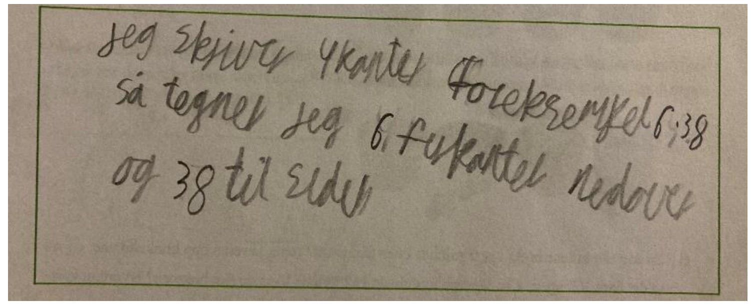
- Rutenett

Elev 4, figur 15, og elev 12, figur 16, bruker rutenett som løsningsstrategi. Elev 4 har tegnet 38 ruter bortover, og 6 ruter nedover. Streken deler rutene i 10 multiplisert med 6, og eleven har regnet ut at dette blir 60. Videre har eleven regnet 6 multiplisert med 8, og fått 48. Disse er addert sammen til svaret 108.

Elev 12 har beskrevet hvordan den ville løst oppgaven, «Jeg skriver firkanter for eksempel 6 · 38 så tegner jeg 6 firkanter nedover og 38 til siden.», se figur 16.



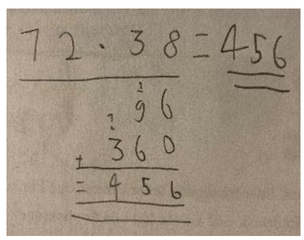
Figur 15: Elev 4 sin utregning av oppgave 1. Forsøk på utregning ved bruk av rutenett.



Figur 16: Elev 12 beskriver metoden den ville brukt i utregning av oppgave 1. Strategien som beskrives er utregning med rutenett.

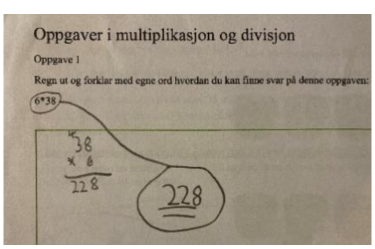
- Standardalgoritme og variasjoner av den

To elever setter opp og regner ut stykket ved hjelp av standardalgoritmen. Begge elevene går i 6.klasse. I figur 17 er utregningen eksemplifisert ved elev 51.

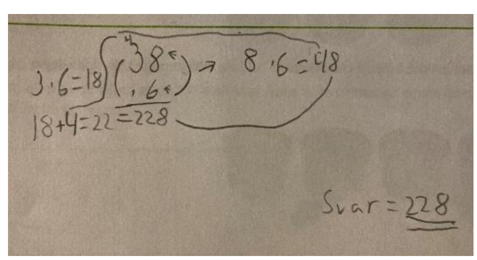


Figur 17: Elev 51 sin utregning ved bruk av standardalgoritmen for multiplikasjon

To andre elever setter opp regnestykket under hverandre, se figur 18 og 19. Elev 25 begynner med å multiplisere 8 med 6 som er 48. Eleven noterer 8 under streken, og setter 4 i mente. Videre multipliseres 3 med 6, som blir 18, og eleven legger til de 4 i mente og får 22. Elev 6 viser med regnestykker og piler hvordan den har gjort utregningen.



Figur 18: Elev 25 sin utregning av oppgave 1. Eleven setter opp stykket og regner ut med en algoritme som likner standardalgoritmen.



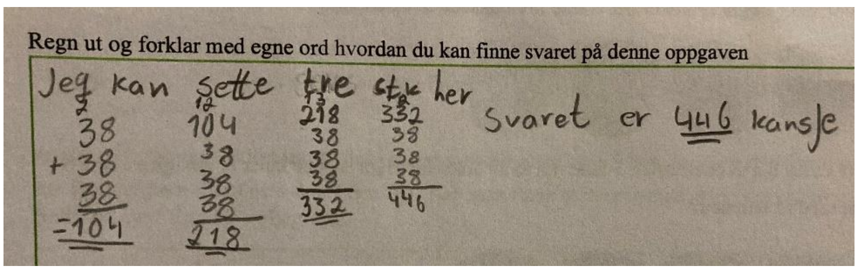
Figur 19: Elev 6 sin utregning av oppgave 1. Utregningen likner elev 25. Eleven bruker piler for å vise tankegangen sin.

Dette likner en standardalgoritme, men har noen forskjeller fra den som brukes i Norge.

- Gjentatt addisjon

To elever har brukt gjentatt addisjon som strategi. Elev 21 har skrevet opp regnestykket, $38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 =$, men ikke gått videre med utregning.

Elev 30 har tatt addisjonen i omganger. Først har eleven satt opp 38 tre ganger under hverandre. Disse er addert sammen og eleven har fått svaret 104. Deretter er prosessen gjentatt, eleven adderer 38 tre ganger sammen med summen 104. Dette gjentas til eleven har addert 38 tolv ganger. I den prosessen har en delsum blitt feil, noe som følger med videre i regningen, og dermed gjør at eleven får feil svar til slutt. Elevens utregning vises på figur 20.



Figur 20: Elev 30 sin utregning av oppgave 1. Eleven bruker gjentatt addisjon og adderer 38 12 ganger.

- Overforenkling

Bakgrunnen for navnet på kategorien er at tallene i regnestykket blir forenklet, og utregningen blir et overslag. Kategorien inkluderer to elever som tilsynelatende har gjort det samme, rundet av tallene til nærmeste tier, 10 og 40, før de har multiplisert de to tallene sammen. Begge elevene har svart 400.

- Bare svar

To elever har bare skrevet et svar uten å vise utregning eller å beskrive hvordan de har tenkt, begge fra 4.trinn. Elev 24 får riktig svar. I intervju med denne eleven kommer det frem at eleven har brukt distributiv lov, og delt tallet 38 i 30 og 8 som hver er multiplisert med 6, før de adderes sammen. Eleven forteller at den bruker hoderegning og sier at det er enkelt.

Den andre eleven kom frem til svaret 302.

4.1.2 Analyse

- Distributiv lov

Distributiv lov er $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. Det er mange måter tallene kan deles opp på, og elevene bruker ulike strategier i oppdelingen. Jeg tolker oppdelingen som en strategi for å gjøre multiplikasjonen enklere. Flere elever på 5. og 6. trinn bruker for eksempel oppdelingen av 12 i 10 og 2, og elever på 4.trinn deler opp 38 i 30 og 8. Dette gir elevene regnestykker som kan tenkes å være lettere å regne ut, enn 12 og 6 multiplisert med 38. Denne strategien reflekterer dybdelæring fordi elevene relaterer nye ideer, multiplikasjon med større tall eller med tosifrede tall, til tidligere kunnskap og erfaringer (Sawyer, 2014). Elevene viser kunnskap om sammenhengen mellom multiplikasjon og addisjon, og tar i bruk kunnskap de har om multiplikasjon fra før, for eksempel den lille gangetabellen. Selv om de kanskje ikke vet om selve regneloven, så har de funnet og forstått et mønster og et underliggende prinsipp i multiplikasjon og bruker dette som strategi for å regne ut.

I intervju med elev 52 forteller eleven at den har lært en ny metode, som kan kategoriseres som standardalgoritmen. Eleven bruker kryss og forklarer «for da ganger jeg med 30». Dette tyder på relasjonell forståelse av algoritmen (Skemp, 1976). Eleven forteller at dette er en metode de har lært på skolen i etterkant av innsamlingen. Videre synes eleven at standardalgoritmen er best, fordi den er enklere. Forklaringen til eleven kan tyde på at den bruker forståelsen den viser i utregningen med distributiv lov, og overfører kunnskapen til regning med standardalgoritmen.

Flere av elevsvarene tyder på bruk av regelen om «å legge til en null» i multiplikasjon med 10 og potenser av 10, se figur 4 og elevens skriftlige forklaring. Strategien utnytter multiplikasjon med 10 og potenser av 10, den assosiative regneloven. Utregningen til eleven i figur 4 kan uttrykkes matematisk på denne måten: $6 \cdot 30 = 6 \cdot 3 \cdot 10 = 18 \cdot 10 = 180$. Elev 5, som vist i figur 5 er et annet eksempel på bruk av multiplikasjon med 10, der eleven deler opp tallet 38 i 10, 20 og 8 og kan uttrykkes slik: $38 \cdot 6 = (10 + 20 + 8) \cdot 6$. Eleven i figur 4 skriver at den «dropper 8» (eneren i tallet) fordi «det er smart». Dette tyder på at eleven har lært regelen, men at den ikke har en relasjonell forståelse for hvorfor regelen fungerer, noe jeg tror gjelder for flere av elevene som bruker multiplikasjon med 10. Dette reflekterer i større grad overflatelæring (Bjuland & Fauskanger, 2018), enn matematisk forståelse.

Distributiv lov fungerer også med subtraksjon. Dette er noe jeg kan se antydninger til hos elev 46 som har rundet av tallene til 10 og 40, men deretter subtrahert fra 4, se figur 10. Subtraksjonen med 4 antar jeg kommer fra at 10 er to fra 12 og 40 er to fra 38, $2 + 2 = 4$. Tankegangen minner om konjugantsetningen, og kan uttrykkes slik:

$$12 \cdot 38 = (10 + 2)(40 - 2) = 400 - 20 + 80 - 4 = 456.$$

Eleven er på god vei, og viser en viss forståelse fordi den skjønner at noe må legges til eller trekkes fra når den har rundet av tallene. Eleven bruker kunnskap og erfaringer den har fra før i forsøket på utregningen, og viser tegn til å se etter mønster og underliggende prinsipper (Sawyer, 2014). Samtidig viser utregningen at metoden har mangler som gjør at elevens løsning ikke blir riktig.

Den vanligste feilen blant elevene på 5. og 6.trinn var å multiplisere ener med ener og tier med tier. Dette tolker jeg som en feilaktig overføring fra algoritmen for addisjon der ener adderes med ener og tier med tier og så videre. En mulig forklaring er at det kan være lettere å se på regnestykker med ett siffer multiplisert med to siffer at alle sifrene skal multipliseres med hverandre. Mens det i regnestykker med to siffer multiplisert med to siffer ikke er like innlysende for elevene at når de deler opp tallet i enere og tiere, så skal alle de fire «deler» av tallet multipliseres med hverandre.

En hyppig feil blant elevene på 4.trinn var å «glemme» eneren i 38, slik at de endte opp med svaret 180. Mulige årsaker til dette kan være at 38 er et større tall enn de er vant til, og at de av den grunn fokuserer så mye på 30 at de glemmer 8. En annen mulig forklaring kan være at de ikke vet hva de skal gjøre videre og derfor bare legger til de åtte enerne, slik at svaret blir 188. Dette kan tyde på at elevene er trygge på metoden med mindre tall, men at de ikke klarer å overføre metoden til større tall.

Feilene viser at utregning ved bruk av distributiv lov ikke nødvendigvis betyr at eleven reflekterer dybdelæring. Strategien forutsetter kunnskap om multiplikative strukturer for å forstå at alle siffer i alle faktorer i regnestykket skal multipliseres med hverandre.

- Dobling

Denne strategien forutsetter å holde telling på hvor mange ganger tallet dobles. Elevene som bruker denne strategien har forskjellige løsninger på dette, for eksempel tabell, tom tallinje, eller å krysse ut eller streke av hvor mange 38ere de har brukt.

Hos elev 26 som bruker tom tallinje, tolker jeg «+2» som en huskestrategi for å vite hvor mange ganger tallet er doblet. Huskestrategien kan ha forvirret eleven, for det den i praksis holder orden på er hvor mange ganger tallet eleven har skrevet opp på tallinjen har blitt doblet. Altså er 38 doblet, 76 er doblet og 152 er doblet, og eleven teller opp $2 + 2 + 2 = 6$, mens det som egentlig skjer er at eleven multipliserer, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. I intervjuet kommer det frem at eleven har lært en ny metode, som kan beskrives som distributiv lov.

I analyseverktøyet er denne kategorien klassifisert mellom dybdelæring og ikke dybdelæring. Grunnen til denne klassifiseringen er at jeg tenker elevene ser etter et mønster i tallene (Sawyer, 2014). Et slikt mønster kan være hvor mange ganger man må doble tallet 2 for å komme til 6 eller 12. De elevene som har fått riktig svar, har sett at det ikke er mulig å doble 2 et gitt antall ganger og komme til 6 eller 12, man må kombinere. Dette vises spesielt tydelig på tabellen på figur 14. I intervjuet sier eleven at den «pleier å ta det høyeste tallet å gange først med to, og så doble igjen og igjen i hodet.» Jeg tolker dette som at eleven utnytter multiplikasjon med tallet 2, antagelig fordi det er lettere å multiplisere med 2 i hodet. Eleven forklarer tabellen sin slik: «nummer 1 er 38, og nummer 2 er 38+38, og så 4+8 som blir 12, da plusser jeg de to». Med tallet 4 mener eleven tallet eleven har kommet frem til etter 4 doblinger av 38, og videre det samme med tallet 8. Eleven viser at den adderer disse to, fordi $4 + 8 = 12$, da må summen av de to tallene addert bli produktet av $12 \cdot 38$.

- Rutenett

Dette er en visualisering av distributiv lov, som visualiserer oppdelingen i større grad og kanskje gjør det enklere å forstå hvorfor distributiv lov fungerer. Her som i kategorien distributiv lov er det mange måter å dele opp tallene på. De to elevene skisserer begge rutenett der alle rutene brukes, med andre ord ikke tomt rutenett som blir mer fordelaktig når multiplikator og multiplikand blir større som her (Kværnes & Solem, 2009). Det kan være mer utfordring enn hjelp å skulle tegne opp 38 ruter.

Elev 4 har tegnet opp rutene bortover og nedover, ikke alle rutene i midten. Dette viser at eleven til en viss grad forstår at det ikke er nødvendig å tegne alle rutene. Eleven har markert inn en strek som deler rutenettet etter ti ruter. Her kunne eleven ha fortsatt, og delt inn i for eksempel 10 ruter to ganger til. Det er tydelig at eleven har lært å tegne ruter for tallene som skal multipliseres, men klarer ikke her å overføre strategien til større tall som 38. Dette kan tyde på at eleven kan metoden, men ikke har en forståelse for hvorfor den fungerer.

Elev 12 har bare beskrevet metoden. Hvordan eleven ville gått videre etter å ha tegnet opp sier eleven ikke noe om. En mulighet er å telle rutene, en annen å prøve å dele opp rutenettet i mindre deler, og deretter multiplisert og addert sammen.

Denne strategien har jeg klassifisert som noe dybdelæring fordi den er en visualisering av distributiv lov. For meg ser det ut som elev 4 viser tegn til å ha lært en metode som den ikke klarer å overføre til større tall. Det elevene skriver kan tyde på at de vet hvordan, men ikke hvorfor, som er et kjennetegn på instrumentell forståelse (Skemp, 1976). De reflekterer dermed ikke dybdelæring i sine svar. Dybdelæring i denne strategien ville i større grad vist hvordan rutenettet kunne blitt delt opp, eventuelt ved bruk av tomt rutenett som ikke avhenger av å tegne opp alle rutene.

- Standardalgoritme

Denne strategien viser ikke tydelig om elevene har en relasjonell forståelse for hva de gjør, ingen av dem beskriver heller med egne ord hvordan de har tenkt. Dette kan tyde på at elevene memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor (Sawyer, 2014). Dette kjennetegner overflatelæring og instrumentell forståelse av prosedyren.

Alle elevene som bruker denne strategien kommer frem til riktig svar, noe som betyr at alle husker metoden og dermed bevarer sifrenes verdi. Det er usikkert om det er fordi elevene har lært at de må «legge til en null», eller har en relasjonell forståelse for algoritmen. Denne kategorien ble ikke klassifisert som dybdelæring, og elevene viser i resultatene tegn til å utføre prosedyren uten å forstå hvordan eller hvorfor.

Samtidig er det mulig at elevene kan flere metoder for multiplikasjon, men velger standardalgoritmen fordi den er mest effektiv. Det betyr ikke nødvendigvis at eleven ikke har relasjonell forståelse, eller ikke kan andre metoder som i denne sammenhengen ville gjort at eleven hadde vist dybdelæring.

- Gjentatt addisjon

Elev 21 har skrevet opp stykket, men ikke gått videre med utregning. Antageligvis har eleven gått i gang med oppgaven med strategien den kan eller føler seg komfortabel med, men sett at tallene blir så store, og dermed hoppet over og gått videre til neste oppgave. Eleven har ikke satt opp tallene under hverandre, som i en algoritme for addisjon.

Elev 30 har utført utregningen og kommet frem til et svar. I tillegg har eleven skrevet «Svaret er 446 kanskje». Dette viser at eleven er ikke helt sikker på svaret sitt, og kanskje ikke helt sikker på strategien sin.

Gjentatt addisjon er en backupstrategi (Ostad, 2010), og er ikke klassifisert som dybdelæring fordi elevene behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer (Sawyer, 2014). En mulighet kan være at disse elevene mestrer multiplikasjon med lavere tall, som i den lille gangetabellen, men at de ikke klarer å overføre denne kunnskapen til multiplikasjon med større tall (Pellegrino & Hilton, 2012). Gjentatt addisjon en trygg strategi å ha som backup, når elevene møter oppgaver med tall som i her.

- Overforenkling

Overslagsregning er en strategi som gjør regningen lettere, fordi man runder tallene av til nærmeste hele tall, for eksempel tier eller hundrer. Det er en god strategi når man ikke nødvendigvis trenger et nøyaktig svar. Denne oppgaven spør derimot etter et nøyaktig svar.

En mulighet er at elevene har tenkt at de kan «flytte» 2 fra 12 over til 38. Dette kan være en feilaktig overføring fra addisjon, der vil en slik «flytting» være en strategi knyttet til 10-ervenner, 2+8=10.

Regnestykket kan forenkles med avrunding, og kan uttrykkes slik:

$$12 \cdot 38 = (10 + 2)(40 - 2) = 400 - 20 + 80 - 4 = 456$$

Denne kategorien ble lagt til i gjennomgangen av elevsvarene. De relaterer til tidligere erfaringer og kunnskap (Sawyer, 2014), som overslagsregning og avrunding og bruker dette for å få lettere tall å regne med, men klarer ikke å bruke dette videre til å finne riktig løsning. Med utgangspunkt i uttrykket over, har disse elevene bare multiplisert to av tallene sammen, og mangler de siste tre utregningene for å få riktig svar.

4.2 Oppgave 2

4.2.1 Resultat

I denne oppgaven er det to bilder av eplekasser. Etter innsamling i 4.klasse justerte jeg litt på bilde 1, slik at eplekassene ligger helt inntil hverandre, for å tydeliggjøre oppgaven. Denne oppgaven har 51 av 52 elevene svart på. Kategoriseringen har tatt utgangspunkt i hvilke regnestykker elevene har notert ned, med andre ord hvilken strategi de har brukt for å finne mulige uttrykk til bildene, kategoriene er vist i tabell 16. Flertallet av elevene skriver opp ett regnestykke til hvert av bildene og de aller fleste bruker samme strategi for bilde 1 og 2. Det er 14 elever som har skrevet opp flere regnestykker, og har dermed sett flere mønster og måter å dele opp kassene på.

Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Kommutativ og assosiativ lov, $3 \cdot 4 \cdot 2$ og $3 \cdot 4 \cdot 4$	3	Dybdelæring
Regnestykkene $3 \cdot 4$, $12 \cdot 2$ og $12 \cdot 4$	28	Noe dybdelæring
Inndeling i seksere	18	Noe dybdelæring
Tegning	2	Ikke dybdelæring
Blank	1	

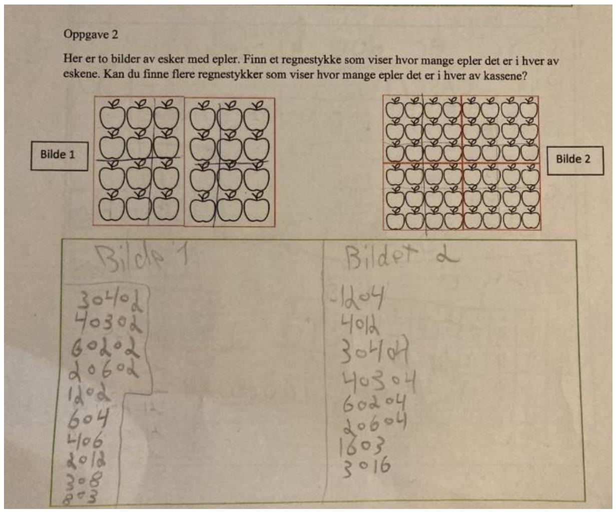
Tabell 16: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for oppgave 2

- Kommutativ og assosiativ lov, $3 \cdot 4 \cdot 2$ og $3 \cdot 4 \cdot 4$

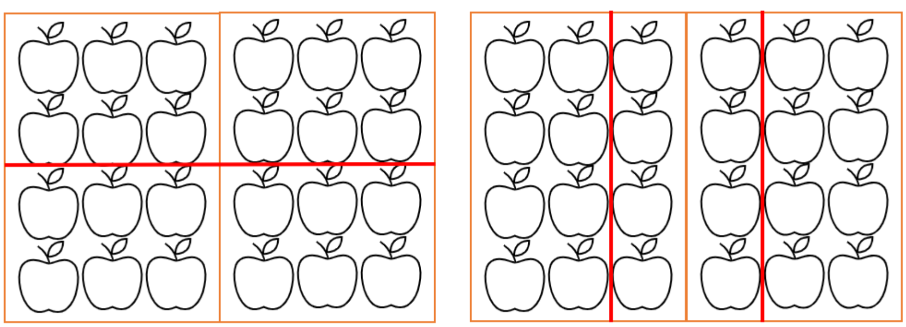
Denne kategorien omfatter elevene som har beskrevet antall epler ved å bruke $3 \cdot 4 \cdot 2$ for bilde 1 og $3 \cdot 4 \cdot 4$ for bilde 2, eller en av de andre rekkefølgene som følge av kommutativ lov. Elevene bruker inndelingen som er i eplekassene, 3 epler bortover og 4 epler nedover, og 2 kasser. To av elevene har bare skrevet disse to regnestykkene. I intervju med dem finner de regnestykker med gjentatt addisjon når de får spørsmål om flere regnestykker.

Den siste eleven, elev 32, har skrevet ned en rekke forskjellige regnestykker, som vises på figur 21. I intervju med eleven forklarer den mønsteret den bruker i alle de forskjellige regnestykkene. Om det første regnestykket sier eleven «det er tre gange fire og så med to, men jeg gidder ikke skrive $12 \cdot 2$». Om de to neste regnestykkene sier eleven at den har delt inn seksere og at det er to seksere i hver kasse. De andre regnestykkene med tallet seks, er delt inn på samme måte, se figur

22. Jeg spør eleven om den ser en annen måte å få regnestykket 6·4 på, men i intervjusituasjonen klarer ikke eleven det og jeg viser at man kan telle eplene langs sidene. Til regnestykkene 3 · 8 og 8 · 3 får jeg eleven til å markere på bildet hvordan den har tenkt, se figur 22. Dette er samme inndeling som på bilde 2, til regnestykkene 16 · 3 og 3 · 16. Til slutt sier eleven at regnestykket «2 gange 12 eller 3 gange 4 gange 2» passer best til å beskrive eplene på bilde 1 i oppgaven.



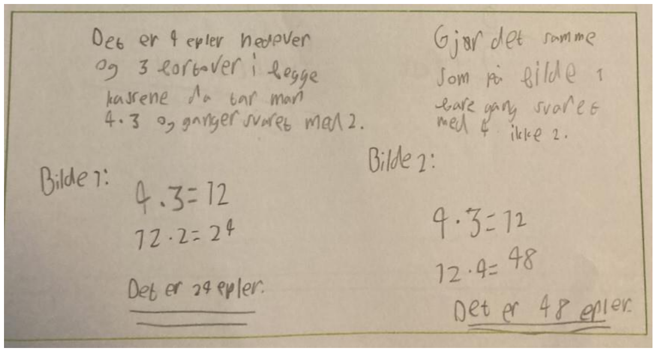
Figur 21: Elev 32 sin løsning av oppgave 2. Eleven har skrevet ned flere regnestykker til begge bildene i oppgaven.



Figur 22: Illustrasjon av inndelingen i seksere (venstre) og åttere (til høyre) til elev 32.

- Regnestykkene 3 · 4, 12 · 2 og 12 · 4

Disse elevene har tatt regneoperasjonene i flere steg. Av de 28 elevene er det 13 som har skrevet opp alle tre regnestykkene, et eksempel er elev 51 på figur 23. Eleven skriver «Det er 4 epler nedover og 3 bortover i begge kassene da tar man 4 · 3 og ganger svaret med 2. Gjør det samme som på bilde 1 bare gang svaret med 4 ikke 2.»



