MASTEROPPGAVE

M1GLU

Fagfordypning i matematikk og matematikkdidaktikk

Mai 2022

Norske elever på 5. og 6. trinn sin forståelse av likhetstegnet

Norwegian students in 5th and 6th grades understanding of the equal sign

30 studiepoeng

Marcus T. Hanssen og Klaus Mørch

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Sammendrag

Algebra er for mange enten noe man føler man mestrer, eller ikke. Undersøkelser har i den siste tiden vist at Norge ikke skårer særlig bra når det kommer til algebra. Forskning har vist at det å ha en god forståelse for ekvivalens, og derav likhetstegnet, kan være avgjørende for fremtidig mestring av nettopp algebra. I denne oppgaven ønsker vi derfor å se på hvordan elever i den norske skolen forstår og mestrer likhetstegnet i dag. Vi har av den grunn formulert følgende problemstilling: *Hvilken forståelse for likhetstegnet har norske elever på 5. og 6. trinn?* Det teoretiske rammeverket vi legger frem for å undersøke problemstillingen vår er basert på en artikkel skrevet av Percival Matthews. Denne artikkelen viser til at elever har en flytende forståelse av likhetstegnet, som karakteriseres av fire nivåer med økende grad av forståelse. I tillegg til rammeverket trekker vi frem tidligere forskning rundt likhetstegn forståelse.

Metoden vi brukte for å innhente data var å gjennomføre oppgavebaserte intervjuer på tre forskjellige skoler i Oslo, og tok lydopptak av intervjuene. Til sammen intervjuet vi 13 elever, over tre dager. De fire oppgavene elevene løste var laget med mål om å teste de fire nivåene Matthews la frem. Vi tok utgangspunkt i transkripsjoner og oppgavearkene til elevene for videre analyse.

Gjennom dette studiet har vi funnet ut av at det er en begynnende trend mot en bedre forståelse av likhetstegnet. Tidligere har konsensusen vært at yngre elever på skolen mener at likhetstegnet er et signal for å oppgi et svar. Vi har, i motsetning til tidligere forskning, funnet ut at flere av elevene vi intervjuet ligger i det øvre sjiktet av likhetstegnsforståelse.

Abstract

For many, algebra is either something they feel they master or do not. Recent studies have shown that Norway does not score very well when it comes to algebra. Research has shown that having a good understanding of equality, and the equal sign, can be crucial for future proficiency with algebra. Therefore, in this thesis, we want to study how students in the Norwegian school system understand and master the equal sign now. For this reason, we have formulated the following research question: What understanding of the equal sign do Norwegian students have in 5th, and 6th grade have? The theoretical framework we utilize for understanding this research question is mainly an article written by Percival Matthews. This article points out that students have a continuously evolving understanding of the equal sign, which is characterized by four levels of increasing understanding. In addition to the framework, we also present early research on equal sign understanding.

The method we used to obtain data was to conduct task-based interviews at three different schools in Oslo and record audio of the interviews. In total, we interviewed 13 students over three days. The four tasks we asked the students to solve were made to test the four levels Matthews presented in his article. We used the transcripts from the interviews coupled with the task sheets the students had written their answers on for our analysis.

We have found an incipient trend towards a better understanding of the equal sign through this project. Previously, the consensus has been that younger students in school believe that the equal sign is a signal to provide an answer. On the other hand, we have found that a predominance of the students we interviewed understand the upper end of equal sign understanding more than those who do not. These students do not see the equal sign as a precursor to an answer.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på vår femårige masterutdanning som grunnskolelærere på 1. til 7. trinn ved OsloMet.

Gjennom arbeidet med denne oppgaven har vi fått innblikk i hvilke forståelser av likhetstegnet elever kan ha, hva elevene får til av oppgaver, og hva de synes er vanskelig. Arbeidet med denne masteroppgaven har vært både krevende og lærerikt for oss begge. Vi har lært mye om hvordan vi selv jobber, og til dels hvordan vi kanskje også burde ha jobbet. Viktigst av alt, så har vi lært mye om hvordan elevene våre tenker om likhetstegnet, og mer om hvorfor likhetstegnet er viktig i vår fremtidige jobb som matematikklærere på barnetrinnet.

En spesiell takk må vi gi til vår flotte veileder, Trude Sundtjønn, som har vært en flott støtte i et ellers krevende halvår for vår del. Uten hennes veiledning og støtte hadde vi nok ikke klart å få denne oppgaven i land. I tillegg til Trude, må vi takke foreldre, søsken, og medstudenter som har orket å lese over det vi har skrevet, og gitt oss både oppmuntrende ord og gode tilbakemeldinger.

Vi ønsker å takke alle de hyggelige elevene vi fikk møte underveis, og ikke minst til lærerne som lot oss snakke med elevene sine i skoletiden. Vi setter veldig stor pris på muligheten til å få snakke med deres flinke elever i sammenheng med studiet vårt. Uten dem hadde vi ikke hatt noe datamateriale.

Oslo, 16.04.2022

Marcus T. Hanssen og Klaus Mørch

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Forståelse av likhetstegnet mener forskere at er knyttet opp mot videre mestring av arbeid med algebra (Knuth et al., 2006). Før vi skal få et innblikk i ulike måter å forstå likhetstegnet på, ønsker vi å se nærmere på algebraisk tenking og algebra tidlig, som vi videre ser på i sammenheng med TIMSS.

Det er ikke nødvendigvis lett å forstå og definere hva algebraisk tenkning er i matematikken på barnetrinnet. I boken *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds*, konkluderer Kieran (2017) med at «…there is no single theoretical perspective or unique definition as to what constitutes early algebraic thinking and how its development can be appropriately investigated or promoted» (s.428). Kaput (2008, gjengitt i (Blanton et al. (2017)) mener at algebra kan deles opp i to hovedaspekter: a) å generalisere gjennom stadig mer formelle former og med stadig mer konvensjonell symbolisme; og b) arbeide i et etablert symbolsk system gjennom en etablert syntaks med de konvensjonelle symbol systemene tilgjengelig (s.30).

TIMSS, eller «Trends in International Mathematics and Science Study», er en internasjonal studie om elevers forståelse i matematikk og naturfag som gjennomføres for grunnskolen, barneskolen og ungdomsskolen. TIMSS studien gjennomføres hvert fjerde år og start opp i 1995 (Sjøberg, 2022). Rammeverket til TIMSS er basert på en konsensus mellom alle de deltakende landene om hva som er viktig matematisk kunnskap i forhold til landenes læreplaner.

Utdanningsdirektoratet (2022) forklarer at det er to sider ved elevenes læring som blir undersøkt i TIMSS undersøkelsen; faglig kunnskap og læringskontekst.

- Faglig kunnskap: TIMSS måler elevenes evne til å bruke kunnskap og ferdigheter i forskjellige situasjoner; evnen til å resonnere, argumentere, se sammenhenger, trekke slutninger og sammenfatte.
- Læringskontekst: Ved hjelp av spørreskjemaer til elever, foresatte (bare på 5. trinn), lærere og rektorer samles det inn bakgrunnsdata som kan benyttes i analyser av hva som bidrar til god læring. Dette kan for eksempel være faktorer som elevenes hjemmebakgrunn, elevenes motivasjon og holdninger, lærerens utdanning, undervisningskvalitet og skolemiljø.

	1995	2003	2007	2011	2015
4. trinn	476	451	476	495	493

Figur 1 - Oversikt over TIMSS poengsum 1995 - 2015

I 2003 skåret Norge det den laveste poengsummen på TIMSS undersøkelsen i landets historie. Grønmo og Olsen (2005) som skriver om TIMSS 2003 poengterer viktigheten av algebra tidlig når de skriver at:

> Det mest bemerkelsesverdige ved de norske prestasjonene er de lave skårverdiene i TIMSS for emneområdet tall. At norske elever også presterer svakt på for eksempel algebra er forståelig på bakgrunn av at dette er et område som er nedtonet i norske læreplaner. (Grønmo & Olsen, 2005, s. 10)

PISA undersøkelsen er også et internasjonalt prosjekt som tester 15-åringer som går på skolen. Undersøkelsen har matematikk, naturfag og lesing som fagområder. Utdanningsdirektoratet (2020) forklarer at PISA sitt overordnede mål er å evaluere hvor godt et skolesystem forbereder elevene til videre studier, yrkesliv og aktiv deltakelse i samfunnet. Sjøberg (2014) sin artikkel forklarer hvordan disse testene, både TIMSS og PISA setter press og forandrer den norske skole. Fra både TIMSS og PISA har læreplanene blitt mer og mer rettet mot en bedre forståelse av algebra og symbolikk i matematikk.

1.1 Valg av tema

Det vi har opplevd i tiden vi har arbeidet og vært i praksis på skoler er at elever ikke forstår viktigheten av hvor symbolene står i matematikkstykker. I arbeidet med forskning og utviklingsarbeids oppgaven vår i 6. semester fikk vi innblikk om at elever i Norge har lite forståelse om likhetstegnet i Norge. Dette paret opp med at vi lærte mye interessant om likhetstegnet på studiet, slik som at elever med god forståelse av likhetstegnet har enklere for å lære algebra, gjorde at vi valgte temaet. Med den nye læreplanen, LK20, blir det satt mer fokus på at elevene skal opparbeide seg en relasjonell forståelse i matematikk, og denne relasjonelle forståelsen er viktig for å gjøre det bra i undersøkelser som TIMSS og PISA. Derfor ønsker vi å se om elevene har symbolforståelsen av likhetstegnet til å mestre atypiske oppgaver.

1.2 Målet med oppgaven

Målet med oppgaven er å få en forståelse som nyutdannede lærere om hvordan elever på mellomtrinnet forstår likhetstegnet. Etter å ha lest litteratur om likhetstegnet og likninger, og snakket med elever på skoler har vi kommet fram til at arbeid med likhetstegnet er viktig for elevers videre forståelse av matematikken og spesielt algebra. En innsikt i hvordan elevene forstår likhetstegnet vil være til stor hjelp for oss som fremtidige lærere. Vi håper at vi kan legge opp undervisningen på en måte slik at elevene får en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Om elevene får en god forståelse av likhetstegnet vil de ha god nytte av dette senere når de jobber med mer avansert matematikk og algebra. For å forstå mer om hvordan elever forstår likhetstegnet, bruker vi et rammeverk som er laget av Matthews et al. (2012) som baserer seg på at det er fire nivåer av likhetstegns forståelse, mer om dette i kapittel 2.5. I denne masteroppgaven har vi samlet inn data med oppgavebaserte intervjuer som har gitt oss muligheten til å prøve å forstå hvilket nivå elevene vi har snakket med ligger på. Dette diskuterer vi nærmere i kapittel 3.2. Vi diskuterer også hva som tilsier et høyere nivå, og reflekterer over hva resultatene våre betyr for undervisningen i norsk skole – og har forslag til hvordan lærere kan hjelpe elevene å oppnå høyere nivåer av forståelse.

1.3 Problemstilling

Likhetstegnet er et av de mest brukte symbolene i matematikk. Forståelsen av likhetstegnet er noe vi har sett elever sliter med på barneskolen. Flere elever vi har møtt i praksis har sagt at symbolet betyr «regn ut». Denne relasjonelle forklaringen var det som gjorde at vi ønsket å se videre på likhetstegnet. Etter å ha lest mye litteratur, fant vi ut at det var lite forskning om likhetstegnet i Norge. Derfor kom vi frem til at vi ønsker å se om elever har relasjonell eller operasjonell forståelse av likhetstegnet i Norge. Vi valgte derfor problemstillingen: «*Hvilken forståelse for likhetstegnet har norske elever på 5. og 6. trinn?*».

2 Teori

Som vi har nevnt tidligere i oppgaven, er vi interessert i å se hvordan barn i den norske skolen forstår likhetstegnet, blant annet fordi en god forståelse av hvordan man bruker likhetstegnet i matematikk er en viktig del av videre arbeid med algebra. På bakgrunn av det ønsker vi å få en bedre forståelse av ulike måter elever kan forstå likhetstegnet, og hva tidligere forskning sier om hva elever som er i skolen kan om likhetstegnet.

Likhetstegnet er en sentral del av nærmest alt elever jobber med i skolen, og er noe som elever må forstå og kunne bruke (Knuth et al., 2006; McNeil et al., 2006). Det at likhetstegnet er så tilstedeværende i det meste av arbeid med matematikk understreker hvor viktig tegnet er, og at det er noe som bør være i fokus. Pepin et al. (2014) fant ut av at det er noe mangel på forskning rundt forståelse av likhetstegnet i det norske klasserommet. Derimot finnes mer utfyllende forskning gjennomført internasjonalt av ledende forskere på feltet. Vi vil derfor diskutere denne internasjonale forskningen slik at den er en bakgrunn for vår analyse, resultater og funn.

2.1 Likhet og ekvivalens

Når man ser på elevers forståelse av likhetstegnet, er det to viktige begreper som ofte kommer igjen i litteraturen, nemlig: *equality* og *equivalence,* som vi har oversatt henholdsvis til likhet og ekvivalens for videre bruk i denne oppgaven. Gattegno (1974) forklarer at likhet handler om en egenskap som ikke endrer seg, men at ekvivalens derimot handler om attributter som kan endres gitt at det er relevant. Videre skriver Gattegno (1974) at fordi ekvivalens er en mer omfattende og fleksibel forståelse vil det også være viktigere enn likhet. For elever kan en tanke om ekvivalens handle om at de ser på en oppgave som noe ikke-konstant, eller som noe som kan endres på, men heller som noe som er ekvivalent og mulig å endres på. Eksempelvis kan en elev se at $4 + 2 = 6$ er riktig, men samtidig at det kan skrives på mange andre mulige måter også som $4 + 2 = 3 + 3$. Kieran (1981) nevner også dette med likhet og ekvivalens som beskrevet av Gattegno (1974), men sier at likhetstegnet ikke alltid blir oppfattet som et tegn på ekvivalens hos elever. I tillegg nevner Kieran (1981) at å få en forståelse av ekvivalens ikke er noe som elever lett får til.

2.2 Operasjonell- og relasjonell forståelse

Tidligere forskning viser at det er mulig å dele inn elevers forståelse av likhetstegnet i to hovedkategorier: Operasjonell- og relasjonell forståelse (Baroody & Ginsburg, 1983; Kieran, 1981; Knuth et al., 2006; McNeil et al., 2006; Prediger, 2009).

Operasjonell forståelse, eller som Baroody og Ginsburg (1983) referer til operasjonsforståelse, referer til at elever forstår bruken av likhetstegnet som et signal for å «gjøre noe», eller at det skal produseres et svar bak tegnet (Baroody & Ginsburg, 1983; Kieran, 1981; Knuth et al., 2006; McNeil et al., 2006; Prediger, 2009). Baroody og Ginsburg legger vekt på at forståelsen elevene har handler om at tegnene i et regnestykke/likning representerer operasjoner som elevene skal utføre i oppgaven. På bakgrunn av det kan vi si at elevene vil se på likhetstegnet som et tegn som signaliserer noe de skal gjøre eller produsere, istedenfor et tegn som signaliserer en sammenheng.

