MASTEROPPGAVE

M5GLU

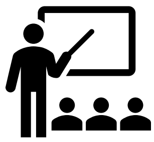
MAI 2022

Rike oppgaver som verktøy for tilpasset opplæring i matematikk : en litteraturgjennomgang

Rich tasks as tools for adapted learning in mathematics : a litterature review

Vitenskapelig

30 sp oppgave



Kent Juvang Sualp

OSLOMET

Oslomet – storbyuniversitet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Forord

Arbeidet med dette temaet har gitt meg et stort bilde på hva som kreves av en lærer i undervisningen deres. Jeg syntes rike oppgaver i matematikk virket som det ga mulighet for en fin læringsprosess for elevene før jeg begynte med forskningen min, og sitter igjen med samme holdning etter.

Denne masteroppgaven har også gitt meg flere idéer, og formet tankegangen min om hvordan jeg ønsker å være som underviser.

Først og fremst vil jeg takke veilederen min Roar som har vært til stor hjelp. Tilbakemeldingene og spørsmålene han ga meg sørget for at jeg fikk et klarere bilde av nøyaktig hva jeg forsker på.

Jeg vil og takke mine medstudenter som har vært hjelpsomme i de tilfellene der jeg hadde spørsmål om jeg var på riktig vei.

MASTER SAMMENDRAG

I denne litteraturgjennomgangen blir rike oppgaver vurdert. Hvordan blir de designet, hvilke likheter har de med åpne oppgaver og hvordan kan de benyttes som tilpasset opplæring. Rike oppgaver er oppgaver som tillater ulike løsningsstrategier. De skal og støtte kreativitet, resonnering og kommunikasjon. Med hovedfokus på deres effekt som tilpasset opplæring har artikler blitt funnet og undersøkt. Tilpasset opplæring handler om all tilrettelegging lærere gjør for at elever skal få den hjelpen de trenger. Da hver elev er unik så må lærer vurdere forutsetningene deres. Det er tre former forutsetninger som bør bli tatt henhold til. De faglige, sosiale og kulturelle. For å designe rike oppgaver er det flere modeller som kan tas i bruk. Læringstriaden er en modell som viser til viktige egenskaper som bør være til stede i elevenes læringsprosess. Convergent-Divergent modellen er en annen modell som skaper oppgaver med mulighet for ulike løsninger. Cirka halvparten av artiklene handlet om rike oppgaver, og den andre halvparten åpne. Forskjellen på de to adjektivene i praksis er ikke stor, men åpne oppgaver legger mer fokus på at det kan være mer enn et riktig svar. Deres effekt som tilpasset opplæring er for det meste positiv. Ulike strategier fra elevene som krever ulik grad av matematisk kompetanse blir vist. Det er allikevel gjort lite forskning i dette området, slik at svarene ikke er fullverdige.

Rich mathematic tasks are reviewed in this literature review. How are they designed, what are their similarities to open tasks and how can they be used as adapted learning. Rich tasks are tasks that allows more than one strategy to solve. They aim to support creativity, reasoning and communication. Articles that details such tasks have been found with a focus on reviewing their functionality as adapted learning. Adapted learning is about every action a teacher takes to make sure the individual student get the help they need. Seeing as every student is unique, the teacher have to take their prerequisites into consideration. Those prerequisites are about who the students are when it comes to the subject, who they are socially and who they are culturally. To design rich tasks there are several models that can be used. The teaching triad and the Convergent-Divergent model are the two that will be reviewed in this thesis. About half of the articles reviewed are about open tasks, the other half rich. In practice, there was not found much difference between the two types, but both looks efficient as tools for adapted learning. The only noticeable difference is that open tasks are often described as having the possibilty for different answers in the solution aswell. There is shown merit in the idea that rich tasks can be used as adapted learning, as the answers for a

lot of the tasks showed different strategies that requires different degrees of competency in the subject. Still, there is not done enough research about rich tasks, especially correlating to adapted learning. This means that the answers found in this thesis should be backed up by further study.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Oppgaver med rik matematikk gir mulighet for resonnering og ulike innfallsvinkler når det kommer til løsningsstrategier. Tilpasset opplæring er alt arbeid som blir gjort for å tilrettelegge den individuelle elev i deres læringsprosess. I denne litteraturgjennomgang vil jeg finne svaret på forskningsspørsmålet mitt

Hvordan kan rike oppgaver i matematikk bli designet og brukt som verktøy for tilpasset opplæring

Målet mitt er å finne et svar på dette spørsmålet, samt se på hvordan rike og åpne oppgaver utspiller seg i praksis. Gjennom fire års utdanning og en del erfaringer i ulike praksisskoler har jeg lagt merke til hvor krevende jobb tilpasset opplæring er i dette faget. Da lærerens jobb er å sørge for at hver elev får den kunnskapen de skal ha i løpet av deres tid på grunnskolen, bør elevenes forutsetninger bli tatt hensyn til. Det er her tilpasset opplæring kommer inn. Hvert barn i klasserommet har deres egen identitet, fargelagt av deres sosiale og kulturelle bakgrunn. I et perfekt læringsmiljø er det laget egne opplegg skreddersydd for hver elev slik at de kan ha en perfekt trapp foran seg. Og det er her problemet oppstår, fordi tilpasset opplæring kan være i stor grad tidskrevende. Bare det å forberede en leksjonsplan for en dag tar tid, så ulike oppgavehefter for ulike elever skaper fort et problem. Min idé for en løsning på et slikt problem, og en måte å sørge for god tilpasset opplæring i læringsmiljøet til klassen, er å introdusere flere rike oppgaver inn i undervisningen. For å vurdere gunstigheten av denne idéen har jeg valgt å bruke litteraturanalyse som forskningsmetode, slik at jeg kan se hvordan slike oppgaver blir mottatt og brukt på et generelt nivå. Nysgjerrigheten min her består både i hvordan lærere tenker når de skal designe oppgavene og hva slags effekt de har på klassen. Ønsket mitt er å se en positiv effekt, slik at jeg selv får et pålitelig verktøy når jeg går inn i jobben min som matematikklærer.

For å vurdere rike oppgaver som tilpasset opplæring har jeg også undersøkt to andre forskningsspørsmål. Gjennom tidligere lesning av dette temaet har jeg sett flere ord bli beskrevet for oppgaver som tillater ulike løsningsstrategier. Noen av disse er LIST-oppgaver (lav inngangsterskel, stor takhøyde), problemløsningsoppgaver og åpne oppgaver. For å vite når jeg burde tenke på de ulike typene oppgaver, er jeg nødt til å finne forskjellen mellom dem. Med størst fokus på rike og åpne oppgaver har jeg da sett på artiklene mine sine definisjoner for å se på kriteriene som blir gitt. Jeg har også tolket de rike oppgavene opp mot ulike modeller for oppgavedesign for å vurdere hva som bør bli gitt fokus under konstruksjonen.

Grunnen til at jeg valgte å undersøke denne problemstillingen er at det er en stor mangel på forskning om sammenhengen mellom tilpasset opplæring og rike oppgaver. Jeg føler at en mulig sammenheng bør bli dokumentert da tanken bak rike oppgaver deler mye til felles med tilpasset opplæring. Selv om metoden min handler om å studere tidligere publisert forskning, er denne forskningen mer direkte fokusert på de rike oppgavene. Jobben min er å se de artiklene opp mot beskrivelser og eksempler på tilpasset opplæring for å besvare problemstillingen.

For å besvare forskningsspørsmålene mine ser jeg først gjennom eksisterende forskning om tilpasset opplæring. Der tar jeg først opp generell informasjon om hva tilpasset opplæring er. Etter det tar viser jeg til eksempler for tilpasset opplæring og grunnlag for det. Forskning om design av opplegg blir også tatt opp, der jeg viser til ulike modeller før jeg ender opp på rike oppgaver. Det er to modeller for oppgavedesign jeg viser til, Convergent-Divergent modellen og læringstriaden. Under rike oppgaver blir det vist hva som kreves for å kunne definere en oppgave som rik. Etter forskningen er satt opp, blir det forklart hvordan jeg har benyttet litteraturanalyse som metode. Hva jeg har lett etter, hvilke søketermer og inklusjonskriterier jeg har benyttet. Så viser jeg til funnene mine i de 15 artiklene jeg har valgt ut. Funnene baserer seg på oppgaveaspekter og lærerhandlinger. Funnene mine diskuterer jeg i lys av forskningen om tilpasset opplæring og oppgavedesign. Til slutt har jeg en konklusjon der jeg vurderer om rike oppgaver er en gyldig metode for tilpasset opplæring. Jeg ser også på mulige mangler i masteroppgaven min, og hvilken forskning som mangler i dette feltet.

2 Teori

Denne oppgaven handler om rike oppgavers rolle innen tilpasset opplæring. Den vil se på hvordan slike oppgaver kan hjelpe både elever som sliter og de som har nytte av å bli utfordret litt mer. I denne teoridelen vil jeg belyse den definisjonen jeg kommer til å bruke av tilpasset opplæring, hvordan rike oppgaver blir designet og hvilken nytte de har i forhold til tilpasset opplæring. Jeg ser også på oppgaveaspekter og lærerhandlinger som rammeverk for analysen min under litteratursøket.

2.1 Tilpasset opplæring

Det er stor spredning i elevenes ferdigheter når det kommer til kompetansene forventet av skolen. Denne spredningen blir gradvis større gjennom skolegangen, og er grunnlaget for hvorfor tilpasset opplæring er nødvendig (Grue et al., 1995). Tilpasset opplæring betyr at elevene blir utfordret og hjulpet videre på det nivået de befinner seg på, slik at de kan komme seg et steg videre i løpet. Det vil si at de faglige, sosiale og kulturelle forutsetningene skal bli tatt i betraktning (Bjørnsrud & Nilsen, 2011). Forståelsen av begrepet tilpasset opplæring har endret seg gjennom tiden. Jenssen og Lillejord (2009) beskriver fire epoker, og hvordan begrepet endret mening. Det gikk fra integrering til inkludering, så individualisering og nå læringsfelleskap og undervisningskvalitet. Den tilpassede undervisningen blir gjennomført både gjennom vanlig undervisning og spesialundervisning. Spesialundervisning er for elever som ikke får tilstrekkelig utbytte av den ordinære undervisningen, mens tilpasset opplæring er mer generelt. Spesialundervisningen blir også lite kommentert i forhold til tilpasset opplæring i kunnskapsløftet, noterer Jeppesen et al. (2016). De beskriver og arbeid med tilpasset opplæring som varierende, der den enkeltes rektor og skole har sin egen forståelse av begrepet. Et av hovedaspektene for tilpasset opplæring er valg, slik at elevene kan finne ruten som passer de best (Ward, 2020). Den tilpassede opplæring skal ta elevenes forutsetninger i betraktning, som ferdighetsnivået deres, og sosiale faktorer. Sosiale faktorer som språk, kjønn og etnisitet (Gates, 2001). Grue et al. (1995) forteller også at elever skal også oppleve varierte arbeidsmetoder, mengde-, og vanskelighetsnivåvariasjon. I Ward (2020) sin bok om *personalized learning*, blir det beskrevet at læringen skal formes rundt måten ungen lærer, slik at man kan styrke det som gjør hvert individ unikt. Ved at barna får streve med oppgaver, som ligger på deres nivå, kan de få større begrepsmessig forståelse innen temaet oppgaven jobber med (Nosrati & Wæge, 2015).

Tilpasset opplæring krever at lærer følger opp de ulike elevenes behov, for å hjelpe de mest effektivt, og det tar tid. Enkelte lærere føler at de ikke får nok tid til å gå rundt å gjennomføre ønsket opplegg for hver elev (Grue et al., 1995). Selv om de ikke har eget designet oppgaver for hver elev, blir det allikevel en del arbeid med å lage arbeidsplaner som er mulige å bearbeide for å kunne bli gjennomført på ulike nivåer.

2.1.1 Former og eksempler for tilpasset opplæring

Tilpasset opplæring omfatter alle metoder skolen benytter for å rette læringen mot eleven som individ. Tilpasningen som tidligere skrevet, handler om å se på elevens forutsetninger, for så å gi de muligheter til læring som er gunstige. Denne tilpasningen foregår på en god del måter, for eksempel spesialundervisning. Spesialundervisningen er en mer omfattende tilretteleggelse for en elev, da denne eleven ikke får godt nok læringsutbytte (Bjørnsrud & Nilsen, 2011). Denne metoden for tilpasset opplæring handler om at elevene får en individuell opplæringsplan de benytter seg av. En annen, mer generell måte tilpasset opplæring jobbes med er tidlig intervensjon, eller forebygging (Bjørnsrud & Nilsen, 2011). Forebyggingen består i å ta mulige forutsetninger i betraktning for å sørge for at gode vaner for læring blir styrket mens negative vaner blir brutt ned. For å jobbe med dette blir enten noe lagt til eller trukket fra i undervisningen, på samme måte som store deler av tilpasset opplæring. Denne forebyggingen kan ofte skje tidlig i løpet til eleven, noen ganger før de engang begynner på skolen.

Underveisvurdering er en annen metode for tilpasset opplæring, i tillegg til å være nyttig informasjon både for lærer og elev. Vurdering i skolen har to hovedformål, som er vurdering for og av vurdering (Wille, 2010). Underveisvurdering går under kategorien for, og eksisterer for å hjelpe elevene videre i løpet. Denne evalueringen skal foregå både daglig i klasserommet og som oppsummerende vurderinger i løpet av skolegangen. Bjørnsrud og Nilsen (2011) forteller om hvordan dette er et redskap for tilpasset opplæring i at den har som formål å øke elevenes kompetanse i faget. Vurdering for læring gir elevene mer kunnskap i hva de kan og må jobbe med, samt at lærer får se effekten av undervisningen. Wille (2010) har ti veiledende prinsipper for vurdering for læring, som er videre delt i tre kategorier. *Planlegg for læring istedenfor aktivitet, bruk tydelige mål* og *bruk kriterier som viser vei* er de tre første prinsippene. De tre handler om hvordan lærer planlegger og gjennomfører undervisningen. De neste fire punktene er aspekter om hvordan lærer gir eleven mulighet til å reflektere over egen læring, samt hjelpe hverandre med denne refleksjonen. De siste tre punktene ser på hvordan lærer vurderer elevenes prestasjoner og gjennomføringer av opplegg.

Evans et al. (2014) ser på personlig tilpasset læring i læringsspill og har kommet fram til ulike punkter å fokusere på. Det første punktet er personlige tilbakemeldinger som tar i betraktning hva elevene får til og sliter med slik at eleven kan jobbe med det de trenger. Dette er for det meste det samme som vurdering for læring, som da kan kalles en form for tilpasset opplæring. Det er to former for tilbakemeldingene, umiddelbar og forklarende. Den forklarende tilbakemeldingen handler om å gi elevene informasjon for å komme fram til mål, uten å bare gi de et svar. Evans et al. (2014) så også på flere faktorer som påvirket tilpasningen som å ta oppførselen til eleven i betraktning. Mengden tilbakemeldinger som blir gitt, og hvor mye elever trenger støtte er det de mener kan brukes som resultat for effekten av tilpasningen.

2.1.2 Grunnlag for tilpasset opplæring

Som tidligere bemerket er det tre aspekter av eleven som lærer ser på for å vurdere forutsetningene til barnet. De tre aspektene er den faglige kompetansen til eleven, den sosiale kompetansen til eleven og elevens kulturelle bakgrunn. For å vurdere den faglige kompetansen til elevene er den letteste måten å undersøke læreplanen. Der står det at gjennom matematikkfaget skal elevene lære seg å forstå mønstre og sammenhenger i naturen (UDIR, 2020). De skal også utvikle et språk der fagbegreper og generalisering blir benyttet til kritisk tenking, resonnering og forklaring av matematiske fenomener. Videre kan man også se på mer spesifikke kompetansemål, både innen de ulike temaene og overordnet i kjerneelementene. For å vurdere eleven bør man se på hva eleven gjør i en oppgave opp mot kravene læreplanen setter til eleven. Det er ulike grunner til hvorfor barn viser ulik kompetanse i både matematikk og andre fag, for eksempel det faktum at alle er forskjellige. Det er grunnlaget for tilpasset opplæring, men det er også nødvendig å vite hvilke faktorer ulike elever har som legger til rette for deres forutsetninger. Som Xenofontos (2019) skriver, har foreldrene en stor påvirkning. Denne påvirkningen forekommer via deres tanker og holdninger rundt faget, deres egen kompetanse i faget og hva slags forventinger de gir barna sine.

Et annet aspekt som er med å påvirke hvor eleven ligger an i forhold til kompetansemålene er elevenes sosiale situasjon. Dette gjelder både hvordan de har det sosialt og deres sosiale kompetanse. Evne til empati, samarbeid selvhevdelse, selvkontroll og ansvarlighet kan være grunnleggende pekepinner for vurdering av den sosiale kompetansen (Gresham & Elliott, 1990). Hvert av disse begrepene er grunnleggende å jobbe med for at eleven skal ha en god og lærerik skolegang (Grue et al., 1995). Samarbeid innen matematikk er et viktig aspekt, da kommunikasjon er viktig for elevene med tanke på vanskelige matematiske problemer (Kazemi & Hintz, 2014). Samarbeid og samtaleprosesser blir styrt av aktivitetene, der muligheter og begrensninger blir satt (Ohna et al., 2007). Det er også viktig for å skape et felleskap i klasserommet, og kan styrke motivasjonen til elevene. Kazemi og Hintz (2014) i deres forskning om diskusjon i matematikkundervisningen la merke til flere kommentarer som viste til hvordan kritisk tenkning blir styrket av samtaler mellom elevene. Hvordan eleven har det på skolen når det kommer til det psykososiale har også mye å si for deres læring. Barnets følelser og tanker rundt skolen er en påvirkningsfaktor (Hinna, 2011). Slike følelser og tanker er med på å forme selvbildet elever har, da dette utvikles i samspill mellom egne tanker og andres reaksjoner. I undervisningen vil utvikling av selvbildet også forekomme. Denne selvoppfatningen dreier seg mer om det kompetanseorienterte selvet (Imsen, 2014). Følelse av kompetanse blir sett på som et grunnleggende behov. Forventninger av at man vil lykkes i en oppgave gitt av en følelse av kompetanse påvirker motivasjonen til elevene positivt. Et dårlig selvbilde av kompetansen i matematikk er med på å skape negative forventninger for elevene (John et al., 2020). Dette kan føre til prestasjonsangst og situasjoner der elevene prøver å unngå nederlag. Sjøvoll (2006) belyser at forskjell på skolens krav av eleven og elevens funksjonsevne er bidragsyter til denne angsten.

Angående kulturell kompetanse trekker Zevenbergen (2001) frem at holdninger til skolering skiller seg i en stor grad mellom familier av ulik sosioøkonomisk status. Innen matematikk vil ofte familier i det som tradisjonelt sett blir kalt arbeiderklassen slite med å støtte opp læringen til barna deres. Dette, sammen med holdningene deres vil føre til holdningene som elevene har ovenfor faget når de møter skoledagen. Han trekker også fram språk som en del av det kulturelle kapitale barn får med seg fra hjemmet. Enten det er på grunn av foreldrenes kompetanse innen faget selv, eller at noen foreldre ikke snakker flytende norsk, er det begge forutsetninger for elevenes evne til å lære seg fagterminologien. Om barna ikke er helt trygge i norsk som språk, vil dette også medføre at tekstoppgaver og informasjon lærer gir ut ikke alltid vil få ønsket effekt. En annen del av den kulturelle bagasjen til elever, er hvordan matematikk blir lært i ulike deler av verden. Ulikheter i matematikkundervisning viser seg i tallsystemer som blir brukt, valutasystemer, målesystemer og så videre (Derek, 2001). Verdiene som elever i ulike land får påpekt som viktige, sørger også for at undervisningen skiller seg. Slike verdiforskjeller kan sees i at elever fra vestlige land viser høyere grad av selvtillit enn flere øst-asiatiske land, selv om deres resultater er svakere (Chiu & Klassen, 2010).