Figur 23: Elev 51 sin løsning av oppgave 2. Eleven skriver en forklaring av tankegangen sin og skriver opp regnestykker som beskriver antall epler på bildene.

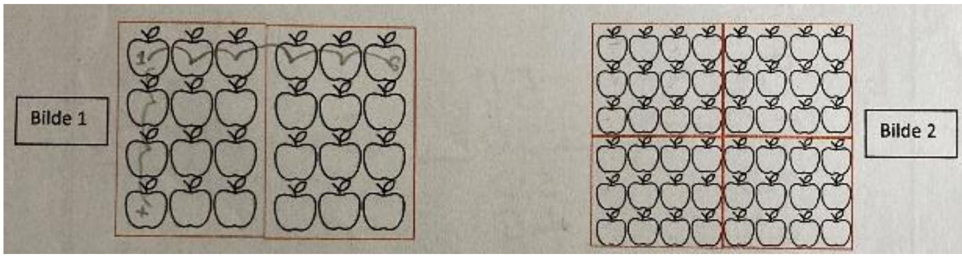
Elev 47 sier i intervju: «Jeg tok først og telte på sidene, og ganget de med hverandre, og så er det jo to like så ganget med 2.» Jeg spør om eleven kan finne flere regnestykker, og eleven nevner gjentatt addisjon. På spørsmål om hvilket uttrykk eleven synes passer best til bilde 1, svarer eleven: «$3 \cdot 4$ fordi det står at man skal finne et regnestykke som viser hvor mange epler det er i hver kasse.»

Femten av elevene skriver bare opp stykkene $12 \cdot 2$ og $12 \cdot 4$. I intervju med to av disse, sier elev 13, «Jeg telte veggen og undersiden, 4 og 3, da kan vi ta $4 \cdot 3$ det blir tolv og da vet vi at det er tolv. Og det er to eplebokser, $12 \cdot 2$.» Elev 14 sier i intervju «Jeg telte 12 i den ene og 12 i den andre, og så skrev jeg $2 \cdot 12$. Jeg har lært 12-gangen og gjør det med fingrene».

Begge kommer frem til flere regnestykker i intervjuet. Elevene fikk også spørsmål om de kunne finne en sammenheng mellom alle regnestykkene, og elev 13 sier «Så det finnes mange regnemåter!».

- Inndeling i seksere

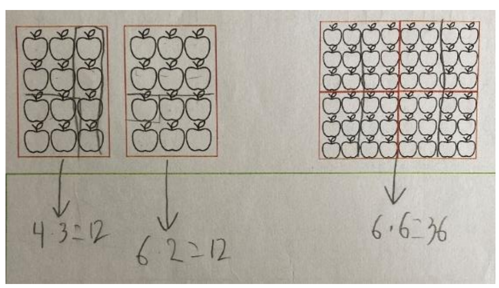
Denne kategorien inkluderer alle elever som regner med tallet 6. Det er to varianter. Den første er elevene som slår sammen eplekassene i bildene og teller epler nedover og bortover langs sidene, 13 av 18 elever bruker denne inndelingen. Elev 34 har markert på arket som viser hvordan den har talt, se figur 24. Elev 30 skriver i sin besvarelse «Jeg kan regne med at oppe så er det 6 stk og siden det er 4 stk så kan jeg regne $6 \cdot 4 = 24$.»



Figur 24: Elev 34 sine markeringer på bilde 1 som viser hvordan eleven teller antall epler bortover og nedover.

I intervju forklarer elev 26 fremgangsmåten slik: «6 bortover og 4 oppover blir 24. 6 under og 8 oppover da blir det 8·6 og det blir 48.» Eleven har også skrevet uttrykkene $2 \cdot 12$ og $4 \cdot 12$, som den forklarer slik: «Det er to bokser med *(eleven teller)* 12 epler i hver, så da blir det $2 \cdot 12$. Der har vi fire ruter med 12, som blir $4 \cdot 12$ som blir 48.» Jeg ber om flere stykker og viser etter hvert $3 \cdot 4 \cdot 2$. Til dette sier eleven «Jeg har ikke lært å gange 3 ganger. Det er bare det at jeg ikke har prøvd det.»

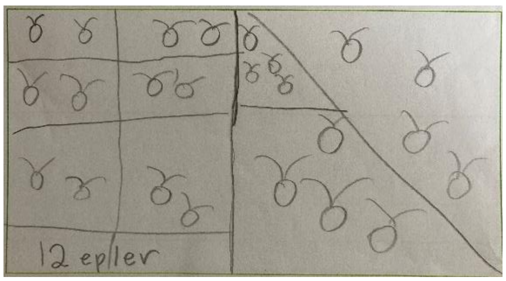
Den andre måten å dele inn i 6-ere på er å dele kassene på midten, slik at man i hver kasse får 2 gange 6 epler, som gir regnestykket $6 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 4$. Det er 5 av 18 elever som deler opp eplekassene på denne måten. Elev 19 har markert på arket sitt hvordan den deler opp i seksere, se figur 25.



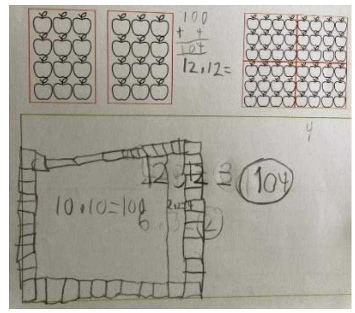
Figur 25: Elev 19 sine markeringer som viser inndelingen i seksere.

- Tegning

Elevene i denne kategorien tegner opp regnestykkene. De to elevene har forskjellige måter å gjøre dette på. Elev 9 har tegnet opp 12 epler på to forskjellige måter, der den ene tegningen representerer regnestykket $6 \cdot 2$. Her har eleven delt inn i 6 ruter, og tegnet 2 epler i hver. Det andre representerer regnestykket 3·4, der eleven har delt inn i 3 ruter og tegnet 4 epler i hver, se figur 26. Elev 4 tegnet opp et rutenett og forsøkte å regne ut regnestykket $12 \cdot 12$. Elevens tegning vises på figur 27.



Figur 26: Elev 9 har to måter å tegne opp 12 epler på.



Figur 27: Elev 4 sitt forsøk på utregning ved hjelp av rutenett.

4.2.2 Analyse

– Kommutativ og assosiativ lov, $3 \cdot 4 \cdot 2$ og $3 \cdot 4 \cdot 4$

Elevene i denne kategorien reflekterer dybdelæring fordi svarene viser at elevene ser etter mønster i bildene (Sawyer, 2014). Regnestykket disse elevene noterer ned er utgangspunktet for alle regnestykkene det går an å beskrive bildene med.

Elev 32 på figur 21 viser i tillegg evne til å finne mange forskjellige mønstre i begge bilder i oppgaven. Mønstrene elev 32 finner er forskjellige representasjoner av antall epler, slik kjerneelementene beskriver (Utdanningsdirektoratet, 2019). Det viser at eleven har sett en sammenheng mellom antallet epler og ulike måter å representere antallet på. I intervjuet viser eleven også hvordan den bruker andre inndelinger enn det som er vist på bildet i oppgaven, som vist i figur 22. Dette viser at eleven har gode strategier innen utforskning og problemløsning og kan se mange forskjellige løsninger og metoder for å komme frem til disse løsningene.

– Regnestykkene $3 \cdot 4$ og $2 \cdot 12$ og $4 \cdot 12$

Strategien tar løsningsprosessen i to steg, elevene finner først ut hvor mange epler det er på en side i eplekassen, og deretter multipliserer de dette med 2 og 4. Resultatene viser at elevene kan grupperes i to, de som viser til regnestykket $3 \cdot 4$, og de som ikke viser hvordan de kommer frem til 12. Resultatene viser også at disse enten teller, eller bruker regnestykket, men ikke noterer det.

Matematisk sett blir utregningene i denne kategorien lik som for regnestykkene $2 \cdot 3 \cdot 4$. Forskjellen er at elevene i kategorien kommutativ og assosiativ lov i større grad ser et mønster og klarer å uttrykke det i et regnestykke.

I analyseverktøyet blir denne kategorien klassifisert som at elevene ikke viser dybdelæring fordi de behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer (Sawyer, 2014). De tar utregningen steg for steg, statisk og metodisk, og ser elementene hver for seg. Samtidig utnytter de mønsteret som bildene i oppgaven legger opp til og bruker tallet 12 for å komme frem til en løsning. Noen av elevene også tegn til å ha brukt svarene fra bilde 1, til å regne ut antall epler i bilde 2. De gjenkjenner formen på eplekassene og ser at bildet er dobbelt så stort, som viser gjenkjenning av mønster, som er kjennetegn på dybdelæring ifølge Sawyers tabell (2014).

- Inndeling i seksere

De elevene som bruker inndelingen som er å slå sammen kassene, har med stor sannsynlighet talt epler nedover og bortover på bildene. Denne strategien kan sees i sammenheng med regning av areal, der man i firkanter multipliserer lengden med bredden for å finne figurens flatemål. Dette er også en vanlig strategi å jobbe med multiplikasjon på i matematikkundervisning, som kan være tegn på at elevene har memorert en prosedyre, men ikke vet hvordan og hvorfor den fungerer (Sawyer, 2014). Samtidig viser elevene at de kan overføre metoden fra en situasjon til en annen, og kan velge metode hensiktsmessig (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018).

Elevene som bruker den andre inndelingen, har delt inn i seksere slik at eplekassene deles på midten. Dette er et gjenkjennbart mønster av mengden seks, som for eksempel finnes på terninger. Mønsteret kan beskrives matematisk med regnestykket $2 \cdot 3 \cdot 4$ eller $3 \cdot 2 \cdot 4$, der 3 multiplisert med 2 gir det gjenkjennbare mønsteret av 6, slik at elevenes regnestykker er $6 \cdot 4$. Denne inndelingen reflekterer dybdelæring i større grad, fordi elevene gjenkjenner og bruker mønster i bildet fra oppgaven (Sawyer, 2014). Regnestykket er likt som i kategorien assosiativ og kommutativ lov, men faktorene representerer to ulike mønster.

Mønster i denne oppgaven er ikke entydig, og elevene har brukt mange forskjellige mønster til å formulere uttrykk for antall epler. Slik kan dybdelæring i denne oppgaven vises på mange ulike måter.

– Tegning

Elev 9 kan enten ha tegnet epler først og deretter satt inn inndelingene sine, eller motsatt. Med tanke på hvordan eplene er tegnet tolker jeg det som at eleven har tegnet eplene i grupperinger, og deretter tegnet inn strekene. Eleven viser med tegning to forskjellige måter å dele inn eplene i 12 på, seks grupper på to og tre grupper på fire. På en måte viser eleven at den ser etter mønster, som kan være tegn på dybdelæring (Sawyer, 2014), og at den utforsker mønster med tallet 12 gjennom tegning og visualisering. Samtidig er ikke elevens svar løsning på oppgaven, noe som kan bety at den har lest feil eller misforstått.

Elev 4 antar jeg forsøker å regne ut produktet av$12 \cdot 12$, og at den dermed har misforstått oppgaven. Min tolkning er at eleven oppfatter at oppgaven vil ha svaret på hvor mange epler det er til sammen på de to bildene. Dette er samme eleven som figur 15 i oppgave 1. Her bruker eleven samme strategi for regning med multiplikasjon. Eleven får det ikke helt til i noen av oppgavene, noe som kan tyde på at det er en prosedyre som er memorert, men at eleven ikke forstår hvordan eller hvorfor (Sawyer, 2014).

4.3 Oppgave 3

Analysen av oppgaven før innsamling var vanskelig, og jeg ser også i gjennomgangen av elevsvarene at denne oppgaven muligens ikke kan vise tegn på dybdelæring. De mest interessante funnene er i deloppgave c, med divisjon med rest og resonnering rundt hvordan klinkekulene kan fordeles, samt utsagn fra intervjuene.

I innsamlingen var dette en av oppgavene flest elever hadde spørsmål om og som veldig mange elever satt fast med lenge, i hovedsak grunnet oppgave c.

I gjennomgangen av elevsvarene har jeg valgt å dele opp oppgavene i a, b og c og kategorisert ut ifra hver deloppgave, se tabell 17, 18 og 19. Det er 50 elever som svarer på oppgave a, 48 av disse svarer også på b, og 41 svarer i tillegg på oppgave c.

4.3.1 Resultat

Deloppgave a)

Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Multiplikasjon	23	Noe dybdelæring
Gjentatt addisjon	11	Ikke dybdelæring
Bare svar	16	Ikke dybdelæring
Blank	2	

Tabell 17: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for deloppgave 3 a)

- Multiplikasjon

Elevene i denne kategorien har satt opp regnestykket $4 \cdot 50$ eller $50 \cdot 4$. Det er 7 av elevene som multipliserer 4 med 5 og får 20, og legger til en null slik at svaret blir 200. Elev 32 sier i intervju «Jeg husker at 5 gange 4 er 20, og så bare tar jeg en null bak.»

- Gjentatt addisjon

Elevene har brukt forskjellige strategier. En fremgangsmåte som flere har brukt er å addere 50 fire ganger. Åtte elever bruker mellomregningen $50 + 50 = 100,\ 50 + 50 = 100$ og $100 + 100 = 200,$ og en elev bruker denne mellomregningen $50 + 50 = 100,\ 100 + 50 = 150$ og $150 + 50 = 200$.

Av de 11 elevene som bruker gjentatt addisjon, er 8 av disse fra 4.trinn.

I intervju med elev 50 får eleven spørsmål om den kan finne andre måter å finne svaret på. Eleven svarer «For eksempel 50 gange 4, det blir litt vanskelig.»

- Bare svar

Disse elevene skriver bare svaret 200. Elev 43 forklarer hvordan den tenkte i intervju: «4 gange 5 først og det blir 20 og så har jeg lært av en lærer at vi kan legge på en null».

Deloppgave b)

Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Addisjon	15	Ikke dybdelæring
Subtraksjon	17	Ikke dybdelæring

Multiplikasjon	3	Ikke dybdelæring
Bare svar	13	Ikke dybdelæring
Blank	4	

Tabell 18: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for deloppgave 3 b)

- Addisjon

Disse elevene har subtrahert 5 kuler fra de 2 boksene, og deretter addert det nye antallet i de 4 boksene sammen. Elevene har brukt forskjellige strategier i utregningen, og de fleste viser en form for mellomregning. Det er totalt fire av elevene som med subtraksjon viser hvordan to av boksene ender opp med 45 kuler.

Tre elever har satt opp stykket og regnet ut ved hjelp av standardalgoritmen for addisjon, der en av dem har addert 45 fire ganger.

Åtte av elevene adderer to og to bokser sammen, $45 + 45$ og $50 + 50$, og summerer til slutt.

To elever har addert en boks som er full med en det er tatt ut kuler fra, og deretter multiplisere med to eller addere dem sammen.

Elev 34 har gjort det på denne måten:

$$50 + 50 + 45 + 45 = 50 + 50 + 50 + 40 = 150 + 40 = 190 .$$

Elev 45 har summert de to boksene det tas ut kuler fra, og subtrahert kulene som tas ut. Til slutt har eleven lagt til de to boksene som fortsatt er fulle, $100 - 10 = 90 \quad 90 + 50 + 50 = 190$.

- Subtraksjon

Tretten elever har satt opp regnestykket $200 - 10 = 190$. Elev 32 har satt opp regnestykket $200 - 5 - 5 = 190$. Elev 40 har satt opp $200 - 5$, elev 39 skriver $200 - 20$, og elev 43 setter opp stykket $200 - 10$, men skriver svaret 180. Ni av dem setter opp stykket etter standardalgoritmen for subtraksjon og viser med tieroverganger hvordan de har regnet ut.

Fire elever har mellomregningen som viser hvordan de kommer frem til at det er 10 som skal trekkes fra 200.

- Multiplikasjon

De tre elevene som har brukt multiplikasjon har alle satt opp stykket 4 multiplisert med 45, og får svaret 180. Alle disse elevene brukte også multiplikasjon i deloppgave a).

- Bare svar

Alle elevene i denne kategorien, er i samme kategori i deloppgave a.

Deloppgave c)

Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Oppdeling	11	Dybdelæring
Motsatt vei	5	Noe dybdelæring
Tegning	13	Ikke dybdelæring
Standardalgoritmen	4	Ikke dybdelæring
Bare svar	8	Ikke dybdelæring
Blank	11	

Tabell 19: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for deloppgave 3 c)

- Oppdeling

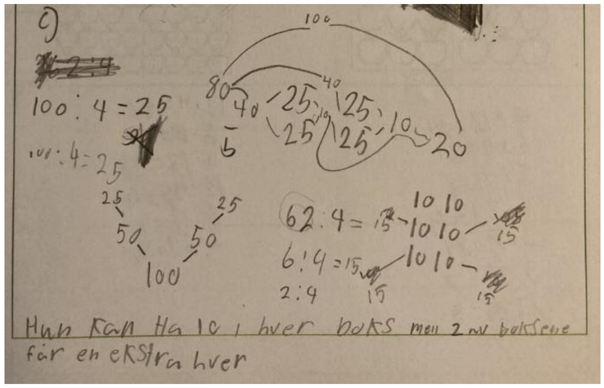
Av 11 elever deler 9 opp tallet i hundrere og tiere, og deler disse på 4 hver for seg. Elevene bruker regnestykkene: $100:4 = 25$ og $60:4 = 15$ før adderes disse sammen, $25 + 15 = 40$. Det gjenstår da 2 kuler, de 2 enerne.

I intervju forklarer elev 22 slik:

Elev: «Da var det jo 162 delt på 4, da er det vel kanskje noen i rest. Først tok jeg 100 delt på 4 som er 25. Og så 62 delt på 4 men og så står det fire der, men jeg tror jeg har viska det bort.»
Intervjuer: «hvorfor kan du dele opp tallet?»
Elev: «I stedet for å ta hele tallet siden det er vanskelig, så visste jeg at 100 delt på 4 er 25 fordi 50 delt på 2 er 25.»

Elev 43 forklarer på denne måten:
Elev: «Jeg tok på en måte og delte de opp. Og hvis det var 162 så tok jeg først 25 på hver boks og så 15 og det blir 40 i hver boks, og det var fire i rest eller noe.»
Intervjuer: «Hvordan kom du fram til 25?»
Elev: «Jeg prøvde med andre tall også, 20 fordi det er et partall og det er enkelt å telle oppover.»

Elev 37 bruker også oppdelingen. Eleven viser hvordan den går frem i utregningen sin, se figur 28.



Figur 28: Elev 37 sin utregning av oppgave 3c). Elevens besvarelse tyder på prøving og feiling.

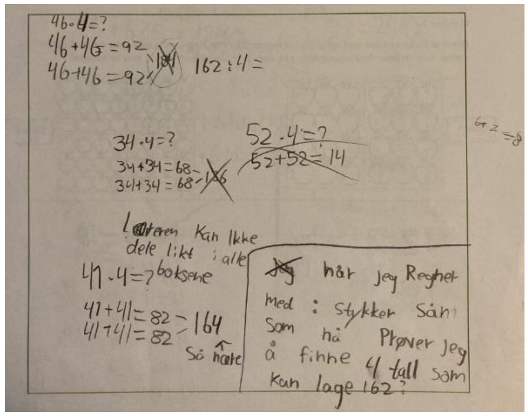
Elev 12 beskriver en annen oppdeling, der den først deler på to og deretter på to igjen. Denne strategien har eleven visket ut, og i svaret sitt skriver eleven «To bokser for 41 de to andre boksene får 40». Denne metoden gjelder også for elev 27.

- Motsatt vei

Elevene i denne kategorien har gått motsatt vei, de har prøvd å finne ut hvilket tall de kan multiplisere med fire eller addere sammen fire ganger for å få 162. Elev 24 har skrevet regnestykkene $4 \cdot 4 = 16$ og $4 \cdot 40 = 160$. Eleven konkluderer med at «det er en mer i to andre», og viser med dette til at $162 : 4 = 40$ med 2 i rest. Elev 32 og 36 noterer bare det siste regnestykket, $4 \cdot 40 = 160$ og skriver at det er 2 i rest.

Elev 36 forklarer i intervjuet sin fremgangsmetode slik «ehm jo da har jeg tatt først 162 delt på fire, først tenkte jeg 4 gang 50, så prøvde jeg 4 gange 40 som ble 160, og det er veldig nærme 162, det kan være 40 kuler i hver og 2 i rest.»

De to siste elevene bruker addisjon og subtraksjon, og viser begge mye prøving og feiling i sin metode. Elev 50 har prøvd seg frem med tallene 34, 52, 46 og 41, se figur 29.



Figur 29: Elev 50 sin utregning av oppgave 3 c). Eleven prøver seg frem for å finne et tall som kan adderes fire ganger og til sammen bli 162.

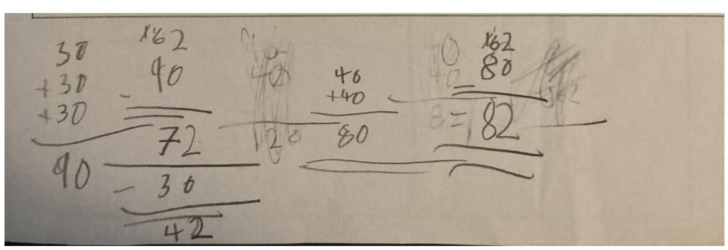
I intervju forklarer denne eleven metoden sin slik:

Elev: «Jeg vet ikke om det er riktig da. Først regnet jeg 162 delt på 4, så brukte jeg min metode. Jeg prøvde å finne ut hva som kan deles på 4, da hadde jeg liksom ikke helt lært hvordan man deler. Så jeg fant ut hvordan jeg kunne plusse sammen og prøver meg frem.»

Intervjuer: «Hvordan kom du frem til tallene du har prøvd?»

Elev: «Jeg tenkte det skulle være under 50, det er et for stort tall. Jeg prøvde med 34, men det ble for lite. Så tok jeg 46 tror jeg, det ble for mye, så da prøvde jeg 41.»

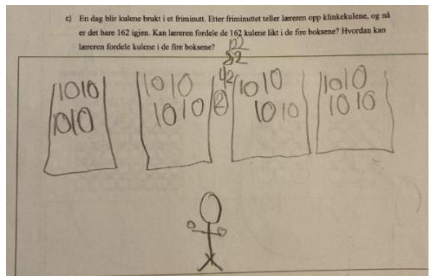
Elev 25 har også prøvd seg frem med addisjon. Eleven begynner med å addere 30 tre ganger. Denne summen trekkes fra 162, og nye 30 blir trukket fra igjen, slik at eleven ender opp med 42. Deretter begynner eleven på nytt, med $40 + 40$ denne gang. Trukket fra 162 får eleven 82. I elevens svar er det notater som er visket ut, som jeg ikke klarer å tyde, se figur 30.



Figur 30: Elev 25 sitt forsøk på utregning av oppgave 3 c). Besvarelsen viser tegn til at eleven prøver seg frem.

- Tegning

Denne strategien omfatter alle elever som på en eller annen måte har tegnet opp regnestykket. Av elevene i denne kategorien går ni av dem på 4.trinn. Ti elever har tegnet opp fire bokser, rundinger eller beholdere, og fordelt 162 likt mellom de fire, se figur 31 for eksempel ved elev 15.



Figur 31: Elev 15 sin utregning av oppgave 3 c) ved hjelp av tegning. Eleven tegner opp fire bokser å fordele i og deler ut 10 og 10.

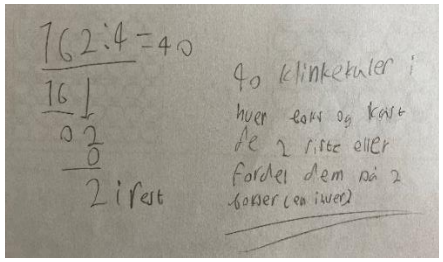
Noen har delt ut en og en og satt tellestreker for hver de har delt ut, andre har delt ut ti og ti. Elevene har forskjellige måter å holde orden på hvor mange de har delt ut, et eksempel på dette er å subtrahere fra totalen for hver gang de har delt ut til de fire boksene, en annen elev har tegnet opp alle tierne som går på 160, og fordelt disse ut en og en med streker slik at eleven ser hvilke som er igjen.

I intervju forklarer elev 15 strategien sin slik «Jeg tegnet bokser, tok ti i hver og så gjorde jeg det flere ganger, og så det siste tallet jeg fikk var to så to i rest. Jeg tok minus 162-40 og så minus 40.»

- Standardalgoritmen

Tre av elevene setter opp stykket og regner ut etter standardalgoritmen, se figur 32 for et eksempel ved elev 51. Disse går alle på 6.trinn. Som tekstsvar skriver elev 51: «40 klinkekuler i hver boks og kast de 2 siste eller fordel dem på 2 bokser (en i hver).»

Elev 49 kommer til punktet der 2-tallet blir tatt ned, og viser dette med en pil. Dette tallet har eleven strøket over. Som svar skriver eleven «42?».



Figur 32: Elev 51 sin utregning av oppgave 3 c). Eleven bruker standardalgoritmen for divisjon og skriver en forklaring ved siden av.