Kieran (1981) skriver i oppsummeringen av sin artikkel at «Early elementary school children, despite efforts to teach them otherwise, view the equal sign as a symbol which separates a problem with its answer" (Kieran, 1981, s. 324), noe som tyder på at denne type forståelse elevene har, er noe som er dypt festet og vanskelig å endre på. Det kan derfor virke som at det er det operasjonelle synet på likhetstegnet som er det mest vanlige synet blant skoleelever, iallfall tidlig i skolegangen. Vi vet ikke om dette er tilsvarende i norske klasserom i dag, men det er ikke forsket på dette. Baroody og Ginsburg (1983) konkluderer med at elever som har dette operasjonelle synet på likhetstegnet vil få problemer med oppgaver på en annen form enn de oppgavene hvor den aritmetiske operasjonen er på venstre side, som 15+20=__. Regnestykker som 12 + ? = 27, mener Baroody og Ginsburg (1983) at elever har lettere for å klare enn hvis de aritmetiske operasjonene er på høyre side. Oppsett av oppgaver som elevene da sannsynligvis synes er vanskelige, ifølge forfatterne, er da eksempelvis: ? = 16 + 23, eller med flere ledd som i: 12 + ? = 23 + 7.

En annen type forståelse som elevene kan ha av likhetstegnet er en relasjonell forståelse. Som Baroody og Ginsburg (1983, s. 198) poengterer, så viser det seg at de færreste elever ser på likhetstegnet som «det samme som», altså et relasjonelt symbol som peker mot et forhold mellom det som står på venstre og høyre side av likhetstegnet. Det som er forskjellen mellom denne forståelsen, og den operasjonelle forståelsen, ligger i det faktum at elever ikke ser på tegnet som en operatør de må bruke, men heller som et tegn på en relasjon mellom verdien av de to sidene. Uten denne forståelsen for relasjonen mellom de to sidene av for eksempel en likning, vil ikke elevene kunne forstå transformasjoner man gjør for å løse oppgaven (Knuth et al., 2006). Knuth et al. (2006) skriver også at tidligere forskning gjort av Kieran (1992), og ellers i litteraturen, viser at en relasjonell forståelse av likhetstegnet er nødvendig for å både skape og forstå meningsfulle likheter. Selv om Knuth et al. (2006) sier seg enig i viktigheten av en relasjonell forståelse, legger han vekt på at det er en mangel i litteraturen rundt viktigheten av hvordan elevene utfører ekvivalente transformasjoner på likheter. Videre legger artikkelen til Knuth et al. (2006) frem både sin forskning og sine argumentasjoner på hvordan en forståelse av ekvivalens kan hjelpe mellomtrinn/tidlig ungdomsskole-elever med algebra. Forskerne fant en sterk korrelasjon mellom elevenes likhetstegnforståelse og deres evne til å løse likninger, uten at det ble påvirket av de matematiske evnen til elevene. Knuth et al. (2006) nevner også at elever som har en relasjonell forståelse vil, uten tidligere erfaring med algebra, ha en bedre forståelse for hvordan man løser likninger. I tillegg fant forskerne også en sterk sammenheng mellom de elevene som hadde en relasjonell forståelse, og elevene som løste oppgaver med en algebraisk strategi. De noterte at elever som brukte algebraiske strategier når de løste likninger, fikk riktig på alle oppgavene de gjorde. Vi kan oppsummere dette med at forskning ønsker å gi elever en innføring i en relasjonell forståelse av likhetstegnet tidligst mulig.

Likhetstegnet brukes til mye i matematikken, derfor har Susanne Prediger (2009) delt opp hvordan man kan bruke, og forstå, likhetstegnet. Prediger deler også inn likhetsforståelse i både operasjonell og relasjonell, hvor relasjonell har flere underkategorier. I tillegg til disse to kjente kategoriene av forståelse legger Prediger, basert på Cortes et al. (1990), også inn en tredje kategori for bruken av likhetstegnet som et spesifiserende tegn.

Kategori 1 som er operasjonell forståelse handler om, som nevnt tidligere, at en operasjon gir et svar. Det er ofte snakk om enkle asymmetriske utregninger som 5 + 7 = 12, men kan også brukes om mer avansert matematikk, som notering av areal: $\text{Areal} = 15\text{cm} \cdot 4\text{cm} \ = \ 60\text{cm}^2$ (Prediger, 2009).

Kategori 2, relasjonell forståelse, deles inn i fire underkategorier: symmetrisk aritmetisk identitet; formell ekvivalens som beskriver like ekvivalente utrykk; betingete likninger som karakteriserer ukjente; kontekstuelle identiteter for formler.

Symmetrisk aritmetisk identitet, kategori 2a, er en underkategori som er utviklet på bakgrunn av et konseptet med samme navn som diskutert av Kieran (1981). Denne likhetsforståelsen handler om å forstå aritmetiske prinsipper, altså oppgaver hvor det er utelukkende tall, ikke bokstaver eller variabler. På denne måten holder «algebra» seg separat fra en aritmetisk forståelse (Prediger, 2009). Eksempler kan være oppgaver med den kommutative lov: $5+6=6+5$, eller andre numeriske identiteter som: $10^2 - 9^2 = 19$.

Kategori 2b, formell ekvivalens, referer til algebraisk ekvivalens som inneholder variabler og hvor alle mulige verdier av variabler tilfredsstilles som: $(a - b)(a + b)=a^2 - b^2$. Formell ekvivalens tilpasses til ulike situasjoner eller verdier, alt etter som hva som det brukes til (Prediger, 2009).

Videre er kategori 2c, betingede likninger som karakteriserer ukjente, noe lik som kategori 2b, men til forskjell fra 2b gjelder ikke disse likningene for alle verdier av variabler og ukjente. Derav kommer det at de er betingede, likningene er ikke generelle som det de formelle er, og viser til spesifikke ukjente som: $x^2 = -x + 6$ (Prediger, 2009). Kategori 2d, kontekstuelle identiteter for formler, er en kategori som kan være vrien siden disse ofte minner om generelle likninger som de i kategori 2b, men disse er bare generelle i noen kontekster, som eksempelvis Pytagoras-setningen som er generell for sider i en rettvinklet trekant (Prediger, 2009).

Til slutt har vi den foreslåtte kategorien som Cortes (gjengitt i Prediger (2009), 1990) la frem, nemlig: spesifisering. Denne kategorien beskriver ikke identiteter, men likhetstegnet brukes til å oppgi en identitet som i en definisjon og ikke som en proposisjon. Slike definisjoner brukes ofte i skolematematikken, som eksempelvis til å oppgi sidelengder i arealoppgaver:

Side C = 34cm.

2.3 Hvorfor er en operasjonell forståelse vanlig?

Det viser seg at den forståelsen som er mest vanlig blant barn er en operasjonell forståelse, altså at de ser på likhetstegnet som et tegn på å «gjøre noe» eller at man skal produsere et svar (Baroody & Ginsburg, 1983; Kieran, 1981; Knuth et al., 2006). Som Kieran (1981) skriver, så sitter denne forståelsen godt fast i elevene, og er vanskelig å få snudd på. Det er gjort flere forsøk på å gi elevene opplæring fra tidlig mot en relasjonell forståelse, eksempelvis Denmark (1976), men disse konkluderer med at selv om elevene fikk en mer fleksibel forståelse hadde de fortsatt et operasjonelt syn i bunn. Andre forskere (Baroody & Ginsburg, 1983; Collis, 1974) har også forsøkt å komme opp med en forståelse for hvorfor elever i hovedsak har et operasjonelt syn på likhetstegnet, og ikke en relasjonell forståelse. To syn som Baroody og Ginsburg (1983) legger frem i sin artikkel, handler om: 1) barn sin tidlige erfaring med daglig aritmetikk og hvordan aritmetikken blir presentert for dem, 2) det er kognitive begrensninger som henger sammen med alderen til elevene, og hva de kan forstå.

Den ene forklaringen på hvorfor elever oftest har en operasjonell forståelse, legger til grunn hvilken erfaring elevene får med likhetstegnet gjennom sin tidlige skolegang. Som Baroody og Ginsburg (1983) skriver, blir elever i skolen ofte introdusert til likhetstegnet gjennom en innlæring av addisjon. Denne innlæringen skjer med oppgaver på formen $a + b =$?, hvor elevene arbeider i all hovedsak med oppgaver som dette i arbeidsbøker og oppgaveark. På denne måten kan elever bli såpass vant til denne formen av oppgaver, at de begynner å se på likhetstegnet som et tegn for «legges sammen til». På bakgrunn av det vil man da ofte se at elever som blir satt til å arbeide med oppgaver på atypiske former, vil slite med å løse dem. Oppgaver som 13 = ? + 7 er et eksempel på en oppgave de ville hatt vanskeligheter med. Elevene som blir utsatt for denne typen innlæring behøver da ikke å forstå at likhetstegnet er et symbol for ekvivalens, men blir heller så innlært til å utføre operasjonene som kommer før likhetstegnet og skrive svaret bak (McNeil et al., 2006).

Det andre synet som forskerne legger frem, handler om hvorvidt barna er utviklet nok kognitivt til å kunne forstå konseptet rundt en relasjonell forståelse av likhetstegnet og ekvivalens (Baroody & Ginsburg, 1983; McNeil et al., 2006). På grunn av alder og utviklingsstadiet som barn er på, har de muligens en mangel på logiske strukturer eller et umodent arbeidsminne. Denne mangelen kan hindre de fra å kunne lære og forstå kompleksiteten bak ekvivalens begrepet. Collis (1974) hevder at barn under 13-års alderen ikke har muligheten til å arbeide meningsfullt, og fleksibelt, med likninger. Barn i alderen 6 til 10år derimot, har ikke mulighet til å akseptere mangelen på et konkret svar eller en «konklusjon» på oppgaven. Dermed kan vi si at barn ikke ville godtatt en oppgave som ser ut som: 4 + 5 = 6 + 3, men ville godtatt 4 + 5 = 9.

Baroody og Ginsburg (1983) sier videre at hvis man skal se på hva som burde gjøres med undervisningen av barna ut ifra de to synene så er det litt forskjellig med tanke på hvilket syn man har. Ser man på det med et syn som tilsier at barn ikke har fått nok erfaring med et relasjonelt syn og ekvivalens, må man bare legge til rette for dette. Da kan man istedenfor å bare gi elevene oppgaver som gjør at de må produsere et svar, vil det være hensiktsmessig å presentere de oppgaver på mer atypiske former. På den andre siden burde slike endringer ha ingen effekt hvis det kognitive er hinderet for elevers utvikling av en relasjonell forståelse.

Noe annet man må tenke på med elever og innlæring av nye konsepter. handler om hvordan konteksten man får noe presentert i kan ha en effekt på om man forstår eller ikke. Som McNeil et al. (2006) nevner, har flere forskere (jf. (Barsalou, 1982)) argumenter for at kunnskap elever har om forskjellige konsepter innen matematikk kan være avhengige av konteksten. Dette gjelder spesielt for kunnskap som er enten ny, eller på vei til å bli forstått, men som ikke er helt forstått enda. Elevene kan derfor vise forståelse for et konsept som relasjonell tankegang rundt likhetstegnet, i noen situasjoner, men ikke i andre. Godt etablert kunnskap er lett for elever å bruke i varierte situasjoner, mens nyetablert kunnskap vil hovedsakelig bare være mulig å ta i bruk i færre og mer begrensete situasjoner. På grunn av dette argumenterer McNeil et al. (2006) for at det ikke skal forventes at mellomtrinns elever viser til en relasjonell forståelse på tvers av situasjoner og kontekster. Selv om de kanskje er modne nok til å gjøre det, vil det kanskje ikke være kontekstuelt riktig for dem. Det krever en del av elevene å få frem den relasjonelle forståelsen, men blir elevene presentert med oppgaver som er på et atypisk oppsett kan det være nok. Dette kommer av at oppgaver med et oppsett som er ukjent for elevene, slik som $a = b + c$, nødvendiggjør at elevene tenker relasjonelt for å forstå løsningen.

2.4 Variabler

Vi har valgt å inkludere en deloppgave hvor det ikke er bestemt hvilke tallpar som elevene skal sette inn som svar. Oppgaven er lagt opp slik at elevene selv må bestemme hvilke to tall som passer i likningen, slik at det blir like verdier på begge sidene. Selve oppgaven kommer vi til å diskutere mer rundt videre i studien. Fordi oppgaven er lagt opp slik at elevene selv skal bestemme verdiene, vil det variere hvilke tallpar som kan bli valgt, så lenge de har riktig samvariasjon. Derfor vil vi presentere kort litt teori rundt variabler.

Malle ((1993) sitert i (Prediger, 2009)) har skilt ut fem forskjellige tolkninger av variabler:

1) som en plassholder, 2) som en ukjent, 3) som en generalisert mengde, 4) som et endrebart meningsløst symbol, og 5) som en endrende verdi i funksjoner.

Variabler som plassholdere fungerer på den måten at det er en numerisk verdi som skal «ta plassen» til variabelen brukt i oppgaven. Denne tolkningen beskrives som utbyttingsaspektet. Tall som skaper like verdier for alle utbyttede variabler regnes som ekvivalente.

Under det situasjonelle aspektet ved variabler, faller både ukjente, og generaliserte mengder. Leddene i disse utregningene funker som beskrivelser av spesifikke situasjoner, altså at de kan beskrive samme figuren på forskjellige måter.

Under det kalkulerende aspektet finner vi endrebare meningsløse symboler. Variablene i dette aspektet blir sett på som meningsløse symboler, hvor leddene i utregningen ikke har mening bak seg og ekvivalente ledd kan bli endret til hverandre gitt at de følger transformasjonsreglene.

Sist er det når variablene blir sett på som endrende verdier innen funksjoner. Her beskriver variablene tall som varier i takt med det økende/synkende funksjonsuttrykket. Ekvivalens innen denne tolkningen handler om to funksjonsuttrykk som viser til samme graf.

2.5 Elevers forståelse av matematisk ekvivalens

Rammeverket vi valgte å bruke er først beskrevet av Rittle-Johnson et al. (2011). Rammeverket, eller kartet som de kaller det, ble utviklet for å oppdage systematiske endringer i barns kunnskap av ekvivalens på grunnskolenivå, fra 2. til 6. trinn. Kartet ble deretter videreutviklet av Matthews et al. (2012), og rettet mer mot matematikk enn psykologi som det var tidligere. Forskningen til Matthews ble gjort i 13 klasserom fra 2. – 6. trinn i Tennessee. Til sammen ble det 224 elever som gjennomførte oppgavene. Det var flest elever i de laveste trinnene, og færrest på 6. trinn. Matthews arbeidet videre på rammeverket til Rittle-Johnson et al. der han laget spesifikke kjernelikningsstrukturer og beskrivelse av hva de fire nivåene skulle inneholde for en tilstrekkelig forståelse av nivåene.

Table 1
Construct Map for Knowledge of the Equal Sign as Indicator of Mathematical Equality

Level	Description	Core equation structure(s)
Level 4: Comparative Relational	Successfully solve and evaluate equations by comparing the expressions on the two sides of the equal sign, including using compensatory strategies and recognizing transformations maintain equality. Consistently generate a relational interpretation of the equal sign.	Equations that can be most efficiently solved by applying simplifying transformations: For example, without adding 67 + 86, can you tell if the number sentence "67 + 86 = 68 + 85" is true or false?
Level 3: Basic Relational	Successfully solve, evaluate, and encode equation structures with operations on both sides of the equal sign. Recognize relational definition of the equal sign as correct.	Operations on both sides: $a + b = c + d$ $a + b - c = d + e$
Level 2: Flexible Operational	Successfully solve, evaluate, and encode atypical equation structures that remain compatible with an operational view of the equal sign.	Operations on right: $c = a + b$ No operations: $a = a$
Level 1: Rigid Operational	Only successful with equations with an operations-equals-answer structure, including solving, evaluating, and encoding equations with this structure. Define the equal sign operationally.	Operations on left: $a + b = c$ (including when blank is before the equal sign)

Note. Table adapted from Rittle-Johnson et al. (2011, p. 87).