2.1.3 Tilpasset opplæring i matematikk

I matematikkfaget skal tilpasset opplæring ta hensyn til at læringen skal knyttes til kjente forhold i nærmiljøet (Sjøvoll, 2006). Den skal ta utgangspunkt i barnas naturlige aktiviteter, og når et slikt forhold mellom matematikken og elevenes praktiske hverdag knyttes, skal abstrahering og symbolisering introduseres. I dette faget er også misoppfatninger et problem som flere elever kan møte, der deres forståelse og tolkning av et matematisk konsept er ufullstendig eller feil (Swan, 2001). Der blir det også trukket fram at lærere har som oppgave å gi elevene den kompetansen og de verktøyene som kreves for å tolke og forstå meningen til konseptene bak matematiske representasjoner. For å få til dette kreves det kontinuerlig arbeid med å styrke elevenes evne til å konstruere og forstå ulike konsepter i matematikken. I matematikkundervisningen kreves det kunnskap av lærere som går mye mer i dybden og detaljert enn bare å kunne arbeide med standardalgoritmer (Loewenberg Ball et al., 2005). Ved hjelp av deres kunnskap i faget må lærere kunne tolke hva eleven gjør, hvilke løsningsmetoder de bruker, hvilke misoppfatninger som oppstår og hvorfor (Ball, 2017). En undersøkelse testet ut effekten mestringstro har på elevenes nøyaktighet og effektivitet i problemløsningsoppgaver, og resultatet støttet opp motivasjonsteorien her (Hoffman, 2010).

Takahashi (2021) viser fem ulike ferdigheter elever må kunne får å tenke matematisk.

- Konseptuell forståelse
- Prosedyremessig forståelse
- Strategisk kompetanse
- Tilpasset resonnering
- Produktiv disposisjon

Det konseptuelle er forståelse over matematiske konsepter, prosedyrer og sammenhenger. Punkt nummer to handler om at elevene skal kunne utføre utregninger og algoritmer på en fleksibel og effektiv måte. De skal videre kunne representere, tolke og løse matematiske problemer. De må vise logiske tankeganger med refleksjoner og forklaringer. Den siste egenskapen viser til bildet elevene skal ha om matematikk og deres egen evne innenfor faget. Matematikken skal sees på som produktiv og verdifull, og de bør ha et positivt selvbilde.

2.2 Design av opplegg

Kaiser (2017) ser på hvordan man designer opplegg, hva som kreves av informasjonssanking, hvordan ta det i bruk, og andre tanker rundt design. Burkhardt og Swan (2017) ser på hvordan man kan designe produkter for læring strategisk, slik at de skal oppnå formålet deres i forhold til systemet de ble skapt for å tjene. Wille (2010) sine første tre prinsipper innen vurdering for læring handler om hvordan planlegging av undervisning bør gjennomføres. Her tar hun opp at oppleggene bør ha tydelige mål, veiledende kriterier og et fokus på læringen istedenfor aktiviteten. Da målet med design av opplegg og oppgaver er å gi elever gode forutsetninger for læring, bør oppgaven ha læringen som fokus. Kunnskapskvartetten er et verktøy som setter lys på hvordan lærers kunnskap innen faget og det fagdidaktiske blir brukt for å sørge for barnas læring (Rowland & Zazkis, 2013). Den består av fire punkter, *contingency, connection, transformation* og *foundation.* De tre siste punktene ser på hva lærer vet om faget og hvordan de omdanner dette til undervisning (*QED 5-10 : matematikk for grunnskolelærerutdanningen : B. 2*, 2014). Denne omdanningen handler om hva slags eksempler, representasjoner og undervisningsmateriell som blir vist og hvordan dette blir valgt på bakgrunn av lærers kunnskap. For å kunne skape gode, rike oppgaver kreves det da at lærer har nok kompetanse innen tema det arbeides med til å skape og utnytte slike oppgaver. Dette vil også gjelde om lærer låner opplegget fra andre, for å vite hvordan den kan brukes for å hjelpe elevene. Watson og Ohtani (2015) viser også til forholdet mellom oppgavene, undervisning og læring. Der blir det også tatt opp at elevenes produkt i en oppgave og hvilke handlinger de gjør ikke gir nok informasjon til å kunne vurdere hvordan de tolker oppgaven.

2.2.1 Convergent-Divergent modellen

Convergent-Divergent modellen (CDM) er en modell innen design av opplegg som er skapt og utviklet av Colin Foster (Foster, 2015). Målet til denne modellen er å skape oppgaver med lettere begynnelser både for lærere og elever. Oppgavene kan videre dras ut i flere grener. Slike oppgaver kaller Foster for *accesible, yet challenging*. Han bruker også fristende som adjektiv for å beskrive oppgavene. Tanken bak oppgavene er at muligens enklere og tidligere oppnåelser innen tema kan være inngangsvinkel for å løse mer kompliserte problemer. De som gjennomfører oppgavene skal, av oppgaven selv, kunne bli engasjert til å følge ulike ruter som passer dem best. Det vil da være elevenes egen bestemmelse som involverer seg i arbeidet. Tankesettet som støttet Foster under konstruksjonen av denne modellen, altså at oppgavene skal være åpne og tilgjengelige for flere mulige løsninger har mye til felles med rike oppgaver. Denne typen oppgave kan bli kalt en av flere former for rike oppgaver, som er et stort spekter av oppgavedesign med flere av de samme kriteriene. For å se hva CDM sine unike egenskaper, kan man undersøke navnet selv. *Convergent* handler om at alt når samme punkt, mens *divergent* viser til en spredning av muligheter. Oppgavene i denne modellen vil begynne som en konveks linse, der mange tankeganger og arbeidsmetoder fører til samme løsning. Deretter vil den legge opp til at dette engasjementet og muligheten til kreativitet for elevene vil være energien i en følgende, konkav fase. Denne konkave fasen handler om å la elevene gjøre egne utforskninger og vurderinger på bakgrunn i hva de allerede kan.

Bygging av konseptuell forståelse er et fokus Swan (2008) undersøker når det kommer til oppgavedesign. Der trekker han fram rike oppgaver der det blir lagt til rette for samarbeid som sentralt. Han mener at oppgavene bør utvikle matematisk språk gjennom samarbeidet, at de skal bygge på kunnskapen elevene allerede har, at de skal konfrontere problemer, trekke fram mulige misoppfatninger og legge til rette for tankene bak svaret istedenfor bare et svar. En annen type oppgavedesign som tas opp av Hinna (2011) er undersøkelseslandskap, der oppgaven skal være åpen for utforsking selv om den har et rammeverk innen matematikkonteksten den eksisterer i (Hinna, 2011). Slike oppgaver skal som regel være ganske åpne for ulike løsningsmetoder, også i ulik vanskegrad, og er derfor ganske samsvarende med rike oppgaver. Et annet ord som ofte blir brukt er problemløsningsoppgaver. Problemløsningsoppgaver skal som regel ha en ukjent metode, som skiller de fra ferdighetstrening (*QED 5-10 : matematikk for grunnskolelærerutdanningen : B. 2*, 2014).

2.2.2 Teaching Triad

En annen modell som kan brukes for å vurdere opplegg og oppgaver på er *Teaching Triad* modellen. Denne modellen viser til en læringstriade av egenskaper og kriterier som burde ses på for å karakterisere kompleksiteten av læring (Ayalon et al., 2020). De tre punktene er matematisk utfordring, sensitivitet til elever og kontroll over læring. Den matematiske utfordringen er den graden elevene blir utfordret og stimulert til matematisk refleksjon. Sensitivitet til elevene handler om lærers kunnskap om elevene og hva de trenger i faget, og alle interaksjoner mellom lærer og elever. En del av dette handler om at lærer forstår tankegangen til elevene og deres strategier når de løser oppgaver. Kontroll over læring er alt arbeid lærer gjør med å bygge gode normer for læring i klasserommet og gi muligheter for elevene å engasjere seg selv i matematikken.

2.2.3 Rike og åpne oppgaver

For å kunne klassifisere en oppgave som rik i matematikk må den fylle en del kriterier. Piggott (2008) har samlet flere lister som definerer slike oppgaver og aktiviteter. Fellestrekkene mellom listene er at oppgavene skal;

- Være tilgjengelige for en stor variasjon av individer
- Være engasjerende fra start
- Gi oppgavetakeren mulighet til refleksjon og kritisk tenkning
- Oppmuntre til kreativitet
- Støtte kommunikasjon og diskusjon
- Støtte elevenes autonomi i arbeidet

Uavhengig av nivået eleven som gjennomfører oppgaven ligger på, vil mangfoldet av egenskaper oppgaven bør inneholde gjøre det mulig å takle (Piggott, 2008). Det blir også skrevet at en oppgaves rikhet blir påvirket av miljøet og hvordan den blir presentert, hva slags støtte lærere gir og hva de forventer av elevene. Læringsmiljøer som utforsking og problemløsning legger opp til kreativitet, og kan hjelpe elevene med å gå forbi det kjente, utforske, argumentere og se sammenhenger (Pitta-Pantazi et al., 2021). Piggott (2008) har en liste over krav hun mener rike oppgaver burde fylle, for eksempel at de skal være tilgjengelige for individer som ligger på ulike nivåer innen temaet, at de tillater ulike metoder og lærer opp til kritisk tenkning. De ulike kravene støtter også opp mye av læringen

Takahashi (2021) mener elever trenger for å kunne tenke matematisk. Om oppgaver kan løses med ulike metoder, kan elevene jobbe med fleksibel utforskende tenkning. Dette vil øve de på kreativ tenkning innen matematikk (Pitta-Pantazi et al., 2021). Slike oppgaver legges også mer fokus over på at eleven har *agency* i det som gjøres. Dette gjøres ved å ikke ha en klar løsningsmetode, men en lav inngangsterskel som tillater metoder elever er komfortable med (Piggott, 2008). Da kan de fortsatt få støtte fra lærer, men føle at de selv har styring over det som gjøres. Med tanke på tilpasset opplæring i form av mer åpne oppgaver som et verktøy, virker rike oppgaver som gode typer. LIST-oppgaver er en norsk versjon av slike rike oppgaver, og mattelist.no, en ressursside for LIST-oppgaver har brukt nrich.maths.org som inspirasjon. En forventning lærere bør ha med oppgaver av denne typen er at om de er passende utfordrende for store deler av klassen, vil noen elever mest sannsynlig finne de for vanskelige (Sullivan et al., 2015). Denne følelsen av vanskelighet kan påvirke deres mestringsforventninger og sørge for at de ikke engasjerer seg i arbeidet. Dette vil da videre påvirke deres forutsetninger for læring da motivasjon, som tidligere beskrevet, er sentralt for elevenes læring. Et annet aspekt som bør noteres, er at hvordan en elev arbeider med en oppgave, og hva de får ut av den baserer seg i stor grad på hvordan de tolker den (Ainley & Margolinas, 2015). Det vil si at for rike oppgaver, der denne variasjonen av arbeidsmetoder er forventet, bør lærer også ha en god kunnskap om ulike tolkninger som er mulige for de gitte oppgavene. Dette sørger for at lærer fortsatt kan ha kontroll over barnas utvikling av kompetanse og læring. Ainley og Margolinas (2015) viser eksempler der lærere stiller elevene enklere og enklere spørsmål i håp om å få et svar som viser noe matematisk kompetanse, selv om det kan vise en helt annen kunnskap enn målet for opplegget. På bakgrunn av elevenes tanker rundt oppgavene og hvordan vanskelighet kan bryte ned motivasjon er det ikke lett å lage rike oppgaver som fanger hele klassen.

Cambridge University sitt Nrich-team gjennomførte et prosjekt kalt SHINE, som skulle teste ut effekten av ressursoppgavene til Nrich (Smith, 2007). Dette prosjektet var workshop-programmer i lengden 6 til 9 måneder for elever i det som blir ungdomsskolealder. Resultatene i flere av skolene som deltok i workshopen viste at elevene fikk gjennomsnittlig høyere karakterer, viste større evne til problemløsning, og fikk større grad av selvtillit. Det var over 80 prosent av elevene som fikk positiv påvirkning av prosjektet. Å gi elever større evne til å løse varierte problemløsningsoppgaver og mer selvtillit vil også løse opp mer tid for lærer, som da kan bruke mindre tid på å forklare oppgavene, og mer på å gi oppgaver som utfordrer eleven kognitivt. Om man kan komme til et slikt nivå i undervisningen vil det være lettere for eleven å styrke deres kompetanse og forståelse.

2.2.4 Rike oppgaver som tilpasset opplæring

Med tanke på kravene som Grue et al. (1995) forteller om tilpasset opplæring, finner man en god del likheter til LIST-oppgaver. Og som Nosrati og Wæge (2015) skriver, er det viktig å få mulighet til å streve med oppgavene, at de er kognitivt krevende. Rike oppgaver skal være oppgaver som kan utfordre elever på ulike nivåer. Så om lærer skaper riktig arbeidsmiljø, og oppgavene vil bli brukt korrekt, så vil de være utfordrende for store deler av klassen. Dette er et av de store formålene med slike oppgaver, i tillegg til at de skal føles utforskende. LIST-oppgaver fyller også et av kravene som Ward (2020) skriver om angående tilpasset opplæring, valg. Ved at oppgavene har ulike måter å bli løst og bearbeidet, kan elevene velge denne måten selv. Lærere har da som ansvar å sørge for at elevene jobber med kognitivt krevende måter. Ved å se på LIST-oppgaver som erstatning for Evans et al. (2014) sitt læringsspill, kan man vurdere hva slags tilbakemeldinger som kan gis elevene for at de skal få mest ut av oppgaven.

3 Metode

Metoden jeg har valgt å bruke i denne masteroppgaven er en variant av en systematisk litteraturgjennomgang. En slik litteraturgjennomgang er en effektiv metode for å samle og analysere forskningen som allerede er foretatt innen et tema (Borah et al., 2017). Litteraturgjennomganger summerer opp eksisterende forskning, ser på de med et kritisk blikk og vurderer alternative forklaringer til forskningen (Rowe, 2014). Styrkene til litteraturgjennomgang er at den tillater konsolidering av allerede eksisterende forskning og at den kan finne mulige mangler eller tomrom i litteraturen (Grant & Booth, 2009). Grant og Booth viser også til det som blir sett på som svakheter. Litteraturgjennomganger sine svar kan ha en partiskhet fra forfatteren da mengden artikler som blir gjennomgått vil ha en begrensning. Denne partiskheten kommer da fra hvilke artikler som ble valgt ut, og hvorfor.

For eksempel at det bare er artiklene som er enige med forfatteren sin teori. En annen svakhet er at validiteten av artiklene kan være dårlig.

3.1 Rapid Review

Måten jeg skal forske på artiklene er *rapid review,* en systematisk gjennomgang legger til rette for at forskeren ikke kan gå like nøye gjennom all eksisterende forskning (Grant & Booth, 2009). Mediantiden for en systematisk litteraturgjennomgang er rundt 40-60 uker for større team med forskere (Borah et al., 2017). På grunn av tidslengden vi får i masteroppgaven, vil ikke en full systematisk litteraturgjennomgang være egnet som forskningsmetode. Grunnen til at denne metoden tar så lang tid er mengden litteratur som finnes. All litteratur skal systematiseres på en eksplisitt måte som identifiserer, vurderer og syntetiserer tekstene (Rowe, 2014). Mengden variabler som undersøkes i en full litteraturgjennomgang og kvalitetskontrollene som må gjøres for hver artikkel er og tidskrevende. Derfor har jeg heller sett på *rapid review* som forskningsmetode. Som med systematisk gjennomgang brukes allerede eksisterende forskning. Forskjellen mellom de to litteraturgjennomgangene er at *rapid reviews* tillater teknikker som kutter ned tiden som kreves. Teknikker som mer spesifikke spørsmål som stilles, enklere kvalitetskontroller og mindre sofistikerte søkestrategier (Grant & Booth, 2009). Ved å undersøke artiklene man da vil ende opp med til slutt, vil man finne et svar på det originale forskningsspørsmålet. På grunn av dens restriksjoner, har denne metoden ikke blitt tatt imot veldig godt. Mengden litteratur som nå finnes krever en stor mengde tid for å skape en oversikt av høy kvalitet (Borah et al., 2017). Denne kvaliteten vil bli begrenset av *rapid review* som metode. Flere av svakhetene nevnt i systematiske litteraturgjennomganger gjelder og for *rapid* reviews, noen av de i større grad. Dette gjelder spesielt partiskheten. Den har allikevel bygget legitimitet på grunn av dens nødvendighet med tanke på tiden som er tilgjengelig. Måten man utnytter den kortere tilgjengelige tiden er mer fokuserte spørsmål, mindre sofistikerte søkestrategier og enkel kvalitetsvurdering (Grant & Booth, 2009).

3.2 Min arbeidsmetode

Denne litteraturgjennomgangen skal sette lys på hvordan rike oppgaver fungerer som tilpasset opplæring. Jeg vil både se på hvordan de blir designet og brukt i klasserommene. Videre vil jeg se på hvordan oppgavene kan bli begrunnet som en form for tilpasset opplæring. Fire hovedmomenter må så tas i betraktning før forskningen kan begynne. Hva er forskningsspørsmålet, hva er inklusjons-, og eksklusjonskriterier, hva er søkestrategien og hva er metodene (Borah et al., 2017).

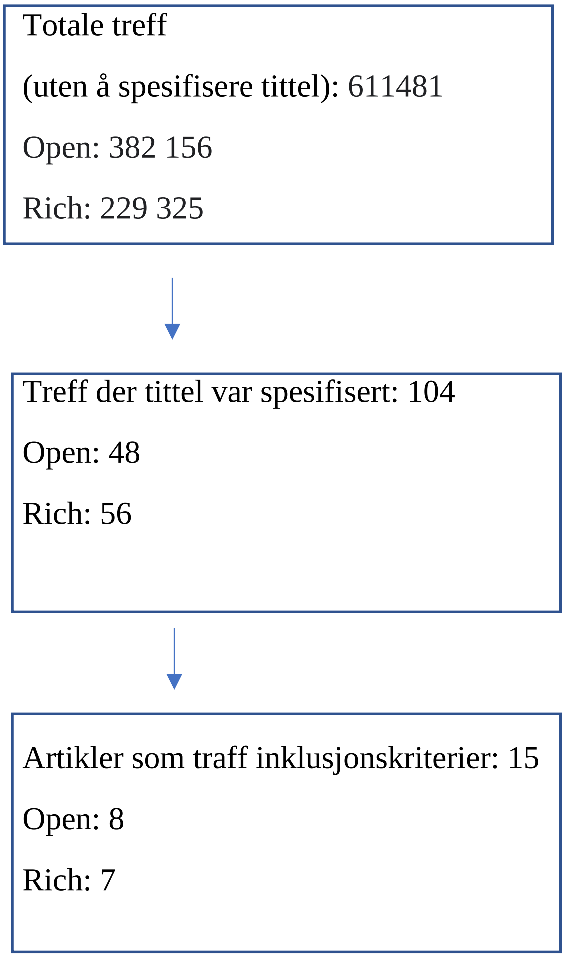
3.2.1 Søketermer

Søketermene mine er *mathematic**, *rich* ELLER *open* og *tasks*. Det vil si at alle artiklene omhandler matematiske oppgaver, og enten begrepet rike eller åpne blir benyttet. Jeg søkte først på artikler der de tre ordene befant seg i tittelen for å finne tekster som nærmest mulig svarer spørsmålene jeg lurte på. Etter det utvidet jeg til at ordene måtte være til stedet i teksten for å finne mer forskning. Litteraturdatabasen jeg brukte er Oria. Begrunnelsen for valget av søketermer er at de ga en grei mengde artikler, rundt 150, og mange som omhandlet temaet jeg vil forske på. Jeg har både rik og åpen fordi rike oppgaver er en type oppgave der mange ulike ord blir brukt. Jeg så også på resultatene av utforskende og problemløsning som søketermer før jeg endte opp med mine endelige søketermer. Ved å benytte to ulike begreper for oppgavedesign kan jeg også undersøke hva som skiller de. Jeg lette også etter skandinaviske artikler for å finne forskning nær den norske skolekulturen, men det var nesten ingen forskning om slike oppgaver der.