Elev 6 stiller opp stykket under hverandre på samme måte som den gjør med multiplikasjonsstykket i oppgave 1, figur 19. Eleven kommer ikke lenger og skriver «klarte ikke oppgaven».

- Bare svar

Disse elevene viser ikke hvordan de har tenkt, de har kun notert svaret sitt. Av disse så er det kun en av dem som bare har skrevet svar på de to oppgavene før, de resterende har alle vært i en kategori med en løsningsstrategi. Besvarelsen til elev 44 er interessant fordi eleven svarer 3 bokser og 12 i rest. Dette er eneste elev som har tenkt på en annen måte å fylle boksene på, enn å fordele kulene så likt som mulig i de fire boksene. Denne eleven viser at tre av boksene kan fylles opp med 50 kuler i hver, noe som gir 12 kuler til overs.

4.3.2 Analyse

Deloppgave a)

- Multiplikasjon

Flere av elevene bruker også i denne multiplikasjonen assosiativ lov på denne måten:

$$4 \cdot 50 = 4 \cdot 5 \cdot 10.$$

Som i oppgave 1, er det flere elever som refererer til regelen med multiplikasjon med tierpotenser, som elev 32 kommenterer i intervjuet «Jeg husker at 5 gange 4 er 20, og så bare tar jeg en null bak.»

- Gjentatt addisjon

Med så få tall som skal adderes ser nok mange elever at addisjon er en trygg og enkel strategi for å komme frem til riktig svar. Noen er kanskje mer sikre på å addere med tall over 10, enn å multiplisere med tall over 10. Et eksempel på dette er elev 50, som i intervjuet sier at «gangemetoden er litt vanskelig». Basert å elevens svar i resten av intervjuet tolker jeg «gangemetoden» som standardalgoritmen.

- Bare svar

Elevene som bare skriver svar, antar jeg bruker en av de to strategiene over. Dette kommer også frem av resultatene fra elevintervjuene. Antagelig er tallene enkle for elevene å regne i hodet, slik at de ikke behøver å kladde eller skrive opp utregningen.

I analyseverktøyet er ingen av disse tre kategoriene klassifisert som dybdelæring fordi elevene behandler lærestoff som adskilte kunnskapselementer (Sawyer, 2014). Samtidig vil multiplikasjonsstykkene til en viss grad vise at elevene kan hensiktsmessige, effektive og nøyaktige prosedyrer, og kan vurdere når og hvordan den skal brukes, som er tegn på anvendelse og prosedyrekunnskap (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018).

Deloppgave b)

- Subtraksjon

Oppgaveteksten er formulert som at det er «tatt ut» noen kuler. Formuleringen kan ha ledet elevene i denne kategorien til regnearten subtraksjon, der «tatt ut» kan regnes som et signalord for subtraksjon. Elevene viser at de klarer å trekke ut og bruke informasjonen som gis i oppgaveteksten, og velger subtraksjon som løsningsstrategi.

- Addisjon

Resultatene viser flere ulike strategier for utregning, der elevene enten bruker standardalgoritmen for addisjon eller en form for mellomregning.

- Multiplikasjon

Elevene kan ha lest eller forstått oppgaven feil, og tolket at det ble tatt ut 5 kuler fra hver boks. Multiplikasjon er mulig å bruke for å finne en løsning, for eksempel $2 \cdot 50 + 2 \cdot 45$.

- Bare svar

For mange er addisjon eller subtraksjon med 10 lett å regne med. Tallene er hele og runde og vil for mange elever være enkelt å regne i hodet ved bruk av ulike strategier. Jeg antar at dette er grunnen til at veldig mange av elevsvarene bare er svar, uten å vise hvordan de regner, fordi de mener utregningen er lett eller enkel. Sannsynligvis bruker disse elevene en av strategiene over til å regne ut.

Denne deloppgaven gir få muligheter til å vise dybdelæring, og ingen av kategoriene er klassifisert som dybdelæring i analyseverktøyet. Argumentet er at elevene viser tegn til å memorere fakta og prosedyrer, uten å vite hvorfor eller hvordan. Oppgaven legger i stor grad opp til å vise om elevene klarer å trekke ut informasjonen og bruke den riktig for å løse oppgaven, og gir få muligheter til eksempelvis å se etter mønster eller relatere nye ideer og kunnskap til tidligere erfaringer (Sawyer, 2014).

Deloppgave c)

- Oppdeling

Å dele opp dividend for deretter å dividere med fire, reflekterer dybdelæring fordi elevene relaterer til tidligere erfaringer og kunnskap. Dette er samme prinsipp som med oppdeling av multiplikasjonsstykker, der distributiv lov vil gjelde for oppdeling av dividend.

Mange bruker oppdelingen 100 og 60, og jeg antar at dette er fordi elevene vet at begge er delelig med fire. Dermed at det er to kuler i rest. Jeg tolker elevenes oppdeling som en strategi for å gjøre utregningen enklere. Elev 22 påpeker også i intervju at den oppfatter divisjonen $162 : 4$ som vanskelig, men at den vet hva 100 delt på 4 er, og kan bruke dette i utregningen. Dette viser at eleven tar i bruk kunnskap den har fra før, den relaterer ny kunnskap til tidligere kunnskap og erfaringer (Sawyer, 2014). Dette er et tegn på dybdelæring.

To elever deler opp divisor, og halverer dividenden to ganger. Dette er en god strategi i divisjon med potenser av 2 (Solem et al., 2017). Tallet 162 kan deles likt på 2. Videre er det kanskje lettere å se hvordan 81 kan deles på 2, enn hvordan 162 kan deles på 4.

Ingen elever svarer med desimaltall, som kan være et tegn på refleksjon rundt hva som blir delt. Det gir ikke mening å dele opp klinkekulene i halve, fordi da blir klinkekulene ødelagt. Noen elever kommer med forslag om at kulene ikke kan deles likt og at to bokser kan ha en kule mer i seg enn de andre. Samtidig er det en elev som for eksempel forslår å kaste de to kulene i rest, og en annen som med humor svarer at «en dum fyr spiste to av de». De to siste forslagene tyder på at elevene har en tanke om at boksene må ha helt likt antall kuler, noe som i dette tilfellet ikke er nødvendig. Oppgaveformuleringen stiller også spørsmål om læreren kan dele alle kulene likt, med hensikt om å få elevene til å reflektere.

- Tegning

Flertallet av elevene i denne kategorien går på 4.trinn. Det er en strategi som kan beskrives som en begynnerstrategi for divisjon, både med og uten rest. Den er tett knyttet til konkreter der det er mulig å dele ut en og en til alt er delt ut. Det er en primitiv strategi som benytter telling, noe som ikke reflekterer dybdelæring.

Samtidig er det elever som deler ut større deler, for eksempel 20, 10 og 5. Disse elevene viser refleksjon og resonnering rundt hvor mye det er mulig å dele ut om gangen.

Elevsvarene i denne kategorien tolker jeg som strategier elevene selv har utviklet, at det ikke er en prosedyre de har adoptert fra for eksempel lærere eller foresatte. Selv om dette er løsningsstrategier i divisjon på et tidlig stadium, er det strategier det som lærer er viktig å ta tak i, for å prøve å forstå elevenes tankegang, og bruke videre for at elevene kan lære divisjon med forståelse. Elevene må få relatere nye ideer og begreper som divisjon til disse erfaringene og den kunnskapen de bruker her.

- Motsatt vei

Denne strategien innebærer en del prøving og feiling før elevene finner rett tall. Elev 50 forklarer i intervjuet at det var en tanke bak tallene som ble prøvd, som viser resonnering. Til slutt ender eleven opp med svaret 41. Eleven har kommentert svaret og skriver «så nære. Læreren kan ikke dele likt i alle». Jeg antar at eleven ser at divisjonen ikke går opp, men det er ikke noe videre resonnement på hvor mange kuler det eventuelt er i rest eller hvordan kulene da kan fordeles.

De andre elevene bruker multiplikasjon. Ingen av dem viser noe tegn til prøving av andre tall. Dette kan bety at de resonnerer rundt hva de kan multiplisere med fire som kommer nærmest 162. Dette tyder på kunnskap om divisjon og multiplikasjon som motsatte regnearter, og dermed at elevene klarer å bruke sammenhengen som en løsningsstrategi.

Jeg er usikker på om elev 25 egentlig forstår hva den gjør og hvilke tanker eleven har gjort seg. Utregningene viser at elevene er veldig nærme et svar, men utregningene stopper. Dette kan være fordi eleven gir opp og går videre til neste oppgave, eller fordi eleven ikke hadde mer tid.

– Standardalgoritmen

De tre elevene fra 6.trinn bruker samme metode, og bruker piler og streker for å «trekke ned neste tall». Dette kan tolkes som en huskeregel elevene har lært for å holde orden på hvilke siffer de har dividert og hvilke de har igjen.

Elev 49 stopper opp og jeg tolker dette som at eleven ikke vet hva den skal gjøre i situasjonen der divisjonen ender med rest. Dette kan komme av at elevene har lært algoritmen, og enten ikke husker eller vet hva den skal gjøre i situasjonen der divisjonen ikke går opp.

Elev 6 stiller i oppgave 1 opp multiplikasjonsstykke som kan minne om en standardalgoritme. I denne oppgaven stiller eleven opp stykket på samme måte, men skriver at den ikke klarer å regne ut. Min tolkning er at eleven forsøker å overføre metoden fra multiplikasjon, uten hell. Algoritmen eleven bruker i multiplikasjon likner standardalgoritmen, og den er ikke direkteoverførbar til divisjon. Oppstillingen kan fungere med fremgangsmåten for standardalgoritmen i divisjon, som denne eleven på 4.trinn ikke har gjennomgått enda. Samtidig er det interessant å se at eleven forsøker å overføre metoden.

Standardalgoritmen som strategi kan gjøres både med og uten forståelse. Elevenes utregning tyder på memorering av prosedyrer uten å vite hvorfor eller hvordan, og dermed ikke dybdelæring (Sawyer, 2014). På en annen side er det mulig elevene som bruker standardalgoritmen kan andre prosedyrer som i dette tilfellet ville reflektert dybdelæring, men at det er denne metoden de velger å bruke.

– Bare svar

Av de elevene som bare har skrevet svar, er elev 44 spesielt interessant. Denne eleven er den eneste som kommer med en annen måte å fordele kulene i boksene på. Elevens strategi kan ha vært å fylle opp boksene en etter en, og se at det da brukes 150 av de 162 kulene, slik at det er 12 igjen. Eleven kan med en slik strategi ha brukt subtraksjon på denne måten:

$$162 - 50 = 112, \qquad 112 - 50 = 62, \qquad 62 - 50 = 12$$

Dette kan beskrives som gjentatt subtraksjon. I analyseverktøyet er ikke denne strategien kategorisert som dybdelæring, fordi eleven jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til hva den kan fra før (Sawyer, 2014). På en annen side stiller oppgaven spørsmålet om læreren kan fordele kulene likt, og videre hvordan kulene kan fordeles. Det er derfor ikke i utgangspunktet et krav i oppgaven at kulene skal fordeles likt. Eleven kan også ha tatt utgangspunkt i at den vet at det er plass til 50 kuler i hver boks.

Alle andre svar på denne oppgaven tar utgangspunkt i at læreren skal fordele kulene så likt som mulig, noe som også er hensikten med regnearten divisjon. Oppgaven gir en rest, som gjorde at mange av elevene brukte lang tid på akkurat denne deloppgaven.

4.4 Oppgave 4

Oppgave 4 inneholder tall mindre enn én representert med brøk. Det er en oppgave jeg antar vil være for vanskelig for noen av elevene. I gjennomgang av elevsvarene fant jeg mange spennende løsningsstrategier å utforske, fra elever på alle trinn. Det er 31 elever som har svart på oppgave a), 16 av disse har svart på oppgave b), og 13 av disse har også svart på oppgave c).

I analyseverktøyet var to av kategoriene divisjon med brøk og divisjon med desimaltall. Disse strategiene var det ingen av elevene som brukte, og kategoriene er endret til utregning ved bruk av brøk og utregning ved bruk av desimaltall. Kategoriene vises i tabell 20 og 21.

4.4.1 Resultat

Deloppgave a

Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Utregning med brøk	4	Noe dybdelæring
Utregning med desimaltall	4	Noe dybdelæring
Tegning	2	Noe dybdelæring
Bare svar	8	Noe dybdelæring
Feilsvar	13	Ikke dybdelæring
Blank	21	

Tabell 20: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for deloppgave 4 a)

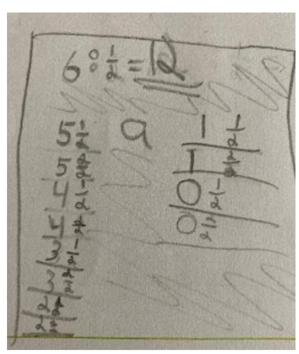
- Brøk

Denne kategorien inneholder elever som bruker brøk i utregningen sin. Det er fire elever, og de har alle forskjellige metoder. Elev 7 adderer en halv med en halv og får en hel. Dette gjentar eleven til den har seks hele, og kan telle opp 12 halve.

I intervju med elev 7 forklarer den metoden sin slik:
Elev: «Tror jeg tok, han hadde 6 meter og han trengte.. Hva var en halv igjen? Har han en pizza og to pizzastykker eller to pizzaer?» Jeg svarer at eleven kan se på det som en pizza delt i to stykker.
Elev: «Hvor mange stykker trenger han da? En halv pluss en halv er en meter så gjorde jeg det seks ganger. Jeg kom på en lettere måte, det er jo dobbelt så mye som 6.»

Eleven har bare svart på oppgave a), og i intervjuet spør jeg eleven om den kunne brukt samme metode til å komme frem til et svar på de andre oppgavene også. Eleven prøver på oppgave b) i intervjusituasjonen og får det til. Eleven klarer også å resonnere rundt hva som skjer med antall skjerf når brøken blir mindre og større. «Det blir mindre skjerf, fordi han bruker mer stoff».

Elev 32 skriver «han kan sy 12 skjerf». Under viser eleven utregningen sin, der den skriver opp regnestykket $6 : \frac{1}{2} = 12$. Eleven har en liste med tall og subtraherer en halv fra totalt antall meter som er 6. Eleven subtraherer helt til den kommer til null, se figur 33. Denne eleven sier i intervju at «Jeg tok $\frac{1}{2}$ meter hvis du skal ha en meter da så er det to, så da tok jeg 6 gange 2 som er tolv.»



Figur 33: Elev 32 sin utregning av oppgave 4 a). Figuren viser at eleven setter opp en liste og trekker fra halve til den kommer til null.

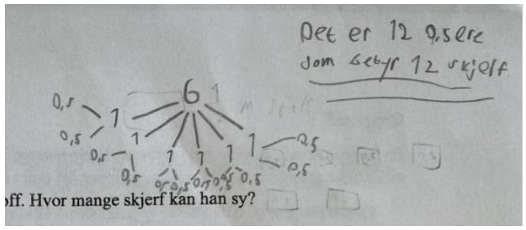
To elever bruker multiplikasjon. Elev 28 har skrevet regnestykket $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ og videre $2 \cdot 6 = 12$. I intervjuet sier eleven «jeg ganget en halv med to, for å få et helt tall. Så ganget jeg seks med to, jeg vet ikke helt om det er riktig, en halv gange tolv er seks.»

Elev 36 har skrevet regnestykke $\frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ og skriver «svar: han kan sy 12 skjerf.» Eleven sier i intervjuet at den var litt usikker på oppgaven «fordi jeg ikke er helt vant til brøk og gange det med et helt tall». Eleven forklarer tankegangen sin slik «Fordi jeg tenkte at en halv er halvparten, så da tok jeg halvparten av tolv og det er seks. Jeg tenkte litt først, i hodet.» Denne eleven har også bare svart på oppgave a), og fikk spørsmål om den kunne ha brukt samme metode for å svare på resten av oppgaven. Eleven svarer «færre skjerf, jeg tror det blir færre skjerf fordi han bruker mindre stoff. Tolv pluss tolv er tjuefire, han kan lage tjuefire skjerf.»

- Desimaltall

Elevene i denne kategorien bruker desimaltall i utregningene sine. Felles er at de har gjort om brøken $\frac{1}{2}$ til desimaltallet $0{,}5$. Elev 47 skriver opp en liste med tall, fra 0,5 opp til 6, der hvert tall øker med en halv. Under skriver eleven «han kan sy 12 skjerf $6 \cdot 2 = 12$». Om metoden sin sier eleven i intervju «jeg har plusset null komma fem helt opp til man kom opp, eller vent litt, helt til man kommer til seks.» Eleven har bare svart på oppgave a), og jeg får eleven til å resonnere om hva som skjer med antall skjerf hvis skredderen bruker mer stoff til hvert skjerf, der eleven svarer «da blir det mindre». Jeg spør videre om det motsatte, om skredderen bruker mindre stoff per skjerf, og eleven svarer «Han bruker mindre av meteren, han får flere skjerf. Og da blir det vel tjuefire, hvis man ganger 2eren med to så får man fire og da får man dobbelt så mange.»

Elev 51 viser med en tegning at seks kan deles inn i enere som videre kan deles i halve, eleven skriver «det er 12 0,5ere som betyr 12 skjerf.». Tegningen er vist på figur 34.



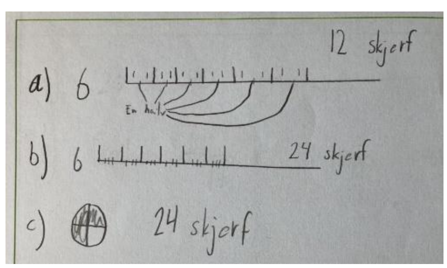
Figur 34: Elev 51 sin løsning på oppgave 4 a). Figuren viser tegningen eleven bruker.

Elev 19 teller antall skjerf ved å subtrahere halve fra totalen. Eleven kan subtrahere 0,5 fra totalen tolv ganger før den kommer til null, og konkluderer med at skredderen kan sy tolv skjerf.

Elev 27 har skrevet $6 \cdot 2 = 12m$. Eleven er plassert i denne kategorien fordi den har skrevet regnestykket $6 : 0{,}5 = 12$, men visket det ut. I intervjuet sier eleven «seks gange to er tolv, og siden en det er en halv på hver så derfor kan han sy 12 skjerf, siden når jeg ganger så kommer det riktig.»

- Tegning

I denne kategorien bruker elevene en arbeidstegning som strategi. Elev 40 har tegnet en linje som den har delt inn i seks like deler. Deretter deler eleven de seks delene i to, og markerer at dette blir en halv. Eleven markerer alle de halve og konkluderer med at det blir 12 skjerf. Tegningene vises på figur 35. Dette beskriver også elev 45 sin tegning. Den har i tillegg skrevet «Jeg tenkte at et skjerf er en halv m og det er 6 m i alt og da må du ta $6 + 6 = 12$ svaret blir 12».



Figur 35: Elev 40 sin løsningsstrategi i oppgave 4. Figuren viser linjen som eleven deler opp i like deler.

- Bare svar

Kategorien inkluderer elever som bare har skrevet svaret 12 og tre elever som har skrevet regnestykkene $6 + 6 = 12$ eller $6 \cdot 2 = 12$. Disse tre elevene er tatt med i denne kategorien fordi det ikke er tydelig hvor de har tallene i regnestykket sitt fra.

Elev 24 sier i intervju om hvordan den har tenkt «En halv meter stoff på ett skjerf og da blir det 12 skjerf. En halv pluss en halv blir en hel og da er det seks hele og 12 halve.»

- Feilsvar

Denne kategorien inkluderer alle elever som har prøvd å regne, men ikke kommet frem til riktig svar. Av disse er det seks som bare har skrevet et svar, tre av dem svarer 3 skjerf, to av dem svarer 2 skjerf, og en svarer 4 skjerf.

To elever prøver å regne med brøken en halv. Begge adderer en halv med en halv og får svaret 3. Videre adderer de 3 med 3. Den ene konkluderer med 6 skjerf og den andre med 4 skjerf. En annen elev skriver at $\frac{1}{2}$ er lik en halv, og som svar på oppgaven skriver eleven 2.

En elev har dividert 6 på 2 og ender med svaret 3. En annen skriver at halvparten av 12 er lik 6. En annen igjen har skrevet regnestykket $2{,}4 + 3{,}6 = 6$ og konkluderer med 5 skjerf. En siste elev har skrevet opp regnestykket $1 + 1 = 2$ tre ganger, og skriver «han kan lage 4 skjerf.»

Deloppgave b og c

Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Bruker svar fra oppgave a	2	Dybdelæring
Sammenlikner brøkene	2	Dybdelæring
Tegning	3	Noe dybdelæring
Bare svar	5	Noe dybdelæring
Feil	10	Ikke dybdelæring
Blank	30	

Tabell 21: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for deloppgave 4 b) og c)

- Bruker svar fra oppgave a

Elev 27 og 28 tar utgangspunkt i svaret de fikk i oppgave a for utregning i oppgave b. Begge har skrevet regnestykket $2 \cdot 12 = 24$ I intervju sier 27 «Da tok jeg tolv gange to og det er 24. Man må dele en halv i to, så blir det det samme». Eleven skriver $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ i svaret sitt. Elev 28 sier «tolv gange to er 24, fordi i den første er svaret 12, man trenger halvparten så lite stoff til hvert skjerf.»

Elev 28 har også svart på oppgave c. Eleven sammenlikner med brøken fra forrige oppgave og skriver $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$. Eleven tar utgangspunkt i svaret sitt fra forrige oppgave som gav 24 skjerf, dividerer med 3, og får 8. I intervjuet sier eleven «en fjerdedel gange 3, vet ikke om det er riktig da, men. Jeg delte 24 på 3 og fikk 8, fordi $\frac{3}{4}$ er 3 ganger så mye som $\frac{1}{4}$.»

- Sammenlikning av brøkene

Disse elevene sammenligner brøkene og bruker dette til å finne ut hvor mange skjerf det blir når skredderen bruker $\frac{1}{4}$ meter og $\frac{3}{4}$ meter per skjerf.

Elev 48 og 51 har utfyllende resonnementer og begge har svart riktig på oppgave a. Elev 51 skriver «det blir flere pga istedenfor 2 skjerf per m så blir det 4 skjerf per m.» På oppgave c svarer eleven «mindre skjerf pga $\frac{3}{4}$ er mer enn $\frac{1}{4}$ og jo mindre stoff du bruker jo flere skjerf kan du lage.»

Elev 48 skriver «Det blir flere, eller det blir flere fordi vi bruker mindre stoff for hvert skjerf.» På oppgave c skriver eleven «Det blir færre skjerf en i a og b fordi vi bruker mer stoff for hvert skjerf. 1 meter stoff: 4 biter. $6 \cdot 4 = 24$ biter, $24 : 3 = 8$ Det blir 8 skjerf.»

- Tegning

De to elevene bruker en tegning for å regne ut oppgave b. Elev 41 bruker samme metode som i a, tegner en linje som den først deler i 6 like deler, og deler disse igjen i 4. På oppgave c) har eleven tegnet en sirkel som den har delt i fire og fargelagt tre firedeler av. Eleven har skrevet 24 skjerf på denne oppgaven også.

Elev 32 har tegnet opp et rutenett, med fire ruter nedover og seks ruter bortover. Nedover i rutene har eleven skrevet inn $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ og $\frac{4}{4}$. Eleven skriver regnestykket $6 \cdot 4 = 24$ ved siden av. Over skriver eleven «Han får 24 skjerf til dukker. Det blir altså flere. Jeg tror ikke for det blir som og se en oppgave uten regnestykke». Dette er et svar på spørsmålet i oppgaven som spør om man kan finne antall skjerf uten å regne på nytt. I intervjuet sier eleven «Jeg ganger med fire, seks med fire, fordi da er en meter delt inn i fire.» Eleven blir spurt om å sammenlikne brøkene i oppgavene og sier « $\frac{1}{4}$ er mindre enn $\frac{3}{4}$».

- Bare svar

Elev 33 skriver «Han kan sy 6 skjerf og 12 små skjerf» på oppgave b, og svarer 8 skjerf på oppgave c.

Elev 24 og 40 svarer 24 skjerf på oppgave b, de har ikke svart på oppgave c. Utdrag fra intervju med elev 24:

Elev: «det er jo en kvart, da kan man ha 24 skjerf»
Intervjuer: «Hvordan kom du frem til det?»
Elev: (Tenker)
Intervjuer: «Hvor mange skjerf blir det på en meter?»
Elev: «fire, gjør det ikke?»
Intervjuer: «og hvor mange meter har du til sammen?»
Elev: «seks, og seks gange fire er 24»
Intervjuer: «kan du bruke denne metoden på oppgave c også?»
Elev: «da må jeg finne ut hvor mange tre fjerdedeler er. Det er best å regne i hodet»
Eleven klarer ikke i intervjusituasjonen å komme frem til antall skjerf på oppgave c).