Figur 2 - Matthews et al. (2012) 4 nivåer for forståelse av likhetstegnet

Rammeverket viser mindre sofistikert kunnskap på bunnen og mer avansert kunnskap på toppen og blir kategorisert inn i 4 nivåer. De fire nivåene som vi har oversatt til norsk er rigid operasjonell, fleksibel operasjonell, grunnleggende relasjonell, og komparativ relasjonell.

Elever med nivå 1 forståelse, rigid operasjonell, forventes å kun lykkes med standard likninger som følger den vanlige operasjon-er lik-svar formatet, men mislykkes med likninger som følger andre formater. Eksempel: 7 + 4 = Δ er en likning disse elevene vil kunne løse (Matthews et al., 2012).

På nivå 2, det fleksible operasjonelle nivået, opprettholder barn et operasjonelt syn på likhetstegnet, men bli noe mer fleksibel med hensyn til typene likningsformater som de kan løse og aksepterer som riktige. Elever på dette nivået blir mer komfortable med likninger som er atypiske, men beholder fortsatt et operativt syn på likhetstegnet, for eksempel likninger som er "baklengs". Likninger som er baklengs tilsvarer fortsatt et operasjonelt syn siden speilbildet er standardformatet, for eksempel Δ = 5 + 4 at kan skrives om til 4 + 5 = Δ. Andre oppgaver kan være ingen operasjons oppgaver, eller «the reflexive property» som betyr at et tall alltid vil være like mye som seg selv, som 5 = 5 eller 5 = V (Matthews et al., 2012).

Når elevene når nivå 3 begynner de å utvikle en grunnleggende relasjonell forståelse, selv om den sameksisterer med et operasjonelt syn. Den grunnleggende relasjonelle forståelsen begynner å manifestere seg hos elevene først og fremst når de begynner å forstå likninger med operasjoner på begge sider av likhetstegnet, eksempelvis 2 + 4 +1 = Δ + 6. Elevene må også godta en relasjonell definisjon, eller forklaring, av likhetstegnet for å være på dette nivået (Matthews et al., 2012).

Til slutt har elever på nivå 4 en komparativ relasjonell forståelse av likhetstegnet. Den nødvendige kompetansen for å forstå dette nivået handler om å forstå de symbolske transformasjonene som endrer uttrykksformen uten å endre likhetsrelasjonen symbolisert av likhetstegnet. For eksempel, elever med en komparativ relasjonell forståelse vet at å utføre de samme handlingene på hver side av en likning opprettholder likheten av mengdene representert av de to sidene, og gjør det unødvendig å utføre utregning. På samme måte kan barn på dette nivået anerkjenne likheten mellom sidene av likninger som 67 + 86 = 68 + 85 uten å måtte regne ut stykket. Elever med denne forståelsen forstår at det ikke er nødvendig å regne ut stykket siden likhetstegnet sier at det er en relasjon mellom tallene. På dette nivået kreves det at elevene konsekvent definerer, og jobber med. likhetstegnet på en relasjonell måte (Matthews et al., 2012).

Selv om det kan virke som at disse nivåene er rigide, er kartet presentert på en måte som gjør det tydeligere hvordan forståelsen av likhetstegnet utvikler seg. Som Matthews et al. (2012) forklarer så er nivåene kontinuerlige, og bør ikke oppfattes som distinkte nivåer. Denne kontinuerlige tanken bak kartet betyr at den mindre sofistikerte kunnskapen til lavere nivåer kan konkurrere med kunnskap på høyre nivåer. Av den grunn kan til og med voksne med en relasjonell forståelse av likhetstegnet noen ganger ty til en operasjonell forståelse, om situasjonen tilsier det.

Denne måten å bytte forståelsen sin på er noe som Prediger (2009) trekker frem at elever må klare for å lykkes med algebra, ut ifra kontekstens behov. Forfatteren trekker frem at forståelsen avhenger av konteksten, og et skifte over tid fra aritmetisk forståelse mot en algebraisk forståelse. Ikke nok med at forståelsen endres over tid, men likhetsforståelse kan også endres innad i en oppgave, som i en arealoppgave når eleven går fra å regne ut til å spesifisere hva arealet blir.

Som vi nevnte i begynnelsen av dette kapittelet er det en mangel på konkret informasjon og forskning om likhetstegn forståelse i norsk sammenheng. Denne mangelen på forskning var vi interessert i å se nærmere på, og belyse i større grad forståelsen for likhetstegnet hos norske elever. For å finne ut dette tar vi i bruk rammeverket til Matthews et al. (2012) som beskrevet over. Hvordan vi har operasjonalisert dette rammeverket, samlet inn data, og analysert disse dataene blir beskrevet i det neste kapittelet hvor metoden vår blir presentert.

3 Metode

I dette kapittelet tar vi for oss forskningsmetoden vi bruker for å svare på problemstillingen vår. Vi tar for oss hvilke forskningsmetoder det er å velge imellom, og begrunner vårt valg. Vi diskuterer så oppgavene som vi laget for elever på barnetrinnet, hvorfor disse gir oss informasjonen vi trenger og hvordan vi operasjonaliserte rammeverket vi har brukt. Vårt etiske ansvar overfor informantene, foresatte og studiens integritet blir også gjort rede for. Til slutt i dette kapittelet går vi gjennom datainnsamlingen, analysemåten og studiens reliabilitet og validitet.

3.1 Kvalitative og kvantitative metoder

Vi ønsket å undersøke norske elevers forståelse av likhetstegnet. Vi vurderte to hovedmåter å undersøke dette på, kvalitative og kvantitative metoder. Hovedforskjellene mellom kvalitative og kvantitative metoder er graden av fleksibilitet. Kvantitative metoder er lite fleksible med spørreskjemaer og surveyer. Informantene blir stilt spørsmål i en satt rekkefølge der de kun kan svare med de gitte svaralternativene, noe som gir muligheten til å sammenligne svar på tvers av deltakerne(Christoffersen & Johannessen, 2012). Kvantitative metoder har som fordel at de gir oss data i form av målbare enheter. Tallene man sitter igjen med kan man bruke til å foreta regneoperasjoner, avhengig av hva man ønsker å finne ut av (Dalland, 2020). Disse dataene blir analysert statistisk med tabeller, beregning av gjennomsnitt, variasjon og korrelasjon og ulike statistiske analyser (Befring, 2015). Likevel krever kvantitative studier svært god kunnskap om hvilke spørsmål man skal stille, den beste måten å stille dem på, og hvilke svar man kan få (Christoffersen & Johannessen, 2012). Kvantitative metoder benyttes som oftest i undersøkelser med mange barn, familier, lærere og andre for å finne allmenne trekk eller framskaffe generell kunnskap (Befring, 2015). Det hadde vært interessant for oss å få elever over hele landet til å svare på oppgaver, men vi ønsket et dypdykk i forståelsen. Derfor vil det ikke holde med å kun analysere oppgavesvar. Vi ønsket å jobbe med en mindre gruppe elever hvor vi kunne få en dyp innsikt og forståelse.

De kvalitative metodene er mer fleksible og tillater i større grad spontanitet og tilpasset interaksjon mellom forsker og informant. I interaksjonene kan forskeren stille åpne spørsmål, tilpasse spørsmålene underveis, og variere hvordan spørsmålene stilles fra informant til informant. Informanten står fritt til å besvare spørsmålet så detaljert og utfyllende som selv ønsket. Forskeren kan respondere umiddelbart på hva deltakeren sier og holder flyten i samtalen gående. Dette krever selvsagt at forskeren er i stand til å tolke svarene kjapt, og respondere på dette til neste spørsmål (Christoffersen & Johannessen, 2012). Kvalitative metoder er særlig egnet til å forstå informanters meninger og intensjoner. Videre vil metoden vise deres oppfatninger, selvforståelser og handlingsmåter. Disse prosessene fører til ulike hendelser, handlinger og uventede fenomener (Befring, 2015). Dalland (2020) og Christoffersen og Johannessen (2012) er enige om at de kvalitative metodene ikke nødvendigvis gir oss svar som er sammenlignbare eller kan måles.

3.2 Valg av forskningsmetode

Problemstillingen vår er: *Hvilken forståelse for likhetstegnet har norske elever på 5. og 6. trinn?*

For å svare på problemstillingen vår valgte vi kvalitativ metode med oppgavebasert intervju. Dette valget ble tatt på bakgrunn av at metoden ga oss mulighet til å snakke med elevene etter oppgavene var løst. Der de kunne besvare så detaljert og utfyllende svar de ønsket og vi kunne få elevene til å utdype og forklare hvorfor de hadde svart som de gjorde – var det slurvefeil, misforståelse, hadde de ikke lest oppgaven godt nok eller hvilken metode de hadde brukt. For å oppnå mest mulig korrekte svar fra elevene var det derfor nødvendig at de viste forståelse for oppgavene. Svarene elevene skrev til oppgavene ga oss en pekepinn på om det kunne være tier-feil, helt feil svar eller forveksling feil med symbolene mellom operatørene. Avhengig av hvilken type feil som var gjort stilte vi spørsmål om forståelsen for å se om de egentlig forsto hvordan det skulle være, og hva de eventuelt hadde gjort.

Christoffersen og Johannessen (2012) hevder at noe av det som kjennetegner kvalitative metoder er at vi forsøker å få så mye informasjon som mulig fra et begrenset antall informanter. Spørsmålet er da hvor mange informanter trenger man? Fenomenet med hvor mange informanter man trenger kalles på engelsk for «Theoretical saturation», noe vi velger å kalle for informantmetning. Informantmetning oppstår når alle de viktigste variasjonene i fenomenet har blitt identifisert (Guest et al., 2006). Med denne tilnærmelsen intervjuer man så mange at alle nye informanter etter dette vil gi lignende resultater som tidligere, og derfor ikke av interesse. Med andre ord gir dette begrepet en grenseverdi der det ikke lenger har noen hensikt å samle inn ytterligere data (Christoffersen & Johannessen, 2012). Studier viser at hvis man kun har seks informanter får man cirka 80 % av alle variasjoner, og hvis man øker informantene til tolv stykker øker metningen til 90 % (Guest et al., 2006). For å øke prosenten ytterligere enn 90, trengs det mange flere informanter.

Vi snakket med forskjellige skoler om å være med i undersøkelsen, hvorav tre skoler svarte at de ønsket å delta i forskningsprosjektet. Med informasjonen om informantmetning prøvde vi å utføre det oppgavebaserte intervjuet med fem elever per skole, men tiden rakk ikke til hos den siste skolen, så vi endte opp med 13 informanter som er mer enn de tolv som var anbefalt for informantmetningen.

3.3 Utforming av oppgavesettet vi brukte i datainnsamlingen

Hovedfokuset vårt var innhenting av data gjennom elevens svar og forklaringer omkring oppgaver. Så når man skal lage disse oppgavene er det viktig å tenke på om svarene til oppgavene gir de ønskede opplysningene. Vi ønsket å finne ut hvordan elevene forstår likhetstegnet, og deres forståelse av hvordan likheter kan manipuleres når de går på 5. og 6. trinn Matthews et al. (2012) har gjort lignende undersøkelser hvor han brukte et sett med oppgaver for å finne ut om elever har operasjonelt eller relasjonelt syn på likhetstegnet. Matthews et al. (2012) sin forskning er fokusert på 2. – 6. trinn, derfor valgte Stephens et al. (2021), som også har brukt rammeverket, å endre vanskelighetsgraden på oppgavene. Dette velger vi også å gjøre, for å holde oppgavene på et nivå som passer elevene. Vi mener at oppgavene Matthews bruker har for enkle tall for elevene vi skulle snakke med i 5. -6. trinn, og det ble derfor nødvendig for oss å forandre oppgavene slik at vanskelighetsgraden var mer passende. Pepin et al. (2014) diskuterer viktigheten med bruken av passende oppgaver og forklarer at elever setter spørsmål ved matematiske oppgaver der de skal lære noe nytt, hvis oppgavene ikke passer nivået.

Slik vi forsto Matthews et al. (2012) sin forskning fikk hver av de 224 elevene en oppgave fra hvert av de fire nivåene. Siden vi kun får muligheten til å møte elevene en gang, og ikke har like stort utvalg, valgte vi å gi elevene tre eller fire oppgaver til hvert av nivåene. Det var flere grunner til dette, den første var for å luke ut om elevene hadde misforståelser eller slurvefeil som ble tydeliggjort underveis i oppgavene. En annen grunn var fordi det ble enklere for oss å se om feilen kom igjen på flere av oppgavene i intervjuet. Etter modifikasjonene i oppgavene endte vi opp med 4 oppgaver som inneholder til sammen 14 deloppgaver. De tre første oppgavene er om addisjon og subtraksjon med fokus på hvor likhetstegnet står i regnestykket, i tillegg til antall ledd i regnestykket. Oppgave 4 handler om at elevene skal prøve å manipulere leddene uten å faktisk regne ut hver side og se om det er likt på hver side av likhetstegnet.

Oppgave 1

Løs oppgaven slik at du bytter ut de geometriske figurene med riktig tall.

a. $15 + 27 = \Delta$

b. $47 + 14 = \Delta$

c. $153 + 137 = \Delta$

Figur 3 - Oppgave 1 i oppgavesettet vårt

Den første oppgaven elevene skal løse er laget for å teste om elevene har en rigid operasjonell forståelse. Dette oppnår vi ved at alle deloppgavene er på den velkjente formen: $a + b = c$. Dette er den måten regnestykker oftest er satt opp for elever, i sammenheng med addisjon, og hvor c er en ukjent eller byttet ut med et blankt område til å svare i.

Oppgave 2

Løs oppgaven slik at du bytter ut de geometriske figurene med riktig tall.

a. $27 = 12 + \Delta$

b. $39 = \Delta + 28$

c. $105 = 73+ \Delta$

Figur 4 – Oppgave 2 i oppgavesettet vårt

Oppgave 2 er laget for å teste elevenes forståelse av variasjoner av det klassiske oppsettet som eksempelvis oppgaver på denne formen: $a = b + c$. Måten vi varierte oppgavene på, som diskutert tidligere, var at en av variablene i regnestykket ble byttet ut med en trekant, og at trekanten kunne ha enten samme posisjon som b eller c. Hvis elevene har en fleksibel operasjonell forståelse, burde denne typen oppgaver være mulige å forstå og løse.

Oppgave 3

Løs oppgaven slik at du bytter ut de geometriske figurene med riktig tall.

a. $12 + 4 = 6 + \Delta$

b. $14 + 9 - 12 = \Delta + 5$

c. $9 + \Delta = \square + 6$

d. $20 + 2 - \Delta = 10 + 5$

Figur 5 – Oppgave 3 i oppgavesettet vårt

Tanken bak oppgave 3 er at den skal gi oss et innblikk i om elevene har en grunnleggende relasjonell forståelse. Elevene skal da klare å se at begge sider av likhetstegnet skal være like, selv om det er flere regneoperasjoner på hver side av likhetstegnet. Oppsettet her varierer litt, men vil se for det meste ut som dette: $a + b = c + d$. En av variasjonene som gjøres i disse deloppgavene er at plasseringen av den ukjente, trekanten, kan være hvor som helst i likningen.