3.2.2 Inklusjons-, og eksklusjonskriterier

For å velge artiklene mine, så jeg gjennom sammendragene i søk etter forskning som følger kriterier jeg leter etter. De inklusjons-, og eksklusjonskriteriene har jeg punktert ned i en liste her.

- Fagfellevurdert
- Fulle artikler
- Forskningen må vise enten rike eller åpne oppgaver som blir designet eller testet ut i praksis
- Elever som gjennomfører oppgavene må være grunnskoleelever



Figur 1: Flytdiagram for hvordan artiklene ble sortert og vurdert

Jeg valgte å ikke ta med tilpasset opplæring da denne oppgaven handler om å finne svar på hvordan man kan bruke rike oppgaver nesten som en erstatning. Jeg valgte også å ikke ha de med på grunn av en av svakhetene til forskningsmetodene mine. Denne svakheten er at metoden kan ha en uforutsett partiskhet med tanke på hvilke artikler som blir brukt for å besvare forskningsspørsmålet mitt. Jeg vil finne artikler om rike oppgaver, uavhengig om de er blitt rammet inn som tilpasset opplæring.

Søkestrategien i denne oppgaven besto i å kopiere alle artikler inkludert i søketermene mine inn i *Endnote* fra Oria. Dette er både for å få en oversikt over alle artiklene og at jeg lettere kan bla gjennom for å finne de som kan besvare problemstillingen min. Artiklene som blir valgt ut i oppgaven min er de artiklene som omhandler undersøkelser om rike og åpne oppgaver som blir designet eller prøvd ut i klasserom.

For å systematisere funnene mine har jeg satt opp en liste med punkter. På den måten får jeg en oversikt over de ulike artiklene jeg har undersøkt og deres resultater. Ved hjelp av punktene får jeg både en systematisering av hva de ulike forskerne så på, og hvordan de rike oppgavene ble omtalt. Under ser du listen jeg har tatt opp. Som sagt så er tilpasset opplæring ikke et fokus ennå, da jeg senere vil se funnene opp mot denne teorien. I resultatdelen vil det først være en tabell med generell informasjon om de ulike artiklene. Så er dataen delt i to, kriterier for rike oppgaver og lærerhandlinger. Selve oppgavene blir vist som et vedlegg for oversikt, se *vedlegg 1*.

3.2.3 Mine punkter fra teori

For å analysere artiklene i litteraturgjennomgangen på en oversiktlig måte, har jeg satt opp punkter for hva jeg leter. Valget av punktene er for å gi meg den nødvendige informasjonen jeg trenger for å vurdere rike oppgavers effekt som tilpasset opplæring.

- Oppgavene
- Formålet med undersøkelsen
- Metode
- Deltagere
- Konklusjon
- Kriterier for rike oppgaver
- Lærerhandlinger

4 Analyse

I analysedelen har jeg notert ned funnene mine fra arbeidet med å lese gjennom forskningen. Funnene som står her er informasjonen som kan belyse problemstillingen min, med mål å finne ut om verdien til rike oppgaver som tilpasset opplæring. I *tabell 1* er artiklenes formål, metode, deltagere og konklusjon skrevet for oversikt. Etter det står det om oppgaveaskepter til de rike oppgavene og lærerhandlinger nedskrevet.

	Formål	Metode	Deltagere	Konklusjon (der det omhandler mitt forsknings-spørsmål)
Artikkel 1 Developing mathematical fluency: comparing exercises and rich tasks (Foster, 2018)	Hvordan brukes rike oppgaver for å bygge *procedural fluency*	Observering Analyse av prøver	241 elever i alderen 12-14 år	Om du bruker tradisjonelle eller oppgaven som ble testet her, gjør det ikke mye forskjell
Artikkel 2 Developing assessment literacy through approximations of practice: Exploring secondary mathematics pre-service teachers developing criteria for a rich quadratics task (Ayalon & Wilkie, 2020)	Hvordan kan lærere utvikle vurderingskunnskap ved å designe og *refine* rike oppgaver	Analyse av oppgavehefte	60 lærerstudenter i Israel	Lærere så viktigheten av å vite hvor eleven lå matematisk for å designe oppgaver for dem
Artikkel 3 Prospective and In-Service Mathematics Teachers' Attention to a Rich Mathematics Task While Planning its Implementation in the Classroom (Ayalon et al., 2020)	Hvordan bruker lærere læringstriaden mens de designer opplegg rundt en rik oppgave	Analyse av oppgavehefte	18 lærere og 17 lærerstudenter i Israel	Lærerne hadde stort fokus på matematisk utfordring. Tolkning av oppgaven på forhånd vil gjøre det lettere å presentere den for klassen
Artikkel 4 Exploring the usefulness of rich mathematical tasks to enhance students' reflective thinking (Fitriati et al., 2020)	Hvordan bruker lærere rike oppgaver til å styrke elevers reflekterende tankegang	Leksjonsstudie	28 7. klassinger i Indonesia	Rike oppgaver fungerer for å promotere reflekterende tenkning
Artikkel 5 Motivating Learning in Mathematics Through Collaborative Problem Solving: A Focus on Using Rich Tasks (Hussain & Mirza, 2014)	Hvordan blir læring og motivasjon påvirket av rike oppgaver	Kvalitativt forskningsparadigme Aksjons-forkning Semi-strukturert intervju før og etter.	20 9.klassinger i London	Rike oppgaver ga motivasjon, ulike nivåer for ulike elever, muligheter for samarbeid, *encouragement* til å bygge selvtillit og selvstendighet. Lærers rolle var viktig i å styre matematisk diskusjon, skape gode grupper, sørge for at oppgaven var matematisk relevant. Vurdering viktigst i å forstå lærers forandring i strategi.

				Rike oppgaver mer nyttige om elever jobber i grupper.
Artikkel 6 Building an Igloo: A Rich Source of Mathematics For Young Children (Knowles, 2009)	Hvordan blir metakognitive ferdigheter utviklet gjennom en rik oppgave	Leksjonsstudie	En 1.klasse i Tasmania	Oppgaven var engasjerende, åpen, kinestetisk og utfordrende, men overkommelig
Artikkel 7 Responding to Students' Work on a Rich Task (Emily & Patrick, 2013)	Læreres refleksjon over hvordan de jobber med rike oppgaver	Leksjonsstudie	Står ikke	Lærere forstår grunnen til refleksjon og argumentering, men de fleste elever vil bare gå videre når de har funnet et svar
Artikkel 8 Opening mathematical problems for posing open mathematical tasks: what do teachers do and feel? (Klein & Leikin, 2020)	Undersøker læreres ferdigheter med å bruke åpne oppgaver og deres holdninger til de	Observering Analyse av oppgavehefte	44 lærere fra ulike trinn	Fire hovedstrategier for å åpne en oppgave. Legge opp til flere løsninger, redusere kondisjoner, endre innhold eller kontekst og kreve generalisering. En enkel oppgave i læreboka kan noen av de mer erfarne lærerne åpne med en gang. Mer kompliserte oppgaver krever arbeid på forhånd. Krav om fleksibilitet fra både lærer og elever er grunnen til at åpne oppgaver ikke blir mye brukt.
Artikkel 9 Stimulating mathematical reasoning with simple open-ended tasks (West, 2018)	Presentasjon av åpne oppgaver med beskrivelser			
Artikkel 10 On the way to develop open approach to mathematics in future primary school teachers (SamkovÁ & TichÁ, 2016)	Undersøker hvordan undervisningen til fremtidige lærere legger opp til mer åpen undervisning	Observasjon	29 lærerstude nter i Tsjekkia	Forespørsel-baserte opplegg har positiv effekt på elevers prosessutvikling

Artikkel 11 The derailing impact of content standards–an equity focused district held back by narrow mathematics (LaMar et al., 2020)	Hvordan påvirker *narrow* undervisning *equityen* i faget	Leksjonsstudie	8 lærere og 41 elever fra to ulike ungdomsskoler i California	Mangel på åpen matematikk gjøre det vanskeligere å få til at elever jobber på ulike måter på ulike nivåer. Åpne oppgaver legger til rette for at alle i en gruppe kan kontribuere med sine ideer. *Smal* matte fører til binær tolkning av elevenes kompetanse. Rask opp mot treig, eller smart opp mot dum.
Artikkel 12 Open Tasks in Mathematics: Experiences with one Problem Field (Pehkonen, 2018)	Hvordan fungerer åpne oppgaver i praksis	Leksjonsstudie Prøve	En klasse i Helsinki	Alle elever var engasjerte. Lærer mente allikevel det er bra å variere fra slike oppgaver før det ble for mye, og motivasjon ble borte
Artikkel 13 Teaching Early Mathematics 'Smarter Not Harder': Using Open-ended Tasks to Build Models and Construct Patterns (McKnight & Muligan, 2010)	Hvordan responderer unge barn på åpne oppgaver innenfor konstruksjon og mønsterarbeid	Action-research study	En klasse i Sydney	Ved å bruke velformulerte, åpne oppgaver kan både lærere og elever jobbe "smartere, ikke hardere"
Artikkel 14 Open-ended Tasks in the Promotion of Classroom Communication in Mathematics (Floriano & Inês Bernardo, 2012)	Hvordan åpne oppgaver blir brukt for å promotere kommunikasjon i klasserommet	Observasjon Intervju	To lærere i en 7. klasse	Kommunikasjon og arbeid ble styrket av at lærer ga mer oppmerksomhet til elevenes svar og at oppgaven krevde mer fra elevene kognitivt.
Artikkel 15 Exploring Open-ended Tasks as Teacher Learning (Sullivan et al., 2009)	Hvilke muligheter og restriksjoner opplever lærere når de jobber med åpne oppgaver	Leksjonsstudie	Uspesifikt antall lærere	Slike oppgaver kan bli brukt for å engasjere elever til å skape matematikk for seg selv. At lærere kan skape effektive opplegg rundt åpne oppgaver

Tabell 1. Oversikt over artiklene i denne litteraturgjennomgangen

4.1 Formålet til oppgavene som er tatt opp i de ulike artiklene

Før en oppgave skal presenteres og gjennomføres, bør målet med oppgaven være klart for lærer. Dette er for å sørge for at den kan brukes på en måte som bringer ønsket læring for elevene. De aller fleste artiklene jeg leste gjennom i denne litteraturanalysen har beskrevet slike tanker, både de som gjennomføres i klasserom og for lærere. I dette avsnittet har jeg fordelt formålene inn i tre grupper. Det er ikke slik at hver oppgave har et enkelt mål, men heller et hovedformål fulgt av annen ønsket kunnskap. Først gruppe er innøving av algoritmer og andre utregningsmetoder. Dette blir arbeidet med i artikler 1, 5, 6 og 14. Det handler om hvordan man løser ligninger eller hvordan man konstruerer en graf. Hvilke strategier finnes for å telle blir vist i artikkel 6 der klassen bygger en iglo sammen.

Neste type formål er matematisk tolkning, resonnering og argumentasjon. Jeg har vist de som samme formål da de alle handler om forståelsen elevene viser rundt matematikken de jobber med. De begrepene ble funnet i de aller fleste oppgavene. Hvilken form for tolkningsprosess og hva som skal resonneres varierte fra oppgave til oppgave allikevel. Artikler 2 og 3 om grafer handler om å trekke ut viktig informasjon fra det man ser for å kunne forklare et matematisk fenomen. Slik informasjonssanking blir også videre funnet. Tolkning ble også funnet som begrunnelse av hvorfor svaret man har gir korrekt svar. Begrunnelser for hvorfor det kan være mer enn et svar, eller hvor mange løsninger som faktisk finnes eksisterer også. I tillegg til resonnering, vil oppgaven i artikkel 7 støtte utforskningsevnen til elevene. Begrunnelser går videre inn i argumentasjon. Hovedfokus på argumentasjon blir gjort mest tydelig i artikler 9 og 10. Der er ulike løsninger allerede vist og elevene må selv vurdere løsningene og argumentere for seg selv og andre om hvorfor de ulike løsningene er korrekte.

Et annet formål er øvelse av konstruksjon. I de tre artiklene der noe fysisk blir bygget er vanskelighetsnivået på konstruksjonene varierende. Variasjonen blir enda større i to av artiklene der elevene selv får velge hvordan skapelsen deres skal se ut, så lenge den følger kriteriene gitt. De tre artiklene viser også hvordan oppgaver har flere formål. Der en bro skal konstrueres i artikkel 5 jobbes det også med øving av Pytagoras’ og trigonometri. Der et hus skal bygges i artikkel 13 handler det også om argumentasjon og mønsterforståelse.

4.2 Ulikheter i definisjon av rike eller åpne oppgaver

For å vurdere oppgavene som er både blitt gitt elever og skapt av lærere i tekstene jeg har funnet fram, er det nødvendig å vite hva slags grunnlag de er bygget opp fra. For å forstå dette har jeg sett på de første delene av artiklene og lett etter deres definisjon eller forklaring av rike, eller åpne, oppgaver. Dette har jeg også gjort for å lete etter forskjeller i kriterier som kreves, samt forskjeller mellom de to ulike begrepene. Ut ifra det jeg har lest hittil så er oppgaver beskrevet som *rike* ganske like *åpne* oppgaver. I artikkel 11, derimot, la jeg merke til at rik matematikk ble beskrevet som en del av åpne oppgaver. At dette er en egenskap som må komme til stede da matematikkproblemer åpnes opp. Denne artikkelen handlet om hvordan *smal* matematikk påvirker forventninger av matematisk utvikling hos elevene, og hva som kreves for å gå fra noe smalt til åpent.

Artikkel 3 er første artikkelen som viser til forskningsteori bak design av oppgaver, men den fokuserer mest på modellen om en læringstriade. Denne læringstriaden har allikevel et sentralt punkt som også er sentralt i kriteriene jeg har lett etter. Det er den ene vinkelen til triaden om matematisk utfordring jeg da refererer til. De andre to punktene i denne modellen, *management of learning* og sensitivitet, vil jeg komme tilbake til da jeg ser på lærers rolle i undervisningen.

I artikkel 4 blir flere kriterier for rike oppgaver tatt opp. Elever skal bli utfordret i læringsprosessen. Sammenhenger skal bli skapt mellom konsept og ide. Det skal utvikles en kompleks argumenteringsprosess for problemløsning. Reflekterende tenkning skal støttes. Siste punktet er at oppgaver som tar opp kontekster fra elevenes verden skal løses. Det betyr at matematikken de jobber med må kunne finnes i praktiske situasjoner i den virkelige verden. Neste artikkel forteller at oppgavene bør være utfordrende, men tilgjengelige. De som løser oppgavene raskt, skal kunne få oppfølgingsspørsmål som sørger for dypere forståelse av temaet eller konseptet som bearbeides. De som synes det er vanskelig, skal ha mulighet til å få hjelp av andre.

Angående åpne oppgaver var det flere av artiklene som også hadde definisjoner skrevet ned. Artikkel 8 forteller om fire ulike typer åpne oppgaver. Hva som skiller typene er skrevet i *tabell 2*.

	Start	Slutt
Multiple strategi oppgaver MSO	Åpen	En løsning
Multiple løsninger oppgaver MLO	Åpen	Flere løsninger
Investigasjons oppgaver IO	Åpen	Flere løsninger
Sorterings oppgaver SO	Åpen	Flere løsninger

Tabell 2. Ulike typer åpne oppgaver tatt opp i artikkel 8

Som man ser, tillater tre av de ulike typene flere løsninger som endelig svar. Multiple strategier handler om at måten elevene skal finne svaret ikke er gitt på forhånd, men det er et ønsket svar lærer er ute etter. Investigasjon og sorteringsoppgaver gir begge mulighet for ulike løsninger ut ifra hvordan elevene begynner. I sorteringsoppgaver må elevene finne kriterier selv for det de leter etter for å kategorisere funnene deres. Eksempel på dette kan man se i oppgavene i artikkel 9 i tillegg til oppgaver designet i denne artikkelen.

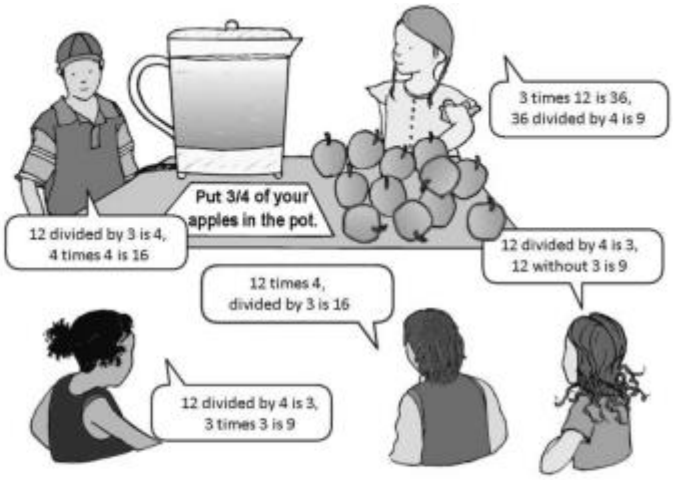
Åpne oppgaver tillater ulike nivåer av matematisk resonnering er en egenskap som er krevd i artikkel 9. Denne spredningen i resonneringsmuligheter blir også tatt opp i artikkel 11. Der er det i tillegg kriterier om at oppgaven skal tillate ulike modeller eller figurer for å finne et svar til problemet. Siste artikkel som viser fram en definisjon av åpne oppgaver er artikkel 12. Der er det gitt en del ulike kriterier. Der står det at startpunkt og mål ikke skal være gitt for eleven. Arbeid i oppgaven skal også tillate mer frihet i arbeidsmetoder. Ulike løsninger skal bli gitt samme verdi, og oppgavene kan ha enten en, flere, eller ingen løsninger.

4.3 Oppgaveaspekter og kriterier for rike oppgaver

Jeg vil her ta opp funnene mine fra ulike oppgaveaspekter og kriterier for rike oppgaver som jeg fant i artiklene. Fokuset mitt har vært å undersøke hvilke valg som er gjort for å skape resultatene som rike eller åpne oppgaver ønsker. Dette vil jeg gjøre ved først å ta opp formålet til oppgavene, slik at tanken bak kan belyse deres valg og effekt. Jeg ser også etter hva slags type tanker lærere har rundt hva de ønsker fra rike oppgaver. Så kommer de ulike kriteriene som jeg viste til i beskrivelsen av slike oppgaver tidligere.

4.3.1 Ulike løsningsmetoder i ulike nivåer

Et av kriteriene jeg så i beskrivelsen av alle typer synonymer for rike oppgaver er at oppgaven skal legge opp til ulike løsningsmetoder. Dette har jeg observert i rike oppgaver, åpne oppgaver, problemløsningsoppgaver, utforskningsoppgaver og så videre. Da mitt søk har holdt seg til enten rike eller åpne oppgaver vil dette kriteriet være interessant å finne i ulike oppgaver. Her viser jeg til hvordan de ulike oppgavene gir mulighet for å bli løst på ulike måter.



Hvem har et korrekt svar?