De tre siste elevene skriver ikke tallsvar. Elev 22 svarer at det i oppgave b blir flere skjerf. Elev 25 skriver «det blir mer for det blir mer stoff og bruke», og konkluderer med færre skjerf i oppgave c. Ingen av disse to hadde riktig på oppgave a.

- Feilsvar

Det er åtte elever som bare skriver et tallsvar, noen av dem har prøvd seg på en utregning. Svarene varierer fra 2 skjerf til 5 skjerf. Elev 14 svarer 20 skjerf på oppgave b, men har klart å komme frem til 8 skjerf på oppgave c.

Tre av elevene har ikke utregning eller tallsvar. Elev 45 skriver «kanskje det blir mindre skjerf?» som svar på b, og vet ikke på oppgave c. Elev 52 skriver at det i oppgave b blir færre fordi skredderen har brukt opp alt stoffet og at han ikke får laget mer skjerf fordi han ikke har mer stoff igjen. Elev 46 skriver «det blir mindre en a, det blir mindre en b, det blir 2 skjerf.» som svar på oppgave c.

4.4.2 Analyse

Deloppgave a)

- Brøk

Brøken i denne oppgaven kan være kjent for flere av elevene, og de kan relatere begrepet en halv til for eksempel en halv pizza, kake eller et halvt eple, noe elev 7 også gjør. Eleven blander teller og nevner, men husker at brøken $\frac{1}{2}$ enten betyr at en pizza delt i to eller to pizzaer. Eleven relaterer bakgrunnskunnskapen om brøk som pizza som en strategi. Med støtte i intervjuet klarer eleven å bruke den samme kunnskapen til å regne ut oppgave b også.

Eleven viser forståelse av begrepet brøk som en del av en hel, fordi eleven adderer to halve og får en hel, dette gjelder også for elev 28 og 32. Elevenes strategi er å finne ut hvor mange deler som utgjør en hel, i dette tilfellet en hel meter. Dette reflekterer kunnskap satt i begrepssystemer som henger sammen (Sawyer, 2014), som er et tegn på dybdelæring. Men det reflekterer kanskje mer kunnskap og forståelse for tall under 1 enn for regning med multiplikasjon og divisjon.

Den siste eleven resonnerer rundt hva en halv er, og bruker begrepet halvparten. Eleven forsøker å finne ut hvilket tall der halvparten er 6. Dette reflekterer kunnskap om dobling og halvering, som handler om mønster og underliggende prinsipper i multiplikasjon og divisjon (Sawyer, 2014), som også er et tegn på dybdelæring. Det kan også reflektere kunnskap om dobling og halvering organisert i et begrepssystem knyttet til brøken en halv (Sawyer, 2014).

- Desimaltall

Elevene i denne kategorien har gjort om brøken en halv til desimaltallet 0,5. For noen kan desimaltall være mer kjent enn tall representert ved brøk. Elevene viser at de kan uttrykke tall mindre enn én ved bruk av flere representasjoner (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018; Utdanningsdirektoratet, 2019). Elevene bruker ulike strategier for å finne ut hvor mange 0,5meter det er plass til på 6meter, kun en elev bruker divisjon, men har visket ut, og skrevet multiplikasjonsstykke i stedet.

- Tegning

En arbeidstegning er en god måte å få organisert informasjonen i oppgaveteksten på. Strategien gir god støtte til å konkretisere brøkene. Elev 45 skriver en forklaring og bruker regnestykket 6 addert med 6, men jeg tolker at begge bruker tegningen til å telle hvor mange halve meter det blir på 6 meter stoff.

Kategorien er i analyseverktøyet mellom dybdelæring og ikke dybdelæring. På en side kan man tolke slike arbeidstegninger som tegn på at elever leter etter mønster, og organisering av brøk i et begrepssystem der elevene viser forståelse for hvor stor del av en hel en halv er. På en annen side kan strategien være en prosedyre elevene har lært å bruke (Sawyer, 2014).

- Bare svar

Alle har kommet frem til riktig svar, men det er vanskelig å si noe om elevenes regnestrategier. Min tolkning er at noen elever forstår oppgaven, men regner ut i hodet og viser derfor ikke hvordan de har tenkt. Antageligvis har noen sett tallene som er presentert i oppgaven, og gjettet seg frem.

Regnestykket $2 \cdot 6 = 12$ kan komme fra 2 skjerf per meter, og det er 6 meter i alt. Regnestykket $6 + 6 = 12$ gir riktig svar, men det er ikke like logisk hvordan elevene har tenkt.

- Feilsvar

Mange av elevene kan ha prøvd seg frem og bare skrevet noe for å kanskje treffe. Mange av elevene uttrykte at regning med brøk er noe de synes er vanskelig. Lærerne på 4.trinn og 5.trinn sa også at brøk er et tema elevene ikke har brukt mye tid på.

Oppgavens hensikt er å resonnere rundt divisjon med tall mindre enn en, og formuleringen kan oppfattes som annerledes enn oppgaveformuleringer forbundet med lærebøker. Oppgaven stiller også spørsmål om det er mulig å regne ut neste deloppgave, uten å regne helt på nytt. En mulig grunn til feilsvar kan være vansker med å forstå nye ideer som er forskjellig fra oppgavene elevene møter i lærebøker, som er et tegn på overflatelæring (Sawyer, 2014).

Deloppgave b og c

- Bruker svar fra oppgave a

Elevene utnytter svarene de allerede har til å regne ut de neste deloppgavene. Formuleringen av deloppgavene gir hint om at dette er mulig, «kan man finne ut hvor mange skjerf det blir uten å regne på nytt?». Det er ingen tegn i besvarelsene som kan si noe om elevene har brukt informasjonen gitt i oppgaveteksten eller om de har sett det selv. Uansett viser det forståelse for sammenheng mellom dobling og halvering av tall mindre enn 1, fordi elevene bruker antall skjerf laget med en halv meter stoff til å finne ut antall skjerf når det brukes halvparten av stoffmengden, en fjerdedel. Dette reflekterer dybdelæring fordi det viser tegn til kunnskap organisert i et begrepssystem, samt forståelse for sammenhengen mellom dobling og halvering.

Elev 28 viser videre at den kan overføre tankegangen om at en halv er dobbelt så mye som en fjerdedel, til forholdet mellom brøkene en fjerdedel og tre fjerdedeler. Eleven bruker nok en gang svaret fra forrige oppgave, når skjerfene ble laget av $\frac{1}{4}$ meter stoff ble det 24 skjerf, hvor mange skjerf blir det når det brukes tre ganger mer stoff per skjerf. Da dividerer eleven 24 på 3 og får 8 skjerf.

- Sammenlikning av brøkene

Begge elevene skriver gode begrunnelser og formulerer gode argumenter for svarene sine, for eksempel fra elev 51 «det blir flere fordi istedenfor 2 skjerf per meter så blir det 4 skjerf per meter» og «mindre skjerf pga $\frac{3}{4}$ er mer enn $\frac{1}{4}$ og jo mindre stoff du bruker jo flere skjerf kan du lage». Disse resonnementene viser også elev 48.

Elev 48 bruker i tillegg samme resonnement som elev 28 når det gjelder antall skjerf med $\frac{3}{4}$ meter. Eleven viser til at 1 meter stoff deles inn i fire biter, som gir 24 biter i alt. Disse deler eleven på 3, og får 8 skjerf.

De to elevene reflekterer også dybdelæring, fordi de organiserer kunnskapen i begrepssystemer (Sawyer, 2014), og de viser matematisk resonnering og anvendelse (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018).

- Tegning

Av disse tre elevene, bruker to av dem tegning som strategi i deloppgave a). Elev 41 bruker samme type tegning, men har delt inn hver meter i 4. Jeg antar at eleven også her teller opp antall halve. På oppgave c derimot har eleven tegnet en runding delt inn i fire, med 3 av delene fargelagt. Elev 45 bruker runding på oppgave b), der rundingen er delt i 8 og fire av disse er fargelagt.

Elev 32 har tegnet et rutenett, og kan ha funnet regnestykket som følge av tegningen.

Ingen av disse kommer frem til et svar på oppgave c. En mulig grunn for dette kan være at brøken $\frac{3}{4}$ ikke er like enkel å lage en arbeidstegning av.

- Bare svar

Svaret til elev 33 er interessant. Eleven skriver at skredderen kan sy 6 store og 12 små skjerf, som også kan være en løsning på oppgaven. Svaret tyder på at eleven ser et mønster og en sammenheng mellom de to brøkene, skredderen kan sy dobbelt så mange små som store skjerf. Oppgaveformuleringen kunne muligens vært enda tydeligere, for eksempel ved å presisere at det er 6 nye meter med stoff.

Flere av elevene klarer å resonnere rundt antallet skjerf.

4.5 Oppgave 5

I denne oppgaven skrev mange av elevene svaret sitt rett inn i tabellen i oppgaveteksten. Flertallet av dem skrev bare svar, og det var få som viste tenkemåte eller løsningsstrategi. Deloppgavene er for denne oppgaven slått sammen fordi elevene bruker samme strategi om de svarer på mer enn en oppgave, kategoriene vises i tabell 22. Det er 26 elever som svarer på oppgaven.

4.5.1 Resultat

Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Finner totalt antall elever på en side	2	Noe dybdelæring
Dobling og halvering	1	Dybdelæring
Bare svar	12	Ikke dybdelæring
Feil	11	Ikke dybdelæring
Blank	26	

Tabell 22: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for oppgave 5

- Finner totalt antall elever på en side

Begge elevene har bare svart på deloppgave a). De regner ut venstre side av likhetstegnet og får 60. Elev 37 har deretter summert tolvere, først to, så tre, så fire og til slutt fem som blir 60, og konkludert med at svaret da er 5. Elev 45 viser med regnestykket $10 \cdot 6 = 60$ at den finner totalen av elever på ene siden. Videre skriver eleven «__grupper på 12 elever» og regnestykket $12 \cdot 7 =$. Eleven har ikke regnet ut.

- Dobling og halvering

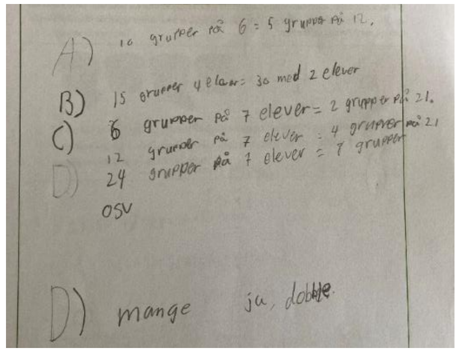
Elev 26 har i deloppgave a) kommet frem til svaret sitt ved å dividere 10 med 2 og får 5, og 12 dividert med 6, men der har eleven skrevet 5. Eleven kommer dermed frem til løsningen 5. På deloppgave b) har eleven addert 30 med 30 og funnet svaret 60, mens på oppgave c skriver eleven «$3 \cdot 7 = 21$ = 21 g 7e = 3g = 21e».

I intervju sier eleven: «Jeg vet at fem ganger to blir ti og seks ganger to blir tolv.»
Intervjuer: «Kan du bruke dette på oppgave b?»
Elev: «Det blir 15. Fordi 30 delt på 2 blir 15.»

- Bare svar

Av disse er det fem elever som har svart riktig på samtlige av deloppgavene, fire går på 5.trinn og en på 4.trinn. På oppgave c) har elev 24, 27, 34 og 40 svart at det er 3 grupper på 7 elever og 1 gruppe på 21 elever. Disse fire har bare skrevet denne løsningen. Elev 24 sier «fordi det er dobbelt så mange der som der» i intervju om hvordan den kom frem til svaret. Elev 27 sier «like mye på hver, 12 grupper på 5 og der er det 10 grupper på 6. Delt 12 på 6.» Om sammenhengen sier elev 27 «fem er halvparten av ti og da er det er doblet seg på seks, det er tolv. Det blir større grupper, men færre grupper». Alle tre utfordres til å finne flere løsninger på oppgave c, noe samtlige får til.

Elev 28 har tre forskjellige løsninger på oppgave c og skriver «det er mange, ja doble», som vist på figur 36. I intervju med denne eleven sier den «denne var lett!». Eleven forklarer at den først fant totalen på ene siden, og deretter hvor mange den da måtte multiplisere med 12. Også denne eleven finner flere løsninger enn den hadde på oppgave c under intervjuet. Jeg spør eleven om hvor mange løsninger den tror det finnes, og eleven svarer «det er mange, jeg fant jo nettopp en til, men kanskje ikke uendelig da».



Figur 36: Elev 28 sin utregning av oppgave 5. Figuren viser alle elevens løsninger på oppgave c og d.

Blant de resterende har fem har svart riktig på oppgave a, to på oppgave b, og to på oppgave c.

To av disse hadde jeg intervju med. Elev 14 fant svaret på oppgave a ved å finne totalen på ene siden, mens elev 12 sier at «12 er dobbelt av 6 og 10 er dobbelt så mye som 5». Begge klarer i løpet av samtalen å finne riktig svar på oppgave b, og flere løsninger til oppgave c.

- Feil

Elevene i kategorien har alle prøvd seg på oppgaven, men ingen av dem har fått riktig svar. Ni av elevene har bare skrevet et svar, og to viser en utregning. Den ene av dem har addert tallet 12 trettiseks ganger, og avslutter med setningen «jeg vet ikke». Den andre har skrevet « $1 = 2 \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$».

To elever har svart det samme, 2 på oppgave a, og 3 på de andre oppgavene. Begge skriver at de multipliserer og finner svaret.

To elever har svart 60 på oppgave a. En annen feil som går igjen, er svaret 60 på oppgave b.

4.5.2 Analyse

- Finner totalt antall elever på en side

Denne strategien tar utgangspunkt i kunnskap om likhetstegnet, det skal være likt på begge sider. Elevene finner produktet på venstre side ved å utføre multiplikasjonen og prøver seg deretter frem for å finne ut hvilket tall som multiplisert med 12 vil gi 60. Dette reflekterer forståelse om likhetstegnet som matematisk symbol, og symbolets betydning slik oppgaven er formulert. Kunnskap om matematiske symboler er en av de matematiske kompetansene nevnt av Niss

(2002) og et av kjerneelementene (Utdanningsdirektoratet, 2019). Strategien reflekterer dybdelæring fordi elevene organiserer egen kunnskap i begrepssystemer (Sawyer, 2014).

Begge elevene ser ut til å prøve seg frem for å finne hvilket tall som skal multipliseres med tolv. Elev 37 begynner med utregning tilsvarende 12 multiplisert med 2, 3, 4 og til slutt 5. Denne eleven viser lite resonnering rundt hvilke tall den prøver ut. Usystematisk utprøving kan være et tegn på manglende dybdelæring (Sawyer, 2014). Elev 45 har notert regnestykket $12 \cdot 7$, men ikke regnet ut. Det kan være eleven ikke fikk tid til å regne ut, ikke visste hvordan, eller følte seg usikker på strategien og hopper videre.

Elevene har ikke prøvd på deloppgave b eller c. Oppgave b kunne de løst med samme strategi som oppgave a, mens det kanskje ikke er like lett å bruke denne på oppgave c. På oppgave c vil denne strategien mest sannsynlig føre til mye prøving og feiling, antageligvis uten noen struktur fordi man ikke har et tall å gå ut ifra som man har på oppgave a og b. Siste oppgaven stiller slik større krav til å se mønster, underliggende prinsipper og sammenhenger, noe de to første oppgavene kan legge opp til å vise, men som disse elevene kanskje ikke ser.

- Dobling og halvering

En av hensiktene med oppgaven er å vise sammenhengen mellom divisjon og multiplikasjon, og gjennom dette, dobling og halvering. Elev 26 viser gjennom regnestykkene i deloppgave a) at den kan ha sett dette mønsteret. Deloppgave a) har 10 grupper på venstre side, som gir 5 grupper på høyre, og 6 elever på venstre som gir 12 på høyre. Dette utforsker mønster og underliggende prinsipper og reflekterer dybdelæring. Samtidig har ikke eleven på arket fått riktige svar på andre enn deloppgave a). Det kan tyde på at eleven ikke vet hva den gjør eller hvorfor, som ikke reflekterer dybdelæring. På oppgave c har eleven funnet sammenhengen mellom tallene, $7 \cdot 3 = 21$, men klarer ikke å utnytte sammenhengen til å finne riktig løsning.

Igjennom intervjuet virker det som om eleven klarer å forstå mønsteret, og retter svaret sitt i deloppgave b) til det som blir riktig. Eleven klarer å overføre strategien fra deloppgave a til b.

- Bare svar

Når elevene noterer svaret sitt uten å vise hvordan de har tenkt når de har regnet er det vanskelig å si om de har prøvd seg frem, gjettet og hatt flaks, eller om de faktisk har sett et mønster og dermed fått riktig svar. Min tolkning er at de elevene med riktig svar på alle deloppgaver har sett et mønster i tallene og dermed finner en løsning. Selv om de ikke viser utregning eller løsningsstrategi, mener jeg disse reflekterer dybdelæring fordi de viser forståelse for likhetstegnet, de forstår sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon, og undersøker mønster og underliggende prinsipper.

Elev 28 er eneste elev som kommer frem til flere løsninger på oppgave c. Eleven har sett et mønster, når den dobler på venstre siden, så dobler høyre siden seg. I intervjuet kommer eleven frem til enda flere løsninger, løsninger som ikke inngår i rekkefølgen med dobling, noe som åpner opp for at det finnes enda flere løsninger enn det eleven først antok.

Kategorien inkluderer også de elevene som bare har riktig svar på en eller to av tre deloppgaver.

- Feil

Produktet på begge sider av likhetstegnet blir 60 i deloppgave a og b, og resultatene viser at en vanlig feil på disse to deloppgavene var svaret 60. Feilsvaret kan komme av at elevene regner ut multiplikasjonsstykket og fyller inn produktet som svar. Min tolkning er at mange elever oppfatter og opplever likhetstegnet som at regnestykket skal være på venstre side og svaret på høyre. Ifølge Kieran (1981) oppfattes likhetstegnet av mange elever som et «gjøre noe» signal, noe som kan forklare elevenes svar. Elevene oppfatter venstresiden som et regnestykke som de regner ut. Misoppfatninger rundt likhetstegnet er godt kjent, og denne formuleringen kan utfordre denne oppfatningen av likhetstegnet.

Oppgaven er muligens langt unna oppgaver som elevene er vant til fra læreboken. Ifølge Sawyers (2014) tabell er vansker for å forstå ideer som er forskjellig fra læreboken et tegn på overflatelæring, elevene klarer ikke overføre kunnskapen sin til ukjente situasjoner. Lampert (2001) bruker den i starten av sin time, oppgaven hennes inneholder bare tall. Elevene får ingen instruksjoner, men skal prøve på egenhånd før oppgaven gjennomgås i plenum. Denne påfølgende diskusjonen er sannsynligvis en betydelig del av oppgaven, med tanke på at elevene får forklare tenkemåtene sine og diskutert oppgaven sammen. Oppgaven egner seg kanskje bedre i en undervisningssituasjon der elevene enten får diskutere etterpå eller samarbeide og diskutere underveis, noe de ikke fikk i denne situasjonen.

4.6 Oppgave 6

Dette var også en vanskelig oppgave å analysere, og gjennomgangen av elevsvarene at deloppgave a) gir ikke store muligheter for elevene til å vise dybdelæring. Deloppgave b) var mer interessant å se på, det samme var elevenes svar og refleksjoner i intervjuene. Resultatene er delt inn etter deloppgave a og b, og kategoriene vises i tabell 23 og 24. Det er 15 elever som ikke har svart på oppgaven, og 14 elever som bare har svart på deloppgave a.

4.6.1 Resultat

Deloppgave a

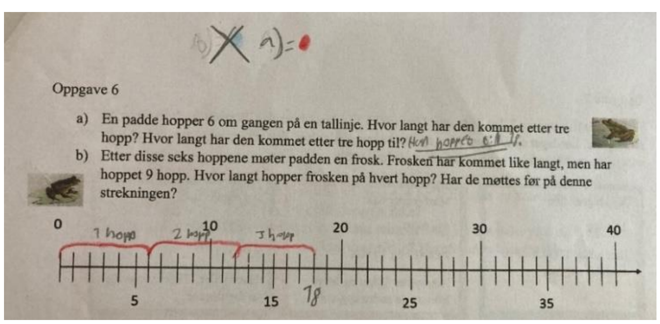
Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Tallinje	21	Noe dybdelæring
Regnestykke 3 · 6 og 6 · 6	8	Ikke dybdelæring
Bare svar	8	Ikke dybdelæring
Blank	15	

Tabell 23: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for deloppgave 6 a)

- Tallinje

Denne kategorien inkluderer alle elevsvar som har markert eller notert på tallinjen. Av 21 har 11 elever bare brukt tallinjen og kommet frem til svaret 18, se eksempel på figur 37 av elev 51. Elev 23 har bare gjort markeringer på tallinjen uten å skrive noe svar, eleven har hoppet slik: 0-6-13-19-25-31-37 og 0-9-17-26-37, eleven har dermed hoppet noen steg feil.

Fire av de 11 elevene har også skrevet at padden kommer til 36 etter tre nye hopp.



Figur 37: Elev 51 sin utregning av oppgave 6 a). Eleven markerer tydelig tre hopp på tallinjen og kommer til svaret 18.

De 10 resterende elevene har skrevet opp regnestykker i tillegg til å markere på tallinjen. Av disse har 7 brukt regnestykket 3 · 6 , én har skrevet 6 · 4, én har brukt 6+6+6 og én har skrevet

3+3+6. Av de 10, har fem av dem regnet ut paddens posisjon etter seks hopp ved bruk av et regnestykke, to bruker regnestykket $6 \cdot 6$ og tre bruker $18 \cdot 2$.

- Regnestykke, $3 \cdot 6$ og $6 \cdot 6$

Disse elevene bruker regnestykker for å finne løsninger på oppgaven. Fire av dem bruker regnestykket $6 \cdot 3$. To av disse skriver også stykket $6 \cdot 6$ og regner ut paddens posisjon etter til sammen 6 hopp på tallinjen.

Elev 2 skriver «Vis jeg tar 3 gangen så kommer jeg til svaret 18», mens elev 21 har notert stykket $6 + 9 = 15$.

- Bare svar

Elevene i denne kategorien noterer bare svaret sitt. Av disse har 7 elever kommet frem til løsningen 18 på deloppgave a), 3 av disse har også notert at padden kommer til 36 etter tre hopp til. En elev har bare notert svaret 36, og en siste elev har kommet frem til svarene 20 og 40.

Deloppgave b)

I alt har 10 av 23 elever bare funnet ut hvor langt padden kommer etter 3 hopp og bruker dette svaret videre i oppgave b.

Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Tallinje	3	Noe dybdelæring
Multiplikasjon	4	Noe dybdelæring
Divisjon	3	Noe dybdelæring
Bare svar	13	Ikke dybdelæring
Blank	29	

Tabell 24: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for deloppgave 6 b)

- Multiplikasjon

Elev 5 og 48 har skrevet opp stykket $9 \cdot 4 = 36$. Elev 48 skriver «Frosken var på 36 med padden. 36 er i 9-gangen så jeg tok $9 \cdot 4 = 36$. Frosken hopper 4 om gangen».

Elev 26 har notert uttrykket $3 \cdot 9$ og svarer 27 hopp, mens elev 22 har multiplisert 6 med 9.

- Divisjon

Elev 28 har markert hopp på tallinjen slik 0-4-8-12-16-20-23-28-32-36 og notert regnestykket $36 : 9 = 4$. Elev 51 tar utgangspunkt i 18, og tegner opp en ny tallinje der den markerer inn hopp med to om gangen og hopp med seks om gangen opp til 18. Den noterer regnestykket $18 : 2 = 9$ og skriver «frosken hopper 2 om gangen og de møtes på 6, 12 og 18».

Elev 47 skriver regnestykket $24 : 4$ og viser tegn til å ha prøvd å regne ut, men ikke kommet frem til et svar.

- Tallinje

De tre elevene bruker samme løsningsstrategi i deloppgave a og b, ved å markere hopp på tallinjen. To av disse kommer frem til at frosken hopper med 2 om gangen, elev 42 tar utgangspunkt i 18 og elev 46 tar utgangspunkt i 39. Sistnevnte har markert hopp på tallinjen, men på et av hoppene tar den tre i stedet for to.

Elev 23 har kun markeringer på tallinjen og viser at frosken kan komme seg til samme sted som padden med fire hopp. Også denne eleven hopper et hopp feil, og den kommer derfor til 37.

- Bare svar

Fem elever kommer frem til at frosken hopper med fire om gangen på tallinjen. I intervju beskriver elev 43 fremgangsmåten sin slik:

Elev: «man kan ta null til ni og ni til atten, bruke 9-gangen»
Intervjuer: «Hvis jeg sier ni hopp?»
Elev: «da kan man ta 36:9? Hvis det går? (*Eleven tenker*) Det blir fire. De har jo møttes på 18, den ene etter tre hopp og i 9-gangen»
Intervjuer: «men den hopper med fire om gangen?»
Eleven får låne penn og begynner å tegne på tallinjen, og kommer frem til at de møtes på 12.