Oppgave 4

Se på oppgaven og bestem om det er sant eller usant. Oppgavene skal ikke regnes ut.
Sett ring rundt sant eller usant

a. $2 + 4 = 1 + 5$
sant eller usant

b. $27 + 46 = 28 + 45$
sant eller usant

c. $49 + 12 = 50 + 20$
sant eller usant

d. $22 + 43 = 32 + 33$
sant eller usant

Figur 6 – Oppgave 4 i oppgavesettet vårt

Siste oppgave, oppgave 4, er laget for å teste elevenes forståelse for sammenlignende relasjonell forståelse. Oppgaveteksten er designet slik at elevene vet at de *ikke* skal regne ut summen av leddene på hver side av likhetstegnet. Elever med forståelse for denne oppgaven skal kunne klare å se på sidene av likhetstegnet og bestemme, uten å regne ut, om det er likt eller ikke. De får lov til å «manipulere» tallene på tvers av likhetstegnet, men ikke regne ut.

Det vil si at om elevene ser mønstre i forholdet mellom tallene, og kan dedusere seg frem til svaret ut av dette vil det være godkjent. Vi kommer til å diskutere mer om hvordan elevene forklarer sine måter å manipulere tallene på senere.

3.4 Pilotering

Befring (2015) og Christoffersen og Johannessen (2012) nevner også at spørreskjema, eller som vi har oppgaver, må være utprøvd ved pilotering eller en prestudie. Derfor valgte vi å prøve ut oppgavene på en elev i 5. trinn før vi ferdigstilte oppgavene. Vi laget et utkast av en intervjuguide og prøvde ut denne sammen med oppgavene. Eleven regnet gjennom oppgavene, og vi snakket om dem etterpå med eleven. Dette ga oss viktig informasjon om hva som burde forandres i oppgavene, både tekst og innhold, for å få den informasjonen vi ønsket fra dem. Utprøvingen gjorde at vi byttet den geometriske figuren i oppgavene fra en sirkel til en trekant. Pilot-eleven forsto ikke hvorfor 15 + 27 skulle bli 0, selv om det var en sirkel virket det ikke om eleven klarte å se forskjell, derfor endret vi alle sirkler til andre figurer som ikke ligner tall slik at det ikke skulle bli noen misforståelser rundt dette. Vi forsto også hvor viktig det var for oss å poengtere i samtalen før elevene begynte med oppgaven at de måtte lese oppgaveteksten nøye. Videre byttet vi også mange av tallene i oppgavene sånn at ikke elevene like lett kunne regne i hodet. Dette førte til at elevene snakket litt mer rundt oppgavene i intervju-delen, og viste utregning og mellomregning. Tallene vi valgte gjorde også at det ble tier-overganger, noe som fikk elevene til å tenke seg ekstra om. Hvilke spørsmål vi burde stille elevene, og hvilken intervjustil vi burde bruke, ble tydeligere.

3.5 Intervjuguide

Etter eleven hadde løst oppgavene intervjuet vi dem om hva de hadde tenkt når de løste oppgavene. Vi gjennomførte intervjuene med elevene på skolene deres. Intervjuene ble gjennomført på elevenes skoler i form av et feltintervju (Befring, 2015). Intervjuene varte på ca. 6 – 15 minutter, avhengig av hvor mye det var å spørre elevene om og hvor pratsomme elevene var. Målet med intervjuene var for oss å spørre elevene hvordan de kom frem til svarene, og hvilke metoder de brukte for å komme dit. Dette var viktig for forskningen vår da det var noen svar elevene hadde kommet frem til som vi ikke klare å forstå. Mange av elevene hadde også kun skrevet svaret uten å vise mellomregningen. Gjennom disse intervjuene kunne vi få en forståelse for hvordan elevene tenkte, og eventuelt hvilke misforståelser eller slurvefeil de hadde begått. Elevene fikk også sjansen til å revurdere eller endre svarene sine hvis de oppdaget feilen selv.

Når vi forsøkte å utforme en intervjuguide så vi fort at det ble vanskelig å lage mange helt faste spørsmål. Grunnen til dette var fordi mange av elevene gjorde oppgavene riktig, mens noen gjorde mye interessant som det var verdifullt å stilles spørsmål ved. Hva som måtte stilles spørsmål ved var forskjellig fra elev til elev. Hos noen elever måtte vi gå i dybden for å forstå hvordan de hadde tenkt, siden de ikke helt forsto det selv. Vi lagde derfor et par spørsmål som skulle stilles uavhengig av oppgavene. Spørsmålene vi stilte alle var:

Kan du forklare hva likhetstegnet betyr?

Hvordan gjorde du oppgave 3c?

Vi bestemte oss for å spørre alle elevene om å forklare en oppgave de gjorde riktig, slik at alle fikk en god følelse av at de fikk til noe. Hvilken av de riktige oppgavene vi spurte om avhengte av elevens svar. Derfor benyttet vi oss av et ustrukturert intervju som kan arte seg som en fri samtale (Befring, 2015).

Når elevene var ferdige med oppgavene så de forskjellige ut fra elev til elev, derfor måtte strukturen på intervjuet være åpent og ustrukturert. Det er derfor vanskelig å finne spesifikke spørsmål som skal stilles i samme rekkefølge hele tiden. Når vi spurte elevene om: «hva betyr likhetstegnet» før elevene begynte med oppgavene, og vi fikk ett annet enn en relasjonell forklaring spurte vi igjen på slutten av intervjuet. Vi valgte også å ikke bare spørre elevene om det de hadde misforstått eller gjort galt slik at de ikke satt igjen med en dårlig følelse etter vi var ferdige.

3.6 Deltakere i studiet

I og med at vi ikke underviser på 5. eller 6. trinn måtte vi spørre skoler om å få lov til å gjennomføre studien vår, og intervjue elevene. Vi fikk lov til å besøke tre forskjellige skoler, disse skolene ligger i storbystrøk, og vi intervjuet til sammen 13 elever som ønsket å hjelpe oss med studien. Den første skolen fikk vi innvilget to timer til å snakke med elevene og vi intervjuet seks elever. Den andre skolen vi besøkte fikk vi innvilget en time, og vi fikk intervjuet fire elever. På skole tre fikk vi også en time, og vi rakk tre elever. Av de tre skolene var det to som har stor prosent av flerspråklige elever. Vi hadde dialog med lærerne på skolene og spurte om de kunne velge ut elever for oss som hadde middels måloppnåelse, dette var for å få en mest mulig lik elevgruppe.

3.7 Etikk og personvern

I forskning er det viktig å ta vare på personvernet til deltakerne. Siden vi arbeider med personopplysninger og elever på barneskolen ble studietet meldt til NSD, Norsk senter for forskningsdata. Vi fikk tillatelse til å samle inn dataene, om opplysningene ble oppbevart trygt og deltakerne fikk informasjon om hva det medførte å være med i studiet, og mulighet til å trekke seg når som helst. Elevene kunne ikke selv gi fullmakt til å være med i studiet, så informasjonsskrivet og fullmakten ble sendt til foresatte for samtykke på forhånd før vi besøkte skolene. Når vi møtte elevene spurte vi dem om de hadde lyst til å være med på studiet, fordi vi ville at elevene også skulle ha lyst til å være med. I møte med elevene prøvde vi å være så imøtekommende og hyggelige vi kunne. Vi presiserte også anonymiteten til elevene, og at ingen ville få tilgang til svarene eller hva som hadde blitt sagt i det oppgavebaserte intervjuet. Dette inkluderte læreren og foreldrene til elevene.

De skriftlige notatene på oppgaveløsningen var allerede anonymiserte siden elevene ikke skulle skrive navn på oppgavene, men vi ga dem anonymiserte koder. I intervjudelen brukte vi lydopptak, noe som er personopplysninger fordi: «…lydopptak vil registrere stemmen til en person, noe som i seg selv er en personopplysning» (NSD). For å innhente lydmaterialet brukte vi nettskjema fra UiO med Diktafon appen på telefonene våre. Diktafon appen gjør at telefonene våre ikke lagrer lydopptakene lokalt på telefonen, men legger de direkte inn i nettskjema som ingen andre har tilgang til. Når eleven var ferdige med oppgaver og intervju skrev vi en kode på oppgaven og på diktafonappen slik at vi kunne kategorisere hvilken oppgave som tilhørte riktig lydopptak. Koden er ikke gjenkjennbar for noen andre enn oss, og kan ikke brukes til å spore seg tilbake til informantene. I denne studien spiller ikke kjønn noen rolle, derfor ønsker vi å videre anonymisere elevene med guttenavn fra A til M, rekkefølgen fra A til M er tilfeldig. Dette vil gjøre det lettere å forstå hvilke elever det er snakk om i de forskjellige kapitelene av studiet.

3.8 Innsamling av datamateriale

Da vi ankom skolen der vi skulle ha intervju, foregikk datainnsamlingen på følgende måte. Vi møtte læreren som vi hadde hatt kontakt med, og ble fulgt til et stille grupperom som var nærme klasserommet til elevene. Her fikk vi informasjon om informantene som hadde middels måloppnåelse og samtykket til å være med, så ble samtykkeskjema samlet inn. Deretter hentet vi inn en av elevene læreren hadde anbefalt og spurte om eleven var villig til å hjelpe oss med forskningen vår. Vi forklarte at det blir tatt lydopptak, at ingen får tilgang til hva som har blitt sagt eller gjort inne på grupperommet, annet enn oss, og at det var helt anonymt. Elevene ble forklart at når de arbeidet med oppgavene kunne vi ikke hjelpe dem. Hvis de ikke forsto oppgavene kunne de spørre oss om hjelp til å forstå oppgaven, men de fikk ikke hjelp til å løse oppgaven.

Deretter spurte vi elevene hva de mener likhetstegnet betyr. Dette var viktig for oppgave 3, der elevene måtte oppgi en relasjonell forklaring av likhetstegnet. Deretter fikk elevene løse oppgavene på arket. Elevene brukte mellom 6 og 12 minutter på å løse oppgavene. Når oppgavene var ferdige startet vi å intervjue om de ulike oppgavene. Vi startet å stille spørsmål om oppgavene uavhengig om de var besvart riktig, galt, eller ubesvart. Det ble alltid stilt spørsmål om noe elevene fikk til, slik at de fikk en god følelse av at de fikk til noe. Når vi var ferdig med intervjuet takket vi for at eleven ville være med, og sa at det bare var å gå tilbake til klasserommet. Så hentet vi neste elev og begynte på nytt. Når alle intervjuene var ferdige satt vi igjen med 13 oppgaveark som elevene hadde notert på, og 26 lydopptak, to per elev i tilfelle noe ble ødelagt. Vi valgte å bruke begge telefonene våre i tilfelle en av dem ikke fungerte eller hadde andre utfordringer. Som tidligere nevnt har vi altså intervjuet 13 elever på tre ulike skoler.

Neste steg i analysen vår var å transkribere intervjudataene. Transkripsjonene ble delt likt mellom oss og ble notert ned med samme kodenavn som vi ga oppgavene deres. Vi har lest over hverandres transkripsjoner for å sikre at det var gjengitt så riktig som mulig.

Etter dette bestemte vi oss for å lage et Excel-ark der vi la inn alle elevene, og oppgavene deres. I Excel arket ga vi 1 poeng for riktig svar på oppgaven, og 0 for feil svar på oppgaven. I kolonnen ved siden av skrev vi inn eventuelle bokstavkoder for hva elevene har gjort i oppgaven, og våre tanker rundt svaret. Disse kodene betyr en rekke ting, men i hovedsak er det viktig å presisere om de klarte oppgaven på egenhånd, gjorde noe spesielt eller gjorde oppgaven feil og når vi spurte dem oppdaget de feilen selv og korrigerte. Kodene ble gitt i forhold til hva vi så de hadde gjort i oppgavene og hva de hadde sagt, som sett i figur 7.

Tegn	Klassifisering/Forklaring
1	Rett
0	Feil
H	Får til med hjelp
R	Regnet ut
G	Ga opp
S	Se på løsning
T	Transkribsjon
F	Tierfeil
E	Eleven brukte lang tid, men viste forståelse
M	Retter selv etterpå
D	Bruk I diskusjonsdelen
L	Lagt sammen
I	Ingen videre forklaring
*	Usikker

Figur 7 – Kodene vi brukte for å huske hva elevene hadde gjort i oppgavene.

3.9 Analysemåte

Til analysen av studien vår bruker vi Matthews et al. (2012) fire nivåene om ekvivalens. Før vi begynte å klassifisere elevene i de fire nivåene så vi nøye på oppgavene og transkripsjonene deres. Gjennom oppgavene så vi hva elevene hadde fått til, og hva de synes var vanskelig. Hva de fikk til var en indikator på hvilket nivå elevene var på. Så sjekket vi transkripsjonene for å se om elevene hadde sagt noe som viste høyere forståelse enn hva som var på oppgavearkene. Transkripsjonene fra intervjuene, var viktig for vår analyse av elevenes nivå, siden de kunne forklare fremgangsmåten sin. Dette er noe vi ser nøyere på i kapittel 5. Videre ser vi på hvilken kunnskap om likhetstegnet elevene trenger for ha å forståelse til de forskjellige nivåene. Med informasjonen om de fire nivåene, og hva elevene har fått til og sagt plasserte vi dem i et av nivåene og begrunnet hvorfor.

3.10 Reliabilitet og validitet

Når vi snakker om forskning så er det viktig at forskningen gjøres på en pålitelig og gyldig måte. Dette handler om man kan stole på det forskeren har kommet frem til, måten dataene samles inn på og hvordan de bearbeides (Christoffersen & Johannessen, 2012). Derfor er det viktig for oss å gi nøyaktige beskrivelser av metodikken som er anvendt, hvordan intervjuprosessen har vært og hvordan analysen har blitt gjennomført. Dette gjør det mulig for andre forskere å etterprøve dataenes reliabilitet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Den metoden forskere kan bruke for å etterprøve samme fenomen som oss vil være skårsreliabilitet. Da sammenlignes resultatene fra forskjellige bedømmere som har sett på samme fenomenet (Befring, 2015). Det er vanskelig for andre forskere å reprodusere kvalitativ forskning med få informanter. Spesielt med tanke på at elever lærer forskjellige ting på forskjellige tider av året og forklarer på ulike måter i forhold til dagsform og hvilke spørsmål de blir stilt. Vi mener at vår forskning og analyse er reliabel på bakgrunn av valgene vi har tatt, og fordi informantene fikk muligheten til å forandre forklaringene sine, eller svarene sine hvis noe ble misforstått.