Figur 2. Tegneseriestripe, hentet fra artikkel 10, (SamkovÁ & TichÁ, 2016)

4.3.1.1 Flere løsninger

I noen av tekstene som definerer oppgavene sine som åpne, vil også svaret kunne være ulikt avhengig av hvordan den blir løst. Oppgavene i artikkel 9 gir mulighet til at den endelige løsningen kan være mye forskjellig. Elevene får bilde av tre geometriske figurer og spørsmålet *hvem skal ut*. Der kan eleven argumentere for at trekanten skal ut, for det er den eneste figuren med tre kanter. Ellers så kan de forklare at sirkelen er den eneste figuren som alltid vil være symmetrisk så lenge du drar en linje gjennom midtpunktet. Da oppgaven er så åpen som den er, kan elevene bruke den matematikken som er på et utfordrende nivå for seg selv når de løser den. Tegneseriestripen i artikkel 10, se *figur 2*, har mye til felles med denne oppgaven, der svarene er gitt og elever må argumentere for dem. Konstruksjon er en annen arbeidsmetode som elever jobber med i noen av oppgavene. Ved at de selv velger hva de skal konstruere vil løsningsmetodene variere. Dette kan ses i oppgaven til artikkel 5, der de selv velger designet til en bru de skal konstruere. Det betyr at den kan kreve avanserte kalkulasjoner eller enkle kalkulasjoner når det kommer til for eksempel vinkelmåling. Huset som skal bygges i artikkel 13 og igloen handler ikke like mye om ulike måter å konstruere på, men tankene bak designet. Det er allikevel valg eleven gjør med hvordan huset skal se ut som fører til resonnementer angående hva de trenger av materialet og hva som skal hvor. Når vi leter etter ulike løsningsmetoder, vil det her blir fokusert på hvor matematisk resonnering bak hvordan du danner mønster. I artikkel 1 sin oppgave skulle elevene avslutte med å velge tall de kan putte inn i en polygonsfigur for å skape et sett med ligninger. Matematisk resonnement og vurdering kommer i form av at figuren skal være pen og ryddig. Dette gir mulighet for tolkning av hva dette betyr matematisk, og elevene får argumentere for valgene de har gjort. Der for de fritt valg for hvilke tall de vil bruke så lenge det blir korrekt matematisk. Variasjonen her kan sees i hvor vanskelige ligninger de gir seg selv, eller hvordan de finner ut at settet med ligninger fungerer.

4.3.1.2 Flere strategier

Graden av variasjon angående mulige strategier var ulikt i de ulike artiklene. Noen artikler hadde variasjon mest i form av ulike algoritmer som kunne brukes. Del 1 av artikkel 1 sin oppgave var et eksempel på dette. Oppgaven var en visuelt interessant måte å engasjere elevene til å jobbe med enkle førstegradslikninger. De to delene viser til to ulike måter variasjonen forekommer, enten ulike strategier å regne ut et stykke, eller ulike tanker fører til ulike veier.

Artikkel 4 sine tre oppgaver hadde alle et fast svar, men uten en klar måte å løse de på. Noen av spørsmålene brukte ord som “hva tror du” for å legge vekt på at svaret ikke nødvendigvis var det viktigste. Da de spør om hvor mange biler eleven tror er med i trafikkorken ber de elevene om å skrive ned alle kalkulasjoner og estimeringer. Ut ifra informasjon eleven har, kan de for eksempel multiplisere opp gjennomsnittlige lengde av biler inn i strekningen som blir gitt. Ulike måter å regne ut noe, eller ulike representasjonsformer brukt blir også sett i artikler 3, 7 og 14. De ulike oppgavene gitt kan løses visuelt, grafisk, numerisk eller symbolsk. I artikkel 7 sin oppgave kan det visuelle for eksempel være rutenett eller del-hel-tallinjer. I oppgaven som omhandler iglobygging, for elevene mulighet til å variere deres strategier for telling og estimering. Det opplegget legger opp til grunnleggende matematikk da arbeid er med de yngre elevene i grunnskolen.

4.3.1.3 Artikkel 8

Temaet for denne oppgaven er et prosjekt kalt *Math-Key*. Dette prosjektet, gjennomført i Israel, består i å gi fremtidige lærere erfaring med å åpne opp matematikkoppgaver. Deltagernes evne til å jobbe med og benytte åpne oppgaver ble analysert i denne undersøkelsen. Lærere blir oppfordret til å omgjøre oppgaver i tekstbøkene om til åpne oppgaver. På grunn av størrelsen i dette prosjektet, ble en god del ulike oppgaver tatt opp. De fire typene for åpne oppgaver, *se tabell 2*, gir også ulike mulighet for løsning på flere måter. En av oppgavene viser et parallellogram der ulike sider og linjer har blitt identifisert i form av bokstaver. Dette er en multippel strategi oppgave der målet er å bevise at to linjer er lik størrelse. Denne geometrioppgaven har da bare et svar, som allerede har blitt gitt til og med. Hvilke utregninger elevene gjør, hvilken vei eller geometriske konsepter de bruker i beviset er da de ulike løsningsmetodene som er mulige å finne. For eksempel så kan symmetri kan bli brukt, trigonometri kan og blir brukt. Et stikkord gitt for elevene er at de skal løse oppgavene på så mange måter som mulig. Før den ble åpnet så ga den originale oppgaven i geometri mer informasjon om figuren, for å gi elevene et startpunkt. Oppgaven som benyttet multiple løsninger var en tekstoppgave om to personer som går samme vei. Farten til de som går og strekning mellom de er blitt gitt, og man må finne ut av strekningen mellom de om en time. En slik oppgave er åpen for tolkning der den som løser oppgaven må vurdere hvor personene står i forhold til hverandre og hvilke retninger de beveger seg i. Dette er en enkel måte og se hvordan en oppgave kan gi i hvert fall fire ulike svar som alle krever utregninger. Den originale oppgaven beskrev retningene. Oppgaven som omhandler investigasjon, var originalt et spørsmål om en fjerdegradsligning bare har to ekstrempunkter. Den ble åpnet ved å gjøre om spørsmålet til hvor mange ekstrempunkter kan en polynomfunksjon opphøyd i et partall ha. Den siste typen, sortering, var innen algebra. Her var den åpnede oppgaven at elevene skulle sortere funksjoner etter kriterier de selv velger. Før så hadde de allerede fått et kriterium. Denne typen ligner mye på *hvem skal ut*-oppgaven der forklaringene og løsningen avhenger av tankegangen til elevene. Det kan være en enorm mengde ulike rekkefølger, som krever ulik vanskegrad av matematikk. Det kan være hvor de krysser y-aksen eller hvor ekstrempunktene oppstår. Det var multiple strategier som ble funnet i størst grad av lærerstudentene som designet egne oppgaver.

4.3.2 Være engasjerende

Det neste kriteriet jeg så etter var hvordan engasjement og motivasjon ble initiert. Denne motivasjonsbyggingen kommer ofte fra hvordan lærere støtter elevene (Katz & Shahar, 2015), men her er jeg mer interessert i hva selve oppgaveteksten sier. Dette engasjementet kan for eksempel forekomme i form av at oppgaven føles annerledes enn det elevene er vant til. I artikkel 1 kan dette bli eksemplifisert ved at elever ofte kommenterte det provokative utseende til oppgaven, ifølge forfatter. Arbeidet med ligningene foregår som normalt, men innpakningen er interessant og fanger oppmerksomheten til klassen. Praktisk arbeid er noe man ikke ofte finner i matematikkundervisninger og vil derfor være en form for variasjon, gi elevene en pause fra oppgaveskriving. Da rike oppgaver er ganske annerledes enn tradisjonelle oppgaver, vil denne variasjonen være til stede i de fleste klasserom som jobber mer åpent. Dette praktiske arbeidet finner man, som tidligere beskrevet, i flere av oppgavene jeg har undersøkt. I iglobyggingen fikk de også en form for ytre motivasjon ved at igloen skulle bli stående i klasserommet som en premie. De kunne bruke den som en leseplass. En annen form for variasjon er at de jobber mer utforskende og resonnerende, så de får muligheten til å gjøre noe annet enn å repetere algoritmer. Artikler 9 og 10 sine oppgaver legger begge opp til mulighet for ulike svar. Ved at elevene komme med sine egne argumenter for deres egne svar, får de mulighet til å diskutere med andre. *Hvem skal ut* er også utformet likt som spillet på *Nytt på Nytt*, og legger opp til litt lekent arbeid.

Engasjement kom også i form av å trekke matematikken opp mot den ekte verden. I artikkel 4 ser man dette i form av at eleven får skape en oversikt over en trafikkork ved å bruke ulike utregninger og andre matematiske konsepter. I artikkel 15, der de lager et tidskjema for en kino, ser de hvordan matematikken har en rolle i diverse jobber. Her dannes engasjement ved at de ser en grunn til at de jobber med faget (John et al., 2020).

4.3.3 Gi mulighet for reflekterende og kritisk tenking

Støtting av refleksjon og kritisk tenkning var et annet oppgaveaspekt som ble tatt opp innen både rike og åpne oppgaver. Og som de andre egenskapene hittil, finner man tydelige eksempler på denne innenfor oppgavene vist. Arbeid innen refleksjon og kritisk tenkning har jeg allerede kommentert i flere av de tidligere punktene. Grunnen er at det var formålet for noen oppgaver, påvirkning til engasjement eller variasjon av arbeidsmetoder i andre. Her vil jeg konkretisere og tydeliggjøre hva det er som faktisk gjør at oppgaven utfordrer elevenes evne til å gjøre matematiske refleksjoner rundt deres valg.

4.3.3.1 Tolkning

Tolkning er et av punktene som fører til en slik refleksjon. Ligningspolygonen som elevene skal utforme selv bruker beskrivelsen pen og ryddig. Her må elevene tolke hva pen og ryddig kan bety i en matematisk sammenheng, samt argumentere for begrunnelsen deres. Er dette at x-verdien alltid skal ende som et positivt heltall, eller at det alltid skal kunne være mulig å finne verdiene med et steg. Informasjonssanking, eller investigasjon, er et annet punkt. Dette blir vist som en av oppgavetypene for åpne oppgaver i artikkel 8. Artikler 2 og 3 handler om å vurdere grafer og funksjoner, og finne nødvendig informasjon som kan trekkes ut. Det å finne ut av hva som er den nødvendige informasjonen i teksten eller figuren vi ser er også sentralt i de ulike oppgavene i artikkel 4.

4.3.3.2 Resonnering

Resonnering rundt matematiske valg handler og om vurdering av hva man velger. Det handler om å kunne argumentere for valget sitt. De praktiske oppgavene krever også refleksjon over hvordan elevene går fram i konstruksjonen deres. Hvorfor velger de for eksempel å bruke de redskapene og den kalkulasjonen når de former støtten til brua. Hvordan bør former være for at den skal kunne stå oppreist. I huset de konstruerer i den andre oppgaven må de finne ut av hvordan de kan skape et mønster rad for rad, og hva som gjør det til et mønster. *Hvem skal ut* i artikkel 9 og tegneserien i artikkel 10 er muligens de to oppgavene som oppfordrer til størst grad av reflekterende tanker hos elevene. De ulike oppgavene krever ingen kalkulasjoner eller utregninger for å komme fram til et svar. Alt handler om et mentalt valg elevene gjør, når de velger ut et av de ulike svarene som allerede er vist i oppgaven. Refleksjonen hos eleven kan lærer observere i hvordan valget deres blir argumentert for. Hvordan benytter eleven deres kunnskap innenfor faget til å vurdere at en figur ikke samsvarer med de to andre. I artikkel 10 vurderer eleven sitatet til en av de ulike personene og forklarer hvorfor deres løsningsstrategi ledet til riktig svar. De kan fortsette med å vise hvilke andre som også hadde rett, og hvilken feil som ble gjort i andre svar. Denne oppgaven gir også klassen mulighet til å se sammenhenger mellom ulike måter å regne samme oppgave på. Avhengig av hvor de ligger i faget, eller hvilket trinn de er, kan de få erfaring i for eksempel assosiative og kommutative lover.

4.3.4 Oppmuntre til kreativitet

Ved at de er åpne og elevene ikke har fått en løsningsmetode på forhånd vil et nivå av kreativitet også bli synliggjort i slike oppgaver. Dette er også en av egenskapene som det ble beskrevet at både rike og åpne oppgaver bør ha. Artikkel 8 sin beskrivelse av kreativitet i matematikk er nettopp det å vise fleksibilitet når det kommer til ulike strategier for en oppgaver. Det sto ikke mye spesifikt om et mål i å styrke elevers kreativitet i de fleste artiklene, men denne egenskapen ble allikevel observert i gjennomføringen. Der det ble observert, var det tanken om ulike løsningsmetoder som oftest ble tatt opp som eksempel. Elevenes evne til å forstå hva de kan bruke som redskap for å takle problemet de står ovenfor er en form for kreativitet. Flere av artiklene tok opp presentasjoner av løsninger og løsningsmetoder på slutten av undervisningen. Som artikkel 10 og tok opp, var akseptering av ulike løsninger en norm som klasser jobbet med. Ved at elevene kan få se ulike måter å jobbe med en oppgave, vil dette gi mulighet for inspirasjon. I oppgaver med flere ulike løsninger blir de unge oppfordret til å finne andre svar når de har presentert sin første. Dette ble vist i trekanten der de skulle fylle tomme ruter og *hvem skal* ut, for eksempel. En slik oppfordring fører til at elevene må gjøre noe annet enn det de er mest vant til. En annen form for kreativitet er de ulike praktiske oppgavene, med unntak av artikkel 6 sin iglobygging. I den oppgaven handlet kreativiteten mer om det rent matematiske, som hvordan de går fram for å finne tellestrategier. I de to andre kunne kreativiteten også bli sett i det estetiske. De skal skape noe helt selv, noe de har identitet over og kan velge utseende på. Da vil deres nivå i matematikk i konstruksjonen av en bro legge til rette for hvor interessant bro de får til å lage. Det kreative arbeidet elevene gjør blir også sett i deres kritiske tenkning. Artikkel 1 sin polygon legger opp til kreativitet i beskrivelse av valget til den som gjennomførte oppgaven.

De må løse en oppgave via å tolke adjektivene pen og ryddig og en så åpen og reflekterende oppgave krever en annerledes tankegang for å ha en troverdig begrunnelse av eget svar.

4.3.5 Støtte kommunikasjon og diskusjon

En rik oppgave skal støtte utvikling av elevers evne til å forklare deres matematiske tankegang og argumentere for deres valg av arbeidsstrategi (Piggott, 2008). Som med de første kriteriene jeg har sett på, har jeg funnet en del eksempler på hvordan denne egenskapen blir vist i praksis i de ulike oppgavene. Arbeidet med kommunikasjon og diskusjon i disse oppgavene er sterkt knyttet til både kriteriet om ulike løsningsmetoder og refleksjon. Det er i alle fall informasjonen jeg har funnet etter å ha lest de ulike artiklene. Kommunikasjon og diskusjon forekommer også ved hjelp av gruppearbeid og felles diskusjoner i klasserommet. De to punktene vil jeg se mer på i kapitlet om lærerens rolle i undervisningen. Men det er også en gjennomgående rød tråd mellom de ulike måtene oppgaven legger opp til diskusjon. Sammenligning av ulike løsninger og/eller svar på en oppgave kan forekomme naturlig mellom elever som sitter ved siden av hverandre. Den kan også bli initiert av lærer som tar opp ulike løsninger gjort av elever foran resten av klassen. En tredje måte er at elevene jobber i grupper med oppgaven, og de ulike medlemmene, med deres unike erfaring, bringer ulike tanker om hvilken vinkel problemet bør angripes fra. Den siste måten slik sammenligning forekommer er i de felles diskusjonene som lærer også setter opp og styrer. Slike sammenligninger kan man se i de aller fleste artiklene da ulike løsningsmetoder var en av de mest sentrale kriteriene for oppgavene jeg undersøker. Sammenligningene, og diskusjonen som forekommer på grunn av de, er også avhengig av elevers argumentasjon og forklaring over eget arbeid. Denne argumentasjonen har jeg allerede beskrevet som veldig tydelig i artikler 9 og 10, de to artiklene der svaralternativene blir funnet på arket før elevene i det hele tatt begynner. Da alt arbeidet handler om valg og forklaring er kommunikasjon nødvendig for at elevene skal kunne vise hva de får til ovenfor lærer. Sammenligninger gjort gir også mulighet for elever å se verdier i hverandres svar og løsningsmetoder.

Artikkel 6 skiller seg ut fra de andre med tanke på samarbeid og kommunikasjon, da hele opplegget arbeides med i et felleskap. Og dette felleskapet er hele klassen, da det bare er en iglo som bygges. Samarbeidet foregår både praktisk i form av konstruksjonen, og matematisk. Det matematiske er konstante diskusjoner om hvordan man kan telle opp antallet de hittil har, og hvor mange flasker de trenger videre.

4.3.6 Støtte elevers autonomi

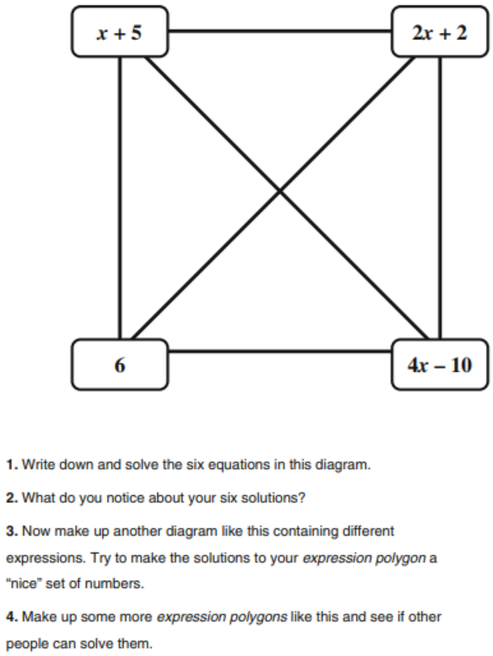
Autonomi er siste kriteriet jeg har sett etter i forskningsarbeidet mitt. Det jeg har lagt mest merke til er hvordan variasjonen av løsningsmetoder har gitt elevene mulighet til å styre hvordan de vil arbeide på en måte som passer dem. De får også mer frihet til å vise sin identitet da arbeidet fram til svaret har minst like stor vekt som deres løsning på oppgaven. Det vil si at frykten for å ta feil ikke trenger å ha like stor påvirkning som den ofte har på elever. Hvordan denne frykten kan påvirke elevene negativt, ser man godt i teorien om prestasjonsmotivasjon (John et al., 2020). Det praktiske arbeidet i artikler 5 og 13 gir også større mulighet til egen utfolding basert på elevene selv, uten ytre påvirkning. Alt dette var allikevel avhengig i at matematikk og matematisk utvikling var til stede i gjennomføringen.

4.4 Lærerhandlinger

Det å putte en rik oppgave foran en elev er åpenbart ikke alt lærere trenger å gjøre for å sørge for at læring forekommer. Derfor har jeg sett gjennom hva som blir beskrevet av lærerhandlinger i de ulike gjennomføring av opplegg i forskningen. Denne delen var ikke beskrevet i like mye detalj som selve oppgavene, la jeg merke til. Dette gjaldt store del av datamaterialet mitt. Det var allikevel viktige eksempler og beskrivelser som jeg har valgt å videre notere her. Jeg har, i likhet med kriterier for oppgaver, valgt å dele opp lærerhandlinger i ulike typer. Første formen for lærerhandling jeg tar opp er lærers forhåndsarbeid og oppstart. Det neste punktet er hvordan læreren skaper engasjement hos eleven. Etter det ser jeg på lærers valg av om arbeidet skal foregå i grupper eller ikke, og hvordan gruppene blir satt opp. Så ser jeg på hvordan lærere hjelper elever som står fast, eller lurer på noe. Til slutt ser jeg på hvordan klasseromsdiskusjon blir benyttet som hjelpemiddel.

4.4.1 Forhåndsarbeid

Det første jeg vil kommentere er hvordan lærer starter opp undervisningen, og hva slags forhåndsarbeid de har gjort. Dette vil da være alt lærer gjør før elevene får oppgaven i hånda si. Hva kreves av læreren for å sørge for at alle i klassen får en god start på arbeidet sitt? Hva bør lærere vite om klassen, og oppgaven, for å kunne dra elever forbi enhver dump i veien. Artikkel 7 viser hva slags forhåndsarbeid som kan gjøres for å støtte undervisningen. Det handler om å forutse hvilke svar elevene kan komme med. Det har ikke noe å si om de svarene er korrekte eller ikke, da det heller handler om at lærer kan forstå tankegangen. Ved å forutse så mange løsninger som mulig, vil de lettere være i stand til å ta imot ideene til elevene for å hjelpe de videre.