Elev 52 sier «jeg brukte tallinjen, tok fire og fire. De møtes på 18».
Intervjuer: «Hvorfor?»
Elev: «Nei det har de ikke. *(tegner på tallinjen, tegner hopp med 3 og 3)* de møtes på 21. Den hopper med 3 og 3 og den med 4 og 4.»
Intervjuer: «Hva kan du gange med 4 for å få 21?»
Elev: «Ingenting, jeg har gjort noe feil. *(eleven tegner på ny)* De møtes på 12 ... og 24 ... og 36».

Seks elever tar utgangspunkt i at padden og frosken kommer til 18, og at frosken dermed hopper med to om gangen.

Elev 15 har ikke svart hvor langt frosken hopper om gangen, bare at «ja» de har møttes før. I intervjuet sier eleven «den hopper fire hopp på 9».
Intervjuer: «i oppgaven står det at frosken hopper ni hopp?»
Elev: «4 gange 9 er 36»
Intervjuer: «Ja, så frosken hopper ni hopp med fire om gangen. Kan du finne ut hvor de møtes?»
(Eleven tenker litt og bruker tallinjen, den har allerede markert 6-gangen og begynner nå å markere 4-gangen.)
Elev: «de møtes på 12 ... *(teller oppover med 4-gangen)* … og på 24».

4.6.2 Analyse

Deloppgave a)

- Tallinje

Oppgaveformuleringen legger opp til at elevene kan bruke tallinjen i oppgaven som støtte. Jeg tolker det som at disse elevene bruker tallinjen på grunn av dette. Elevene har brukt tallinjen til å tegne inn hopp med 6, men det er bare noen av dem som får med seg hele oppgaven og får padden til 36.

De elevene som setter opp et regnestykke i tillegg til tallinjen, kan enten ha brukt tallinjen for å komme frem til et uttrykk, eller brukt tallinjen som en test for å se om de har regnet riktig.

Tallinjen som løsningsstrategi blir i analyseverktøyet klassifisert mellom dybdelæring og ikke dybdelæring. Tallinjen er en god støtte til innlæring og visualisering av både multiplikasjon og divisjon, samt sammenhengen mellom dem, men kan brukes både med instrumentell og relasjonell forståelse (Skemp, 1976). Dette fordi det kan være en strategi elevene har lært uten å forstå hvordan eller hvorfor (Sawyer, 2014).

- Regnestykke

Disse elevene viser at de klarer å oversette informasjonen i oppgaveteksten til matematisk språk. Elevene kobler formuleringen til multiplikasjon og representerer det med et regnestykke. Padden hopper med 6 om gangen, og den hopper 3 hopp, da kommer den til 18 fordi $6 \cdot 3 = 18$.

Elev 2 gir et innblikk i sin strategi med kommentaren «hvis jeg tar 3-gangen så kommer jeg til svaret 18». Eleven skriver ikke regnestykket. Elevens svar tolker jeg som at den teller oppover med 3-gangen, 3-6-9-12-15-18. Dette vil gi samme svar som å telle oppover med 6-gangen, grunnet den kommutative loven. Forskjellen er at padden hopper 3 hopp med 6 om gangen, ikke 6 hopp med 3 om gangen, multiplikator og multiplikand har i denne situasjonen en betydning. Eleven har ikke svart på spørsmålet om hvor langt padden kommer etter 3 hopp til, men det er en mulighet for at eleven kunne ha svart 27, 3 multiplisert med 9, i stedet for 6 multiplisert med 6.

Denne kategorien er ikke klassifisert som refleksjon av dybdelæring. I utarbeidelsen av analyseverktøyet var denne oppgaven vanskelig å klassifisere, og deloppgave a) gir som sagt lite rom for elevene til å vise dybdelæring.

Deloppgave b)

- Multiplikasjon

Ettersom forrige deloppgave legger opp til multiplikasjon som løsningsstrategi, kan elevene i denne kategorien ha tenkt det samme for denne oppgaven. Av de fire elevene i denne kategorien, er det tre av dem som er i kategorien regnestykke i deloppgave a. Strategien tar i bruk kunnskapen om at frosken skal hoppe 9 hopp, men at den skal lande på samme sted som padden. Elevene kan ha stilt spørsmålet «hva må jeg multiplisere med 4 for å få 36?» og slik kommet frem til en løsning. Tallene er innenfor området til den lille gangetabellen, og kan være automatisert, som gjør at strategien kan beskrives som en retrievalstrategi (Ostad, 2010; Siegler, 1988). Tankegangen viser kunnskap om multiplikasjon og divisjon som motsatte regnearter, og at begrepene satt i sammenheng i et begrepssystem (Sawyer, 2014), som er kjennetegn på dybdelæring.

- Divisjon

Strategien bruker informasjonen gitt i oppgaven og regner ut ved hjelp av delingsdivisjon. Elevene vet hvor langt frosken har hoppet, og hvor mange hopp den tar, og skal finne ut hvor langt hvert hopp er. Eleven ser sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon som innebærer tallet 36, og kobler det til tidligere erfaringer og kunnskap fra blant annet den lille gangetabellen (Sawyer, 2014). Elevene viser at de kan anvende hensiktsmessige metoder i problemløsningsoppgaver som ikke er rutineoppgaver (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018). Strategien kan derfor vise tegn på dybdelæring.

- Tallinje

Denne strategien vil i større grad enn divisjon og multiplikasjon innebære prøving og feiling. Som resultatene viser er det to av disse elevene som skriver løsningen 2. Tallet 36 er delelig med 2, men det vil gjøre at frosken hopper 18 hopp og ikke 9. Dette tyder på prøving og feiling, og kan bety at elevene så at hopp med 2 endte med 36 og konkluderte med at det måtte være svaret. Tallet 36 er delelig med både 2, 3, 4, 6 og 9, og med en tilnærming med prøving og feiling er det mulig at elevene kunne svart alle disse. Det er bare et svar som oppfyller kravene i oppgaven, men det må elevene kunne lese og forstå i oppgaveteksten.

I denne deloppgaven skal elevene også finne ut om frosken og padden møtes, og eventuelt hvor på tallinjen de gjør det. Elev 64 som har brukt divisjon til å finne ut hvor langt frosken hopper hver gang, bruker tallinje for å forklare hvor de møtes. Eleven har tegnet opp en ny tallinje og markerer frosken og paddens hopp i to ulike farger. Dette resulterer i at eleven finner tall som samsvarer i de to gangetabellene. Tallinjen blir i denne strategien brukt som støtte i sammenlikning av to gangetabeller for å finne felles tall, og eleven viser med dette tegn til å lete etter mønster og underliggende prinsipper (Sawyer, 2014), som reflekterer dybdelæring.

- Bare svar

De tre elevutsagnene gir et innblikk i tenkemåten disse elevene har brukt. Målet med intervjuene om denne oppgaven var å undersøke hvordan elevene tenkte når de fant ut hvor padden og frosken møtes. Felles for elev 15 og 43 er at de teller oppover med 9-gangen og svarer at frosken hopper 4 hopp. I begge intervjuene kommenterer jeg at oppgaveformuleringen sier at frosken hopper 9 hopp. Dette gjør at elev 43 spør «kan jeg ta 36 delt på 9?» og klarer å resonnere seg frem til at de 9 hoppene må være med 4 om gangen. Elev 15 finner regnestykket 4 multiplisert med 9, men får hjelp fra meg til å finne sammenhengen.

Alle de tre elevene bruker tallinjen på arket for å finne ut hvor padden og frosken møtes, og tegner inn hopp med 4 og 6 gangen. Dette er i analyseverktøyet klassifisert som både dybdelæring og ikke dybdelæring. Å bruke tallinje er som sagt over en god måte å få visualisert sammenhengen mellom gangetabellene på, fordi man vil lande på de tallene som er felles. Det kan tyde på at elevene leter etter mønster eller underliggende prinsipper, som er et kjennetegn på dybdelæring. I intervjuene tolker jeg bruken av tallinjen som at tallinje er nevnt i oppgaven samt at det er en tallinje på arket tilgjengelig. Derfor er jeg usikker på om de er bevisst på hvorfor de bruker tallinjen og om de har en tanke bak å bruke den, eller om det er en automatisk prosedyre fordi oppgaveteksten er formulert som den er. I så tilfelle viser ikke elevene dybdelæring med å bruke den.

4.7 Oppgave 7

I denne oppgaven var jeg klar over at elevsvarene i stor grad kom til å bestå av at elevene markerte hvilket alternativ de mente var riktig. Noen av elevene har forsøkt å etterprøve utregningen i alternativene, og noen få kommer med argumenter for svaret sitt. Kategoriene i denne oppgaven er delt inn etter om elevene har svart Jens, Mari eller Ida, se tabell 25. Svarene her vil ikke kunne si om elevene viser dybdelæring eller ikke, og det er derfor ikke tatt med i denne tabellen. I intervjuene la jeg vekt på å få elevene til å forklare de forskjellige alternativene og forklare hvor tallene i utregningen kom fra, og hva som var likt eller ulikt mellom de forskjellige utregningene. Oppgaven inneholder mye tekst, og man må kunne tolke informasjonen for å komme frem til riktig svar. Det var 22 elever som ikke svarte på oppgaven. Under intervjuet var det en elev som gjorde meg oppmerksom på en feil i oppgaven, der det i Jens sin utregning gir svaret 12km, mens i tekstsvaret hans står det 16km.

4.7.1 Resultat

Kategori	Antall elever
Jens	7
Mari	7
Ida	13
Blank	22

Tabell 25: Kategorier og antall elever for oppgave 7

- Jens

Av de som har svart Jens og gitt en form for begrunnelse, har elev 47 og 48 etterprøvd utregningen og fått samme svar som Jens. Elev 6 har skrevet at «en uke er 7 dager, han sykler 6 dager. Jens har regnet riktig.»

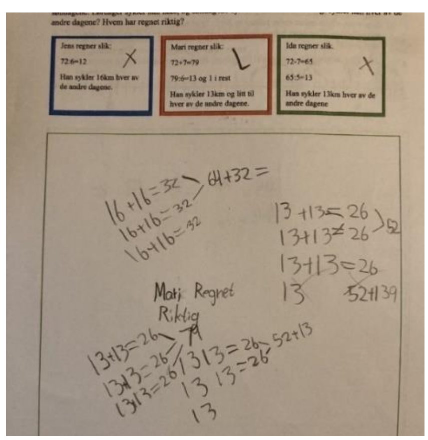
I intervju med elevene blir de bedt om å forklare alle de tre alternativene, og deretter beskrive hva Jens og Mari har gjort feil.

Elev 52 om Jens sin utregning: «Det burde være delt på 5, fordi på lørdager så sykler han ikke. Han (Jens) har delt på 6, han tok med søndagen».
Intervjuer: «Mari da? Hvorfor 72 pluss 7?»
Elev: «Fordi han (Erik i oppgaveteksten) syklet 7 på søndager, 79:6, fordi hun tok med søndag. Nei 1 i rest, han sykler jo 72km hver uke, da kan det ikke være 1 i rest.»
Intervjuer: «Ida sin utregning da?»
Elev: «Minus 7, fordi det var 7km på søndager. Fordi til sammen sykler han 72 og man skal finne de andre dagene som ikke er helgen. Ida har regnet riktig.»

Elev 46 sier i intervju at den gjorde det samme som Jens, og fikk samme svar. Om Mari og Ida sa eleven «Mari fikk 79 hun plussa. Jeg tror ikke man skal ta minus (slik Ida gjør), det er hvor mange dager man har syklet, ikke hvor mange dager man ikke har syklet».

- Mari

Elev 50 har etterprøvd utregningen. Øverst har eleven etterprøvd alternativet til Jens. Der har eleven addert 16 seks ganger. Dette kommer av skrivefeilen nevnt øverst, i Jens sin setning står det 16km og ikke 12km som han har i utregningen. I intervjuet kommenterer eleven at den ikke skjønner hvorfor Jens har skrevet 16. Basert på etterprøvingen sin, konkluderer eleven med at Jens sin utregning er feil. Videre på siden har eleven addert 13 sju ganger, men krysset svakt over. Den har også addert 13 seks ganger og 13 fem ganger. Over utregningen av 13 addert seks ganger har eleven skrevet «Mari regnet riktig», se figur 38.



Figur 38: Elev 50 sin utregning av oppgave 7. Figuren viser av eleven etterprøver Jens og deretter Mari sin utregning.

Utdrag fra intervju med elev 50:
Intervjuer: «Hvorfor deler Jens på 6?»
Elev: «Fordi han sykler 6 dager i uken, *(leser oppgaven en gang til)* burde ha delt på 7 i stedet for 6.»
Intervjuer: «Hvorfor plusser Mari på 7km?»
Elev: «Fordi han sykler 7km på søndagen, det er det eneste svaret om hvor langt han har syklet på en av dagene. Delt på 6, mandag til fredag pluss søndag. Jeg tror Mari har rett, men er ikke sikker.»
Intervjuer: «Hva er forskjellen mellom Mari og Ida sin utregning?»
Elev: «Ida tar minus og Mari tar pluss»
Intervjuer: «Hvorfor tar Ida minus?»
Elev: «Det er dumt, men kanskje det er sånn hun regner? *(Leser oppgaveteksten en gang til)* På søndag sykler han 7km, så disse må man ta bort».

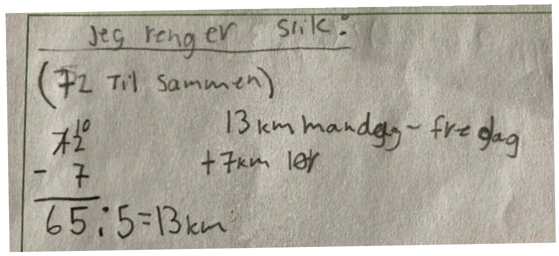
Elev 19 skriver at den gjettet, og elev 7 skriver at den tror Mari er riktig, men at den ikke fikk tid til å skrive hvorfor.

I intervju med elev 7 sier eleven om Jens: «Han har tenkt, han har tenkt feil tror jeg. Det er vel ikke riktig, han sykler jo mandag til fredag? Jens må ta 72:5, tror jeg.»
Intervjuer: «Tror du han har regnet riktig?»
Elev: «Han har delt, det er riktig, men han har delt på seks og det er feil.»
Intervjuer: «Mari da?»
Elev: «Hun har tenkt 72 pluss 7 er lik 79, det tror jeg er riktig fordi han syklet 7km. Da regner hun ut hva han sykler på en uke, 79 delt på 6. Det er dele på 6 tror jeg, det tror jeg er riktig.»
Intervjuer: «Ida da?»
Elev: «72 minus 7, det tror jeg ikke er riktig. Jeg tror det skal være pluss 7. Dele på 5, det tror jeg er riktig, men hun burde ikke tatt 65.»
Eleven konkluderer til slutt med at Jens og Ida har feil, mens Mari har regnet riktig.

- Ida

Det er ti av elevene som ikke har begrunnet eller etterprøvd utregningen. Fem av dem har skrevet at de *tror* Ida har regnet riktig.

Elev 25 og 28 har etterprøvd utregningen, og elev 26 har vist og forklart hvordan den ville ha regnet ut. Denne utregningen er lik Ida sin og er vist på figur 39.



Figur 39: Elev 26 sin utregning slik den ville løst oppgave 7.

Elev 52 har skrevet denne begrunnelsen: «Ida har regnet riktig. Fordi hun tokk 72 − søndagen da han bare sykler 7km etter det tokk hun 65: mandag-fredag som er 5 dager hun fikk 13 så han syklet 13km på mandag-fredag.»

Tre elever i intervju har svart at Ida er riktig alternativ. Ingen av dem har gjort noen form for utregning, og ingen har skrevet ned noen argumenter.

Elev 43 sier dette i sin forklaring av Mari og Jens*:* «Mari, det går på en måte ikke an å ha rest med kilometer, da må jo den være feil. Hos Jens så står det 12 i utregningen og 16 i svaret.»
Intervjuer: «Hva er forskjellen mellom Ida og Mari?»
Elev: «Ida har tatt minus, fordi man skal finne ut hvor langt han sykler de andre dagene.»

Elev 12 svarer dette: «Ida har regnet riktig. Hun tok 72km hver uke, og han sykler 7 på søndag. 72 minus 7 blir 65. Så har du fem dager igjen, og det er 13.»
Intervjuer: «Hva har de to andre gjort feil?»
Elev: «Jens har bare tatt deling, Mari har tatt pluss.»

Elev 22 beskriver de tre alternativene slik: «Jeg tror Jens har gjort noe feil. Han burde ta minus de 7km helt til man kommer til null. Hun (Mari) har tenkt sånn 72 pluss 7 blir 79, og 79 delt på 6 er lik 13 og litt i rest, det blir nesten det samme som Ida, men ikke helt. Begge har 13 km, Mari har litt til. Litt til er ½ km, jeg tror kanskje hun har gjort noe feil. *(Leser alternativet Ida)* Det tenker jeg er riktig. Fordi da tar man siden han syklet 72km hver uke, på søndagen sykler han 7km, da får man 65 delt på 5.»
Intervjuer: «Hvorfor deler Ida på 5 og ikke på 6?»
Elev: «det står jo 65. Jeg tror det er fordi 5 gange 13 det er 65. Og det er jo det som står.»

Intervjuer: «Hva er det Ida skal finne ut?»

Elev: «Hvor mange kilometer hver dag? Jeg vet faktisk ikke hvor hun får fem fra.»

4.7.2 Analyse

I resultatdelen kommer det frem at 18 av 27 elever har svart ved å markere eller notere hvilket alternativ de mener eller tror er riktig. Mange av disse kan antas å være gjetting, som noen av elevene også skriver. Av disse 27 har 10 svart det riktige alternativet Ida. Om dette er utregning, resonnering eller flaks er vanskelig å si noe om.

De mest interessante resultatene fra denne oppgaven kom i intervjuene, analysedelen tar derfor utgangspunkt i funn fra disse.

- Tolkning av oppgavens spørsmål

Oppgavens formulering syntes jeg var klar, men det kan hende den ikke var like tydelig for elevene. Spørsmålet oppgaven stiller «Hvem har regnet riktig» kan tolkes på forskjellige måter. Oppgavens hensikt var å få elevene til å se på de ulike utregningene og finne ut hvilket av svarene som gav svaret på hvor langt Erik sykler hver av de andre dagene. Spørsmålet kan også tolkes som at det bare er en som har regnet riktig matematisk, at det er regnefeil i noen av alternativene. Alle alternativene er regnet ut riktig ut ifra de regnestykkene som er satt opp, med unntak av Jens sitt alternativ grunnet en skrivefeil. Med denne tolkningen kan elever ha sett på Jens sin utregning, kanskje testet utregningen, fått samme svar som Jens og konkludert med at det dermed er dette alternativet som er riktig. For eksempel har både elev 46 og 47 gjort nettopp dette, de setter prøve på svaret i Jens sin divisjon. Elev 6 argumenterer med at siden en uke har 7 dager og Erik sykler 6 dager, så må Jens ha regnet riktig, men dette argumentet kan også gjelde for at Mari regner riktig fordi hun også deler på 6. Elev 50 har også testet utregningen, men har lest 16km i Jens sitt svar og går derfor videre og sjekker Mari sin utregning, som stemmer.

Å etterprøve utregningene i alternativene har i bunn og grunn ingen hensikt. Det er informasjonen som gis i oppgaven og hvilket alternativ som bruker informasjonen riktig elevene må finne ut av. Slik kan formuleringen kanskje være misvisende. For å reflektere dybdelæring må elevene vurdere logikken i et argument kritisk (Sawyer, 2014), de må vurdere hvilket alternativ som er logisk og riktig ut ifra informasjonen i oppgaveteksten. På denne måten krever denne oppgaven ganske mye av elevene. Oppgaven kommer dermed også innom kjerneelementet resonnering og argumentasjon, og komponenten resonnering i seksjon 2.2.4 (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018; Utdanningsdirektoratet, 2019). Elev 48 sitt skriftlige svar viser at den har klart å bruke informasjonen i oppgaveteksten og koblet den til det svaralternativet som bruker informasjonen riktig. Elev 26 tar utgangspunkt i hvordan den selv ville ha regnet for å en løsning. Eleven kan ha brukt svaralternativene som støtte eller utgangspunkt, men viser at den klarer å trekke ut og bruke informasjonen i oppgaveteksten. Dette er de to eneste elevene som gjør det, der elev 48 er fra 6.trinn og elev 26 fra 4.trinn.

- God forklaring

Med en god forklaring menes at elevene resonnerer og argumenterer logisk. Av 7 elever som ble intervjuet, har elev 12 og 52 gode forklaringer. Elev 12 har bare notert svaret Ida i oppgaven, men viser under intervjuet forståelse for hva Ida har gjort som er riktig og hva Mari og Jens har gjort og til en viss grad hvorfor det de gjør er feil, «Jens bruker bare deling og Mari plusser». Elev 52 klarer i stor grad å forklare hva Mari og Jens gjør feil, «det burde ha vært delt på 5 og ikke seks fordi på lørdag sykler han ikke» og «minus 7 fordi det var 7km på søndager, fordi til sammen sykler han 72 og man skal finne ut de andre dagene som ikke er helgen». Elev 52 hadde i elevsvaret svart Jens, men endrer svar til Ida i intervjuet. Disse elevene viser dybdelæring fordi de vurderer nye ideer og knytter dem til konklusjoner (Sawyer, 2014). De viser matematisk resonnering ved at de kan forklare hvordan Jens, Mari og Ida kan ha tenkt, de reflekterer over løsningsstrategiene og begrunner løsningen på oppgavens problem (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018).

- Vanskelig å forklare de forskjellige alternativene

På en annen side var det flere elever som hadde problemer med å forklare hva de ulike alternativene hadde gjort og hvorfor. I oppfølgingsspørsmål ble flere utfordret med spørsmål som «hvorfor deles det på 5 eller 6» og «hvorfor tas det pluss 7 eller minus 7». Dette kan tyde på at elevene memorerer fakta og prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor (Sawyer, 2014). Elevene klarer å gjengi svaralternativene, men sliter med å forklare hvorfor det divideres, adderes eller subtraheres og hvor de ulike tallene kommer fra, dette viser overflatelæring, ikke dybdelæring.

- Rest i divisjonen

To av elevene i intervju nevner resten i Mari sin divisjon, og begge mener dette betyr at alternativet må være feil. Elev 52 resonnerer frem til at fordi det skal være 72km hver uke så kan det ikke være rest. Dette kan tolkes som en tanke om at når totalen er et helt tall så må divisjonen gå opp. Elev 43 sier at «det går på en måte ikke an å ha rest med kilometer».

Elev 22 har også tanker om resten. Eleven sier at «litt til tror jeg betyr en halv», og eleven mener at det er gjort noe feil.

4.8 Oppgave 8

Denne oppgaven var vanskelig for de elevene som prøvde seg. Den inneholder mye tekst og mange matematiske begreper som elevene må forstå for å kunne løse oppgaven, som for eksempel siffer, sum, og kan deles på. Jeg antar at mange skriftlige svar er gjetting og er usikker på hvor mye denne oppgaven kan tilføre analysen av dybdelæring. I innsamlingen var det mange elever som spurte om hva et tall med to siffer var og hva summen av sifrene betydde. Noen av disse fikk hint, for eksempel at tallet 11 har to siffer, og summen av disse er 2 fordi 1 pluss 1 er to.

Jeg valgte å ikke intervjue noen av elevene om denne oppgaven. Grunnen er at det viste seg i gjennomgang av materialet at oppgaven lå ganske langt unna majoriteten av elevenes nivå. Av elevene som har svart er det kun to elever jeg kunne vurdert å intervjue, men begge har besvarelser som viser fremgangsmåte, tankegang og strategi. Med så få elever avgjorde jeg å ikke legge mye vekt på akkurat denne oppgaven, og heller fokusere på andre oppgaver med flere resultater å analysere.

Det er 19 elever som har svart på oppgaven, og 33 som ikke har svart. Av disse ser vi i tabell 13 at en stor del bare skriver svar.

Kategoriene som svarene er gruppert etter vises i tabell 26. De to øverste kategoriene kan beskrives som prøving og feiling med strategi fra analyseverktøyet.