Hvor godt dataene representerer fenomenet som forskes på er også et spørsmål man må vurdere. Validiteten, eller gyldigheten, av forskningen kan gi svar på dette (Christoffersen & Johannessen, 2012). Når vi arbeider med transkripsjoner vil validitetsspørsmålet gjelde «*researcher bias*», som handler om potensielle skjevheter i hva som blir transkribert, feil i opplegget eller gjennomføringen av undersøkelsen (Befring, 2015). Kvale et al. (2015) er enig i dette og forklarer at å vurdere intervjutranskipsjoners validitet er komplisert. Når vi begynte å transkribere delte vi dem slik at begge hadde lik arbeidsmengde. Når vi var ferdige byttet vi, og så over transkripsjonene til hverandre for å se om de var slik som vi husket at det skjedde under intervjuene. Validitet handler også om relasjonen mellom fenomenet som skal undersøkes, og de konkrete dataene (Christoffersen & Johannessen, 2012). Som at det ikke vil være hensiktsmessig for oss å intervjue pensjonister når vi skal undersøke ferdigheter hos skolelever. Derfor er det valid å snakke med elever om likhetstegnet i denne studien. Dette mener vi øker validiteten i vår studie.

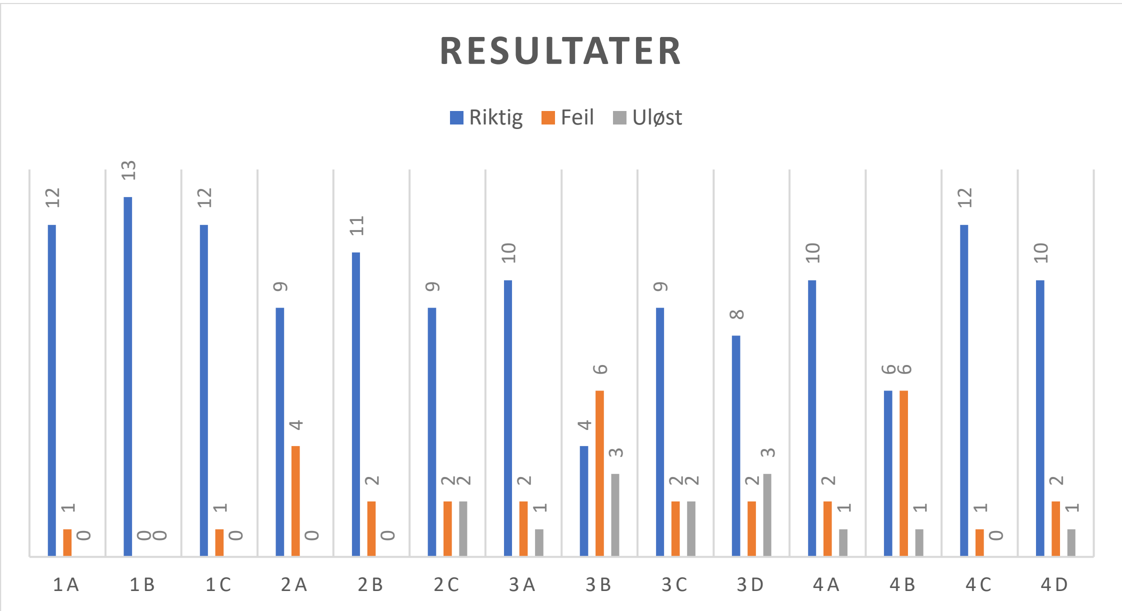
En svakhet ved kvalitative studier er at de er vanskelig å generalisere. Kvalitative studier er preget av variabler som gjør det vanskelig for forskere å etterprøve resultatene. Hvis de etterprøver resultatene vil de ikke ha tilgang til å bruke de samme informantene, ved samme tidspunkt i livene deres eller gjøre det i samme situasjon som oss. En annen grunn er fordi vi bruker et lite utvalg, som gjør at det samme utvalget et annet sted i landet kan gi forskjellige resultater. Resultatene er derfor ikke holdbar for hele landet, men for utvalget vårt. Samtidig mener vi at vi ser noen generelle tendenser som er verdifullt å ta med seg også andre steder enn der vi undersøkte. Elever i Norge vil ha samme læreplan, lærere som er del av et fellesskap og blir inspirert av lærebøker, opplæring og erfaringsdeling på tvers av landet. Vi mener derfor at det vi ser er til en viss grad generaliserbar for norske elevers forståelse av likhetstegnet.

4 Resultater

I denne delen av oppgaven vil vi presentere resultatene vi fikk fra de oppgavebaserte intervjuene. Vi vil diskutere oppgavene og elevsvarene videre i sin helhet i diskusjonsdelen som følger resultatene og funnene i neste kapittel. Dette kapittelet er tiltenkt som en kort oppsummering av de funnene vi fant både i intervjuene og det elevene svarte på oppgavearkene sine.

Vi har tidligere presentert hvordan oppgavene vi har valgt å gi elevene er basert på de fire nivåene brukt av Matthews et al. (2012) i sin studie, og tilpasset vårt formål. Tilpasningen vi har gjort er som tidligere nevnt, hovedsakelig at tallverdiene innad i oppgavene er økt da elevene er eldre enn i originalstudien. Det ble også flere deloppgaver på hver oppgave, grunnet at vi har et mindre utvalg. De fire nivåene av likhetstegnforståelse er som nevnt tidligere, i rekkefølge fra nivå 1 til 4: Rigid operasjonell, fleksibel operasjonell, grunnleggende relasjonell, og komparativ relasjonell. Videre forklarer vi hvordan de forskjellige nivåene er innved i de forskjellige oppgavene.

Figur 8 viser fordelingen av antall riktig, feil, og hvor mange som ikke svarte eller hoppet over oppgaven, for alle oppgaver og deloppgaver. Blå farge viser antall riktige svar, oransje viser feilsvar, og grå viser de som enten ikke har løst oppgaven, ikke svarte eller hoppet over.



Figur 8 - Fordeling av elevsvar

Diagrammet i figur 8 er laget for å kunne gi oss et totalinntrykk over hvordan elevene totalt sett klarte seg på oppgavene, og for å gi oss et inntrykk over hvilke oppgaver som virket å være vanskeligere for elevene.

Kort sagt kan vi se fra diagrammet at oppgave 1 var noe nesten alle elever klarte uten problemer, utenom en elev på 1a og 1c. Oppgave 2 viser det seg at flere klarte oppgave 2b, enn 2a, og noen som hoppet over, løste feil eller ikke prøvde seg på 2c. Videre til oppgave 3 hvor vi ser mange klarer oppgave 3a, c, og d, men bare 5 av elevene får riktig svar på oppgave 3b. I oppgave 4, som handler om å manipulere tallene på hver side uten å legge sammen leddene, klarer nesten alle oppgave 4a, c, og d, men det viser seg at flere har vanskeligheter med 4b.

Videre vil vi se nærmere oppgavene i sin helhet, hva elevene fikk til i oppgavene, og hva som ga dem utfordringer og vanskeligheter.

4.1 Får elevene til oppgaver som tester grunnleggende rigid forståelse?

Oppgave 1 handlet som nevnt om å teste hvorvidt elevene hadde forståelse for oppgaver med formen $a + b = c$.

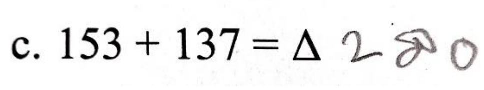
a. $15 + 27 = \Delta$

b. $47 + 14 = \Delta$

c. $153 + 137 = \Delta$

Denne måten å sette opp addisjonsstykker, og andre regnearter, er noe som mer eller mindre alle elever på barneskolen har god kjennskap til. Vi valgte at alle oppgavene skulle inneholde en tier-overgang, og at de skal være familiære samtidig som at de ikke bare kan regnes ut fort i hodet. Som nevnt tidligere økte vi også verdien på leddene som skal adderes, for å tilpasse til nivået på våre elever kontra elevene i studien vi brukte som utgangspunkt.

Av de 13 elevene vi intervjuet, var det bare to deloppgaver totalt som ikke fikk oppgitt riktig svar. En elev fikk feil på oppgave 1a, og en annen elev gjorde en feil på 1c. Disse elevsvarene ga vi i ettertid koden F (tierfeil), da elevenes feil kan ha vært en tier-overgangsfeil. Begge oppga svar som var ti mindre, henholdsvis 23 og 280, som svar på 1a og 1c, enn hva det korrekte svaret var på oppgavene. Bildet under, figur 9, viser et eksempel på hvordan en av disse elevene løste oppgaven.



Figur 9 - elev eksempel med tierfeil

Fordi det var to elever som fikk en deloppgave feil, vet vi at $\frac{11}{13}$ (84,6%) klarte hele oppgave 1 uten å gjøre feil. I tillegg svarte alle elevene gjennomsnittlig riktig på 95% av deloppgavene i oppgave 1, noe som tyder på en god forståelse av denne oppgaven av elevgruppen.

4.2 Får elevene til oppgaver som tester fleksibel operasjonell forståelse?

Meningen med denne oppgaven er å teste elevenes fleksible operasjonelle forståelse. For å gjøre dette, valgte vi å bruke oppgaver som er «snudd på hodet» som elevene kalte dem, og har formen $a = b + c$. Som tidligere nevnt forklarer Baroody og Ginsburg (1983) at elever lettere forstår aritmetiske operasjoner på venstre side, enn på høyre side. I denne oppgaven er trekanten på høyre side av likhetstegnet, så denne oppgaven er vanskeligere enn den tidligere (Baroody & Ginsburg, 1983) . Disse oppgavene setter elevenes forståelse av likhetstegnet på prøve, og ligner på oppgaver de er vant til å løse, men likhetstegnet og addisjonstegnet har byttet plass. I denne oppgaven skulle elevene finne ut hva *b* eller *c* var. Oppgave 2 har tre deloppgaver delt inn i a, b og c. Deloppgavene er som følger:

a. 27 = 12 + Δ
b. 39 = Δ + 28
c. 105 = 73 + Δ

For å løse oppgaven brukte elevene forskjellige regnestrategier. Regnestrategien som ble mest brukt var å telle seg opp. Hvis vi bruker deloppgave b som eksempel, telte elevene fra 28 til 39, enten ved hjelp av fingrene eller grupperingsmodellen, og skrev hvor mange de hadde telt. Det var også fem elever som subtraherte 39 – 28 = Δ. De elevene som subtraherte gjorde dette på alle oppgavene. Av disse brukte fire standardalgoritmen til subtraksjon, mens den siste brukte en grupperingsmodell hvor eleven tok tierne og enerne for seg selv. I deloppgave c tok eleven 100 – 70 deretter 5-3 som til sammen blir 32. En annen elev brukte grupperingsmodellen på en annen måte der eleven begynte med å legge til tiere på 73 tre ganger for å få 103, deretter la eleven på 2 for å få 105.

Deloppgave a har trekanten (den ukjente) i *c* leddet og bruker enkle tall uten tier-overganger som gir elevene en oppgave de kan mestre. Denne oppgaven var den første oppgaven elevene møtte på som ikke var slik som de har jobbet mye med før. Det var 9 elever som gjorde oppgaven riktig og 4 elever som gjorde forskjellige feil. Det første vi bemerket oss var at fire av elevene summerte oppgavene slik som de skulle gjøre i oppgave 1, så istedenfor å utføre operasjonen 27 = 12 + Δ gjorde de den om til 27 + 12 = Δ, de byttet operatørene. Det var to elever som gjorde dette i alle deloppgavene, men det var også to elever som kun gjorde det i deloppgave a. I denne deloppgaven så vi også noe interessant i intervjuet etterpå, der noen av elevene rettet på seg selv uten hjelp fra oss. De fleste av elevene som gjorde oppgaven riktig valgte å bruke subtraksjon for å finne riktig svar. De andre telte seg opp fra 12 til 27.

Deloppgave b har trekanten i *b* leddet, som for noen elever var vanskelig å forstå fordi vanligvis skal de finne ut av hva som skal stå til slutt. Det var 11 elever som klarte denne oppgaven, og 2 elever som ikke fikk den til. Alle elevene som klarte deloppgave a klarte også deloppgave b. Det som var mest interessant her var at to av elevene som ikke klarte deloppgave a klarte deloppgave b. Elevene som gjorde deloppgave a riktig fortsatte med samme strategi som tidligere.

Deloppgave c har trekanten i *c* leddet, men inneholder tresifrede tall som kan få oppgaven til å se vanskeligere ut. Hvis elevene ønsker å bruke subtraksjon i denne deloppgaven må de låne og sette hundrerne i mente, hvis ikke dette er noe elevene klarer i hodet. De høye sifrene gjorde at noen elever ikke klarte å telle så langt uten å miste konsentrasjonen, og ga opp. Det var 2 elever som ikke svarte, 2 elever som ikke klarte deloppgaven og 9 elever som klarte deloppgaven. Det vil si at det var $\frac{9}{13}$ (69,2%) som klarte hele oppgave 1 uten å gjøre feil. De elevene som tidligere brukte subtraksjon fikk også til denne oppgaven, men ikke alle som telte seg opp klarte å holde tunga rett i munn.

4.3 Får elevene til oppgaver som tester grunnleggende relasjonell forståelse?

Fokuset i denne oppgaven er å se om elevene har en «basic relational», oversatt til norsk grunnleggende relasjonell, forståelse av likhetstegnet. Deloppgavene har flere operatører og to forskjellige utrykk. Deloppgave a og c har uttrykkene $a + b = c + d$, og deloppgave b og d har utrykkene $a + b – c = d + e$. Oppgaven har operasjoner som skal løses på hver side av likhetstegnet og elevene må forstå hvordan likhetstegnet fungerer slik at de kan løse oppgavene. De fire deloppgavene er:

a. 12 + 4 = 6 + Δ
b. 14 + 9 – 12 = Δ + 5
c. 9 + Δ = □ + 6

d. $20 + 2 - \Delta = 10 + 5$

I den første deloppgaven brukes enkle tall som skal hjelpe elevene til å forstå hvordan oppgaven skal løses. Det var tydelig at ikke mange av elevene hadde jobbet med slike oppgaver før fordi mange hadde spørsmål vi ikke skulle svare på. I denne deloppgaven var det 10 elever som svarte riktig, 2 som svarte feil og en som ikke svarte. Elevene som gjorde denne oppgaven riktig, brukte forskjellige metoder. Noen av dem regnet først ut venstre ledd, $12 + 4 = 16$, deretter tok de $16 - 6$ for å finne svaret som er 10. Den mest populære metoden var å regne ut venstre ledd, som tidligere, deretter finne ut hvor mye som måtte legges til på 6 for å få 16, altså $6 + \Delta = 16$. Dette er den første oppgaven vi ser tydelig at elevene ikke helt forstår hva som skal være svaret når de har regnet ut. Noen elever bruker to streker for å indikere hva svaret er, og da valgte de alltid tallet som sto lengst til høyre. Elevene som ikke fikk til denne deloppgaven, skrev ingen ting. Når vi intervjuet elevene etterpå om denne deloppgaven rettet begge elevene som gjorde den feil, selv opp deloppgaven uten hjelp, mens eleven som ikke svarte klarte oppgaven med hjelp av oss.

Deloppgave 3b var den vanskeligste oppgaven i forhold til resultatene vi har fått inn. Det var 4 elever som svarte riktig, 6 elever som svarte feil og 3 elever som ikke svarte eller ikke skrev noe. Dette var den første oppgaven som inneholder addisjon og subtraksjon i samme oppgave, og trekanten står i d leddet. Svarene i denne deloppgaven er veldig spredt. To av elevene som svarte riktig la sammen venstre ledd $14 + 9 = 23 - 12 = 11$, deretter brukte de enten $11 - 5 = 6$ eller $5 + \Delta = 11$. De andre to skrev kun svaret 6 uten utregning. Få av elevene skrev to streker under svaret, men noen av dem skrev to streker under 11 da de skrev $5 + \Delta(6) = 11$. Da det riktige svaret på oppgaven var 6. To elever skrev også kun 11 som svar, mens de andre tre skrev 3, 4 eller 16 som svar.