Figur 3. *Polygon etude, hentet fra artikkel 1, (Foster, 2018)*

4.4.2 Oppstart

I polygonoppgaven begynte lærere med å vise klassen hvordan ligninger med ukjente på begge sider kan bli løst. Dette er for å sørge for at alle har et verktøy klart for å komme over første trinn av oppgaven, slik at de kan komme til de mer resonnerende delene. Artikkel 15 begynner også med litt oppfriskning når det kommer til å sørge for at elevene kan nå et mål. Lærerens metode her er å friske opp hukommelsen til elevene når det kommer til temaet de har hatt om, og som oppgaven baserer seg på. Så introduserer lærer oppgaven for elevene. En oppstart basert på ren introduksjon av oppgavene finner man i artikler 4, 5 og 12. Oppgaven *hvem skal ut*, der en undervisning ikke ble forsket på, viser heller til tips for hvordan lærere bør handle gjennom oppgaven. Tipset for oppstart er at lærere kan legge tyngde på *hvem skiller seg ut* for å få elevene til å fokusere på et matematisk fenomen om gangen. I gjennomføringen av oppgaven i artikkel 7 ble oppgaven introdusert på starten, men de gikk så direkte til en klasseromsdiskusjon for å sørge for at alle forsto hva som skal gjøres.

4.4.3 Engasjement fra elever

Når det kommer til hvordan lærere håndterer motivasjonsnivået til klassen, var det ikke så mye å finne. Hvordan oppgaven er designet for å skape motivasjon er allerede en del av forhåndsarbeidet læreren har gjort. Etter det så kan man se på valgene de tar om hvordan elevene skal jobbe, alene eller i gruppe. Setter de elever inn i praktisk arbeid, som i tre av artiklene, vil dette også være en kilde til engasjement. Iglooppgaven er eksempelet på dette der lærer har mer kontroll over elevene. De jobber som en enhet hele klassen, og får ansvar for byggingen av en stor iglo. Lærer involverer også elevene i å gi de ansvar for å ta notater. Ansvar ble også tatt opp i artikkel 14 der lærer ga de ulike elevene i hver gruppe roller. Dette fører til at de får et krav om å iverksette en eller annen form for arbeid. Oppgaven her, i likhet med artikkel 12 sin, la også opp til at elevene skal presentere deres løsninger foran klassen i slutten av undervisningen. Dette vil kunne brukes for å presse elevene til å jobbe i tillegg til den matematiske læringen som kommer av å sammenligne ulike svar i plenum.

4.4.4 Sette opp grupper

Et av valgene lærere må gjøre da de lar elevene jobbe er om arbeidet skal foregå en og en eller i grupper. Da en av kriteriene for rike oppgaver er at kommunikasjon skal støttes, kan gruppearbeid bli sett på i positivt lys. Dette vil også hjelpe elever med å se forskjell på de ulike tankemåtene, og respektere hverandres ulikheter i faget. Artikkel 12 sin definisjon av oppgavene de undersøkte hadde også denne respekten for ulike løsning som kriteriet. Om elever jobber i gruppearbeid eller ikke står det ikke mye om i de fleste tekstene. Mange av tekstene har allikevel prøveskjemaer der resultater for alle elevene blir tatt opp, som vil antyde at de jobbet alene. Artikkel 3, der lærere og lærerstudenter skal sette opp opplegg rundt rike oppgaver, hadde en kommentar angående gruppearbeid. Der ble det observert at de aller fleste lærere viste mangel på gruppearbeid i deres planlagte økt.

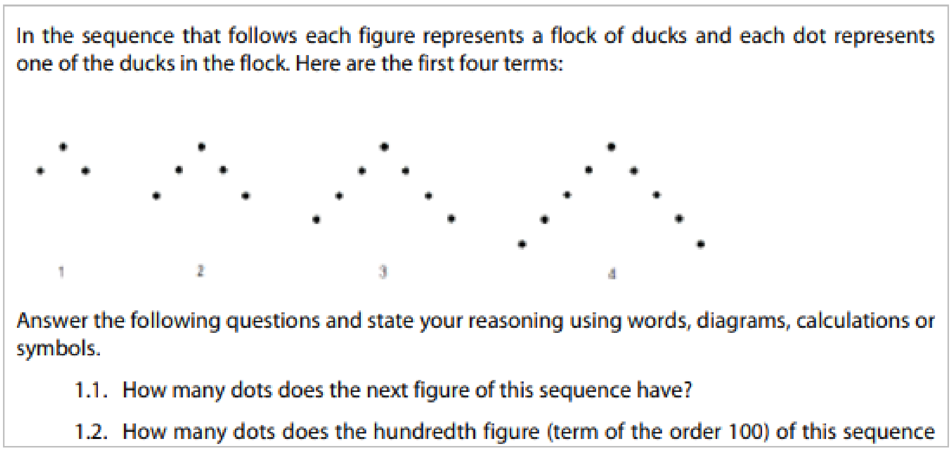
Gruppearbeid ble brukt i artikler 4, 5, 7, 14 og muligens flere. Konstruksjonen av igloen kan også bli sett på som en form for gruppearbeid, om man ser på hele klassen som en gruppe. I artikkel 7 ser det ut som valg av grupper var elevstyrt. Dette skiller seg fra de andre, da lærere hadde mer kontroll over hvem som skulle jobbe med hvem. I artikkel 5 ble det gjort klart at lærere sørger for struktur av grupper og at de skal kunne jobbe med relevant matematikk. I artikkel 14 fikk hver elev en egen rolle for gruppearbeidet. En av de rollene var talsperson. Lærer ba elevene om å sørge for å fortelle deres ideer og tanker til hverandre.

4.4.5 Stille spørsmål som utfordrer elevene

En av de mer aktive handlinger lærere gjør mens elever jobber med matematikk er å hjelpe de som står fast. En av metodene som ofte er beskrevet her er at lærere skal stille spørsmål som utfordrer elevene der de ligger. Etter å ha lest gjennom tekstene i min litteraturgjennomgang la jeg spesielt merke til tre ulike typer spørsmål lærere stilte elevene sine.

4.4.5.1 Scaffolding

Flere av artiklene benytter det engelske begrepet *scaffolding* for å beskrive deres rolle i å hjelpe elevene med arbeid innenfor rike oppgaver. I artikkel 9 er et eksempel på hvordan utfordringer blir *scaffoldet* å introdusere matematiske begreper på et nivå som eleven forstår. Vanskelighet av oppgaver er en annen metode, og dette vises også i tanken bak både rike og åpne oppgaver. Sørg for at elevene jobber med utfordringer som fører til at deres forståelse innenfor det de skal lære øker. Denne tankegangen beskrives ganske direkte i artikkel 7. Der står det at læreres handlinger avhenger av elevenes nivå og trang. Artikkel 9 tar opp hvor sofistikert matematikken til eleven er, som fokus for lærer. Informasjon om elevers nivå og tankegang er også noe lærere bør oppfatte av elevenes svar og kommentarer. Etter å ha fått denne informasjonen kan lærer *scaffolde* via å sette opp diskusjoner om de matematiske konseptene som blir tatt i bruk. Artikkel 5 forteller ikke mye om situasjoner der elever sliter, men heller de som blir fort ferdig. Der står det at slike elever må få oppfølgingsspørsmål av lærere som bygger på det de har vist og styrker dypere forståelse av temaet. Slike oppfølgingsspørsmålet som videre utfordrer elevene, skrev de om i talltrekantoppgaven og. Lærer prøvde å oppfordre elevene til å finne flere løsninger gjennomgående i opplegget. En måte var at lærer ba elevene gjette hvor mange ulike løsninger det fantes. Dette ga elevene en mulighet til å sette opp utfordringen selv ved at de antar at det finnes mer enn allerede funnet.


In the sequence that follows each figure represents a flock of ducks and each dot represents one of the ducks in the flock. Here are the first four terms:

1 2 3 4

Answer the following questions and state your reasoning using words, diagrams, calculations or symbols.

1.1. How many dots does the next figure of this sequence have?

1.2. How many dots does the hundredth figure (term of the order 100) of this sequence

Figur 4. Figurtall, hentet fra artikkel 14, (Floriano & Inês Bernardo, 2012)

4.4.5.2 Oppklaring

Neste form for hjelp gitt av lærere er å få elevene til å oppklare oppgaven for seg selv om det er noe de ikke forstår. Lærer har som rolle å guide elevene til å skape en rik matematisk aktivitet, beskriver artikkel 4. Der står det og at de skal gi elevene nok informasjon til at de selv klarer å tolke hva oppgaven leter etter. Spørsmål som skal rette inn elever i arbeidet deres blir brukt i oppgaven om figurtall, se *figur 4*. Dette handler mest om å se hva eleven sliter med for så å gi de muligheten til selv å forstå hva de må gjøre for å nå neste trinn.

4.4.5.3 Refleksjon

Den siste formen for spørsmål jeg vil ta opp her er spørsmål som fremmer refleksjon. Lærere skal sørge for å la elevene skape sammenhenger mellom deres idéer og konsepter i faget, ble skrevet i artikkel 4. Det blir videre skrevet at læreren må få elevene til å utvikle en kompleks prosess når det kommer til å forklare deres tanker og arbeid. Eksempler vist for å få til dette er å spørre om hva meningen med oppgaven er, og hvor pålitelig løsningen vist er. Ved å avslutte med å spørre elevene hvorfor de mener de har korrekt, eller om det er andre løsninger, støttes refleksjon opp. Spørsmål som setter krav og initierer refleksjon hos eleven blir funnet i flere av observasjonene. Artikkel 6 viser til spørsmål som legger opp til refleksjon fra elevene rundt valgene de har gjort. Her stiller lærer spørsmål om matematikken som blir benyttet av elevene i deres svar på oppgaven. En elev svarte nitti på et spørsmål om antall liter melk i en spesifikk mengde flasker. Lærer fulgte opp elevens forslag med å få de til å utdype hvordan de kom fram til det tallet. Slik vil elevene tenke mer på deres fremgangsmåter over å komme fram til svaret fortest mulig. Dette er en tanke som flere artikler har vist både i formålet på deres oppgave og definisjon av rike oppgaver. Reflekterende spørsmål der elever må jobbe med argumentasjonsferdigheter i tillegg blir også benyttet i artikkel 7.

4.4.6 Klasseromsdiskusjon

Ved å sette opp klasseromsdiskusjoner, får klassen jobbe sammen for å forstå løsningsstrategier og se sammenhenger mellom ulike løsningsstrategier. Diskusjoner blir også, i noen artikler, brukt til å oppklare hva oppgaven egentlig spør etter. I artikler 12 og 14 ble det også lagt opp til presentasjoner av svar på slutten av opplegget. Slike presentasjoner gir tid til diskusjon og sammenligninger ved at de ulike løsningene blir vist av elevene selv. Artikkel 14 sin metode for å få elevene til å hjelpe hverandre var å be en annen gruppe fortelle hva de har gjort når noen ga et feil svar. Et korrekt svar fikk "veldig bra" som en mulig replikk fra læreren.

Felles diskusjoner for oppklaring av hva som skal gjøres sto det spesifikt om i artikler 5, 6, 7 og 12. 7 og 12 hadde slike samtaler på starten av økta, mens 5 og 6 stoppet arbeidet flere ganger gjennom undervisningen. Iglobyggingen i artikkel 6 hadde pauser mellom hvert steg av arbeidet, som gikk greit i og med at alle jobbet sammen. I artikkel 5 tok lærer oppklaringer i plenum da de så det var nødvendig. Det vil mest sannsynlig si at de så nok elever med samme spørsmål.

4.5 Hva slags resultater hadde oppgavene eller opplegget på elevene og lærere

For å vurdere effektiviteten rike oppgaver har som tilpasset opplæring, er det nødvendig å se på resultatene av slike oppgaver i praksis. Da ingen av artiklene i denne litteraturanalysen tar direkte opp temaet tilpasset opplæring, ble ikke det mitt direkte fokus. Jeg så generelt på resultater sammen med lærer eller observatørers kommentarer av hvordan elevene responderte på oppgavene. Dette gjelder alt fra deres engasjement til utvikling av læring og tankeprosesser i matematikk. Hvor stor del av klassen oppgavene fungerte for er også et aspekt jeg undersøkte. I artiklene der lærere var subjektet for undersøkelsen har jeg notert ned deres tanker rundt oppgavene.

4.5.1.1 Resultater nådde ikke helt opp til ønsket mål

Artikler 1,4 og 7 kommenterte at deres mål ikke ble helt nådd i opplegget. Første artikkel manglet konklusive nok resultater til å konkludere at de rike oppgavene økte elevenes evne til å se på prosessene i matematikken. I artikkel 4 var forklaringsferdighetene til flere av elevene ikke på nivået lærer ønsket. Det var også en del variasjon i hvor godt elevene gjennomførte oppgaven. Forfatterne mente at flere rike oppgaver bør være med i undervisningen til klassen for at de gradvis skal bli vant til denne måten å jobbe på. At reflekterende tanker vil bli enklere når de vet hva som forventes av dem. De fleste gruppene i artikkel 7 gjennomførte oppgaven før felles gjennomgang i slutten av timen. De ville da hjelpe klassen med å se sammenhengene mellom de ulike gruppenes arbeid. Lærerne la merke til at arbeidet med å begrunne svar eller se på sammenhenger ikke var så interessant for noen av elevene. Med en gang de hadde funnet en løsning ville de videre til en ny oppgave. Det at de skulle skape et tidsskjema for en kino i artikkel 15 skapte motivasjon, men mangler i elevers forståelse av tid gjorde det vanskelig for mange å fullføre oppgaven. I artikkel 11 ble ikke opplegg med rike eller åpne oppgaver gjennomført. Den fokuserte på hvordan lukkede oppgaver med en ønsket løsningsstrategi påvirket læringen til elevene. I skolen som ble observert var det vanlig med en type *checkpoint*-system. Dette systemet fungerer ved at når klassen jobber i grupper må alle i gruppa ha forstått oppgaven fram til første punkt før de kan gå videre. Den ytre motivasjonen gitt for dette systemet er at poeng blir gitt ut når hele gruppa har nådd et *checkpoint*. En viss mengde poeng var så nødvendig for å få godkjent undervisning for dagen. Dette mente forteller puttet press på de svake elevene, og at mattekulturen handlet om å gjøre matematikk raskt. I konklusjonsdelen av artikkelen blir det tatt opp hvordan denne holdningen står i motsetning til arbeid med åpne oppgaver.

4.5.1.2 Positiv effekt

Variasjon av elevsvar ble som sagt vist i artikkel 7, og en slik variasjon ble også vist i artikkel 6. Da dette var unge elever som opplegget ble gjennomført hos, var det for det meste tellestrategier som ble omtalt. Oppgaven ga elever muligheten til å utfordre dem selv ved opptelling eller å doble opp tallene. Hva de valgte avhenger av hvilken grad de forstår konseptet rundt opptelling. Engasjementet til hele klassen ble også tatt opp som et resultat av arbeid med den rike iglo-oppgaven. Oppgaven om multiplikasjon førte til at klassen oppdaget et matematisk fenomen. Fenomenet er at når en faktor dobles og den andre halveres vil svaret forbli likt i et multiplikasjonsstykke. Positiv effekt av gruppearbeid i rike oppgaver ble tatt opp i artikkel 5. Grunnen som forfatteren ga for dette er at elevene får en følelse av ansvar overfor resten av gruppen. Kommunikasjon med gode matematiske argumenter og forklaringer ble observert. I undersøkelsen fikk elevene også et oppgavehefte, men resultateten ble ikke vist i artikkelen. Det ble allikevel kommentert at prosentantallet riktige svar speilet følelsen av læring som ble sett. I gruppearbeidet ble det observert at rollene til de ulike elevene ble valgt ut ifra hva de selv følte seg best i, slik at alle kunne kontribuere noe. Andre positive resultater i artikkel 5 var motivasjon, utfordringer hos elever av ulike nivåer, utvikling av elevenes selvstendighet.

4.5.1.3 Lærere

Det å forstå læringsintensjonen er sentralt for å konstruere gode kriterier for en vurderingsoppgave, var majoriteten av lærerstudentenes tanker i artikkel 2. De mente også det var viktig å vite hvor enkeltelevene ligger, for at oppgaven skal passe bedre. Når det kom til fokuset lærere og lærerstudenter hadde på læringstriaden i artikkel 3, var det matematisk utfordring som ble mest tatt i bruk. Åpne oppgaver var noe halvparten av deltagerne i artikkel 8 var kjent med fra før av, og like stor del mente i spørreskjema at slike oppgaver er vanskelig å stille. Gjennom prosjektet de gjennomførte ble det vist at jo mer åpne oppgaver ble brukt, jo mer villige var lærere til å bruke de. Prosjektet i artikkel 10 endret også læreres holdninger rundt slike oppgaver. De fleste gikk fra å være fornøyde med å finne en løsning til å systematisk lete etter alle løsninger.

5 Diskusjon

I diskusjonsdelene blir funnene fra artiklene sett på i lys av teorien om tilpasset opplæring og design av oppgaver. Først blir forutsetningene for tilpasset opplæring tatt opp, blir de tatt hensyn til i arbeidet med rike oppgaver. Så blir ulike eksempler og former for tilpasset opplæring funnet i undervisningene omtalt. Lærerhandlinger blir vurdert, forskjeller mellom rike og åpne oppgaver blir vurdert. Om Convergent-Divergent og Teaching Triad modellene er effektive som verktøy for å designe rike oppgaver blir og vurdert.

5.1 Blir de ulike forutsetningene for tilpasset opplæring tatt hensyn

For å vurdere hvordan oppgaver som kan løses på flere måter kan brukes som tilpasset opplæring, bør man først se hvordan de tilrettelegger for elevenes forutsetninger. De tre typer forutsetninger som lærer skal ha i bakhodet med tanke på tilpasset opplæring er faglige, sosiale og kulturelle. I mitt arbeid med å se gjennom ulike artikler som jobber med slike oppgaver har jeg sett flere eksempler på alle tre.

5.1.1 Faglige forutsetninger

De faglige forutsetningene tas opp i alle artiklene. Dette ser man via at hovedpunktet bak mange av oppgavene er at de kan jobbes med på flere måter i ulikt nivå. Så om eleven ligger på et høyt nivå der dyp forståelse for arbeidet kan jobbes med, så vil oppgaven være like mye til hjelp som for en elev med delvis forståelse for temaet. Brua som ble konstruert i en klasse gir stor grad av variasjon for klassen der elevene kan bli utfordret i den grad som hjelper de i deres læringsprosess. *Hvem skal ut* gir elevene mulighet til å bruke deres matematiske forståelse og vokabular til å argumentere for de egenskapene de finner i figurene. Slik vil lærer også kunne se hvordan oppgavene blir håndtert for å vurdere hvor stor grad eleven er trygg på det de jobber med.