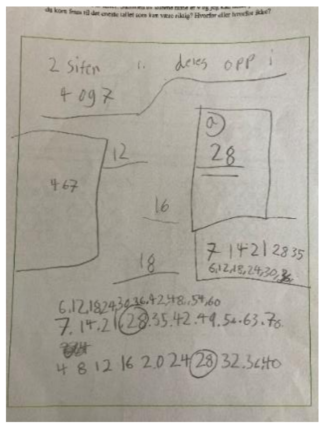
4.8.1 Resultat

Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Lister opp gangetabell	5	Noe dybdelæring
Lister opp tall der siffersum blir riktig	1	Dybdelæring
Bare svar	13	Ikke dybdelæring
Blank	33	

Tabell 26: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for oppgave 8

- Lister opp gangetabell

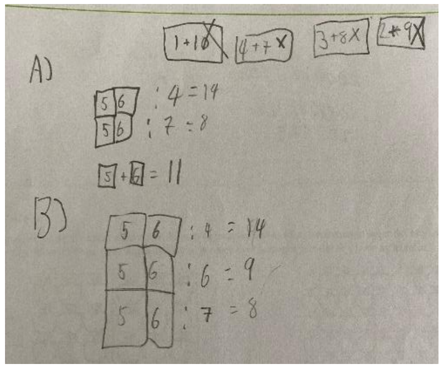
Denne kategorien inkluderer elever som har skrevet opp lister med gangetabeller som de bruker for å finne løsninger som passer til beskrivelsen av tallet. Tre av dem skriver opp lister av 4, 6 og 7-gangen, se figur 40. Hos en av dem, elev 48, er de derimot visket ut. Dette er eneste elev i denne kategorien som kommer frem til riktig svar. Eleven viser at 5 addert med 6 er 11, og at 56 er delelig med både 4 og 7. Den viser også at tallet 56 består av to siffer. Elev 6 har skrevet 2-gangen til 12, og elev 8 har listet opp 8-gangen til 40 og 14-gangen til 70.



Figur 40: Elev 25 sin løsning av oppgave 8. Figuren viser eksempel av liste over gangetabellene 4, 6 og 7.

- Lister opp tall med riktig siffersum

Elev 28 har tegnet opp ruter med regnestykker som blir 11, 1+10, 4+7, 3+8, 2+9 og til slutt 5+6. Eleven viser at 56 kan deles på både 4 og 7. Denne eleven svarer 56 på neste oppgave også, der den legger til regnestykket $56 : 6 = 9$. Elevens metode er vist i figur 41.



Figur 41: Elev 28 sin løsning av oppgave 8. Eleven lister opp tall som gir riktig siffersum, og tester deretter deleligheten for å finne riktig løsning.

- Bare svar

Disse elevene viser ikke utregning eller tegn til prøving og feiling. Seks av dem har funnet riktig svar på oppgave a. De andre elevene svarer 12, 14, 28, 38, 47 og 65. Elev 46 begrunner svaret sitt med å skrive «65 fordi 6+5=11».

Elev 52 svarer også riktig på oppgave b, der den viser at 84 er delelig med 7, 6 og 4.

Fem elever har også prøvd å svare på oppgave b og/eller c. På oppgave b har elevene skrevet svarene 8, 12, 14 og 60, og disse svarene på oppgave c 6, 8, 18, 45, 54, 90 og 93, der både 18, 54 og 90 er riktige svar.

To elever svarer at det kan være flere mulige svar, uten noe videre forklaring.

4.8.2 Analyse

- Lister opp tall

Strategien kan beskrives som å prøve og feile, men med en plan. Alle elevene tar utgangspunkt i å skrive opp gangetabellene for 4, 6 og 7, for så å lete etter ett tall som er felles i tabellene. Elevene leter etter mønster og sammenhenger i gangetabellene som vil gi dem en løsning.

Eleven på figur 39 har funnet to tall som er like, 28, og tegnet ring rundt dem. Eleven ser dermed bort fra informasjonen i oppgaveteksten om at siffersummen skal være 11.

En elev har notert 10 og 99 øverst på siden, et tegn på at eleven ser at svaret skal ligge mellom her. I sine tabeller har eleven krysset ut alle tallene, dermed også tallene som er felles for to av tabellene, for eksempel 12, 24, 28, 36 og 42. Dette kan tyde på at eleven ser at ingen av de felles tallene som finnes der har siffersum 11 og dermed ikke kan være en løsning, og at eleven ikke finner et felles tall i de tre gangetabellene.

Eleven som har notert tabellene til 8 og 14-gangen antar jeg har doblet svarene i 4 og 7-gangen, i et forsøk på å finne en løsning der. Det kan tenkes at eleven i gjennomgang av 4 og 7-gangen ikke kom frem til noen felles tall med siffersum 11, og at den derfor forsøkte å doble.

Svarene fra elevene reflekterer noe dybdelæring. Dette er en oppgave som legger opp til prøving og feiling, slik mange av elevene har gjort, og elevene viser en viss struktur i prøvingen sin ved å liste opp gangetabellene. Problemet er at ingen utvider tabellene lenger enn til 10-gangen, som gjør at de ikke finner løsningstallet 56.

- Lister opp tall der siffersum blir riktig

Denne eleven har også en prøve og feile-strategi med en plan. Eleven bruker informasjonen om at tallet er tosifret og at summen blir 11. Deretter tester eleven deleligheten til de mulige løsningene. Elevens strategi er tydelig, og det er en systematisk fremgangsmåte som tyder på gode problemløsningsstrategier (Kilpatrick et al., 2001; Utdanningsdirektoratet, 2019). Elevsvaret tyder på at eleven ser et etter mønster og underliggende prinsipper ved at den ser etter sammenhenger mellom tallene med siffersum 11, og 4 og 7 som skal kunne dele tallet eleven skal frem til (Sawyer, 2014). Dette viser kunnskap og relasjonell forståelse for divisjon og delelighet, og matematiske begreper som siffer og sum (Skemp, 1976).

- Bare svar

Mange av svarene tolker jeg som gjetting, selv om noen av svarene er en delvis løsning på oppgaven.

Svaret 28 på oppgave a) er delelig med både 4 og 7, men gir ikke riktig siffersum. Svarene 38, 47 og 65 har gir riktig siffersum, men de er verken delelig med 4 eller 7. Svarene oppfyller en av spesifikasjonene som løsningstallet skal ha. Dette kan bety at elevene ikke klarer å sette all informasjonen fra oppgaveformuleringen sammen.

Svarene 12 og 60 på oppgave b) er begge delelig med 4 og 6, men ikke med 7, mens 14 er delelig med 7. Svaret 8 er delelig med 4, men oppfyller ikke kravene om at tallet skal være tosifret.

På oppgave c) er det tre elever som har løsninger som oppfyller kravene om antall siffer, siffersum og delelighet, både 18, 54 og 90 er riktige løsninger. Ingen av elevene som svarer disse kommer frem til flere løsninger eller drøfter om dette er eneste løsning eller ikke. Svaret 45 har riktig siffersum og er delelig med 9, men ikke 6. Svarene 6 og 8 har begge for få siffer, og svaret 93 er verken delelig med 6 eller 9.

Gjennomgangen av elevsvarene viser at mange klarer å finne løsninger som oppfyller noen av spesifikasjonene, noe som kan tyde på at oppgaven rett og slett ble for omfattende og at det er for mye informasjon for elevene å finne en sammenheng i.

Selv om oppgaven er inspirert av en lærebok er refleksjonsspørsmålet lagt til av meg. Det legger til enda et aspekt til oppgaven og løsningen av den, elevene må resonnere seg frem til og argumentere for eller mot om løsningen de finner er eneste løsning. Det var også hensikten med å lage oppgave c, der det faktisk er flere tall med to siffer som vil oppfyller kravene. Dybdelæring ville i denne oppgaven vært at elevene kunne vurdere nye ideer og knytte dem til konklusjoner, samt at de kunne vurdert logikken i et argument kritisk (Sawyer, 2014). Dette stiller høye krav til matematisk forståelse, argumentasjon og resonnering (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018; Utdanningsdirektoratet, 2019). Spørsmålet som stilles er avansert fordi elevene må ta stilling til om dette er eneste løsning eller om det finnes flere, og det er kanskje en uvant problemstilling som elevene ikke er vant med.

4.9 Oppgave 9

Elevene på 5. og 6.trinn fikk regnestykket $2520 : 4$, mens elevene på 4.trinn fikk et forenklet regnestykke, $250 : 4$, se tabell 27 for strategiene elevene har brukt. Det er 26 av elevene har ikke svart på oppgaven. To elever har multiplisert, og kan ha lest oppgaven feil.

4.9.1 Resultat

Kategori	Antall elever	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Oppdeling	8	Dybdelæring
Distributiv lov	1	Noe dybdelæring
Motsatt vei	2	Noe dybdelæring
Halvering	1	Noe dybdelæring
Standardalgoritme	4	Ikke dybdelæring
Tegning	8	Ikke dybdelæring
Blank	26	

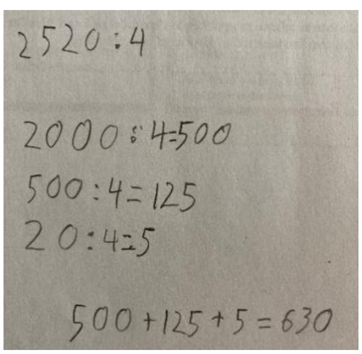
Tabell 27: Kategorier, antall elever og dybdelæringsklassifisering for oppgave 9

- Oppdeling

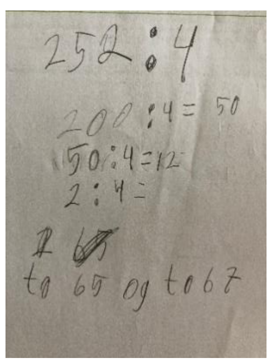
Denne strategien er kalt oppdeling fordi elevene deler opp dividenden og dividerer delene av tallet på divisor. Alle elevene som bruker denne strategien deler opp tallet i tusener, hundrere, tiere og enere. Det er en strategi som likner den beskrevet av Kjøsnes (1997) og oppstykkingsdivisjon som er beskrevet i teorikapitlet.

Det er 7 av elevene som har delt opp etter sifrenes verdi, og viser oppdelingen med regnestykker. Fire av dem bruker oppstillingen som på figur 42 og 43. I intervju med elev 27 ble den vist utregning med standardalgoritmen, og spurt om hvilken av metodene den likte best, hvor eleven svarte «Jeg har lyst å prøve nye metoder, jeg klarer ikke å huske sånne metoder som jeg har lært uten å gjøre det ofte, men denne skjønner jeg.» Elev 8 i figur 43 støter på et problem når den skal dividere 2 enere på 4. Elev 24 har kommet frem til svaret 62 og 2 til overs. Eleven er tatt med i denne kategorien fordi den antagelig har brukt samme strategi og støtt på samme problem som eleven på figur 43.

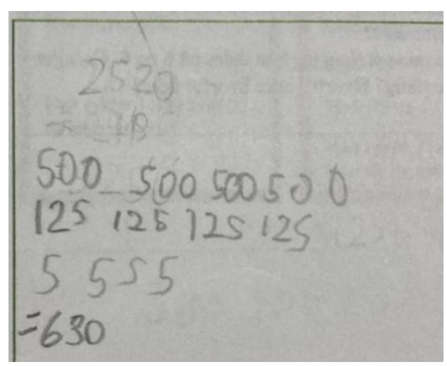
De to resterende deler også opp etter sifrenes verdi, men har skrevet opp stykkene som på figur 44.



Figur 42: Elev 27 sin utregning av oppgave 9. Eleven deler opp tallet 2520 i 2000, 500 og 20, og dividerer alle faktorene med 4.

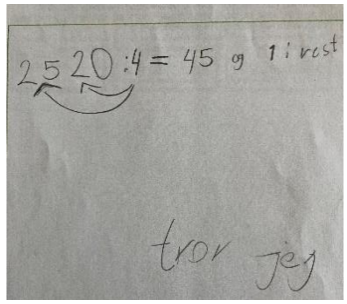


Figur 43: Elev 8 sin utregning av oppgave 9. Eleven deler opp tallet 252 i 200, 50 og 2, og dividerer alle faktorene med 4.



Figur 44: Elev 31 sin utregning av oppgave 9.

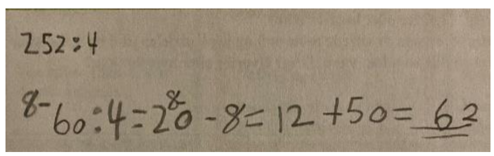
Elev 39 i figur 45 har svart 45 og 1 i rest, og forsøker å vise strategien sin med piler. Nederst skriver eleven «tror jeg».



Figur 45: Elev 39 sin utregning av oppgave 9.

- Distributiv lov

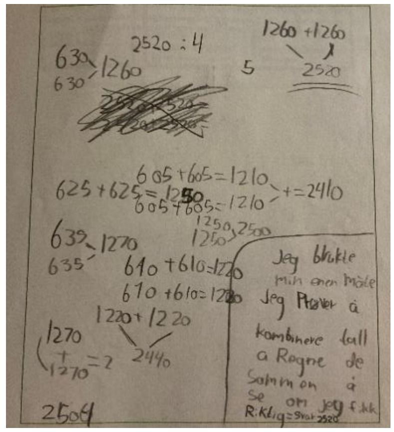
Kategorien er navngitt etter hva det ser ut til at eleven har gjort, se figur 46. Eleven har rundet 52 opp til 60 og deretter dividert med 4, før den trekker 8 fra dette svaret. Til slutt er svaret addert med 50 og eleven ender opp med 62 som svar.



Figur 46: Elev 26 sin utregning av oppgave 9. Elevens strategi minner om distributiv lov.

- Motsatt vei

Elev 47 og 50 har funnet ut hvilket tall som kan adderes fire ganger for å få tallet 2520, vist med elev 50 sin besvarelse i figur 47. Elev 50 skriver: «Jeg brukte min egen måte. Jeg prøver å kombinere tall å regne de sammen å se om jeg fikk riktig=svar 2520.». I intervju sier elev 50 «jeg måtte bruke min egen måte, plusse sammen. Jeg vet at det var under tusen og under 900. Jeg vet at 6 gange 4 er jo noe med 20 eller 24 da, jeg så at det startet med 2, så da vet jeg at det er noe med 600.» Eleven forteller at den etter innsamlingen lærte seg standardalgoritmen, noe eleven synes er veldig mye enklere. På spørsmål om hvilken av de to metodene den liker best svarer eleven, «jeg vil si den enkleste er standardalgoritmen, men min metode er gøyere å gjøre. Metoden min hjalp meg veldig før jeg lærte den nye.» Metoden eleven brukte har den kommet frem til selv.

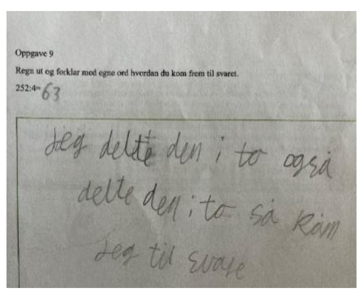


Figur 47: Elev 50 sin utregning av oppgave 9. Eleven forsøker gjennom prøving og feiling å finne et tall som addert sammen fire ganger blir 2520.

Elev 47 forklarer utregningen sin slik: «Ser ut som jeg først har tatt 600 gange fire, det er så langt jeg kan komme frem til 2400, så tar jeg 600 og plusser på 30, da blir det 630 på hver. Og så plusser jeg de to og det blir 1260 og hvis man ganger det igjen blir det 2520.»

- Halvering

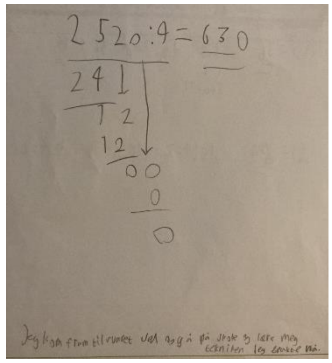
Elev 12 skriver svaret 63. Som forklaring på hvordan den har tenkt skriver eleven: «Jeg delte den i to også delte den i to så kåm jeg til svare», se figur 48.



Figur 48: Elev 12 sin forklaring på hvordan den løste oppgave 9.

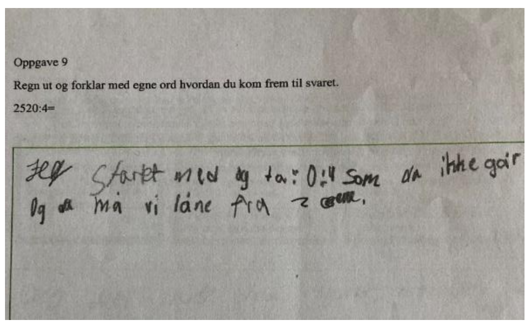
- Standardalgoritme

Tre av elevene går på 6.trinn, og alle har gjort det på måten vist med elev 51 på figur 49. Som forklaring på hvordan eleven kom frem til svaret skriver den: «Jeg kom frem til svaret ved og gå på skole og lære meg teknikken jeg brukte nå.»



Figur 49: Elev 51 sin utregning av oppgave 9.
Eleven bruker standardalgoritmen for divisjon.

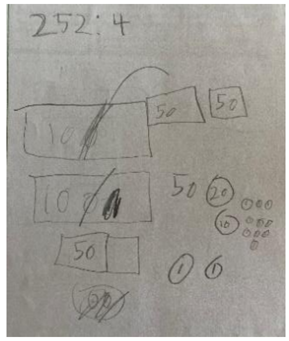
Den siste eleven skriver dette: «Jeg startet med og ta 0:4 som da ikke går og da må vi låne fra 2erne», se figur 50. Eleven beskriver de første stegene den ville tatt, men fullfører ikke utregningen.



Figur 50: Elev 45 sin begynnelse på forklaring
på hvordan den kan regne ut oppgave 9.

- Tegning

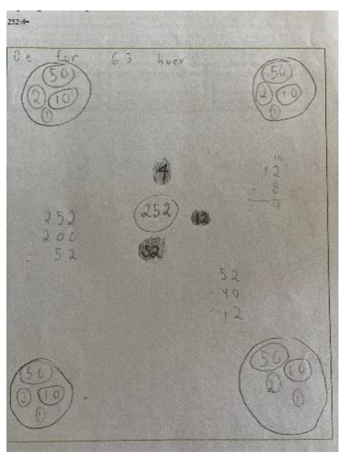
Åtte elever har brukt forskjellige tegninger som strategi for å regne ut divisjonen. Elevene har brukt rundinger, streker eller penger. I pengestrategien har elevene tegnet opp penger, sedler og kronestykker, som tilsvarer dividenden, 250, som elev 25 har gjort på figur 51.



Figur 51: Elev 25 sin utregning av oppgave 9. Eleven har tegnet penger, men kommer ikke i mål med utregningen.

Elev 3 har delt opp siden i fire, og funnet ut at det kan deles ut 50 til hver. Da er det 52 igjen å fordele mellom de fire, og eleven har tegnet streker til den kommer til 52, som blir 13 streker i hver av de fire delene. Eleven har ikke addert $13 + 50$, men bare svart 13.

Elev 11 og 15 har tegnet opp fire rundinger. Videre har de fordelt ut like mange til hver runding, og subtrahert fra totalen for å holde orden på hvor mye de har igjen å dele ut. Elev 15 tar 10 og 10 om gangen, til det er 12 igjen. Da tar eleven 2 til hver. Det er fire igjen, og eleven deler ut en til hver. Eleven har addert opp hvor mye det er i rundingene, og kommer frem til svaret 63. Elev 11 har delt ut 50 til hver først, så 10, så 2 og til slutt 1, som vist på figur 52.



Figur 52: Elev 11 sin utregning av oppgave 9. Eleven har tegnet fire rundinger og deler ut litt og litt til hver runding.

4.9.2 Analyse

- Oppdeling

Strategien fungerer best for elevene på 5. og 6.trinn som hadde tallet 2520. Dette er fordi 2000, 500 og 20 alle er delelig med 4. En elev på 4.trinn som har forsøkt på det samme støter på problemet når 50 og 2 skal deles på 4. Her trengs det kunnskap om divisjon med rest, slik at 50:4=12 og 2 i rest. De 2 i rest blir en del av enerne, slik at det siste regnestykket blir 4:4=1.

Elev 24 har antagelig støtt på samme problem. Eleven har bare skrevet svaret 62 og 2 til overs. Jeg antar at den har delt opp på samme måte, og regnet i hodet. Eleven kan ha tatt 200:4 først, og fått 50. Deretter kan eleven ha delt 50 på 4 og fått 12, og fra dette fått svaret 50+12=62. Eleven kan ha tenkt at det er de to enerne i 52 som er rest, eller at det er resten fra divisjonen 50:4=12.

Oppdeling av tallet i divisjon kan gjøres på mange forskjellige måter, her bruker elevene sifrenes verdi. Det er flere likheter til standardalgoritmen, men med denne strategien viser elevene mer prosedyrekunnskap og matematisk forståelse (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018). Bruk av denne strategien reflekterer dybdelæring, fordi elevene bruker tidligere kunnskap om divisjon av mindre tall, som de kan overføre og bruke i divisjon med større tall. Metoden kan likne strategien i kategori distributiv lov fra oppgave 1, der flere av elevene delte opp det største tallet for så å multiplisere alle «delene» med det minste tallet. Det kan tenkes at elever overfører denne metoden fra multiplikasjon til divisjon. Tallet 2520 blir gjerne mer overkommelig å dividere når det deles opp, 2000 dividert med 4 vil være enklere å regne enn 2520 dividert med 4.

De to elevene på 4.trinn støter på problemer når de møter rest i regnestykket sitt, og svarene deres tyder på at de ikke har relasjonell forståelse for divisjon med rest. Tallet 2520 ble forenklet til 252 fordi jeg antok at flere ville ha en innstilling om mestring og dermed tørre å prøve seg selv om de ikke hadde vært mye borti divisjon. Forenklingen ble gjort etter at analyseverktøyet ble laget, og problemet med rest i regnestykket 50 dividert med 4 tenkte jeg ikke over. Dette viser at det som kan se ut som en forenkling, ikke nødvendigvis er det. En relasjonell forståelse for regneartene innebærer kunnskapen om at de er motsatte regnearter, og elevene kunne med denne kunnskapen ha satt prøve på svaret sitt for å sjekke om det kunne stemme.

Strategien åpner opp for å dele opp tallet på mange forskjellige måter. En annen måte er å dele opp i 200, 40 og 12, som alle er delelig med 4. En slik oppdeling vil muligens i denne situasjonen vise mer dybdelæring fordi oppdelingen er hensiktsmessig i divisjon med 4.

Eleven i figur 41 tror jeg kan ha delt opp tallet i 25 og 20, og at pilene skal vise at det er disse tallene eleven dividerer med 4. Eleven noterer også «tror jeg», noe som kan tyde på at den ikke er sikker på løsningen og strategien sin.

- Distributiv lov

Elevens strategi minner om bruk av distributiv lov i multiplikasjon, som også kan fungere i divisjon. Jeg tolker det som at eleven tenker det er lettere å dele 60 på 4 enn 52 delt på 4. Jeg antar at eleven skriver minus 8 for å huske at den har addert 8 til 52 og at disse 8 må tas bort igjen. Tallet 50 antar jeg kommer fra divisjonen 200 delt på 4. Riktig utregning kan skrives slik:

$$(260-8):4=(260:4)-(8:4)=65-2=63$$

Det er en interessant tankegang og et spennende mønster å utforske. Selv om eleven har regnet feil og ikke kommer i mål, bruker den kunnskaper om hvilke tall som kan være enklere å dividere med fire. Eleven bruker tidligere kunnskap og erfaring, både fra divisjon og multiplikasjon, og prøver seg frem for å finne en løsning (Sawyer, 2014).

- Motsatt vei

Dette er samme strategi som beskrevet i divisjonen i oppgave 3 c), elevene forsøker å finne fire tall som addert sammen blir dividenden. Det er tydelig at elevene har brukt en del gjetting for å komme frem til riktig svar, og har prøvd seg frem med ulike tall. Alle tallene som er testet ut, er mellom 600 og 635, noe som tyder på at eleven ikke har prøvd i blinde, men har resonnert rundt hvilke tall det kan være. Resonneringen reflekterer delvis dybdelæring.

Elev 50 sier at den har lært «delemåten» (standardalgoritmen), og synes at denne er enklere, men at den liker sin egen metode best og beskriver den som «gøyere». Dette viser tegn til nysgjerrighet, engasjement og vilje til å lære for å lære. Det virker som om eleven motiveres av regnestykker den kan få regne ut på den måten den liker best, der den kan utforske, prøve og feile, og til slutt komme frem til et riktig svar. Dette kan vise tegn til tråd fem hos Kilpatrick et al. (2001), og Sawyers (2014) siste punkt at eleven reflekterer over sin egen forståelse og læringsprosess.

- Halvering

Eleven har notert svaret 63 øverst. Jeg tolker det som at eleven har brukt halvering og har sett at når et tall skal divideres med 4, så kan det først divideres med to og deretter med to igjen. Det er uklart hvilke regnestrategier eleven har brukt i hoderegningen i denne prosessen. Sifrene i 252 går alle opp i 2, og utregningen kan tas med hoderegning. Halvering er en strategi jeg ikke listet opp på forhånd, men strategien bruker mønster og underliggende prinsipper (Sawyer, 2014), tallet to er halvparten av tallet fire, eleven kan halvere og halvere igjen.

Solem et al. (2017) poengterer også at halvering er en god strategi i divisjon med 2 og potenser av 2.