Deloppgave 3c er den eneste oppgaven der det er to ukjente. I denne oppgaven er det en trekant og en firkant. Målet med denne oppgaven var å se om elevene klarte å forstå at siden det står et likhetstegn der kan de velge hvilke tall de ønsker så lenge det er ekvivalens mellom leddene. I denne deloppgaven gjorde elevene det mye bedre enn i forrige. Det var 9 stykker som klarte deloppgaven, 2 som ikke klarte oppgaven, og 2 som ikke svarte. Av de elevene som klarte oppgaven brukte 4 av dem tier-venner for å løse oppgaven. De andre elevene som klarte oppgaven valgte tall som var enkle å bruke eller fant løsninger med tall de likte selv, slik som favoritt tall. Elevene som ikke fikk til deloppgaven valgte tallene 3 og 4 eller 1 og 10.

Deloppgave d er lik i oppsett som deloppgave b. Deloppgavene bruker relativt like tall, men forskjellen på deloppgavene er plasseringen av trekanten. Her klarte 8 elever deloppgaven, mens 2 elever svarte feil, og 3 elever svarte ikke. To av elevene som svarte riktig la sammen begge leddene. Den ene tok deretter 22 i venstre ledd og subtraherte 15 fra høyre ledd for å finne ut at det skulle stå 7 i trekanten. Den andre eleven så bare at det måtte tas vekk 7 for å få det likt på begge sider. Resten av elevene skrev kun 7 på arket. Elevene som gjorde oppgaven feil skrev 3, eller 5 som svar.

4.4 Får elevene til oppgaver som tester komparativ relasjonell forståelse?

Den siste oppgaven elevene fikk var delt i fire deloppgaver, hvor elevene skulle bestemme om et regnestykke var sant eller usant med beskjed om å gjøre dette uten å regne ut leddene underveis. Elevene måtte i disse oppgavene da klare å «se» om det var like mye på hver side av likhetstegnet eller ikke, og hvis de mente det var det, sirklet de riktig på arket. I alle oppgavene var det to addisjonsledd på hver side av likhetstegnet, som resulterer i denne oppgavestrukturen: $a + b = c + d$. Under hver av oppgavene var svar alternativer hvor elevene kunne ringe rundt det de mente var det korrekte svaret. Oppgavene vi ga dem var som følger:

a. 2 + 4 = 1 + 5
b. 27 + 46 = 28 + 45
c. 49 + 12 = 50 + 20
d. 22 + 43 = 32 + 33

Denne oppgaven er designet for å sjekke om elevene hadde en komparativ relasjonell forståelse, altså om de klarer å se om regnestykket er likt uten å regne sammen leddene. Å vite helt sikkert om elevene regnet sammen eller ikke, viste seg å være ikke så lett som først antatt når vi planla intervjuene. Dette kommer vi til å diskutere i mer detalj under analysen av denne oppgaven i kapittel 5.4. For oss var det viktig at vi var begge til stedet under intervjuene, og da spesielt på grunn av denne oppgaven. En av oss hadde i oppgave å følge med på hva elevene gjorde når de løste oppgavene. Det var viktig for oss å følge med, og prøve å notere ned hva slags gestikulering eller mimikk elevene hadde når de jobbet med spesielt oppgave 4. Vi merket i ettertid at det er vanskelig å si om elevene har regnet ut oppgavene eller ikke, og da spesielt de vi ikke fikk mye ut av verken notater eller transkripsjoner. Denne problemstillingen vil vi også diskutere videre i analysen i kapittel 5.4, og 6.4.

Når det kommer til hvordan elevene faktisk svarte i oppgave 4, ser vi at deloppgave a, c, og d er de som elevene fikk til i størst grad med henholdsvis 10, 12, og 10 elever som ringet rundt riktig alternativ. Derimot ser vi at deloppgave b var en større utfordring for 6 av elevene som svarte feil, og 1 som ikke løste oppgaven. Det var i denne deloppgaven at relativt mange flere fikk feil svar enn det var på de andre deloppgavene. Siden elevene kun skal ringe rundt det de mener er det riktige svaralternativet, hjelper de skriftlige elevarbeidene oss lite med hva de har gjort. Derfor er transkripsjonene, og notatene våre, det som kan gi oss et innblikk i hva elevene tenkte om oppgavene.

Videre vil vi presentere hva elevene har sagt om hvordan de har tenkt når de gjorde disse oppgavene. Denne presentasjonen vil fungere som et innblikk i hva elevene tenkte når de gjorde oppgavene, og videre analyse og diskusjon av dette vil bli presentert i kapittel 5.4.

Jonas fortalte oss da vi spurte om oppgave 4 at han hadde regnet ut oppgavene, men da vi spurte om oppgave c fikk vi dette som svar:

Jonas: *Jeg husker egentlig ikke helt. Jeg tenkte bare at hmm. Liksom den og den ligner ikke, kommer ikke nærme de og de. For eksempel 20 er litt unna 12 og 50 er nærmere 49, men du må bruke 1 da for å få 50, men da har du 11 der. Derfor valgte jeg usant.*

I oppgave 4c, 49 + 12 = 50 + 20, har Jonas sagt at han la merke til hvordan forholdet mellom tallene på tvers av likhetstegnet ikke kunne gjøre at det ble likt. Eleven sier at det er bare ett tall mellom 49 og 50, mens det er 11 (vi tror han mener 8) mellom 12 og 20. Dette var en måte vi hørte at elevene løste enkelte oppgaver, altså ved å se på forholdet mellom hvor mye som differensierer tallene på tvers av likhetstegnet. Den samme tankegangen så vi på enkelte andre elever som husket hva de gjorde da de oppga svaret sitt på deloppgaven.

Da Jonas ble spurt om løsningen sin til oppgave 4d derimot, snakket han om en litt annen tankemåte. Denne måten handler heller ikke om å regne ut tallene på hver side, men om å se på hvordan tierne og enere hver for seg kan passe sammen. Jonas la merke til at enerne delte to felles tall med hverandre, altså ett 2-tall og ett 3-tall. Da mente han at det måtte bli likt, fordi det i tillegg til enerne, var det på høyre siden to 3-ere på tier-plassen, og på venstre siden kunne man «flytte» en tier fra 43 over til 22 for å få samme tallet (32+33=32+33).

Videre kan vi se litt på hva Daniel sa om sin løsning på deloppgave 4a. Han ringet rundt svaralternativ: *usant*, og sier at han tenkte på forholdet mellom tallene slik som Jonas gjorde tidligere. Bare denne gangen var ikke tankegangen til Daniel helt riktig, og resulterte i feil svaralternativ. Det Daniel tenkte feil, var at det var én mer på venstre siden enn på høyre siden, fordi høyre siden startet med et 1-tall. Han regnet da altså ikke ut tallene på hver side av likhetstegnet, selv om det ble feil svar. Daniel fikk derimot riktig svar på oppgave 4c. Der brukte han samme strategi med å se på forholdet mellom tallene på hver side, og at de ikke gikk opp i hverandre.

En strategi som ligner litt på den som Jonas og Daniel brukte på deloppgave 4c, forteller Konstantin oss om. Strategien innebærer at når han skulle finne ut hvilket svaralternativ var riktig på deloppgave c, så han på det siste sifferet til hvert av tallene på hver side av likhetstegnet. Da konkluderte han med at siden tallene på venstre siden slutter med to 0'er, og høyre siden ikke gjør det er det ikke mulig at det er likt.

Videre i oppgaven tar vi for oss resultatene vi har presentert over, og ser på disse i lys av rammeverket lagt frem av Matthews et al. (2012). Vi trekker frem enkelte elever innenfor hver oppgave, og forklarer hvordan løsningene og metodene deres er interessante i oppgaven, og på det relevante nivået.

5 Diskusjon av resultatene

I dette kapittelet vil vi ta tak i resultatene vi har fått fra intervjuene med vårt utvalg av elever, og se på hvordan de har svart på oppgaver opp mot det de har sagt i intervjuet. Videre vil vi analysere funnene våre opp mot teorien vi har lagt frem tidligere, og se på interessante eleveksempler opp mot nivåene presentert av Matthews et al. (2012). Vi går gjennom hver oppgave i stigende rekkefølge, og tar for oss enkelte elever som viser enten en forståelse som tilsvarer nivået eller som gjør noe som er viktig å legge merke til.

5.1 Oppgave 1

Matthews et al. (2012) beskriver at elever på nivå 1, rigid operasjonell forståelse, ikke klarer å løse oppgaver på andre formater enn den som følger strukturen: operasjon-er lik-svar ($a + b = c$). I tillegg til å bare kunne løse slike oppgaver, kan elevene også kun forstå og evaluere oppgaver på denne strukturen. De kan da ikke ta stilling til oppgaver av andre strukturer. Måten elevene forklarer likhetstegnet vil derfor være begrenset til kun en operasjonell forståelse, og inneholder ofte at det skal være et svar bak likhetstegnet.

Av de 13 elevene vi snakket med, var det fem som ga oss en operasjonell forklaring på likhetstegnet før de begynte å arbeide med oppgavearket sitt. Av disse fem var det to som ga oss en operasjonell forklaring igjen når de var ferdige med oppgaven, da vi spurte dem igjen. Dessverre stilte vi ikke spørsmålet om igjen til de tre andre, og kan derfor ikke konkludere noe mer enn at de hadde en operasjonell forklaring før oppgaveløsningen.

Som tidligere nevnt i kapittel 4.1, klarte mer eller mindre alle elevene å oppgi riktig svar på deloppgavene i oppgave 1, utenom to som gjorde en tier-feil. Det faktum at nærmest alle elevene vi intervjuet fikk riktig på nærmest alt av oppgave 1, er ikke overaskende. Baroody og Ginsburg (1983) forklarer at oppgaver på formen av, eksempelvis, $6 + 6 =$? er de letteste for elever å forstå og løse. Noe av grunnen til dette kan være at før elevene kommer til skolen har de fått en intuitiv forståelse av addisjon og subtraksjon gjennom daglige interaksjoner med situasjoner som fasiliteter for addisjonsstrukturer (Ginsburg, 1977).

5.1.1 Anders

Av de to elevene som oppga feil svar i oppgave 1, var Anders en av dem som har oppgitt en operasjonell forklaring, både før og etter oppgaveløsning. Det er tydelig at han har forståelse for hvordan slike oppgaver løses, selv om det er gjort en utregningsfeil. Ser vi derimot videre på det eleven har gjort, kan vi trekke frem at han har klart flere av oppgavene videre, og hoppet over noen oppgaver på grunn av at vi fikk lite tid. På bakgrunn av dette kan vi konkludere med at Anders, iallfall ikke er bare på nivå 1, da eleven har forståelse for andre oppsett av oppgaver. Denne forståelsen kommer også frem i transkripsjonen fra intervjuet:

Intervjuer: *Først så sa du at likhetstegnet skulle være et svar, har du endret mening siden det?*
Anders: *Nei, jeg har ikke endret noe, men jeg har følt at det er noe annet som er i det.*

Vi kan forstå at Anders ikke har helt gitt fra seg tanken om at operasjon-er lik-svar er hans automatiske tankegang, men viser også at kanskje det er noe mer til tegnet enn det han tenkte da.

Det kan hende at Anders som vi har tatt for oss i dette delkapittelet egentlig er hovedsakelig i nivå 1, men som McNeil et al. (2006) skriver kan elever gitt riktig kontekst få frem en mer relasjonell forståelse. På bakgrunn av denne kontekstuelle forståelsen, er det mulig at elever som hovedsakelig ser på likhetstegnet operasjonelt klarer å se løsninger på atypiske oppgaver.

5.1.2 Generelt om oppgave 1

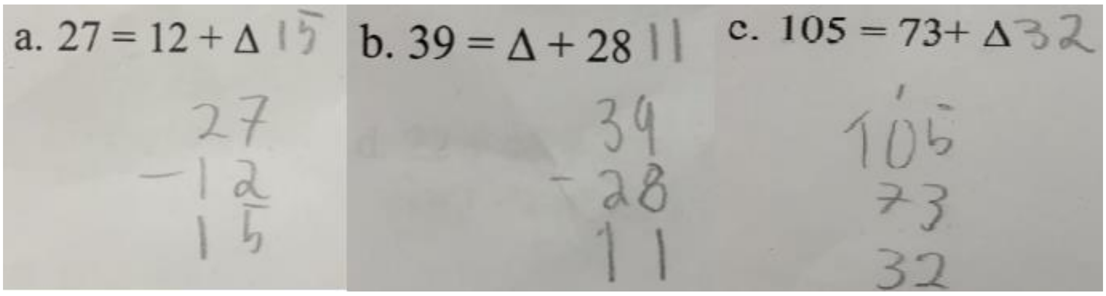
Elevene vi mener faller inn under nivå 1 forståelse er Magnus og Daniel. Vi kommer tilbake til hvorfor vi mener at de har forståelse på nivå 1 i kapittel 6.1. Av de øvrige elevene er det tilsynelatende ingen av elevene som ser ut som de er på nivå 1. Dette mener vi de ikke er på bakgrunn av at elevene vi intervjuet fikk til deler av de resterende oppgavene på oppgavearket deres. Av den grunn er det ikke bare en rigid operasjonell forståelse de gjenkjenner, og kan regne med. Som Matthews et al. (2012) forklarer om neste nivå, altså det fleksible operasjonelle nivået, må elevene kunne løse og evaluere atypiske strukturer som holdes kompatibel med et operasjonelt syn. Dette mener vi at de øvrige elevene klarer, i alle fall delvis, og at de derfor er utenfor nivå 1. Videre skal vi se på elevenes løsninger og tanker om oppgave 2, hvor vi får frem elevenes videre forståelse av ekvivalens.

5.2 Oppgave 2

Matthews et al. (2012) andre nivå er det fleksible operasjonelle nivået. På dette nivået har elevene fortsatt et operasjonelt syn på likhetstegnet, men er mer fleksible når det kommer til variasjon i likningsformatene de kan løse og godta som ordentlige oppgaver. Former for oppgaver de blir mer komfortable med er «baklengs» oppgaver, 9 = 4 + Δ, eller ingen-operasjons oppgaver som 6 = 6 eller 6 = VI. For å ha være på et fleksibelt operasjonelt nivå må elevene beherske oppgaver som er atypiske.

5.2.1 Bernt

For oppgave 2 velger vi å trekke frem hvordan Bernt besvarer oppgaven, fordi han viser god forståelse på arket som samsvarer med det som kommer frem i intervjuet. Når han begynte å arbeide med deloppgavene ble det fort observert at oppgaven var «baklengs». Bernt mumlet litt for seg selv før han begynte å skrive et subtraksjonstykke på deloppgave a. Deretter ble de resterende deloppgavene regnet ut på samme måte, slik som vi kan se i figur 10.