5.1.2 Sosiale forutsetninger

Elevens nivå av sosial kompetanse er også noe lærere må ta i betraktning for å kunne tilpasse dagens opplegg til hver enkelt elev på en gunstig måte. Ved at oppgavene har tilrettelagt muligheter for diskusjoner og samarbeid mellom elever i ulikt nivå der ulikhetene skal være et hjelpemiddel blir de sosiale ferdighetene testet. Hvordan lærere kan tilrettelegge for at elevene skal mestre oppgavene uavhengig av deres sosiale kompetanse kan bli observert i noen av artiklene. Artikler 5 og 14 viste tydelig at lærer valgte ut gruppene med mål i å sørge for fornuftig arbeid på elevenes side. Det virker som om dette betyr at lærer tok elevenes identitet i betraktning når de fordelte gruppene. I artikkel 14 fikk elevene også roller utdelt av lærer, slik at de selv slapp å ta ansvar for å finne deres rolle i gruppen. Elevenes følelse av kompetanse kan også bli styrket av rike oppgaver, da de skal kunne løses av elever på ulikt nivå. Ved at et barn opplever at de klarer å løse oppgavene de blir tildelt, vil dette påvirke deres mestringsforventninger. Undervisningskulturen beskrevet i artikkel 11 der åpne oppgaver ble lite brukt, ble det gitt stor vekt i å løse oppgaver fort. I motsetning til et åpent miljø der det du får til får en verdi, så skal alle komme til samme svar for å kunne gå videre. Muligheten for valg i løsningssituasjoner blir da borte, og elevene får ikke utfordret seg der de ligger.

Elevers selvtillit og motivasjon blir også tatt vare på i rike eller åpne oppgaver, ifølge både artikkel 5 og 13. De så at de rike oppgavenes egenskaper la opp muligheter for samarbeid mellom elever. Dette samarbeidet kan sees via at lærer setter opp gruppene, men også variasjonen av elevsvar. Ved at lærere også gir tyngde på tankegangen om at alle løsninger har samme verdi, vil elevene kunne finne muligheter for å sammenligne helt forskjellige tankeganger. Alt dette vil muligens gjøre det lettere for elevene å presentere deres funn foran de andre i klassen, selv om de har slitt med selvtillit og lave mestringsforventninger i faget. Et godt poeng som ble tatt opp i artikkel 14 er hvordan lærere promoterer kommunikasjonen i undervisningen. Der står det at påvirkningen som følger er hvordan elevene tar opp deres tviler og argumenterer for deres tanker. Motivasjonen kommer i form av mulighet for variasjon. Den artikkelen hadde og et interessant funn når det kom til presentasjoner av løsninger. Der fikk elevene som hadde korrekt løsning et kompliment fra lærer, mens de som viste feil svar ikke fikk tilbakemelding. Det ble dessverre ikke skrevet hvordan elevene responderte på det valget fra lærer. Som artikkel 12 beskrev er variasjonen en positiv måte å styrke engasjement fra klassen. Ved at rike oppgaver bør være ganske åpne for å fylle deres kriterier så vil muligheten for variasjon være stor. Selv om denne forfatteren mente at åpne oppgaver ikke bør bli brukt for ofte, kan man se på andre typer åpne oppgaver. Fire av de typene er vist til i artikkel 8. Da vil elever som ofte ser på matematikk som kjedelig få mulighet til å jobbe med faget på måter de ikke vanligvis gjør. Om skoledagen utspiller seg på en måte der problemløsningsoppgaver uten klargjorte løsningsstrategier er hverdagen til eleven kan de få et helt annet bilde av faget. Da det hittil ikke har blitt skrevet en enorm mengde forskning om rike oppgaver er det vanskelig å få bevis på langtidseffekten.

5.1.3 Kulturelle forutsetninger

Den kulturelle bakgrunnen til eleven er den siste av de tre formelle forutsetningene som lærer må huske. Hvor elevene, eller deres foreldre, kommer fra, kan påvirke både deres selvtillit i faget og hvordan de jobber med det. Slike påvirkninger arbeides med i den rike måten å jobbe med matte på, ut ifra mine funn. Da det å ha rett svar ikke blir sett på som målet, trenger ikke frykten for å mislykkes være like kraftig. Dette er noe flere av de andre lærerne og jobbet med, via for eksempel å tydeliggjøre at alles løsninger har samme verdi. Slikt ble tatt opp i et par ulike artikler. Ulike regnemetoder i åpent matematisk arbeid er også en mulighet for større læring mer enn en utfordring. Lærer ønsker at elevene skal få erfaring med å se sammenhenger mellom ulike strategier. Det vil gi de de et større repertoar, og støtte opp refleksjon hos eleven. Tradisjonelle norske strategier skal da ikke være et hinder for en nylig norsk innbygger. Visuelle oppgaver og konstruksjonsoppgaver gir også mulighet for elever med annet språk enn norsk som morsmål å involvere seg. Det kan være vanskelig å få fullt læringsutbytte i tekstoppgaver når det kommer til de elevene. Figurer som polygonen i artikkel 1 og huset som skal skapes er ikke avhengig av flytende norskferdigheter. Som lærer for barn som ikke snakker flytende norsk bør man også kunne oversette tekst der det trengs. Andre representasjonsformer viser bare en annen mulighet for matematikken å bli presentert. For elever med lesevansker av andre årsaker vil det visuelle arbeidet også være en mulighet for å vise deres forståelse.

5.2 Hvordan hjalp rike oppgaver med å løse utfordringene der tilpasset opplæring kreves?

Etter å ha undersøkt hvordan ulike lærere designer og jobber med rike oppgaver i mitt litteratursøk kan jeg se vurdere deres effekt som verktøy for tilpasset opplæring. Etter å ha funnet bevis på at de tre ulike typene forutsetninger som kreves i tilpasset opplæring blir fulgt, vil jeg gå mer i dybden på det faglige. Over de neste avsnittene viser jeg til eksempler fra de ulike artiklene på hvordan de rike oppgavene sørger for at ulike elever får den hjelpen de trenger.

5.2.1 Vurdering for læring

Et av eksemplene jeg vil ta opp for å vise styrken til åpne oppgaver som tilpasset opplæring er et funn som ble tydeliggjort i artikkel 13. Der sto det at lærer la merke til stor variasjon av elevsvar der deres kunnskap og forståelse rundt geometrien ble mer transparent. Dette gjorde det lettere for lærer å utfordre de på deres nivå. En slik beskrivelse av enklere evaluering angående elevenes forståelse samsvarer med observasjoner gjort i andre artikler. Vurdering for læring blir lettere når lærere får et større innblikk i ulikhetene mellom elevene, og hvilke valg en elev gjør for å løse oppgaven. La oppgaven være med på å vise elevens kunnskap i større grad enn om alle stegene i en algoritme ble gjennomført korrekt. Det at elever kan bli utfordret i flere ulike innfallsvinkler gir også lærer større frihet til hva slags tilbakemeldinger de kan gi elevene for å sørge for dypere forståelse. Som jeg viste til da jeg beskrev lærerhandlinger blir slike tilbakemeldinger gitt ofte i form av spørsmål til elevene som krever refleksjon på deres side.

5.2.2 Forståelsesbygging

Det bringer meg til mitt neste funn angående tilpasset opplæring, utvikling av elevenes forståelse. Swan (2001) skrev at en oppgave lærere hadde var å gi elevene kompetansen til å forstå de ulike matematiske konseptene de bearbeider. Elevenes forståelse av matematikken de jobber med har stor tyngde i læringsprosessen, og de åpne oppgavene gir større mulighet til å tilpasse resonneringer elevene gjør. Ved å se på artikkel 1 sin oppgave der elever må vurdere adjektivene pen og ryddig opp mot ligninger lar lærer elevene styrke deres forståelse av slike regnestykker. Elevene får jobbe med å tolke informasjonen de blir gitt og vise deres svar matematisk. *Hvem skal ut* i artikkel 9 og tegneriestripen til artikkel 10 handler og i stor grad om forståelsen av hva slags informasjon som kan bli trukket ut av det elevene ser og hvordan ulike regnestykker kan løses. Oppgaven tvinger nesten elevene til å tilpasse for seg selv, ved at de hele tiden finner en måte som de får til. Om lærer mener at elevene velger enkle metoder med vilje for å slippe å jobbe, kan lærer gå til de og utfordre dem videre. Dette gjør de via *scaffoldingen* som jeg har vært borti tidligere. Vurderinger og tolkninger for de andre oppgavene er og vist til, og denne utviklingen av forståelse er med på å redusere risikoen for misoppfatninger. Ved å gå tilbake til *hvem skal ut* sin visuelle geometrioppgave, kan man se tegn til at elevene får jobbet med å forstå egenskapene til de ulike figurene. Hvilke egenskaper gjør at noe kan beskrives som en sirkel, trekant eller firkant. Slike oppgaver kan dras videre ut med andre figurer og, eller jobbe med mer enn 3 ulike figurer.

5.2.3 Matematikk knyttet opp mot elevenes verden

En annen form for tilpasset opplæring som rike oppgaver tar hensyn til er å knytte matematikken opp med kjente forhold i nærmiljøet. Selv om oppgaven og definisjon ikke spesifiserer at det må være lokalmiljø, har den rike oppgaven i artikkel 4 en slik tråd. I denne oppgaven har trafikk fått rollen som situasjonen i den virkelige verden som kan tolkes via matte. Uten noe spesifikk kunnskap om hvordan lokalmiljøet til denne klassen i Indonesia ser ut, kan veier og trafikkorker godt være noe de kjenner til. Slike situasjoner kan også da byttes ut med andre kjente fenomener som elevene kjenner seg selv igjen i. Da det handler om ulike skolers nærmiljøer, vil åpenbart scenarioene variere fra område til område.

5.2.4 Hvordan ulike typer åpne oppgaver tilpasser matematikken på ulike måter

Multiple løsninger, multiple strategier, investigasjon og kriterier var typene åpne oppgaver som ble tatt opp i artikkel 8. De gir alle mulighet for unike løsninger der elevens preferanser tar roret. De legger alle opp til at lærer kan be eleven om å gjennomføre oppgaven på nytt, men med en annen metode. På den måten kan man si at de alle støtter kreativt matematisk arbeid. Der de skiller seg er hvordan de legger opp til ulike metoder. Ved å se på eksemplene gitt for multiple strategi oppgave i de ulike artiklene, så er det som regel ulike regnemetoder og algoritmer som får fokus. Med tanke på ligninger er det mange måter å løse de. Innsettingsmetoden og addisjonsmetoden er to måter. Da får den som gjennomfører oppgaven øve på de metodene de trenger å øve på. Sånn får du tilpasset opplæring inn i denne typen åpen oppgave. Eksempelet vist i artikkel 8 om oppgaver med multiple løsninger gir også mulighet for tolkning av informasjonen man har fått. Her kan man jobbe med elevenes kritiske tenkning der mengden løsninger de finner kan variere. Kriterieoppgaven utfordrer er med på å utfordre elevenes begrepsforståelse. Hvor mange kriterier de kan plukke ut avhenger av hvor mye de vet om temaet. Investigasjonsoppgaver gir ofte mulighet til å knytte reelle situasjoner opp mot matematikken, som vist i artikkel 4. Et av de store fokusene for tilpasset opplæring er valg, som Ward (2020) skrev. Ved å vite hva slags valg man kan gi eleven, kan man bedre tilpasse oppgavene for å utfordre de på det de trenger hjelp med. Enten det er pugging på algoritmer eller øving på å trekke viktig informasjon ut av tekstoppgaver. For mer hjelp med å vurdere hva elevene trenger å øve, kan man bruke egenskapene for matematisk tankegang (Takahashi, 2021). Er det konsepter elevene trenger å jobbe med, er det prosedyrer eller kanskje tolkning.

5.2.5 Vansker med rike oppgaver som tilpasset opplæring, og måter det kan løses

Designene av oppgaver som jeg har sett gjennom har vist flere fordeler når det kommer til å jobbe med tilpasning av undervisningen opp mot individene i klassen uten å lage opplegg for hver og en. Det viste seg allikevel ikke at oppgaven gjorde en fullverdig jobb der lærer bare kunne følge med og ta imot spørsmål når det krevdes. Et eksempel på dette befant seg i artikkel 7. Dette var en av oppleggene der arbeid ble gjort i grupper, og eksempelet handler om én av gruppene. Denne gruppa slet med å forstå oppgaven fra starten av. Da denne former for åpen oppgave ikke var en av typene som ga mulighet for flere ulike svar ønsket lærer at hele klassen holdt seg på en sti som førte riktig vei. Gruppa som slet hadde misforstått hva teksten var ute etter, og satt opp regnestykker som ikke ville føre til korrekt svar. Selv med hint fra lærer om å visualisere det de gjorde med ruter og farger, ble ikke prosessen deres noe mer fornuftig. Med tanken om at spørsmål fra lærer er tilbakemeldingen som bør gis, ble det brukt en god stund på å gi denne gruppa nok informasjon til at de kunne forstå hva de skulle gjøre. Slike mangler på forståelse ble også funnet i noen av de andre artiklene, som artikkel 12. Etter femøkts gjennomføringen av dette opplegget satt lærer igjen med en opplevelse av at elevene ikke hadde nådd fram til et ønsket nivå av konseptuell forståelse. Oppgaven her var talltrekant der elevene skulle fylle de tomme rutene. Artikkel 1 med polygonsfiguren tok også opp at oppgaven ikke hadde stor positiv effekt i forhold til tradisjonell undervisning. Lærer til artikkel 12 var alt i alt fornøyd med oppgaven, men hadde en idé til hvordan de kan få bedre utnytte av den. Tanken var å jobbe oftere med rike oppgaver, for at elevene skal bli mer komfortable med en slik arbeidsmåte. Denne tankegangen blir også tatt opp i beskrivelse av tilpasset opplæring, selv om det ikke handler om tilpasning for enkeltelever. Bjørnsrud og Nilsen (2011) viste til forebygging som metode for tilpasset opplæring, der elevenes gode vaner blir styrket gjennom kontinuerlig arbeid. Slik oppbygning av gode vaner kan sees i lærerens tanke om hvordan de burde håndtere rike oppgaver. Ved å la elevene jobbe ofte med det kan de bygge opp en forståelse rundt hvordan de kan jobbe åpent og uten klargjorte løsningsmetoder. Gode vaner i rike oppgaver finner vi spor etter i kriteriene og formålene til de ulike oppgavene jeg har sett på. Mange artikler har vist til resonnering og refleksjon som viktige punkter for elevene å komme gjennom. Andre har vist til samarbeid og søken etter andre løsninger. På denne måten kan man se på et eksempel på hvordan lærere må takle andre typer design for å sørge for at de unge får den kunnskapen man er ute etter.

Oppgavene om analyse av situasjoner i den virkelige verden førte til en oppdagelse om lave forklaringsferdigheter hos deler av klassen. Dette var oppgavene som ble tatt opp i artikkel 4, og funnet ble tatt opp som en indikasjon på at kontinuerlig trening kreves for å la elevene bli vant til åpne oppgaver. Da forklaringsferdighetene var et problem, vil dette kunne trekkes opp som et problem med tanke på tilpasset opplæring. Den begrepsmessige forståelsen er et aspekt som må tilpasses elevene (Nosrati & Wæge, 2015). Sammen med jobbing for forebygging av misforståelser, får da gjennomgående eksponering av rike oppgaver ovenfor elevene enda en grunn.

5.2.6 Lærerhandlinger i rike oppgaver for å styrke tilpasset opplæring

Lærerhandlinger som ble gjort for å få best mulig utbytte av matematikkundervisningen bør også bli sett i lys av tilpasset opplæring. Som vist, så er presentasjon av en rik oppgave ikke nok for at alle skal nå dagens mål. Hvordan lærer håndterer oppgaven, hva slags kunnskap de har over den og hvilke måter de hjelper elevene var minst like viktig. Arbeidsmiljøet skapt av lærer er sentralt når det kommer til hvordan elevene jobber. Enten det er fokus på læringsintensjonene og den faglige utfordringen eller forventede elevsvar, så spiller forhåndsarbeidet til læreren også en stor rolle i undervisningen. Arbeidet med å vurdere alle mulige svar elever kan komme opp med til oppgaven de får gjør det mulig for lærer å være forberedt på ulike grader av forståelse. Enten de har en misoppfatning eller et helt perfekt svar som tillater videre utfordring, så er man klar til å hjelpe eleven. Lærers vurdering for læring i de rike oppgavene ble også observert og dokumentert i flere av artiklene. Synliggjøringen av elevers forståelse som ble beskrevet viser en måte de åpne oppgavene hjelper med vurderingsprosessen. Artikkel 5 fortalte om hvordan lærere må vurdere forandringen i elevenes læringsstrategi. Den artikkelen tok opp en annen handling gjort av lærere, fordeling av ansvar. Hver elev i hver gruppe fikk en rolle av læreren som de måtte gjennomføre i løpet av undervisningen. Hvilken rolle ulike elever får kan tilpasses av lærer for å bli noe som utfordrer og elevene og som lærer vet de kan få til. Dette kan sees opp mot artikkel 11 der forventningene var prikk like for alle elevene i gruppen. Det ble beskrevet i den artikkelen at motivasjon til elevene som var usikre på oppgaven ble svekket av stresset.

Klasseromsdiskusjoner ledet av lærere ble gjennomført i de aller fleste opplegg. Diskusjonene handlet om alt fra å lære elever en måte å løse ligninger, som i artikkel 1, til presentasjoner av svar. Slike diskusjoner gir lærer mulighet til å hjelpe store deler av klassen der det trengs og oppklare mulige misforståelser. Med ønsket om å sørge for at ulike løsninger og arbeidsmetoder skal bli godtatt av felleskapet, er klasseromsdiskusjonene en optimal mulighet for å vise variasjonen. Samtalene, og variasjonen som blir presentert, styrker også muligheten for kritisk tenkning (Kazemi & Hintz, 2014).

5.2.7 Var resultatene observert i artiklene som forskningen ville forvente

Etter å ha undersøkt hvordan lærere og lærerstudenter både designer og presenter rike oppgaver, vil jeg gjøre min vurdering av oppgavene. Nå har jeg presentert oppgavene og hvordan de ble mottatt av klassen. Før jeg kan vurdere hvilke typer oppgaver som jeg kan ta med inn i mitt arbeidsliv, vil jeg vite om resultatene samsvarer med forventninger fra allerede eksisterende forskning. Ettersom det ikke var så stor mengde forskning å gå gjennom innen temaet, er det lurt å vite om det som er ute kan sees på som pålitelig. Artikkel 1 med sin polygonsfigur fikk ikke gode nok resultater til at de kan støtte rike oppgaver som en forbedret form for undervisning. Ved at den ikke førte til mer læring enn tradisjonell undervisning mente de det var opp til lærers smak å velge. Selv om oppgaven følger flere av kriteriene som for både tilpasset undervisning og rike oppgaver var ikke læreres opplevelse av resultatene så positive. I konklusjonsdelen på denne artikkelen ble det allikevel tatt opp at slike figurer kan muligens føre til rikere muligheter når det kommer til refleksjon og kreativ tenkning. Det var også skrevet at funnene bør bli lest med varsomhet, da datamaterialet ikke var stort nok.

I artikkel 4 var det forklaringsferdighetene som var manglende, ifølge lærer. Forslaget for forbedring av oppgavene, var å jobbe mer kontinuerlig med lignende arbeid. Resultatene i lys av denne forklaringen er enige med Nosrati og Wæge (2015) sin beskrivelse av elevenes utvikling. De tar opp begrepsmessig forståelse, noe som kreves for å kunne forklare eller argumentere eget arbeid. Egenskapene for rike oppgaver var der, som betyr at mulighet for tilpasset opplæring også burde være der. Den egenskapen jeg her refererer til er at oppgaven skal gi mulighet for resonnerende tenkning på nivåer som passer ulike elever. Det er også nødvendig å påpeke at rik matematikk ikke er en gitt løsning for tilpasset opplæring der alle elever hele tiden går ut av klasserommet med mer kunnskap enn de hadde på vei inn. Ved å se på lærerhandlinger kan man allerede se arbeidet som kreves for å få noe nyttig ut av undervisningen.

Resultatene i artikkel 12 viste samme vurderinger som ble gjort i de to forrige avsnittene mine. Selv om motivasjon ble skapt var det mangel på forståelse og ønske om videre arbeid med samme type oppgaver. I et av de andre oppleggene der en gruppe ikke visste hvordan de skulle komme fram til svaret finner man enda et eksempel på vanskeligheten med å skape oppgaver som tillater alles nivåer. Den faglige forutsetningen for tilpasset opplæring sier at elevene må streve med matematikk på deres nivå for å kunne komme seg videre. De rike oppgavene skal ha dette som en egenskap, at ulik grad av forståelse ikke skal være et hinder. Gjennom å se på resultatene i undersøkelsene som er gjort samsvarer ikke denne idéen helt opp mot virkeligheten.