- Standardalgoritme

Fra min analyse reflekterer ikke standardalgoritmen dybdelæring, fordi det er en stor sannsynlighet for at elevene har lært metoden og utfører prosedyren uten å forstå hvordan eller hvorfor (Sawyer, 2014). Kommentaren fra elev 51, «Jeg kom frem til svaret ved og gå på skole og lære meg teknikken jeg brukte nå.» tyder på det.

Ingen av elevene som brukte standardalgoritmen har begått feilen å glemme å dividere siste null. Dette var en av fallgruvene jeg antok at noen ville havne i. Alle de tre elevene viser samme huskestrategi med piler som trekker ned neste tall. Dette er også tegn på at elevene utfører prosedyren uten å vite hvordan eller hvorfor (Sawyer, 2014), som ikke reflekterer dybdelæring.

Min tolkning av eleven på figur 45 er at den blander med standardalgoritmen for subtraksjon, selv om forklaringen godt kan fungere i divisjon også. Det steget eleven beskriver kan tolkes som at eleven begynner med enerne i divisoren. Eleven tenker at null dividert med fire ikke går, og skriver at den «låner fra 2eren». Det kan tolkes som steget i subtraksjonsalgoritmen der man låner fra sifferet til venstre og veksler inn en tier, eller at eleven kan ta tierne og enerne samlet dividert med fire. Hvorfor eleven har stoppet her er usikkert. Eleven kan ha hatt for liten tid, eller begynt på en strategi og ikke vært sikker på hvordan den skulle gå videre.

- Tegning

En hjelpetegning kan være en god strategi for elever som ikke har lært divisjon eller som ikke er helt trygge på regnearten. Tegningen kan være en måte å holde orden på tanker og tall i utregningen. Penger er en konkret elevene kjenner til, og som i stor grad er et godt utgangspunkt for divisjon, hvordan fordele penger likt (Solem et al., 2017). Ingen av elevene har fått riktig svar.

En grunn til dette kan være at elevene tegner opp sedler og kronestykker tilsvarende dividenden, og at det ikke er helt enkelt å se hvordan for eksempel en femtilapp kan deles på fire, og dermed at veksling kan skape problemer.

De elevene som tegner opp rundinger eller bokser, kommer alle frem til svaret 63. Strategien oppfattes som en elevene har utviklet selv, som kommer av utforskning. Det er en primitiv strategi som baserer seg på å dele ut en og en, noe som ikke viser dybdelæring. Samtidig viser elevene antydninger til refleksjon rundt hvor mye som kan deles ut, fordi det er flere av dem som deler ut større deler enn en og en. Denne resonneringen kan delvis vise dybdelæring.

4.10 Resultat på tvers av oppgavene

Gjennomgående er det mange elever som bare skriver svar, og dermed ikke viser tenkemåte eller strategi, se tabell 28. Oversikten i tabell 28 antyder at elevene har en utvikling fra 4.trinn til 6.trinn der de i større grad viser utregning, og dermed hvilke strategier de benytter i problemløsningen. Dette kan være et tegn på at elevene kanskje blir mer bevist strategiene sine og at de er mer klar over hvilke strategier de bruker når utover i skoleløpet. Dette samsvarer med strategiutvikling som Ostad (2010) beskriver.

Oppgavenummer	Antall som bare skriver svar 4.trinn Totalt 26 elever	Antall som bare skriver svar 5.trinn Totalt 21 elever	Antall som bare skriver svar 6.trinn Totalt 5 elever	Totalt 52 elever
1	2 (7,69%)	0	0	2 (3,85%)
2	0	0	0	0
3a	9 (34,62%)	4 (19,05%)	2 (40,00%)	15 (28,85%)
3b	7 (26,92%)	4 (19,05%)	2 (40,00%)	13 (25,00%)
3c	3 (11,54%)	5 (23,81%)	0	8 (15,38%)
4a	3 (11,54%)	2 (9,52%)	3 (60,00%)	8 (15,38%)
4b og c	3 (11,54%)	2 (9,52%)	0	5 (9,62%)
5	4 (15,38%)	7 (33,33%)	1 (20,00%)	12 (23,08%)
6a	2 (7,69%)	5 (23,81%)	2 (40,00%)	9 (17,31%)
6b	7 (26,92%)	5 (23,81%)	1 (20,00%)	13 (25,00%)
7	9 (34,62%)	7 (33,33%)	2 (40,00%)	18 (34,62%)
8	3 (11,54%)	2 (9,52%)	2 (40,00%)	7 (13,46%)
9	0	0	0	0

Tabell 28: Oversikt over hvor mange elever som kun skriver et svar på de forskjellige oppgavene.

Antall elever som har forsøkt seg per oppgave synker utover oppgavesettet, se tabell 13 øverst i kapittel 4. Oppgave 1-3 har flesteparten av elevene svart på, i tillegg til oppgave 6. Videre er det flere og flere elever som hopper over oppgaver, slik at det på oppgave 5, 8 og 9 er halvparten eller flere som ikke svarer. Oppgavene kan ha vært for vanskelige, eller så har ikke elevene hatt tid til å løse dem. Ser vi på fordelingen mellom trinnene, ser vi den synkende trenden tydeligst på 4.trinn. De fleste har svart på oppgave 1-3, mens antallet utover i settet synker tydelig. På 6.trinn er svarprosenten 60% eller over på alle oppgavene, også på dette trinnet er det flest som svarer på oppgave 1-3 og oppgave 6a.

Etter grundig gjennomgang av datamaterialet, og presentasjon av resultat og analyse av enkeltoppgaver i dette kapitlet, finner jeg de mest interessante funnene i elevsvar fra oppgave 1, 2, 3, 5 og 9. Det er mange likheter og sammenhenger mellom strategiene elevene bruker i disse oppgavene, og elevenes løsningsstrategier i regneartene multiplikasjon og divisjon oppsummeres i tabell 29 og 30. I begge regnearter kan elevenes løsningsstrategier oppsummeres i fire grupper. I multiplikasjon er disse gjentatt addisjon, uformell bruk av regnelovene, formell bruk av regnelovene og standardalgoritmen. Med regnelovene menes kommutativ, assosiativ og distributiv lov som gjelder for multiplikasjon av tall. I divisjon er de fire gruppene tegning, motsatt vei, oppdeling og standardalgoritmen. Kolonne to i tabell 29 og 30 viser hvordan de registrerte strategiene fra oppgave 1, 2, 3, 5 og 9 kan oppsummeres i de fire hovedstrategiene for multiplikasjon og divisjon.

Strategi	Registrert i oppgave	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Gjentatt addisjon	- Oppgave 1 - Oppgave 2 - Oppgave 3a	Ikke dybdelæring
Uformell bruk av regnelovene	- Oppgave 1, distributiv lov - Oppgave 1, rutenett som distributiv lov - Oppgave 1, dobling som assosiativ eller distributiv lov - Oppgave 1, 3a, multiplikasjon med 10 som assosiativ lov	Noe dybdelæring
Formell bruk av regnelovene	- Oppgave 1, distributiv lov - Oppgave 2, mønsteret i bildene som kommutativ og assosiativ lov	Dybdelæring
Standardalgoritmen	- Oppgave 1	Ikke dybdelæring

Tabell 29: Oversikt over hvilke strategier elevene bruker i multiplikasjon.

Strategi	Registrert i oppgave	Dybdelæring / noe dybdelæring / ikke dybdelæring
Tegning	- Oppgave 3c - Oppgave 9	Noe dybdelæring
Motsatt vei	- Oppgave 3 - Oppgave 9	Noe dybdelæring
Oppdeling	- Oppgave 3 - Oppgave 9 - Oppgave 9, halvering - Oppgave 9, høyre distributivitet	Dybdelæring
Standardalgoritme	- Oppgave 3c - Oppgave 9	Ikke dybdelæring

Tabell 30: Oversikt over hvilke strategier elevene bruker i divisjon.

4.11 Diskusjon på tvers av oppgavene

Videre diskuteres hvordan og i hvilken grad dybdelæring kommer til uttrykk i elevenes svar på tvers av oppgavene 1, 2, 3, 5 og 9, med bakgrunn i oppsummeringen fra forrige seksjon og oppgavens tre forskningsspørsmål. Disse oppgavene gav de mest interessante funnene med tanke på dybdelæring, løsningsstrategier og tenkemåter innenfor oppgavens tema multiplikasjon og divisjon.

De resterende oppgavene er diskutert i analysen av svarene fra enkeltoppgavene. Noen av dem fungerte ikke som jeg hadde forventet, noen viste seg å være for vanskelige, og noen viser strategier mer forbundet med blant annet problemløsning.

4.10.1 Hvilke løsningsstrategier bruker elevene?

Resultatene viser at elevene bruker mange forskjellige løsningsstrategier i utregning med multiplikasjon og divisjon. Dette samsvarer med både Lemaire og Sieglers (1995) og det Ostad (2010) betegner som strategirikdom. Oppgavesettet inneholder varierte oppgaver, og åpner derfor opp for å kunne bruke mange ulike strategier. Flere av oppgavene er også formulert på en måte som gjør at elevene må bruke flere ulike strategier i en oppgave, og andre strategier enn bare strategier for utregning med de fire regneartene. Oppgave 3, 4, 6, 7 og 8 er alle oppgaver med mye tekst. I disse oppgavene er gode problemløsningsstrategier en forutsetning for å kunne trekke ut nødvendig informasjon fra oppgaveformuleringene og velge riktig regnestrategi.

Gjennomgående ser jeg en utvikling i hvilke strategier elever på 4.trinn bruker sammenliknet med elevene på 6.trinn. Utviklingen samsvarer med det Lemaire og Siegler (1995) og Ostad

(2010) refererer til, en utvikling fra backupstrategier til retrievalstrategier. Et eksempel på dette er oppgave 3a. Totalt bruker 13 elever backupstrategien gjentatt addisjon for å regne ut antallet klinkekuler. Av disse er 62% fra 4.trinn, 23% fra 5.trinn, og 15% fra 6.trinn. Sammenlikner vi med de 22 elevene som brukte multiplikasjon som strategi på samme oppgaven, finner vi at 36% er fra 4.trinn, 59% fra 5.trinn og 5% fra 6.trinn. Et viktig poeng å påpeke skjevfordelingen av elever per trinn.

I multiplikasjon finner jeg følgende fire strategier, (1) gjentatt addisjon, (2) uformell bruk av regnelovene, (3) mer formell bruk av regnelovene, og (4) standardalgoritmen for multiplikasjon.

Gjentatt addisjon beskrives som en backupstrategi (Ostad, 2008), og kan ikke klassifiseres som dybdelæring. Gjentatt addisjon brukes i begynnelsen for å tydeliggjøre multiplikasjon og den multiplikative strukturen. Som backupstrategi ser jeg gjentatt addisjon som en strategi elevene tyr til når de er usikre på utregning med multiplikasjon. Dette kan være usikkerhet med tanke på tallene som multipliseres, eller usikkerhet rundt strategiene elevene har tilgjengelig i multiplikasjon. I datamaterialet er det elever som bruker gjentatt addisjon konsekvent gjennom hele settet, som er et tegn på at de ikke har utviklet strategier de er trygge på i multiplikasjon og kjennetegner det Ostad (2010) beskriver som strategifattigdom.

Videre finner jeg bruk av regnelovene i multiplikasjon, og har valgt å beskrive bruken som uformell og formell. Med en uformell bruk av regnelovene menes blant annet utforskning av kommutativ lov der elevene viser forståelse for at faktorenes rekkefølge i multiplikasjon er likegyldig, og assosiativ lov i multiplikasjon med potenser av 10. Jeg kaller det en uformell bruk fordi utregningene bærer preg av instrumentell forståelse (Skemp, 1976), at det er tenkemåter og strategier som er lært, men ikke forstått. I regning med potenser av 10 er det for eksempel mange elever som skriver at de bare kan legge til en null, som bærer preg av at det er en huskeregel elevene har pugget. Uformell bruk inkluderer også de elevene som utforsker bruk av distributiv lov, men gjør feil som å ikke multiplisere alle faktorer med hverandre.

Med formell bruk av regnelovene viser elevene mer relasjonell forståelse, de leter etter mønster og underliggende prinsipper og sammenhenger som kan gjøre utregningen lettere. Et eksempel er de tre elevene som uttrykker antall epler på bildene i oppgave 2 ved bruk av kommutativ og assosiativ lov, et annet er de elevene som deler opp tallene i oppgave 1 og utnytter distributiv lov for å gjøre multiplikasjonen enklere. I intervjuene med elever om oppgave 5 tyder forklaringene på at elevene bruker assosiativ lov gjennom dobling og halvering, og sammenhengen mellom de to regneartene.

Til slutt er det standardalgoritmen. Ifølge Kjøsnes (1997) og Solem et al. (2017) er standardalgoritmene noe det brukes mye tid på i undervisning om de fire regneartene, og jeg forventet at mange elever skulle bruke denne strategien. I mine resultater er det derimot få elever som bruker algoritmene. I intervjuene er det flere elever på 5. og 6.trinn som sier at de i etterkant av min innsamling har lært seg metoder for multiplikasjon som kan kategoriseres som standardalgoritmen.

I divisjon finner jeg følgende strategier (1) tegning, (2) motsatt vei, (3) oppdeling, og (4) standardalgoritmen.

Strategien tegning er en begynnelse på utforskning av regnearten divisjon. Den er visuell, og bygger på prinsippet om å dele ut. Elevene bruker ulike strategier, de kan tegne opp rundinger eller firkanter eller dele hele svarsiden i antallet det skal deles på. Den kan også sees som en backupstrategi i divisjon, fordi svaret ikke hentes frem automatisk som i en retrievalstrategi.

En annen måte å se divisjon på er som det motsatte av multiplikasjon, som er opphavet til navnet på kategorien motsatt vei. Elevene bruker erfaringer de har om sammenhengen mellom regneartene og forsøker å finne et tall som enten ved multiplikasjon eller gjentatt addisjon kan bli dividenden. Strategien kan vise resonnering, eller bære preg av prøving og feiling uten struktur.

Videre finner jeg kategorien oppdeling. Denne har mange likheter til det Kjøsnes (1997) beskriver i sin artikkel, samt det Solem et al. (2017) kaller oppstykkingsdivisjon. På samme måte som distributiv lov går denne strategien ut på å dele opp dividenden i mindre deler som er enklere å dele på divisor. Til slutt setter jeg også her divisjonsalgoritmen.

4.10.2 Hvilke av løsningsstrategiene elevene bruker kan defineres som dybdelæring?

I teorikapitlet refereres det til flere definisjoner av dybdelæring, som motsetning til overflatelæring (Sawyer, 2014), som overføring (Pellegrino & Hilton, 2012), og i læreplanen (LK20) som at eleven utvikler forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag for å slik kunne bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger (Kunnskapsdepartementet, 2017). I matematikk er komponentene forståelse, prosedyrekunnskap, resonnering, anvendelse og metakognisjon sentralt (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018). Alt dette ser vi gjenspeilet i matematikkfagets kjerneelementer i LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Bruk av regnelovene har jeg delt inn i uformell og formell bruk, og skillet mellom dem handler om elevens forståelse av hva den gjør. Min tolkning er at begge kjennetegner kjerneelementet utforskning, og kommer også inn under komponentene forståelse, prosedyrekunnskap og anvendelse (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018). Bruk av regnelovene viser utforskning av mønster og sammenhenger i multiplikasjon, og blir anvendt i flere av oppgavene. På en annen side viser resultatene at bruken av for eksempel distributiv lov både gir riktige og gale svar, og bruken av assosiativ lov i stor grad refereres til av elevene som en regel om at i multiplikasjon med potenser av 10 så kan man bare legge til en null. Dette indikerer en mer instrumentell forståelse, og dermed ikke dybdelæring.

De tre strategiene tegning, motsatt vei og oppstykkingsdivisjon, kjennetegner også kjerneelementet utforskning og problemløsning. Det er metoder som bærer preg av elevenes egen utforskning, at det er en strategi som ikke overført eller lært av andre. Både tegning og motsatt vei kjennetegnes ved prøving og feiling, men kan også vise resonnering (Kilpatrick et al., 2001; Nosrati & Wæge, 2018; Utdanningsdirektoratet, 2019). Elevene kan resonnere seg frem til hvilke tall det er naturlig å prøve, og ut ifra resultatet resonnere seg frem til hvilket tall de mener vil gi dem en riktig løsning. Dette kan sees på som dybdelæring. Dette gjelder også resonnering rundt hvordan det vil være best å dele opp tallet i oppstykkingsdivisjon, slik at divisjonen går lettere. I oppstykkingsdivisjon kan det også innebære resonnering rundt hvor mye som kan deles ut til hver.

Bruk av standardalgoritmen for multiplikasjon og divisjon er generelle strategier (Goldman, 1989), og de kan utføres og gi riktige svar med både relasjonell og instrumentell forståelse. I analyseverktøyet er ikke bruk av standardalgoritmene klassifisert som dybdelæring. Argumentet for dette er at slik elevene bruker den, vil det ikke kunne vise om eleven har instrumentell eller relasjonell forståelse. Men det kan undersøkes i intervju eller ved å se på andre oppgaver eleven har løst. Av elevene som benytter standardalgoritmen i oppgave 1, er det to av dem som også bruker standardalgoritmen i både oppgav 3c og oppgave 9. Disse to benytter få strategier i de andre oppgavene som viser dybdelæring, som kan bety at de at har en instrumentell forståelse av algoritmen.

Samtidig er standardalgoritmen hensiktsmessig å bruke fordi den er effektiv og tar lite plass, og elever som bruker den kan hende velger strategien av den grunn. Elever som benytter standardalgoritmen kan også ha relasjonell forståelse, selv om strategien på papiret ikke viser dette. Et godt eksempel er elev 52 som i oppgave 1 bruker en strategi som er kategorisert som distributiv lov, men som i intervju forklarer en annen metode som kan kategoriseres som standardalgoritmen. Dette var eneste elev jeg fikk mulighet til å intervjue om standardalgoritmen, da de andre som brukte den ikke hadde samtykket til intervju. I intervjuet spør jeg om hvorfor eleven kan sette på en null, hvorpå eleven forklarer at det er fordi den multipliserer med 30, med andre ord en potens av 10. Eleven kan ha overført forståelsen den viser i multiplikasjon med distributiv lov til standardalgoritmen.

Som med multiplikasjonsalgoritmen har jeg ikke klassifisert standardalgoritmen for divisjon som dybdelæring. Instrumentell forståelse er tydeligere i denne algoritmen fordi elevene blant annet bruker piler for å vise at de «drar ned» neste tall. Dette tolker jeg som en huskeregel. Spesielt tydelig er det hos elev 49 i oppgave 3 c). I denne oppgaven går ikke divisjonen opp, og svaret vil enten få en rest eller bli et desimaltall. Eleven stopper opp i utregningen, visker ut og skriver et spørsmålstegn, noe som tyder på usikkerhet for hvordan elevene skal regne videre. Dette viser instrumentell forståelse av algoritmen, og eleven har muligens ikke blitt utsatt for divisjonsstykker som ikke går opp i like stor grad som stykker som går opp.

Standardalgoritmen er en effektivisering og benytter flere av strategiene som er beskrevet, deriblant distributiv lov. Den er effektiv fordi den både tar kort tid og bruker liten plass, og gir riktig svar uansett hvilken situasjon den blir brukt i. I intervjuene viste jeg standardalgoritmen til flere av elevene, og de ble først bedt om å se etter likheter og forskjeller. Det var få som klarte å knytte for eksempel distributiv lov eller oppstykkingsdivisjon til algoritmen, selv om algoritmene benytter de samme prinsippene. Når elevene fikk spørsmål om hvilken metode de likte best, var det flere som svarte standardalgoritmen og brukte argumentene om at den tar kort tid og lite plass. Dette synes jeg er interessant. Min tolkning er at elevenes oppfatning og holdning i matematikkfaget er at matematikk handler om å huske regler og om å produsere riktige svar på en effektiv måte.

4.10.3 I hvilken grad bruker elevene strategier som reflekterer dybdelæring?

I denne masteroppgaven er hoveddelen av analyse og diskusjon kvalitativ. Selv om jeg har lagt mest vekt på eksempler på elevstrategier og analyserer strategiene kvalitativt, så kan en og kvantisere noen av resultatene. For de ulike oppgavene gav jeg elevene en skår på 0, 0,5 eller 1, avhengig av om strategien de brukte på oppgaven henholdsvis ikke viste dybdelæring, viste noe dybdelæring eller viste hovedsakelig dybdelæring. Skåren 0,5 har jeg brukt for å få kvantisert, og er selvsagt en forenkling. Det aritmetiske gjennomsnittet av denne skåren finnes i tabell 31. I øverste rad er antallet elever som besvarte hver enkelt oppgave brukt som nevner, mens i nederste linje er antallet elever totalt brukt som nevner når gjennomsnittet ble beregnet. Gjennomsnitt og empirisk standardavvik for oppgavene totalt er også beregnet.

Oppgavenummer	1	2	3a	3b	3c	4a	4b og c	5	6a	6b	7	8	9	Gj. snitt	SD.
Gjennomsnitt av besvarte oppgaver	0,70	0,51	0,22	0	0,32	0,16	0,25	0,04	0,27	0,22	0,50	0,17	0,42	0,29	0,19
Gjennomsnitt av oppgaver totalt	0,63	0,50	0,21	0	0,24	0,10	0,11	0,04	0,19	0,10	0,27	0,06	0,19	0,20	0,18

Tabell 31: Elevenes gjennomsnittlige dybdelæringsskåre på de enkelte oppgavene. Den øverste raden tar kun med de som faktisk svarte på oppgaven, mens ubesvarte oppgaver er inkludert i gjennomsnittet i nederste rad.

Noen av oppgavene har jeg hatt vanskeligheter med å klassifisere hvordan dybdelæring kan vises, og noen oppgaver ser ikke ut til å gi mulighet til å vise dybdelæring.

På oppgave 1 er gjennomsnittet av elevene som svarer på oppgaven 0,70, og gjennomsnittet av alle elevene totalt er 0,63, med standardavvik på henholdsvis 0,19 og 0,18, se tabell 31. Det er to standardavvik over gjennomsnittet. I denne oppgaven bruker 29 av elevene som svarer på oppgaven distributiv lov som strategi. Alle disse fått skår 1, men bare 38% har fått korrekt svar. Hvis kriteriene endres slik at skår 1 innebærer at eleven både bruker en strategi klassifisert som dybdelæring og har fått korrekt svar ved å bruke den, blir gjennomsnittlig skåre av elevene som løser oppgaven 0,29, mens hvis elever som ikke besvarte oppgaven også inkluderes i nevneren blir gjennomsnittlig skåre 0,26. De to standardavvikene blir da henholdsvis 0,15 og 0,13. Dette gir nok et mer riktig bilde. Elevene som får galt svar vil ikke vise dybdelæring på lik linje med de elevene som får korrekt svar ved bruk av samme strategi.

For de andre oppgavene har flertallet av elevene enten regnet riktig eller så har feilsvar blitt gruppert i en kategori uten dybdelæring. Det er derfor ikke nødvendig å gjøre samme nyansering på de andre oppgavene, det vil i liten grad endre resultatet.

Et interessant funn er at det kan se ut som at de oppgavene som man kan anta er de letteste også er de oppgavene der flest elever viser dybdelæring. Dette ser vi på blant annet oppgave 2 der dybdelæringsskåre er 50%. Mange av elevsvarene viser tydelig at de ser mønster i bildet, og bruker assosiativ og kommutativ lov for å uttrykke antall epler. Det er og flere som finner mer enn ett regnestykke. Som sagt var det flere elever som under intervjuet fant flere regnestykker og som klarte å forklare at sammenhengen mellom regnestykkene var at de gav samme svar. Oppgave 9 kan også sies å være en enkel oppgave, fordi oppgaven er uten kontekst eller mye tekst, elevene skal bare regne ut. Her viser 40% av elevene som svarer på oppgaven dybdelæring. En del av de som ikke svarer gjør nok dette fordi de ikke ble ferdig med oppgavesettet, og dette var siste oppgave i settet. Samtidig er det slik at man vil kunne anta at det er en sammenheng mellom dybdelæring og ferdigheter slik at de som klarer å bli ferdig med oppgavesettet er de flinkeste og som også bruker flest dybdelæringsstrategier.

Oppsummert viser dataene at elevene er lite konsistente når det gjelder å bruke strategier som viser dybdelæring eller ikke. Ser man isolert på de oppgavene hver enkelt elev har svart på, er det én elev som viser dybdelæring på 75% eller flere av oppgavene, mens de fleste elevene viser dybdelæring på mellom 25% og 50% av oppgavene de løser. For de enkelte elevers dybdelæringsskåre er det et aritmetisk gjennomsnitt på 0,25 og et standardavvik på 0,14 for de oppgavene som ble besvart, mens hvis man tar med ubesvarte oppgaver og gir disse 0 i dybdelæringsskåre, så viser flertallet av elevene dybdelæring på mellom 0 og 25% av oppgavene, gjennomsnittet er 0,20 og standardavviket er på 0,12.