Figur 10 - Bernt sine svar på oppgave 2

Etter alle oppgavene var løst, spurte vi han om oppgave 2:

Intervjuer: *Disse oppgavene da? (peker på oppgave 2)*

Bernt: *De oppgavene har vi jobbet med før i fjerde klasse.*

Intervjuer: *Kult! Men i utregningen din, brukte du minus. Hvorfor brukte du minus når det står pluss i regnestykket?*

Bernt: *Det er fordi i hvert fall sånn som jeg tror det, er at hvis man skal ta 27, nei et eller annet + 12 som blir 27, så kan man ta 27-12 og da finner man ut svaret.*

Intervjuer: *Vet du hvorfor man kan gjør det da?*

Bernt: *Ja men, det er vanskelig å forklare? Ja, jeg tror det kanskje er fordi jeg vet ikke helt. Jeg vet ikke helt akkurat hvor, men jeg har lært det.*

Intervjuer: *Så da valgte du den strategien på alle oppgavene.*

Bernt: *Ja, med minus.*

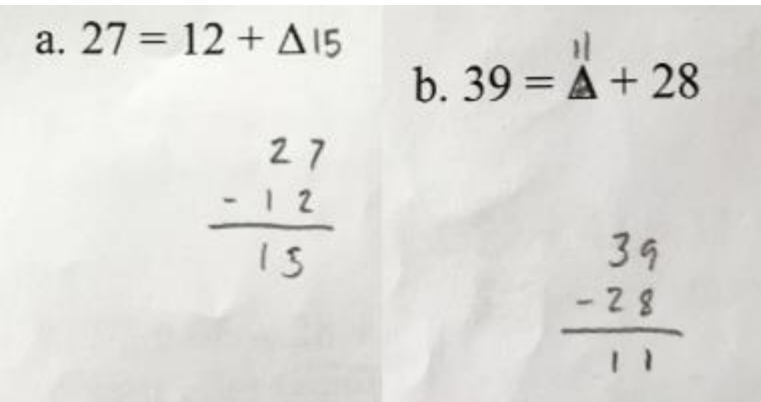
Her blir det forklart at på deloppgave a, hvis man tar 27 og subtraherer 12 får man svaret. Bernt vet hvorfor, men klarer ikke å forklare det. Uavhengig om han kan forklare det eller ikke, er dette en god måte å løse oppgaven på. Metoden viser forståelse for ekvivalens, fordi om du ønsker å telle deg opp fra 12 til 27, eller subtrahere 12 fra 27 er irrelevant.

Det mest interessante var at Bernt forklarer at trinnet hans har jobbet med lignende oppgaver i fjerde trinn, men husker ikke hvor det ble lært. I samtaler med læreren til Bernt etter intervjuet kommer det frem at når han gikk i fjerde jobbet, alle elevene med det de kaller for kenguruoppgaver. Kenguruoppgaver er oppgaver som matematikksenteret legger ut på sin nettside og er spesielt egnet for problemløsning, samarbeid og diskusjon (Matematikksenteret).

Matthews et al. (2012) sitt rammeverk for kunnskap om likhetstegnet, og fleksibel operasjonell forståelse, forklarer at elevene må være komfortable med atypiske likninger. Vi kan si at eleven har forståelse for nivå 2. Bernt er komfortabel med de atypiske likningene i oppgave 2, som er typiske for dette nivået.

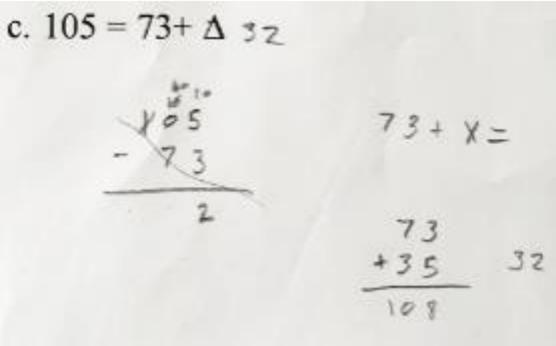
5.2.2 Carl

Carl gjorde det samme som Bernt, men måtte forandre litt på utførelsen mot slutten. Oppsettet på deloppgave a og b viser at eleven har en tydelig og ryddig måte å sette opp regnestykkene sine, som vist i figur 11.



Figur 11 - Carl sin besvarelse 2a og 2b

Det interessante Carl gjør er i deloppgave c. Det første han gjorde i deloppgave c var å skrive likningen 73 + *"x"* =, men det står ingenting etter likhetstegnet. Videre fortsetter Carl å sette opp stykket som i deloppgave a og b. Oppsettet står klart og regningen begynner, hundreren blir streket over og 10 blir satt i mente, så blir denne også satt en strek over og 10 blir satt i mente over enerne også. I den loddrette oppstillingen regner eleven 15 – 3, og skriver 2 som en del av svaret under skillelinjen, som vi ser på venstre side i figur 12. Så setter eleven den resterende tieren tilbake over de andre tierne. Så virker det som at eleven ikke helt forstår hva som har skjedd selv, og begynner med en annen metode. Dette er en mer eksperimentell metode der eleven skriver 73 som er det som skal adderes med noe for å få 105, og deretter prøver seg frem med tall. Eleven skriver først 35, og legger sammen, men dette blir 108 som er 3 mer enn 105. Eleven konkluderer derfor at svaret må være 35 – 3, slik som vi ser på høyre side av figur 12.



Figur 12 - Carl besvarelse 3c

I intervjuet forklarte Carl at oppgave 2c var vanskeligere enn resten, derfor spurte vi om:

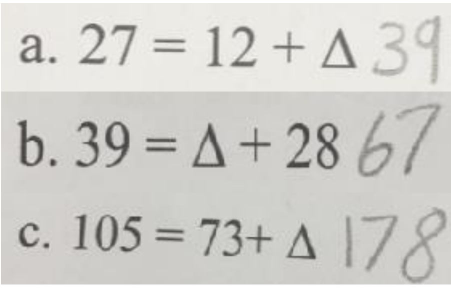
Intervjuer: *Hva fikk oppgave 2c til å være vanskeligere enn 2a og b synes du? Siden du pekte på akkurat den når du sa hva som var litt vanskelig. Var det noe som var litt vanskeligere eller annerledes med den?*
Carl: *Bare å regne i hodet var det litt vanskelig.*
Intervjuer: *Hva tenkte du når du skal løse den da? Hvordan gikk du frem, hvor begynte du?*
Carl: *Jeg begynte med å sette opp, men det, sånn jeg skjønte det så gikk det ikke så bra.*
Intervjuer: *Ok, du satt 105 - 73. Ikke sant? Hvorfor funket ikke det så bra?*
Carl: *Fordi jeg hoppet over noen steg.*

Carl forklarer at oppgaven var vanskeligere fordi den ble regnet i hodet, og noen steg ble hoppet over. Det som har skjedd her er at han har begynt fra feil side, og har gjort flere operasjoner enn nødvendig. Carl begynner ikke med å subtrahere enerne, men låner hele veien til enerne først. Dette skaper forvirring når han da må sette tieren tilbake, og istedenfor å si at det er en tier, så skrives det 10 ti-ere (100 i verdi) over. Hvis han da regner det ut blir det 19 – 7 som gir et svar på 12 som hadde gjort at svaret blir 122, hvis ikke han hadde satt 10 i mente over hundrerne og fått 1022. Carl oppdager at 105 = 73 + 122 eller 1022 ikke kan være riktig, og finner en annen regnemåte.

I forhold til Matthews et al. (2012) nivå 2 kan vi si at Carl har en fleksibel operasjonell forståelse. At han ikke klarer deloppgave c på første forsøk, og kommer fram til en løsning som er mye høyere enn hva som var forventet, viser at han har en god forståelse for likhetstegnet. Grunnen til dette er fordi Carl ser at det ikke blir ekvivalens hvis det står et høyere tall på operasjonssiden av likhetstegnet, enn på andre siden. Derfor velger han å bruke en annen strategi som Knuth et al. (2006) kaller for «guess and test», eller gjett og prøv, som de anser som en aritmetisk strategi.

5.2.3 Daniel

Daniel var en av de to elevene som ikke så at likningene forandret seg fra oppgave 1 til oppgave 2. Det han har gjort i oppgave 2 er å bytte plass på likhetstegnet og addisjonstegnet, slik som vi ser i figur 13.


a. $27 = 12 + \Delta$ 39

b. $39 = \Delta + 28$ 67

c. $105 = 73 + \Delta$ 178

Figur 13 - Daniel sin løsning på oppgave 2

Etter Daniel hadde løst oppgavene spurte vi han hvordan oppgave 2 ble løst:

Intervjuer: *Hva tenkte du på oppgave 2, var det noe annerledes enn oppgave 1?*

Daniel: *Det var erlik tegn her. (peker i starten av oppgaven a = b + c)*

Intervjuer: *Hva tenker du er annerledes, da?*

Daniel: *At det ikke var erlik tegn der man skulle plusse også blir det svaret.*

Intervjuer: *Hva gjorde du når du så det i den oppgaven?*

Daniel: *Jeg tok 27 + 12 også skrev jeg svaret.*
Intervjuer: *Hva tror du det betyr at det er likhetstegnet er der istedenfor der som plusstegnet står sånn som på de andre oppgavene?*
Daniel: *Kanskje det er motsatt.*
Intervjuer: *Hva betyr det at det er motsatt?*
Daniel: *At det er andre veien.*

Daniel sliter med å forklare seg og begynner å snakke om noe annet. Etter to minutter med forklaringer og utenom prat sier han:

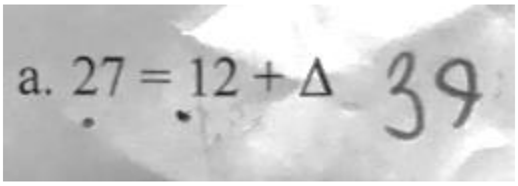
Daniel: *Nå skjønte jeg! Jeg vet den finner ut hva det skal bli litt sånn, jeg skal finne ut hva 27 skal bli hvis jeg plusser noe på med 12.*
Intervjuer: *Hva må du plusse på 12 for å få 27?*
Daniel: *Da må jeg ta.... Da tenker jeg at jeg kan ta 27 - 12 og det blir 20 minus 10, det blir 10. 7 - 2 det blir 5. Så da blir det 15.*

Vi prøver å spørre hvorfor han ikke brukte den løsningsmetoden første gang, men får som svar at han ikke vet. Daniel forteller at det var noe annerledes og at han ser plassbyttet mellom likhetstegnet og addisjonstegnet. Når oppgavene ble løst ble det sett at det var motsatt, men han forsto ikke hva det innebar, og fortsatte å løse oppgavene på samme måte som tidligere. Alle deloppgavene i oppgave 2 har blitt byttet til den typiske måten å løse matematikkstykker.

Matthews et al. (2012) forklarer at får å være på det fleksible operasjonelle nivået må man være mer fleksibel med hensyn til forskjellige typer likningsformater. Oppgavetypene kan være "baklengs" oppgaver, eller motsatt som Daniel kaller dem. Når oppgave 2 ble gjennomført var ikke Daniel fleksibel nok til å forstå denne typen oppgave, men etter mer betenkningstid i intervjuet ga han en mer avansert metode for å løse oppgaven. Dette kan handle om konteksten av oppgaven, og dette gjelder spesielt for ny kunnskap, eller kunnskap som holder på å bli forstått (McNeil et al., 2006). Likevel kan vi ikke si at det er nok til å være på nivå 2.

5.2.4 Jonas

Noe interessant vi så i flere av oppgavene var at deloppgave a var regnet feil, mens deloppgave b og c var gjort riktig. For å vise dette trekker vi fram Jonas, som har en slik besvarelse. Det som gjør denne oppgaven interessant, er hvordan han forklarer hva som har skjedd, og hvordan det ble løst, eller hvordan det skulle vært løst. I deloppgave a har Jonas byttet plass på likhetstegnet og addisjonstegnet, eller løst likningen slik som i oppgave 1.

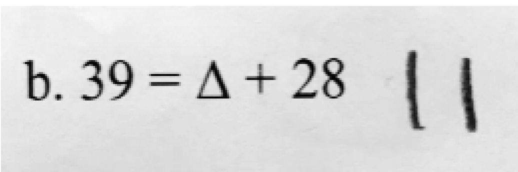


Figur 14 - Jonas sin forklaring til 2a

I intervjuet sa Jonas dette:

Intervjuer: *I oppgave 2a står det 27 = 12 + trekant, og du har skrevet 39.*
Jonas: *Nei, der gikk det litt fort og jeg har regnet feil på oppgaven. Fordi jeg regnet den (27) og den (12) sammen.*
Intervjuer: *Når du løste oppgaven sa du 27 + 12 =. Men hvor står pluss symbolet her?*
Jonas: *Der er (peker bakerst). Da blir det 17 og så minus 2 = 15. Er det riktig?*
Intervjuer: *Ja, det er riktig, men hvor fikk du 17 fra?*
Jonas: *Jeg tenkte at hvis jeg minuser 10 på det så blir det 17 også minuser jeg 2 etterpå.*
Intervjuer: *Så da tok du egentlig 27 - 12?*
Jonas: *Mhm, istedenfor å prøve å finne ut hva du plusser med 12 for å få det.*

Jonas innrømmer med en gang at det gikk litt fort og at oppgaven hadde blitt regnet feil, fordi sifrene som sto der ble lagt sammen. Han går så videre med å forklare hvordan oppgaven kan løses, og bruker en type grupperingsmodell. Først starter han med 27 og subtraherer 10 for å få 17, så subtraherer han 2 til for å nå kravet om 12, og finner ut at det resterende tallet er svaret. I deloppgave b løser Jonas stykket riktig, se figur 15.

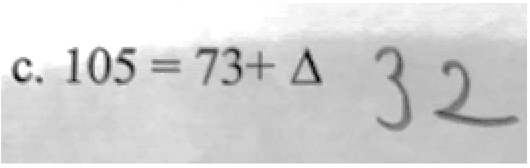


Figur 15 - Jonas løsning 2b

Dette sa Jonas om deloppgave b:

Intervjuer: *I denne oppgaven (2b) har du skrevet 11, 39 = trekant + 28.*
Jonas: *Å neeeei, eller joo?! (Eleven tror at svaret er feil)*
Intervjuer: *Det er riktig. Det er riktig svar, jeg bare lurer på hvordan du kom frem til 11.*
Jonas: *Jeg vet ikke, det var bare det jeg hadde regnet, også trodde jeg det var riktig.*
Intervjuer: *For 11 som det skal stå i trekanten, så står det 28 + 11 = 39 hvis vi tar det baklengs.*
Jonas: *28 + 10 da er det lik 38, + 1 = 39.*

Her bruker Jonas en annen metode for å løse oppgaven. Istedenfor å starte med det største sifferet og metodisk gruppere, eller telle ned, bruker han det laveste tallet og grupperer seg opp. Det er flere måter å gjøre oppgaven på, men det er interessant at han velger å bruke en annen metode for å forklare deloppgave a, enn den som ble brukt i deloppgave b. Vi snakket ikke videre om deloppgave c, men vi antar at samme metode ble brukt som i deloppgave b.



Figur 16 – Jonas sin løsning på 2c

Det er tydelig at Jonas er usikker på om det som har blitt gjort er riktig, slik som vi ser på deloppgave b. Dette kan skyldes at han nylig har tilegnet seg denne måten å regne på, eller lært seg denne type oppgaver. Eleven klarte ikke deloppgave a på arket, men at eleven forklarer at det er feil, og deretter retter på det selv med en forklaring viser forståelse for ekvivalens og Matthews et al. (2012) nivå 2, fleksibel operasjonell forståelse. Vi kan derfor si at eleven har tilegnet seg forståelse tilsvarende nivå 2.