Det er allikevel positive sider, da variasjon i elevsvar som viser ulik grad av forståelse er blitt dokumentert. Tellestrategier og estimeringer i konstruksjonen av iglo er et eksempel på dette. Som lærer er det også greit å vite at man fortsatt har en viktig rolle i opplæringsprosessen. Forståelse av matematiske konsepter, og synliggjøring av hvor elever lå ble også funnet. Synliggjøringen viser både at elevene får jobbet på nivåer der de blir utfordret. Da tilpasset opplæring handler om å møte eleven der de er, blir videre læringsprosess også hjulpet. I artikkel 15 fikk deler av klassen forståelse over et prinsipp i multiplikasjon om forholdet mellom de to faktorene. Et slikt resultat viser at oppgaven som ble brukt førte til læring i klassen, men ikke nødvendigvis tilpasset opplæring der alle kom et steg videre. Funnet elevene gjorde ga dem nysgjerrighet og motivasjon for videre utforskning angående egenskaper til multiplikasjon. En åpen tilnærming for oppgavedesign fører også til utvikling av pedagogisk kunnskap, ifølge artikkel 10. Deres forklaring på dette funnet var at elevene ble tilvendt og aksepterte ulike løsninger og metoder vist i klassen. Det er også enda et eksempel på hvordan både faglige og sosiale forutsetninger for tilpasset opplæring blir støttet under arbeid med rike oppgaver. Ved å se på Smith (2007) sin beskrivelse av workshopen ser man enda et eksempel på muligheten for at rike oppgaver kan lede til en positiv utvikling i læringsprosessen til elevene når det kommer til deres arbeid med problemløsningsoppgaver.

5.3 Forskjeller mellom rike og åpne oppgaver

Et av målene mine i denne forskningsoppgaven var å finne likheter eller skille mellom de ulike utradisjonelle oppgavetypene. Fokuset mitt var på beskrivelsene *rike* og *åpne*, så jeg undersøkte definisjonene som ble brukt for de to. Gjennomgående i alle definisjoner jeg fant, var åpenhet for flere arbeidsmetoder. Dette er da den mest åpenbare likheten mellom de to begrepene. I lys av denne egenskapen er også utfordring brukt hos i de to ulike typer oppgaver. Utfordringen handler om elevenes læringsprosess, som artikkel 4 påpeker, og deres tankeprosesser. Evne til vurdering og refleksjon rundt deres strategier i matematikken blir brukt både i artikler som beskrev rike oppgaver og åpne oppgaver. Det var spesielt to punkter jeg la merke til som viste til forskjeller. Første var en egenskap som ble vist i flere av definisjonene til åpne oppgaver, men ikke rike. Egenskapen var at åpne oppgaver skal gi mulighet for ulike løsninger. Artikkel 8 jobbet med flere ulike typer åpne oppgaver, som viste varierende grad av mulighet for ulike løsninger i tillegg. En av formene var sorteringsoppgaver, der elevene jobber med å velge kriterier for hva de leter etter som vil føre til en stor bredde i mulige løsninger på oppgaven. Denne beskrivelsen er ikke til stede i definisjonene av rike oppgaver. Ved å se på oppgavene som ble brukt i artikler om rike oppgaver, så kunne man allikevel se at ulike løsninger var mulig å finne. Enten det var polygonsfiguren i artikkel 1, eller tolkning av funksjoner og grafer i 2 og 3, så man eksempler på åpenhet i enden og.

Det andre punktet som viser til en mulig forskjell, fant jeg i artikkel 11. Der ble det vist en modell over nivå av åpenhet i en oppgave. Rikhet i matematikken ble der brukt som en egenskap for åpne oppgaver. Matematisk rik i resonneringsmuligheter, der ulike innfallsvinkler er tilgjengelige, både symbolsk og visuelt. Det var beskrivelsen av et høyt nivå av åpenhet i denne artikkelen sin definisjon. Sånn sett så kan både rike og åpne oppgaver bli brukt som egenskaper for en oppgave, og ikke bare et ord som viser til en type oppgave. Definisjonen til artikkel 11, utenom ordet *rik* stemte allikevel med den generelle definisjonen av rike oppgaver. Alt i alt observerte jeg ingen funn som leder meg til å se en distinkt forskjell mellom de to begrepene. LIST-oppgaver, som vi lærte på universitetet har heller ingen unike kriterier som viser til et skille.

5.4 Convergent-Divergent modellen opp mot oppgaver

CDM er en av flere modeller som kan brukes for å skape rike oppgaver i matematikk. Målet med slike oppgaver er at ved å ha en enkel kan inngang kan alle nå samme punkt i læringen før det trekkes ut i ulike grener. Flere av definisjonene for åpne oppgaver funnet i artiklene trekker også fram idéen om at løsningene kan være flere for en spesifikk oppgave. Polygonsoppgaven i artikkel 1 er en av oppgaven som har en del fellestrekk med CDM. Første problem som må løses er å finne svaret på den originale polygonsfiguren sine ligninger. Dette har lærer allerede jobbet med å forklare klassen hvordan gjennomføres, og ingen ligninger er av et høyt nivå. Så åpnet mulighetene seg der elevene skulle klare å skape sine egne figurer med forklaringer. Forklaringene til elevene baserte seg på at de måtte kunne forsvare at deres figur var pen og ryddig med tanke på ligningene de valgte. Det at de fikk skape noe selv etter at de løste en oppgave som forfatter selv beskrev som interessant kan være med på å skape engasjement hos eleven. Utenom denne var det ikke mange oppgaver som jobbet med å både være konvergent og avvikende. De fleste jobbet enten med samling av tråder og strategier for å la elever se sammenhengen mellom ulike metoder eller å gi en oppgave som kan bli åpnet opp i mange retninger fra starten av. Da forfatter av artikkel 1 ikke fant noe bevis for at deres metode å arbeide hadde bedre effekt enn tradisjonelle oppgaver, ble det heller ikke observert mye bevis for effekten av Convergent-Divergent modellen i denne masteroppgaven.

5.5 Teaching Triad modellen opp mot oppgaver og tilpasset opplæring

For å undersøke læringstriademodellen opp mot oppgavene i artiklene og tilpasset opplæring er det lurt å se på de ulike aspektene hver for seg. Når det kommer til matematisk utfordring kan man se både i formålet, definisjoner og oppgavene selv at dette har vært en viktig tanke. Der det var definisjoner for enten rike eller åpne oppgaver, var dette som regel første kriteriet. Alle oppgavene var konstruert på en slik måte at matematisk refleksjon kan bli funnet nesten uavhengig av hvilket nivå eleven lå på i faget. Denne delen av læringstriaden er også ganske lik ønsket til tilpasset opplæring og et høyt nivå av matematisk utfordring kan bli funnet i både rike og åpne oppgaver.

Når det kommer til sensitivitet til elevene, fikk man ikke like mye innsikt i de fleste artiklene. Artikkel 7 forteller om arbeid med å forutse ulike elevsvar for å møte elevene klare og forberedt for den hjelpen de krever, men dette arbeidet handler ikke nødvendigvis om kunnskap til klassen. I noen av artiklene der gruppearbeid fant sted, sto det at lærer tok ansvar for gruppeinndeling og roller. Roller vil jeg se mer på i siste punktet av læringstriaden. Denne gruppeinndelingen er et litt større eksempel på hvordan lærer bruker deres kunnskap om elevene til å støtte matematisk læring. Lærers interaksjon med elever med grunnlag i hva de trenger hjelp med har jeg sett på da jeg undersøkte lærerens handlinger i praksis. *Scaffolding* er begrepet flere artikler brukte for å sørge for at elevene fikk den hjelpen de trengte for å komme videre til neste steg. Flere av lærerne jobbet også med å få elevene til å utdype deres løsninger og tankeganger verbalt. Dette hjalp elevene med å øve på deres argumenteringer innenfor matematikk og deres refleksjoner rundt hva de faktisk gjorde. Denne metoden for lærer å jobbe gir også lærer et innblikk i hvordan elevene tenkte. Ved å ta både idéen om at lærere vil hjelpe elevene videre fra det nivået de er og vil få de til å forklare hvordan de jobber, kan man se at andre punktet i læringstriaden også vises i høy grad. Denne måten å jobbe på samsvarer også med tilpasset opplæring, der lærer retter seg etter hva elevene trenger.

Kontroll over læring handlet om å skape normer i klasserommet som støtter undervisningen og engasjement fra elevene. Slik normskapelse kan bli sett i flere av artiklene der lærer tydelig påpeker at alle løsninger har like stor verdi. Dette viser til at klassen skal verdsette hverandres ulikheter i løsningsstrategier. Med tanke på tilpasset opplæring kan man også tolke dette som hjelp for sosiale og kulturelle ulikheter. En annen form for arbeid med slike normer er artikkel 14. Her gir lærer beskjed til alle elevene at hver gruppe krever innspill fra alle. Ønsket er at alles tanker skal bli hørt. Lærer sørger også for at alle i gruppen har en rolle. Dette har som formål og føre til effektivt arbeid der alle i klassen er med.

6 Konklusjon

Gjennom grunnskolen skal alle elever ha jobbet seg gjennom en god del kompetansemål. Dette er målene de blir vurdert gjennom prøvene de blir tildelt. Matematikk skiller seg ikke fra resten av fagene når det kommer til dette. Det er allikevel ikke lett å sørge for at alle kommer like langt, da hver elev kommer inn med deres egne forutsetninger. De forutsetningene er faglige, sosiale og kulturelle. Som matematikklærer må undervisningen tilpasses hver elev for å gi de størst sjanse til å vise kompetansen som forventes av dem. I denne oppgaven har jeg undersøkt hvordan rike eller åpne oppgaver kan bli brukt som et verktøy for denne tilpasningen. For å gjøre dette har jeg undersøkt hva tilpasset opplæring er, og hvilke egenskaper rike oppgaver har. Enten det er arbeid med forståelse av matematiske konsepter eller algoritmer, så skal rike oppgaver sørge for at elevene blir utfordret på et nivå som passer dem. Datamaterialet benyttet i denne oppgaven kom fra en litteraturanalyse. Artiklene i analysen tok opp enten design eller utføring av rike/åpne oppgaver. Etter å ha undersøkt resultatene opp mot forskningen angående tilpasset opplæring observerte jeg flere likheter. Både som formål, og i flere artikler effekt, utfordret de rike oppgavene elever av ulikt nivå. Ved å se på Takahashi (2021) sin modell for matematisk tankegang, så man flere egenskaper gjenspeile seg i de rike oppgavene. Det viser til et hensyn ovenfor hvordan elevene forstår matematikken i tillegg til å kunne gjennomføre algoritmer. Oppgavene tok også hensyn til de tre ulike forutsetningene som gjøres i forhold til tilpasset opplæring. Faglig så gir rike oppgaver godt grunnlag for tilpasset opplæring. Elevsvarene i mange oppgaver viste stor spredning i matematiske ferdigheter og forståelse. Det viser at de er tilgjengelige for store deler av klassen, selv med deres ulikheter. Problemene med slike oppgaver var todelt. Første er at åpenheten noen ganger kunne føre til at elevene var usikre på hva de skulle gjøre. Det andre problemet var at elevene ikke var vant til slikt utforskende opplegg, der lærere mente at det måtte gjøres oftere. De sosiale forutsetningene ser man i miljøet lærere setter opp i arbeid med rike oppgaver. Samarbeid og diskusjon blir sentralt, og ulikheter blir verdsatt. Motivasjon i form av forventninger til å mestre får også større fokus da det skal være lettere for alle å løse samme oppgave. Måten ulikheter og ulike arbeidsmetoder blir verdsatt viser også til hvordan de kulturelle forutsetningene blir tatt vare på.

To modeller, Læringstriaden og CDM, ble vurdert som verktøy for å designe rike oppgaver. Sammen med de fire typene åpne oppgaver som ble vist i artikkel 8 for å åpne opp oppgaver, har de to modellene også flere kriterier som vil skape rik matematikk om fulgt riktig. Læringstriaden sine tre kriterier er matematisk utfordring, sensitivitet til elevene og kontroll over læring. Om presentasjonen av en oppgave og dens egenskaper møter alle tre kriteriene har man også møtt utgangspunktet til tilpasset opplæring. Der CDM skiller seg litt fra de andre modellene og rike oppgaver generelt er et ønske om å bruke en enkel inngang til å løse mer kompliserte problemer. Egenskapene er allikevel ganske lik åpne oppgaver der elevenes preferanser og forståelse fører til ulike løsninger, alle med lik verdi. Det siste forskningsspørsmålet mitt var angående en mulig forskjell mellom definisjoner av rike og åpne oppgaver. Da de to adjektivene førte til størst mengde forskning lette jeg etter sammenhenger og forskjeller. I definisjonene på artiklene jeg undersøkte var det veldig lite forskjell å finne. Det eneste bemerkelsesverdig var et mer eksplisitt fokus på at mengden løsninger kan være mer enn en i åpne oppgaver. Etter å ha sett på oppgavene i artiklene som forsket på rike oppgaver kunne allikevel multiple løsninger bli funnet. Det er også åpne oppgaver som bare jobber med en løsning, omtalt i artikkel 8 som multiple strategi oppgaver.

Mangler med denne oppgaven og videre forskning kan bli funnet i mengden forskning som ble undersøkt. Rike oppgaver er en oppgavetype som ikke har blitt prøvd ut i stor grad. Direkte koblinger mellom rike oppgaver og tilpasset opplæring var ikke-eksisterende. Mangelen på empiri gjør det vanskelig å komme med et fullverdig svar angående effekten på oppgavene. Som flere av artiklene tok opp er det også ønsket med arbeid over tid for å få et ordentlig bevis på effekten. Da vil det forhåpentligvis også komme fram mer informasjon om spesifikke lærerhandlinger gjort for å skape større suksess med rike oppgaver. For videre forskning er mitt forslag større grad av undersøkelser i praksis. Større arbeid med å vurdere åpen matematikk som tilpasset opplæring vil også være nødvendig.

7 Litteratur

Ainley, J. & Margolinas, C. (2015). Accounting for Student Perspectives in Task Design. I *Task design in mathematics education: An ICMI study 22*. Heidelberg: Springer.

Ayalon, M., Naftaliev, E., Levenson, E. S. & Levy, S. (2020). Prospective and In-Service Mathematics Teachers' Attention to a Rich Mathematics Task While Planning its Implementation in the Classroom. *International journal of science and mathematics education*, *19*(8), 1695-1716. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10134-1

Ayalon, M. & Wilkie, K. J. (2020). Developing assessment literacy through approximations of practice: Exploring secondary mathematics pre-service teachers developing criteria for a rich quadratics task. *Teaching and teacher education*, *89*, 103011. https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.103011

Ball, D. (2017). Uncovering the Special Mathematical Work of Teaching. I (s. 11-34). https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_2

Bjørnsrud, H. & Nilsen, S. (2011). *Lærerarbeid for tilpasset opplæring : tilrettelegging for læring og utvikling*. Gyldendal akademisk.

Borah, R., Brown, A. W., Capers, P. L. & Kaiser, K. A. (2017). Analysis of the time and workers needed to conduct systematic reviews of medical interventions using data from the PROSPERO registry. *BMJ Open*, *7*(2), e012545-e012545. https://doi.org/10.1136/bmjopen-2016-012545

Burkhardt, H. & Swan, M. (2017). Design and Development for Large-Scale Improvement. I (s. 177-200). https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_12

Chiu, M. M. & Klassen, R. M. (2010). Relations of mathematics self-concept and its calibration with mathematics achievement: Cultural differences among fifteen-year-olds in 34 countries. *Learning and instruction*, *20*(1), 2-17. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.11.002

Derek, K. (2001). Ethnicity and mathematics education. I P. Gates (Red.), *Issues in Mathematics Teaching*. London: Routlidge.

Emily, G. K. & Patrick, M. K. (2013). Responding to Students' Work on a Rich Task. *Mathematics teaching in the middle school*, *19*(3), 164-171. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.19.3.0164

Evans, M. A., Pruett, J., Chang, M. & Nino, M. (2014). Designing Personalized Learning Products for Middle School Mathematics: The Case for Networked Learning Games. *Journal of educational technology systems*, *42*(3), 235-254. https://doi.org/10.2190/ET.42.3.d

Fitriati, F., Novita, R. & Johar, R. (2020). EXPLORING THE USEFULNESS OF RICH MATHEMATICAL TASKS TO ENHANCE STUDENTS' REFLECTIVE THINKING. *Cakrawala pendidikan : CP*, *39*(2), 346-358. https://doi.org/10.21831/cp.v39i2.24047

Floriano, V. & Inês Bernardo, O. (2012). Open-ended Tasks in the Promotion of Classroom Communication in Mathematics. *International electronic journal of elementary education*, *4*(2), 287-300.

Foster, C. (2015). The Convergent–Divergent Model: an opportunity for teacher–learner development through principled task design. *Educational Designer*, *2*.

Foster, C. (2018). Developing mathematical fluency: comparing exercises and rich tasks. *Educational studies in mathematics*, *97*(2), 121-141. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9788-x

Gates, P. (2001). *Issues in Mathematics Teaching*. London: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203469934

Grant, M. J. & Booth, A. (2009). A typology of reviews: an analysis of 14 review types and associated methodologies. *Health Info Libr J*, *26*(2), 91-108. https://doi.org/10.1111/j.1471-1842.2009.00848.x

Gresham, F. M. & Elliott, S. N. (1990). Social Skills Rating System.

Grue, E., Westgård, Ø. & skoleinformasjon, P. n. (1995). *Tilpasset opplæring* (Bd. nr 3). PEDLEX norsk skoleinformasjon.

Hinna, K. (2011). *QED 5-10 : matematikk for grunnskolelærerutdanningen : B. 1* (Bd. B. 1). Høyskoleforl.

Hoffman, B. (2010). "I think I can, but I'm afraid to try": The role of self-efficacy beliefs and mathematics anxiety in mathematics problem-solving efficiency. *Learning and individual differences*, *20*(3), 276-283. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.02.001

Hussain, N. & Mirza, A. (2014). Motivating Learning in Mathematics Through Collaborative Problem Solving: A Focus on Using Rich Tasks. *Journal of education and educational development*, *1*(1), 26-39. https://doi.org/10.22555/joeed.v1i1.13

Imsen, G. (2014). *Elevens verden : innføring i pedagogisk psykologi* (5. utg. utg.). Universitetsforl.

Jenssen, E. S. & Lillejord, S. (2009). Tilpasset opplæring: politisk dragkamp om pedagogisk praksis. *Tilpasset opplæring i norsk skole. Politikeres, skolelederes og læreres handlingsvalg*.

Jeppesen, S., Kelder, K. & Ottesen, E. (2016). Rektors handlingsrom mellom skolens rammer og forventninger til tilpasset opplæring. *Norsk pedagogisk tidskrift*, *100*(2), 143-154. https://doi.org/10.18261/issn.1504-2987-2016-02-07

John, J. E., Nelson, P. A., Klenczar, B. & Robnett, R. D. (2020). Memories of math: Narrative predictors of math affect, math motivation, and future math plans. *Contemporary educational psychology*, *60*, 101838. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101838

Katz, I. & Shahar, B.-H. (2015). What makes a motivating teacher? Teachers' motivation and beliefs as predictors of their autonomy-supportive style. *School psychology international*, *36*(6), 575-588. https://doi.org/10.1177/0143034315609969

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional talk : how to structure and lead productive mathematical discussions*. Stenhouse Publishers.