5 Oppsummering

5.1 Svar på problemstilling

De siste årene har reviderte læreplaner og ny overordnet del av læreplanen inntatt skolene i Norge. Sentralt i disse dokumentene står begrepet dybdelæring. Det finnes mange ulike definisjoner på begrepet, men fellestrekk er fokus på sammenhenger i og mellom fag, bruk av bakgrunnskunnskap som knagger til å feste ny kunnskap på, å sette begreper i begrepssystemer, samt å reflektere over egen læring. Etter denne masteroppgaven er levert, går jeg inn i full jobb som lærer i barneskolen. I hverdagen min blir et stort fokus å legge til rette for nettopp dybdelæring, også i matematikk. Jeg ønsket derfor å utforske begrepet dybdelæring i matematikk, og forske på hvordan jeg som lærer kan gjenkjenne elevenes kunnskap og ferdigheter, og hvordan jeg kan veilede og legge til rette for forståelse, prosedyrekunnskap, anvendelse og resonnering i elevenes læring, og sammen med elevene reflektere over hvordan de lærer.

I problemstillingen til denne oppgaven stiller jeg spørsmål om hvordan dybdelæring blir reflektert i elevenes tenkemåter og løsningsstrategier. Resultatene i denne oppgaven viser at elevene bruker mange forskjellige strategier i løsning av oppgaver med multiplikasjon og divisjon. Disse inkluderer både generelle strategier, oppgavespesifikke strategier, backup- og retrievalstrategier. Løsningsstrategiene elevene bruker gir et innblikk i hvilken matematisk kompetanse de har, og kan si noe om hvilken forståelse og kunnskap elevene har innenfor regneartene, samt hvilke matematiske ferdigheter de har.

Samtidig er det flere av elevene som bare skriver svaret sitt, noe som ikke gir et innblikk i hvordan de tenker. Min oppfatning er at matematikkundervisningen om et par år, kanskje har utviklet seg og endret seg i tråd med fagfornyelsen, og at med fokus på kjerneelementene så vil elevene i større grad enn før bli utfordret til å reflektere over egen læring og forklare tankemåter og løsningsstrategier. Det å skulle forklare hvordan en har tenkt, er en utvikling fra det å bare vise at du kan løse en oppgave. En forklaring stiller høyere krav til relasjonell forståelse, refleksjon over hvorfor en bruker akkurat den metoden eller fremgangsmåten for å komme frem til en løsning, og videre en kritisk vurdering på om løsningen kan stemme.

5.2 Oppgavens begrensninger

Denne masteroppgaven utforsker begrepet dybdelæring, og i teoridelen ser jeg på hvordan det brukes og fremstilles i Ludvigsen-utvalgets utredninger. Dette er en nødvendig avgrensning, som samtidig begrenser oppgaven. Dybdelæring er ikke et nytt begrep, og det finnes flere forskjellige definisjoner og operasjonaliseringer av begrepet. I norsk skolesammenheng baseres definisjonen på forskningslitteraturen i NOU 2014, men definisjonen går igjennom noen endringer før formuleringen i LK20.

En annen begrensning er at elevene løste oppgavene individuelt som en test eller prøve, og flere av dem oppfattet nok dermed situasjonen som dette. Et viktig aspekt ved dybdelæring er samtalen, kommunikasjonen, resonnering og refleksjon, noe som i større grad kommer til syne i elevenes diskusjoner og dialoger. I resultatene er det få elever som formulerer skriftlige forklaringer på hvordan de tenker.

5.3 Videre forskning

I denne oppgaven har jeg undersøkt hvordan elevene viser dybdelæring i løsning av oppgaver i multiplikasjon og divisjon. Jeg har gjennom arbeidet med oppgaven tenkt på flere aspekter som kunne vært interessant å utforske videre.

For å ha et bedre sammenlikningsgrunnlag for strategibruk, ville jeg vurdert å bruke flere oppgaver som likner. I dette oppgavesettet hadde jeg fokus på å ta med veldig varierte oppgaver, og oppgavene denne masteroppgaven baserer seg på er dermed veldig ulike. Det kunne for eksempel vært interessant å sammenlikne strategibruk på flere oppgaver av typen som oppgave 1 og 9. Dette vil nok kunne vise enda tydeligere sammenhenger mellom de ulike elevens strategivalg for regning med multiplikasjon og divisjon.

I min forskning brukte jeg oppgaver elevene skulle løse individuelt, og som for mange elever kan oppfatte som en prøvesituasjon. Det kunne vært interessant å se hvordan resultatene hadde endret seg om elevene hadde løst de samme oppgavene i grupper. Jeg tror flere av oppgavene egner seg bedre som diskusjonsoppgaver der elevene kan diskutere, resonnere og argumentere sammen for å finne løsninger. Her kunne man sett på om løsningsstrategiene ville vært de samme eller om de finner flere og andre strategier i samarbeid med medelever.

Gjennom intervjuene gikk det opp mange lys hos elever. I samtale med meg fikk de sortert tankene, støtte og veiledning, som ledet dem til å løse oppgaver de enten hadde svart feil på eller som de ikke hadde prøvd på. Dette viser hvor viktig den matematiske samtalen og kommunikasjonen med eleven er i utvikling av elevenes matematiske kompetanse. Elevintervjuer var en kjempespennende forskningsmetode, som jeg er veldig glad for at jeg gjennomførte. Med mer tid hadde det vært spennende å intervjue flere elever og gjerne om flere av oppgavene, kanskje også gruppeintervju.

6 Litteraturliste

Alseth, B., Nordberg, G. & Røsseland, M. (2013). *Multi [5-7] Grunnbok 5b* (Bokmål 2. utg.). Gyldendal undervisning.

Alseth, B., Nordberg, G. & Røsseland, M. (2014). *Multi [5-7] : Grunnbok 6a* (Bokmål 2. utg.). Gyldendal undervisning.

Askeland, M. (2009). Regnestrategier i matematikk. I E. Reikerås (Red.), *Å regne i alle fag* (s. 56-70). Universitetsforl.

Bjuland, R. & Fauskanger, J. (2018). Deep learning as constructed in mathematics teachers' written discourses. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *13*, 149-160. https://doi.org/https://doi.org/10.12973/iejme/2705

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt forl.

Dalland, O. (2021). *Metode og oppgaveskriving* (7. utg.). Gyldendal Norsk Forlag.

Eder, D. & Fingerson, L. (2002). Interviewing children and adolecents. I J. F. Gubrium & J. Holstein (Red.), *Handbook of Interview Research: Context and Method* (s. 181-201). Thousand Oaks: SAGE Publications.

Gilje, Ø., Landfald, Ø. F. & Ludvigsen, S. (2018). Dybdelæring - historisk bakgrunn og teoretiske tilnærminger. *Bedre Skole*, *4*, 22-27.

Goldman, S. R. (1989). Strategy Instruction in Mathematics. *Learning Disability Quarterly*, *12*(1), 43-55. https://doi.org/10.2307/1510251

Halvorsen, K. (2008). *Å forske på samfunnet : en innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg.). Cappelen akademisk forl.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.

Kilpatrick, J., Findell, B., Swafford, J., National Research Council, Division of Behavioral and Social Sciences and Education, Center for Education & Mathematics Learning Study Committee. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, D.C: National Academies Press. https://doi.org/10.17226/9822

Kjøsnes, N. J. (1997). Divisjonsalgoritmen - gudeskapt eller skapt av mennesker? *Tangenten*, *4*.

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del - verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Regjeringen. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/overordnet-del/

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Gyldendal akademisk.

Kværnes, L. & Solem, I. H. (2009). Matematikk som resonnerende og problemløsende aktivitet. I U. Stålsett, M. Storhaug & R. Sandal (Red.), *Veiledning i tilpasset opplæring, Arbeidsmåter - fra oppskrift til refleksjon* (s. 190-203). Fagbokforlaget.

Lampert, M. (2001). *Teaching Problems and the Problems of Teaching*. Yale University Press.

Lemaire, P. & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, *124*(1), 83-97. https://doi.org/10.1037/0096-3445.124.1.83

Matematikksenterert & Naturfagssenteret. *Prinsipper for ambisiøs matematikkundervisning*. https://realfagsloyper.no/barnetrinn/ambisios-og-utforskende-undervisning/modul-1-prinsipper-ambisios-matematikkundervisning

Matematikksenteret. (Ukjent). *Skredder og skjerf*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6ringsressurser/grunnskole/skredder-og-skjerf

Maugesten, M. & Nordbakke, M. (2019). Å identifisere dybdelæring i en undersøkende matematikkoppgave på ungdeomstrinnet. I K. Kverndokken (Red.), *101 grep for å aktivisere elever i matematikk - matematikkdidaktikk i teori og praksis*. Fagbokforlaget.

Meld.St 28 (2015-2016). *Fag - Fordypning - Forståelse En fornyelse av Kunnskapsløftet*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

National Research Council. (2000). *How people learn : brain, mind, experience, and school* (Expanded. utg.). National Academy Press.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics, the Danish KOM project.

Nosrati, M. & Wæge, K. (2018). Dybdelæring i matematikk. https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2021-03/T3.P1.M1A-Dybdel%c3%a6ring%20i%20matematikk_2.pdf

NOU 2014:7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole - Et kunnskapsgrunnlag*. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-7/id766593/sec1

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtiden skole - Fornyelse av fag og kompetanser*. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/

Ostad, S. A. (2008). *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring : med fokus på elever med matematikkvansker*. Læreboka forl.

Ostad, S. A. (2010). *Matematikkvansker : en forskningsbasert tilnærming*. Unipub.

Pellegrino, J. W. & Hilton, M. L. (2012). *Education for life and work : developing transferable knowledge and skills in the 21st century*. The National Academies Press.

Sawyer, R. K. (2014). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*. New York, NY: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139519526

Siegler, R. S. (1988). Strategy Choice Procedures and the Development of Multiplication Skill. *Journal of experimental psychology. General*, *117*(3), 258-275. https://doi.org/10.1037/0096-3445.117.3.258

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *77*(1), 20-26.

Skott, J., Skott, C. K., Jess, K. & Hansen, H. C. (2018). *Matematik for lærerstuderende : Delta 2.0 Fagdidaktik, 1.-10. klasse* (2. udg. utg.). Samfundslitteratur.

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E., Smestad, B., Ødegaard, E., Vetlesen, E. & Paiam, V. (2017). *Tall og tanke : matematikkundervisning på 5. til 7. trinn : 2* (Bd. 2 :). Gyldendal akademisk.

Svingen, O. L. & Gilje, Ø. (2018). *Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk*. Utdanningsdirektoratet. https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/rapporter/kunnskapsgrunnlag-for-kvalitetskriterium-for-laremiddel-i-matematikk/

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). https://www.udir.no/kl06/MAT1-04#

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplan i matematikk 1. -10. trinn* (MAT01-05). https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2020). Nye læreplaner - grunnskolen og gjennomgående fag vgo. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/Nye-lareplaner-i-grunnskolen-og-gjennomgaende-fag-vgo/

7 Vedlegg

Vedlegg 1: Godkjenning fra NSD

- **Melding**16.11.2021 16:05

  Behandlingen av personopplysninger er vurdert av NSD.
  Vurderingen er: Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 16.11.2021 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

  TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
  Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.05.2022.

  LOVLIG GRUNNLAG
  Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

  PERSONVERNPRINSIPPER
  NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:
  • lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
  • formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål

• dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
• lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20). Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring eller videosamtale) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med. For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: Sturla Herfindal Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2: Informasjonsskriv med samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet *Dybdelæring i multiplikasjon og divisjon på 4.-6.trinn?*

Dette er et spørsmål til deg som foresatt om ditt barn kan delta i et forskningsprosjekt der jeg vil se på læringsutbyttet elevene får gjennom dybdelæring i multiplikasjon og divisjon i matematikk.

Formål

Jeg er inne i mitt siste år som lærerstudent ved fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier ved Oslomet. I min masteroppgave ønsker jeg å forske på dybdelæring i matematikk. Dybdelæring er sentralt i fornyelsen av læreplanene som nå er tatt i bruk og målet mitt er å få en bedre forståelse av hvordan jeg som lærer på best mulig måte kan legge til rette for dybdelæring i matematikk. For å avgrense tema har jeg begrenset forskningen til dybdelæring i multiplikasjon og divisjon.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Oslomet – Storbyuniversitet er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får ditt barn spørsmål om å delta?

Jeg jobber som lærer på 4.trinn på Bragernes skole og ønsker elever på 4. – 6.trinn til å være informanter. Jeg har fått tillatelse fra ledelsen og lærerne på teamene på 4., 5. og 6. trinn til å innhente data fra deres klasser i matematikk.

For ditt barn vil deltakelse bety at noen av oppgaveløsningene elevene har gjort innenfor multiplikasjon og divisjon blir samlet inn og analysert. Basert på hva elevene svarer på oppgavene vil jeg ha en ekstra samtale med noen av dem og snakke om deres løsningsstrategier og andre mulige løsninger. I samtalen vil elevenes svar bli notert, men det vil ikke bli brukt lyd- eller videoopptak. Alt materiale vil bli anonymisert i masteroppgaven. Spørsmålene til samtalen vil være mulig for dere foresatte å få se på forhånd.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig for ditt barn å delta i prosjektet. Dere velger helt selv om dere vil at deres barn skal delta, og kan når som helst ombestemme dere uten å oppgi noen grunn. All informasjon om eleven vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn hvis dere ikke vil at barnet skal delta eller senere ombestemmer dere. Hvis barnet ikke deltar i forskningsprosjektet vil han eller hun likevel få de samme oppgavene, siden dette er en del av undervisningssituasjonen, men de vil ikke bli analysert i forskningsprosjektet.

Ditt barns personvern – hvordan jeg oppbevarer og bruker barnets opplysninger

Jeg vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene jeg har fortalt om her, forskning på dybdelæring i multiplikasjon og divisjon. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Hva skjer med opplysningene til ditt barn når forskningsprosjektet avsluttes?

Når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, etter planen i mai 2022, vil alle personopplysninger slettes.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Jeg behandler opplysninger om eleven basert på dere foresattes samtykke. Jeg har meldt oppgaven til NSD – Norsk senter for forskningsdata, som har vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du/dere rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger jeg behandler om ditt barn, og å få utlevert en kopi av opplysningene

- å få rettet opplysninger om ditt barn som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om ditt barn
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av ditt barns personopplysninger

Hvis du har spørsmål til prosjektet, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
Line Undset, tlf: 92267667 eller line.undset@hotmail.com
Min veileder ved Oslomet: Olav Gravir Imenes, ogim@oslomet.no
Personvernombud ved Oslomet: Ingrid S. Jacobsen, personvernombud@oslomet.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Line Undset

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Dybdelæring i matematikk*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn (navn) …………………………..:

- ☐ Kan delta i forskningsprosjektet
- ☐ Kan delta i samtale om oppgavene

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(Signert av foresatt, dato)

Vedlegg 3: Oppgavesett

Navn: __________ Klasse: _________

Oppgaver i multiplikasjon og divisjon

Oppgave 1

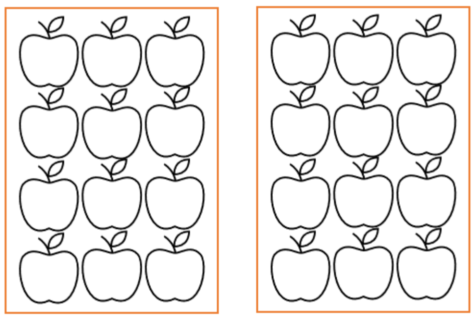
12*38=

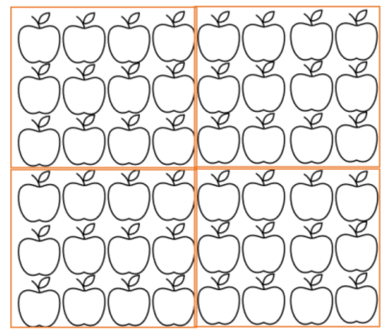
For 4.trinn: 6*38=

Regn ut og forklar med egne ord hvordan du kan finne svaret på denne oppgaven

Oppgave 2

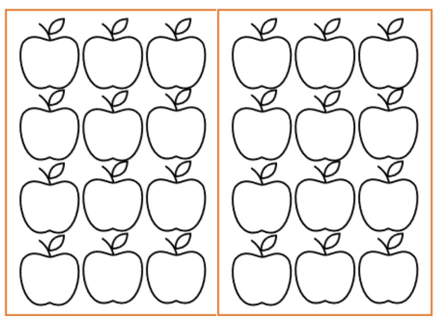
Her er to bilder av esker med epler. Finn et regnestykke som viser hvor mange epler det er i hver av eskene. Kan du finne flere regnestykker som viser hvor mange epler det er i hver av kassene?

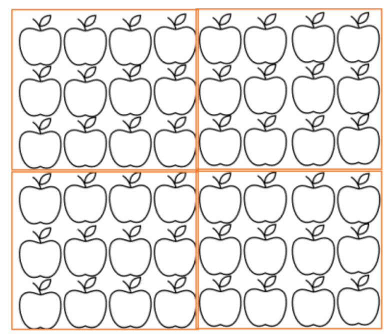




Endring:

Bilde 1





Bilde 2

Oppgave 3

Her er det fire bokser med 50 klinkekuler i hver boks.

a) Hvor mange klinkekuler er det i disse fire boksene til sammen?

b) Her er det tatt ut noen kuler, 5 kuler fra to av boksene. Hvor mange kuler er det igjen i de fire boksene til sammen?

c) En dag blir kulene brukt i et friminutt. Etter friminuttet teller læreren opp klinkekulene, og nå er det bare 162 igjen. Kan læreren fordele de 162 kulene likt i de fire boksene? Hvordan kan læreren fordele kulene i de fire boksene?

Oppgave 4

En skredder har 6 meter stoff og skal sy skjerf.

a) Til hvert skjerf trenger skredderen $\frac{1}{2}$ meter stoff. Hvor mange skjerf kan han sy?

b) Skredderen skal i tillegg sy små skjerf til dukker. Han trenger $\frac{1}{4}$ meter stoff for hvert skjerf. Blir det flere eller færre skjerf enn i sted? Kan man finne ut hvor mange skjerf det blir uten å regne på nytt? Forklar og begrunn.

c) For en tredje type skjerf trengs det $\frac{3}{4}$ meter stoff for hvert skjerf. Blir det flere eller færre skjerf enn i a)? Blir det flere eller færre skjerf enn i b)? Kan man finne ut hvor mange skjerf det blir uten å regne (helt) på nytt? Forklar og begrunn.

Oppgave 5

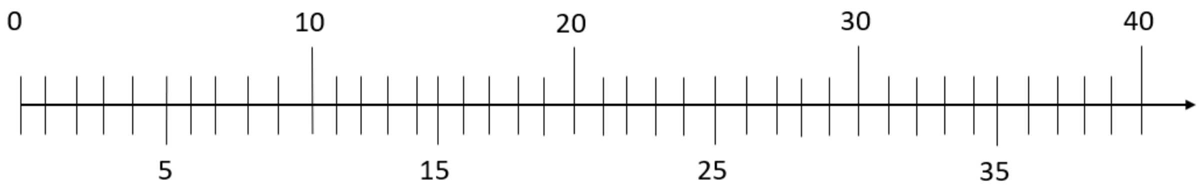
En lærer skal dele elevene inn i grupper. Hjelp læreren med å finne ut hvor mange elever det skal være på de ulike gruppene og hvor mange grupper det skal være.

a) 10 grupper på 6 elever= ___grupper på 12 elever
b) ___grupper på 4 elever= 30 grupper på 2 elever
c) ___grupper på 7 elever =___grupper på 21 elever
d) Hvor mange løsninger kan du finne på oppgave c)? Ser du et mønster i løsningene du har funnet?

Oppgave 6

c) En padde hopper 6 om gangen på en tallinje. Hvor langt har den kommet etter tre hopp? Hvor langt har den kommet etter tre hopp til? 

d) Etter disse seks hoppene møter padden en frosk. Frosken har kommet like langt, men har hoppet 9 hopp. Hvor langt hopper frosken på hvert hopp? Har de møttes før på denne strekningen?



Oppgave 7

Erik sykler til sammen 72km hver uke. Han sykler like langt hver dag, bortsett fra lørdagene og søndagene. Lørdager sykler han ikke, og søndagene sykler han 7km. Hvor langt sykler han hver av de andre dagene? Hvem har regnet riktig?

Jens regner slik:

72:6=12

Han sykler 16km hver av de andre dagene.

Mari regner slik:

72+7=79

79:6=13 og 1 i rest

Han sykler 13km og litt til hver av de andre dagene.

Ida regner slik.

72-7=65

65:5=13

Han sykler 13km hver av de andre dagene

Oppgave 8

Hvilket tall er jeg?

a) Jeg er et tall med to siffer. Summen av sifrene mine er 11. Jeg kan deles på både 4 og 7. Er tallet du kom fram til det eneste tallet som kan være riktig? Hvorfor eller hvorfor ikke?
b) Jeg er et tall med to siffer som kan deles på både 4, 6 og 7. Er tallet du kom fram til det eneste tallet som kan være riktig? Hvorfor eller hvorfor ikke?
c) Jeg er et tall med to siffer. Summen av sifrene mine er 9 og jeg kan deles på 6 og 9. Er tallet du kom fram til det eneste tallet som kan være riktig? Hvorfor eller hvorfor ikke?

Oppgave 9

Regn ut og forklar med egne ord hvordan du kom frem til svaret.

2520:4=

For 4.trinn: 252:4=

Vedlegg 4: Intervjuguide

Intervjuguide

Innledende spørsmål

- Hvordan synes du det gikk å løse oppgavene? Hva følte du at du mestret?
- Hva synes du om oppgavene? Var de vanskelige? Lette? Hva var eventuelt lett/vanskelig? (Store tall, mye tekst, vanskelige ord/begreper, for enkle tall)

Spørsmål knyttet til oppgavesettet

Noen elever vil bli valgt ut til et intervju basert på de skriftlige besvarelsene. Intervjuene skal være et tillegg til oppgavesettet, og skal gi muligheten for å gå i dybden i elevenes forståelse av enkeltoppgaver. Hvilke spørsmål fra intervjuguiden som brukes vil variere fra elev til elev, og bestemmes på bakgrunn av elevens skriftlige besvarelse. Hver av elevene som plukkes ut til intervju vil typisk bli intervjuet om to til fire oppgaver.

Oppgave 1

- Kan du forklare hvordan du har tenkt?
- *(Vise en annen metode enn den eleven har brukt)* Kan du se noen likheter mellom denne metoden og den du brukte? Hvordan er de like/forskjellige?
    - For eksempel: distributiv lov, tomt rutenett eller standardalgoritmen. *Hint etter hvert.*
- Hvilken av metodene liker du best? Hvorfor? Hvilken synes du er enklest?

Oppgave 2

- Kan du forklare hvordan du fant de ulike regnestykkene?
- Ser du en sammenheng mellom regnestykkene? Hva slags sammenheng da?
- Hvilken av regnestykkene synes du passer best til å finne ut antallet epler? Hvorfor?

Oppgave 3

- Hvordan fant du ut svaret på oppgave a)? Hvordan tenkte du?
    - Kan du finne flere måter å komme frem til svaret på?
- Hvordan tenkte du på oppgave c?

Oppgave 4

- Hva skjer med antall skjerf når skredderen trenger mer stoff til hvert skjerf?
- Hva skjer med antall skjerf når skredderen trenger mindre stoff for å lage skjerfene?
- Ser du et mønster i svarene dine?
    - Hva er forholdet mellom tallsvarene i oppgave b og c? a og b?
    - Hva er forholdet mellom nevnerne i oppgave b og c? a og b?

Oppgave 5

- Kan du forklare hvordan du fant på oppgave a)?
- Hva er sammenhengen mellom 10 grupper på 6 og 5 grupper på 12?
- Kan du forklare mønsteret du fant i den siste oppgaven?

Oppgave 6

- Hvordan tenkte du på den siste oppgaven? Hvorfor møtes padden og frosken på tallinjen?
- Kan du finne andre måter å løse oppgaven på?

Oppgave 7

- Kan du forklare hvordan Jens, Mari og Ida har tenkt?
- Hva er feil i svarene til Jens og Mari? Hvorfor er det feil?

Oppgave 8

- Hvordan kom du fram til hvilket tall det var?
- Kan du være helt sikker på at det bare finnes et riktig svar? Hvorfor?

Oppgave 9

- *(Vise eleven en annen metode enn den eleven har brukt)* Ser du noen likheter mellom denne metoden og den du har brukt?
    - For eksempel standardalgoritmen eller å dele opp tallet
- Hvilken metode liker du best? Hvorfor? Hvilken synes du er enklest?

Avsluttende spørsmål

- Hvordan synes du det er å forklare oppgavene muntlig sammenliknet med skriftlig?
- Hvordan liker du best å jobbe i matematikk? Hvordan lærer du best?
- Hvordan synes du det er å jobbe med oppgaver i matematikk? Hva slags oppgaver liker du best?
- Er det noe du lurer på eller har du noen spørsmål til meg?