Klein, S. & Leikin, R. (2020). Opening mathematical problems for posing open mathematical tasks: what do teachers do and feel? *Educational studies in mathematics*, *105*(3), 349-365. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09983-y

Knowles, J. (2009). Building an Igloo: A Rich Source of Mathematics For Young Children. *Australian primary mathematics classroom*, *14*(1), 28-32.

LaMar, T., Leshin, M. & Boaler, J. (2020). The derailing impact of content standards–an equity focused district held back by narrow mathematics. *International Journal of Educational Research Open*, *1*, 100015. https://doi.org/10.1016/j.ijedro.2020.100015

Loewenberg Ball, D., Hill, H. & Bass, H. (2005). Who Knows Mathematics Well Enough to Teach Third Grade, and How Can We Decide?

McKnight, A. & Muligan, J. (2010). Teaching Early Mathematics 'Smarter Not Harder': Using Open-ended Tasks to Build Models and Construct Patterns. *Australian primary mathematics classroom*, *15*(3), 4-9.

Nosrati, M. & Wæge, K. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk*. https://www.matematikksenteret.no/nettbutikk/sentrale-kjennetegn-p%C3%A5-god-l%C3%A6ring-og-undervisning-i-matematikk

Ohna, S. E., Moen, V. & Nevøy, A. (2007). Kollektiv inkluderende og individuelt tilpasset opplæring - en gyldig mulighet eller en foreldet drøm? *Norsk pedagogisk tidskrift*, *91*(4), 323-336.

Pehkonen, E. (2018). Open Tasks in Mathematics: Experiences with one Problem Field. *Magistra Iadertina*, *12*(2), 9-19. https://doi.org/10.15291/magistra.1487

Piggott, J. (2008). *Rich Tasks and Contexts*. https://nrich.maths.org/. https://nrich.maths.org/5662

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., Demosthenous, E., Pittalis, M. & Chimoni, M. (2021). Nurturing mathematical creativity for the concept of arithmetic mean in a technologically enhanced 'personalised mathematics and mathematics inquiry' learning environment. *ZDM*, *54*(1), 51-66. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01308-4

QED 5-10 : matematikk for grunnskolelærerutdanningen : B. 2. (2014). (Bd. B. 2). Høyskoleforl.

Rowe, F. (2014). What literature review is not: diversity, boundaries and recommendations. *European Journal of Information Systems*, *23*(3), 241-255. https://doi.org/10.1057/ejis.2014.7

Rowland, T. & Zazkis, R. (2013). Contingency in the Mathematics Classroom: Opportunities Taken and Opportunities Missed. *Canadian journal of science, mathematics and technology education*, *13*(2), 137-153. https://doi.org/10.1080/14926156.2013.784825

SamkovÁ, L. & TichÁ, M. (2016). ON THE WAY TO DEVELOP OPEN APPROACH TO MATHEMATICS IN FUTURE PRIMARY SCHOOL TEACHERS. *Journal on efficiency and responsibility in education and science*, *9*(2), 37-44. https://doi.org/10.7160/eriesj.2016.090202

Sjøvoll, J. (2006). *Tilpasset opplæring i matematikk : om retten til å lykkes i læringsarbeidet*. Gyldendal akademisk.

Smith, C. (2007). *eNRICH mathematics: Project evaluation*. https://nrich.maths.org/. https://nrich.maths.org/9420

Sullivan, P., Griffioen, M., Gray, H. & Powers, C. (2009). Exploring Open-ended Tasks as Teacher Learning. *Australian primary mathematics classroom*, *14*(2), 4-9.

Sullivan, P., Knott, L. & Yang, Y. (2015). The Relationships Between Task Design,

Anticipated Pedagogies, and Student Learning. I A. Watson & M. Ohtani (Red.), *Task design in mathematics education: An ICMI study 22*. Heidelberg: Springer.

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. I P. Gates (Red.), *Issues in Mathematics Teaching*. London: Routlidge.

Swan, M. (2008). Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra.

Takahashi, A. (2021). *Teaching mathematics through problem-solving : a pedagogical approach from Japan*. Routledge.

UDIR. (2020). *Fagets relevans og sentrale verdier*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/fagets-relevans-og-verdier?lang=nob

Ward, R. (2020). *Personalised learning for the learning person*. Emerald Publishing Limited.

Watson, A. & Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education: An ICMI study 22* (Bd. 17). Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

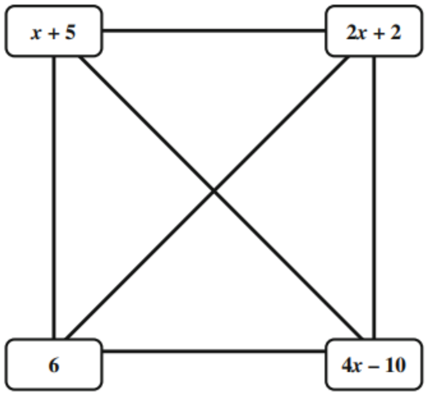
West, J. (2018). Stimulating mathematical reasoning with simple open-ended tasks. *Australian primary mathematics classroom*, *23*(1), 37-40.

Wille, T. S. (2010). *Vurdering for læring i klasserommet* (2. utg. utg.). Gyldendal akademisk.

Xenofontos, C. (2019). *Equity in mathematics education : addressing a changing world*. Information Age Publishing, Inc.

Zevenbergen, R. (2001). Language, social class and underachievement in school mathematics. I P. Gates (Red.), *Issues in Mathematics Teaching*. London: Routledge.

8 Vedlegg 1. Oversikt over oppgaver analysert i denne litteraturgjennomgangen



1. Write down and solve the six equations in this diagram.

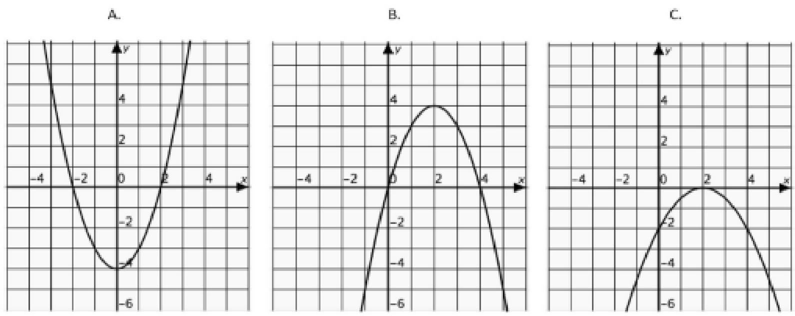
2. What do you notice about your six solutions?

3. Now make up another diagram like this containing different expressions. Try to make the solutions to your *expression polygon* a "nice" set of numbers.

4. Make up some more *expression polygons* like this and see if other people can solve them.

Figur 2. Polygon etude, hentet fra artikkel 1, (Foster, 2018)

Below are three graphs. Indicate the features that are common to graphs A and B but not to graph C; B and C but not to graph A; A and C but not to graph B.



Figur 5. Grafer, hentet fra artikkel 2, (Ayalon & Wilkie, 2020)

$f(x)$ is a quadratic function.

Given: $f(1) = 10$ and $f(6) = 10$.

How many solutions does the equation $f(x)=0$ have? Explain your response in as much detail as you can.

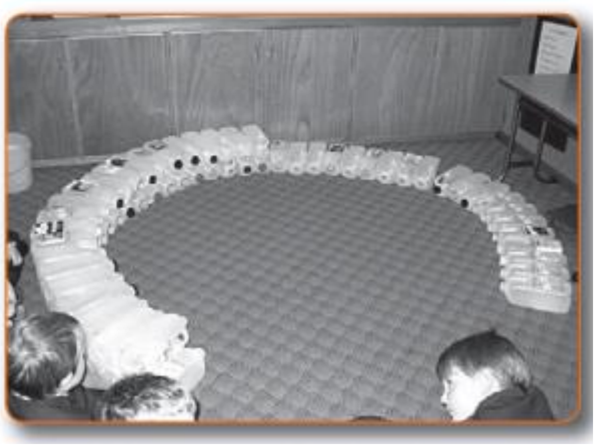
Figur 6. Funksjon, hentet fra artikkel 3, (Ayalon et al., 2020)

Task 2. Traffic Jam

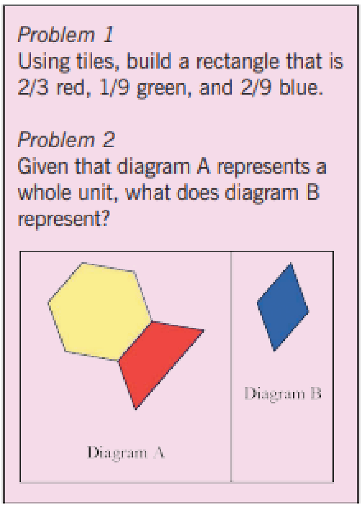
Due to landslide on Gurutee mountain, a giant rocks fell in the middle of highway connected Banda Aceh and Meulaboh. This accident caused a traffic Jam 7 km long on two different directions as seen in graph below

a. How many cars do you think were in the traffic jam? Explain your thinking and show all your calculations? Write down any assumptions you make
b. When the accident was cleared, the cars drove away from the front, one car every two minutes. Estimate how long it took before the last car moved
c. A television reporter report that 'the landslide accident would effect on traffic road along Banda Aceh-Meulaboh one day after'. Do you agree with the reporter's statement? Explain your reason

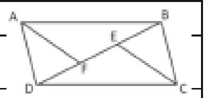
Figur 7. Trafikkork, hentet fra artikkel 4, (Fitriati et al., 2020)



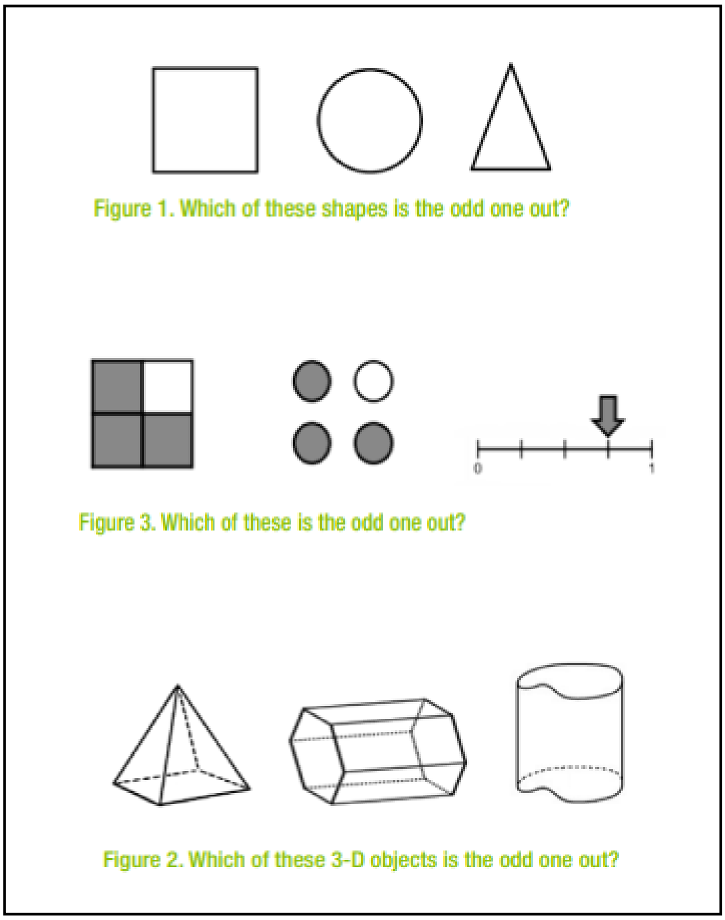
Figur 8. Klassen bygger en iglo av melkeflasker, hentet fra artikkel 6, (Knowles, 2009)



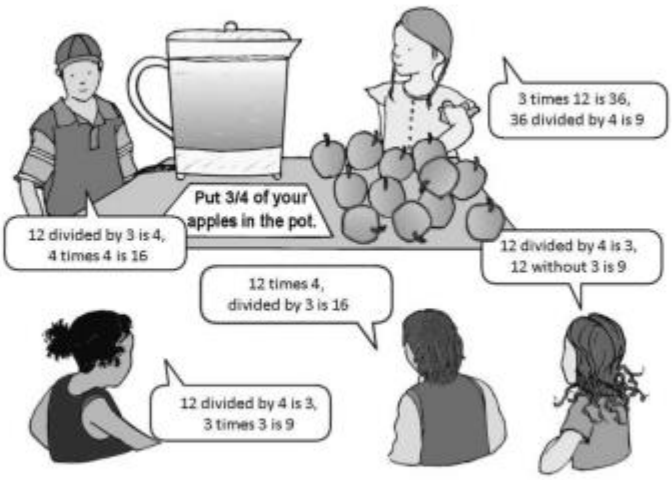
Figur 9. Brøk, hentet fra artikkel 7, (Emily & Patrick, 2013)

Requiring use of multiple strategies – Multiple solution task (MST)	
Posed Task (PT-1)	Solve the following problem in as many ways as possible 
Initial problem (InP-1)	ABCD is a parallelogram. AF, CE are bisectors. The points F, E are on the diagonal BD. Prove that AF = CE
Suggested solutions	1) Drawing the diagonal AC, proving $\Delta AFM \cong \Delta CEM$ (where M is the intersection of AC and BD). 2) Proving $\Delta BCE \cong \Delta DAF$; 3) Proving $\Delta ABF \cong \Delta CDF$ 4) Calculations using angle bisector theorem 5) Using law of sines in trigonometry in ΔBEC, ΔAFD; 6) in ΔCDE, ΔABF
Removing the givens –Multiple outcome task (MOT)	
Posed task (PT-2)	Two friends are going along the same road. The distance between them is 18 km, the speed of the first friend is 5 km/h and the speed of the other friend is 7 km/h. What will be the distance (along the road) between the friends in one hour?
Initial problem (InP-2)	Two friends went simultaneously towards each other, from two places that are at a distance of 18 km. The speed of one is greater by 1 km/h than the speed of the other. They met after 2 hours. What is the speed of each one?
Suggested solutions	1) 6 km - Explanation: They walk towards each other. 2) 16 km - Explanation: The second friend starts behind the first one, both walk to the same direction. 3) 20 km - Explanation: The second friend starts in front of the first one, both walk to the same direction. 4) 30 km - Explanation: They walk in opposite directions.
Removing the sorting criteria – Sorting task	
Posed problem (PT-3)	Sort the given functions in categories in different ways according to different sorting criteria
Initial problem (InP-3)	For each of the provided function expressions, define the parabola type (min/max) and sketch it. $y = x^2 + 4x + 6$ $y = -x^2 - 8x + 1$ $y = -2x^2 + 3x + 1$ $y = 2x^2 + 9$ $y = x^2 + 6x - 3$ $y = 2x^2 + 8x - 1$ $y = -x^2 + 6x + 5$ $y = 8x - 4x^2$
Suggested solutions	1) *Sorting criteria:* The number of intersections of the parabola with the x-axis *Categories:* 2 points, 1 point, 0 points 2) *Sorting criteria:* the intercept of the parabola with the y axis *Categories:* positive, negative, 0 3) *Sorting criteria:* Location of the parabola's vertex with respect to the x-axis *Categories:* above x-axis, on the x-axis, under x-axis 4) *Sorting criteria:* Location of the parabola's vertex with respect to the x-axis *Categories:* above x-axis, on the x-axis, under x-axis 5) *Sorting criteria:* Type of vertex *Categories:* minimum, maximum
Requiring generalization – Investigation task	
Posed problem (PT-4)	How many extrema can a polynomial function of even degree have?
Initial problem (InP-4)	Is it possible that a function of 4^{th} degree has only 2 extrema? Explain your answer?
Suggested solutions	For an n-factor polynomial it is easy to see how to get 1 extremum point, or n-1 different extrema, but it is difficult to prove that we can get any odd number of extrema (even for the example of n=6 and of course for any n).

Figur 10. Skjema over åpne oppgaver, hentet fra artikkel 8, (Klein & Leikin, 2020)

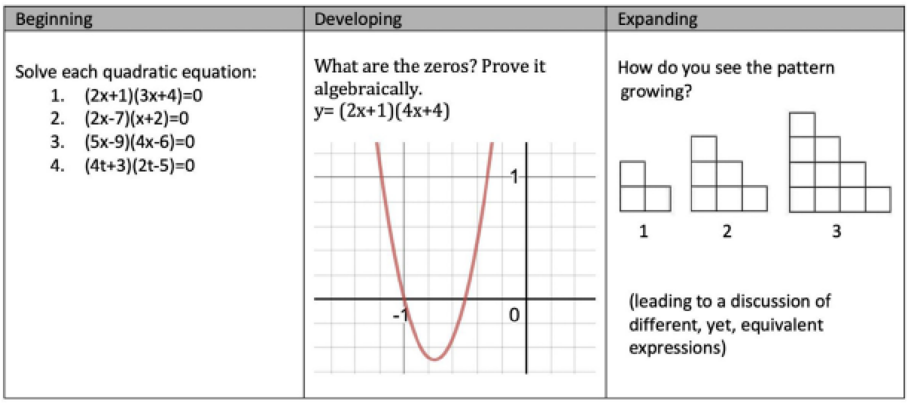


Figur 11. Hvem skal ut, hentet fra artikkel 9, (West, 2018)

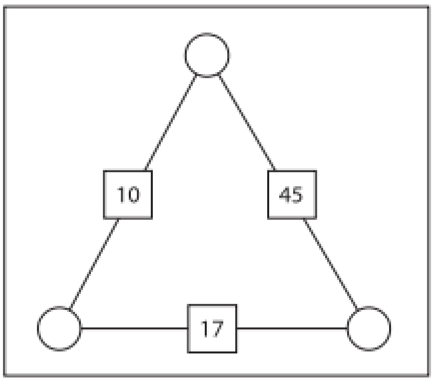


Hvem har et korrekt svar?

Figur 2. Tegneseriestripe, hentet fra artikkel 10, (SamkovÁ & TichÁ, 2016)



Figur 12. Funksjoner, graf og mønster, hentet fra artikkel 11, (LaMar et al., 2020)

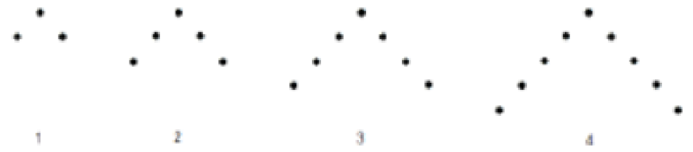


Figur 13. Talltrektant, hentet fra artikkel 12, (Pehkonen, 2018)

Remember the tower you built last term; it was next to a house. This house showed a pattern too. The house was knocked down and you have been asked to rebuild it. It must show a pattern or several patterns. Imagine what your house looks like. Use the cubes to build it. Draw it. Write about your house. Explain how you made a pattern.

Figur 14. Bygge hus, hentet fra artikkel 13, (McKnight & Muligan, 2010)

In the sequence that follows each figure represents a flock of ducks and each dot represents one of the ducks in the flock. Here are the first four terms:



Answer the following questions and state your reasoning using words, diagrams, calculations or symbols.

1.1. How many dots does the next figure of this sequence have?

1.2. How many dots does the hundredth figure (term of the order 100) of this sequence

Figur 4. Figurtall, hentet fra artikkel 14, (Floriano & Inês Bernardo, 2012)

Task description

Students were to create a timetable for a movie theatre. They were given the length of the movies and the opening times of the theatre. The students were also told that the movies needed 15 minutes between them. The task involved the students choosing 5 movies with the duration times of: 1 h 30 min; 1 h 30 min; 2 h; 2 h 20 min; and 1 h 45 min. The theatre opened at 10:00 a.m. and closed at midnight. The students then needed to choose which movies they were going to see on that day and work out how they could see the largest number of movies possible (See Figure 1 for one student's written representation of the task). They were allowed to visit different cinemas and needed to take into account travel time.

Figur 15. Tidskjema for en kino, hentet fra artikkel 15, (Sullivan et al., 2009)