5.3 Oppgave 3

For å ha en god forståelse av nivå 3 hevder Matthews et al. (2012) at elevene må forstå og godta likninger med operasjoner på begge sider av likhetstegnet. De må også godta en relasjonell definisjon eller forklaring av likhetstegnet for å være på dette nivået. Siden vi ikke ga elevene en definisjon eller forklaring av likhetstegnet, men ba om deres definisjon går vi ut ifra den.

5.3.1 Bernt

Vi velger å trekke frem hvordan Bernt har besvart denne oppgaven fordi hans prestasjon på arket ikke samsvarer med den muntlige forståelsen. Bernt var den eneste som ikke svarte på deloppgave 3a, svarte feil på deloppgave b og c, men svarte riktig på d. Grunnen til at denne besvarelsen er så interessant er fordi han gjennom intervjuet forklarte, og viste forståelse for alle deloppgavene i oppgave 3. Gjennom disse intervjuene får Bernt vist sin forståelse for likhetstegnet, selv om svarene på arket sier noe annet. Han arbeidet raskt med oppgavene og det virket som at det var litt hastverk for å bli ferdig. Det tok kun 6 minutter før han var ferdig med alle oppgavene, mens de andre elevene brukte mellom 9 – 14 minutter. Vi forholdte oss likt til denne eleven som alle de andre, så grunnen til at eleven arbeidet så raskt er ukjent. Før eleven fikk begynt arbeidet med oppgavene spurte vi om elevens forståelse av likhetstegnet:

***Intervjuer**: Før vi begynner vi med oppgavene, så lurer jeg på hva betyr likhetstegnet?*

***Bernt:** Betyr at det er noe som er likt på begge sider, for eksempel hvis det er 51 % på den ene siden og 51 % på den andre siden, så er det likt.*

Det er vanskelig å si om dette er en fullstendig relasjonell forståelse av likhetstegnet, men det er en forklaring som fremhever viktigheten av likt på begge sider. Vi kan tenke oss at Bernt brukte 51 % i sin forklaring hvis vi bruker det i et praktisk eksempel. Hvis man har to flasker med vann og begge flaskene inneholder 51 % væske vil mengdene i flaskene være like. Eksempelet viser ikke til et eksempel med operasjonell forståelse ($a + b = c$), eller andre typer symmetriske aritmetiske identiteter (Prediger, 2009), slik at det er vanskelig å vite om eleven har en slik type forståelse av likhetstegnet fra den verbale forklaringen.

I intervjudelen sa Bernt dette om deloppgave 3a:

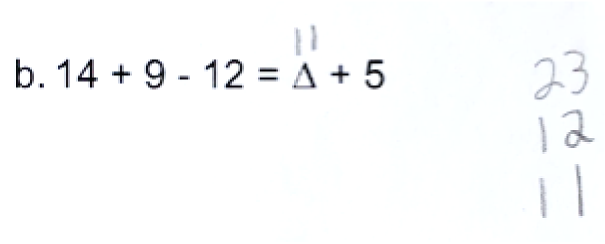
***Intervjuer:** Nei 3a den var vanskelig, men du har skrevet svar på de andre. Hva var vanskeligere med oppgave 3a?*

***Bernt:** Jeg tror det var fordi jeg skjønte ikke hvorfor 12 + 4 skulle være 6.*

Intervjuer: *Du må lese hele oppgaven 12 + 4 = 6 pluss trekant.*
Bernt: *Åja. Så man skulle skrive hva som det svaret der (venstre side), og det ble noe, også skulle man skrive et tall som gjorde at det ble likt her (høyre side).*
Intervjuer: *Ja, det er jo det dette tegnet betyr, det sa du tidligere. (peker på likhetstegnet)*
Bernt: *Hehe, ja.*

Som tidligere nevnt skrev ikke denne eleven noe svar til deloppgave a. Det at Bernt ikke tar seg god nok tid til å tenke er noe vi ser gjennom alle oppgavene, selv om det ikke er mange av elevene som innrømmer det. De stopper ikke opp for å tenke over oppgaven før de gir opp, og går videre til neste oppgave. Når man leser transkripsjonen, og ser hva Bernt har sagt om hvordan oppgaven skal løses virker det som at oppgaven, og ekvivalensbegrepet, er forstått.

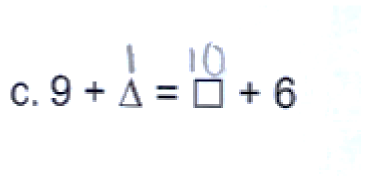
I 3b gjør Bernt en feil. I denne deloppgaven har Bernt addert 14 + 9 sammen til 23, deretter subtrahert 23 – 12 og fått 11, deretter skrevet 11 over trekanten, som vist i figur 17.



Figur 17 - Bernt svar 3b hvor vi ser at eleven har svart 11 istedenfor 6 som er rett svart

Det kan virke som at Bernt har glemt å subtrahere 5 fra den venstre siden, før han skrev svaret sitt. En annen årsakene kan være at trekanten ikke står i slutten av oppgaven. Spesielt i denne deloppgaven virker det som at eleven glemmer eller ser bort ifra at det står noe etter trekanten. Vi ser at han glemmer eller ser bort ifra at det står noe bak trekanten igjen i deloppgave c. noe vi ser igjen i neste deloppgave. En annen årsak til at han ikke tok seg god nok tid kan være et tidspress eleven selv følte på, da det var en uvant situasjon for eleven å bli observert samtidig som han skal løses oppgaver.

I den neste deloppgaven, 3c, kan vi se videre spor av det samme som skjedde i deloppgave b, nemlig addering av oppgaven. Likevel er det interessant at Bernt har forstått at det skal stå to forskjellige tall i trekanten og firkanten.



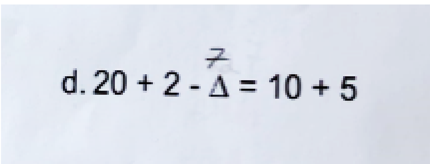
Figur 18 - Bernt svar 3c hvor vi ser at eleven har skrevet 1 og 10

Bernt har valgt å skrive 1 i trekanten og deretter regnet at 9 + 1 blir 10, og skrevet dette i firkanten. I transkripsjonen sier han dette om deloppgave c:

Intervjuer: *Oppgave 3c, hva har du gjort der da?*
Bernt: *Der ser jeg at jeg har gjort litt feil der, men der tok jeg 9 + 1 som er 10 og da fikk jeg også 10 + 6 som er lik 16.*
Intervjuer: *Hva skulle ha stått der i stedet?*
Bernt: *For da skulle det ha stått 4.*
Intervjuer: *Ja, kunne du valgt andre tall enn 1 og 4??*
Bernt: *Ja, man kunne egentlig tatt hvilket som helst tall, så lenge det blir likt det. (eleven peker på trekant og firkant)*

Bernt retter på eget arbeid og gir korrekt svar for det som skulle ha stått i firkanten. Essensen i oppgaven, og en av grunnene til at vi valgte akkurat denne oppgaven, var at vi ønsket at elevene skulle forstå at tallene som kan stå i trekanten og i firkanten kan variere, så lenge det oppfyller likheten. Bernt oppsummerer det på en god måte, med å si at man kunne tatt hvilket som helst tall, så lenge det blir likt på begge sider.

Deloppgave d er der det virkelig blir interessant. Bernt har hittil ikke besvart deloppgave a og gjort deloppgave b og c feil på samme vis.



Figur 19 - Bernt svar på 3d, hvor vi ser at eleven har svart 7

Intervjuer: *Hva har du gjort her da? (peker på oppgave 3d) Her har du skrevet 7. 20 + 2 - 7 = 10 + 5.*
Bernt: *Ja det var fordi at 20 + 2 = 22 og 10 + 5 er 15. og hvis man da tar 22 - 7 så blir det 15.*

I denne deloppgaven viser Bernt igjen en forståelse om ekvivalens hvor begge sider skal være like ved å regne begge sider av likhetstegnet hver for seg.

Hvis vi følger Matthews et al. (2012) sitt rammeverk for kunnskap om likhetstegnet, og grunnleggende relasjonell forståelse, kan det være utfordrende å plassere Bernt i en spesifikk kategori. Grunnen til dette er fordi han gir en god forklaring av likhetstegnet, men svarer ikke på deloppgave 3a, og svarer feil på 3b og 3c. Likevel, når eleven får lov til å snakke om dette muntlig begynner det å løsne, og forklaringene rundt tankegangen bak oppgavene kommer tydeligere frem. Han viser underveis i forklaringene sine forståelse for likninger med operasjoner på begge sider av likhetstegnet. Deloppgave a tyder på at eleven verken leste eller så på oppgaven godt nok. Likevel gir Bernt en forklaring på deloppgave a som tilsier at der trekanten skal så skal man sette inn et tall som gjør at det blir likt på begge sider, som er en relasjonell forklaring.

Fra arbeidet på arket i deloppgave b og c er det tydelig at denne typer oppgaver med et tall etter den ukjente ikke har blitt helt automatisert, og samme feilen kommer frem to ganger på rad. Likevel som McNeil et al. (2006) forklarer så har konteksten mye å si for om eleven får til oppgaven eller ikke, og dette gjelder spesielt for ny kunnskap, eller kunnskap som holder på å bli forstått. Slik som i deloppgave d der eleven får den til uten vanskeligheter, og b og c som eleven begynner å nærme seg en forståelse for. I intervjudelen ser vi hvor nærme eleven er til å forstå oppgave b og c, siden eleven selv forstår hva som har blitt gjort galt og må rettes på. Dette tyder på at eleven har begynt å opparbeide seg en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Selv om de fleste av oppgavene på arket ikke var riktig, kommer Bernts forståelse for likhetstegnet frem i interjuvet. Derfor kan vi si at han har tilegnet seg en grunnleggende relasjonell forståelse.

5.3.2 Egil

Vi tar nå for oss Egil, som er interessant fordi det ble svart feil på deloppgave a og b, og ikke skrevet noe på c og gjort deloppgave d riktig. Dette er en interessant oppgave fordi Egil svarer riktig på deloppgaven vi anser som vanskeligst, deloppgave d, men ingen av de andre. Når Egil blir spurt om en definisjon av likhetstegnet før oppgavene, gir han ingen definisjon:

Intervjuer: *Jeg lurer på hva om du kan forklare meg hva likhetstegnet betyr?*

Egil: *Jeg tror det betyr, eller at, nei ikke helt.*

Intervjuer: *Klarer ikke helt å sette ord på det?*

Egil: *Nei ikke helt.*

Intervjuer: *Okei, men da kan du få lov til å løse oppgavene, også hører vi igjen etter du har løst oppgavene.*

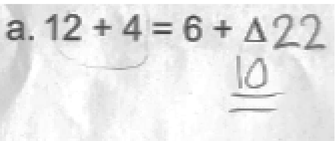
Som sagt fikk Egil løse oppgavene og når intervjuet nærmet seg ferdig spurte vi han igjen om en ny definisjon av likhetstegnet, og da fikk vi denne responsen:

Intervjuer: *Vi må prøve en gang til tenker jeg. Hva betyr likhetstegnet?*

Egil: *Likhetstegnet viser likhet mellom de to forskjellige tallene.*

Dette er ikke en helt presis definisjon av begrepet, men gir et inntrykk at det har med ekvivalens å gjøre. Hvilke to forskjellige tall det er snakk om er ikke gjort klart, men det vi antar er at dette går på vokabularet til eleven. Egil virket nervøs gjennom intervjuet, som kan ha gjort det vanskelig å finne riktig ord. For alt vi vet kan det hende at eleven mente å si mengde og ikke tall. Hvis tall ble blandet med mengde kan vi si at dette er en relasjonell definisjon på likhetstegnet. Grunnen til dette er som Baroody og Ginsburg (1983) skriver at elevene ser på likhetstegnet som et relasjonelt symbol som peker mot et forhold mellom venstre og høyre side av likhetstegnet.

På deloppgave a har Egil skrevet 22, svaret kommer fra å legge sammen sifrene oppgitt først i oppgaven, 12 + 4 + 6, selv om hele oppgaven er 12 + 4 = 6 + Δ.



Figur 20 - Egil besvarelse 3a

I intervjuet etter oppgavene sier derimot Egil dette:

Intervjuer: *Hva tenkte du på oppgave 3?*

__Egil:__ Der plusset jeg først 12 + 4 også skulle det bli det tallet som jeg plusset 12 med 4 og det ble 16 og da husket jeg at... jeg gjorde feil fordi da skulle det stått 10 der.

***Intervjuer:** Å? Hvorfor det?*

***Egil:** Jo fordi 6 pluss 10 blir 16.*

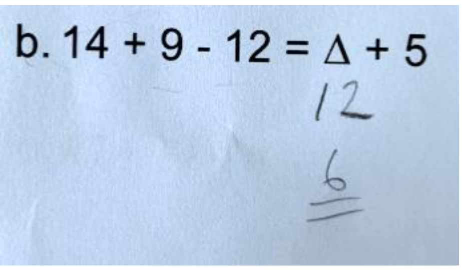
***Intervjuer:** Ok, ja, for det var noe av det jeg skulle spør om. Hmm, ja, så da har du egentlig løst den oppgaven der når du får tenkt litt mer på det?*

***Egil:** Ja, nå skjønte jeg den*

Dette er interessant fordi vi kun spør om oppgaven, vi sier ikke at svaret som står der er verken riktig eller galt, men Egil oppdager det selv. Han gjorde feil når det ble regnet ut på egen hånd, men viser at det ikke kan stemme når det skal forklares. Det kan virke som at når Egil får lest oppgaven, og svaret sitt høyt, går det opp for han at noe er galt.

Elever arbeider som oftest med oppgaver der de følger den vanlige operasjon-er lik-svar formatet, noe som gjør det vanskelig med andre formater, noe som kan tyde på en rigid operasjonell forståelse (Matthews et al., 2012). Dette blir til slutt så automatisert at elevene ikke nødvendigvis ser hvor operatørene står i stykket, og bare løser dem slik de er vant til å gjøre. Egil sier også det riktige svaret i intervjuet uten å tenke seg noe videre om eller pause for å regne, svaret kommer raskt og naturlig. Dette kan tyde på at forståelsen er på plass, men at eleven gjorde en slurvefeil, og at oppgaven ikke ble lest ordentlig første gang.

I deloppgave b ser vi en lignende feil som i deloppgave a. Egil har lagt sammen 14 + 9 – 12, og fått 12, selv om det egentlig skulle bli 11. Vi spurte eleven hvordan svaret ble 12, men eleven kom selv fram til at det ble 11, og husket ikke hvor 12 kom fra.



Figur 21 - Egil sin løsning 3b

I intervjuet forklarer Egil deloppgave b:

***Intervjuer:** Kan du forklare 3b også?*

***Egil:** Ja, da tok jeg først 14 + 9 - 12, det blir 11.*

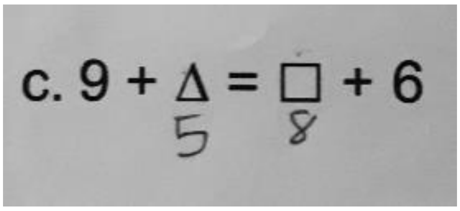
Intervjuer: *Jepp.*
Egil: *Og så blir det 12 + 5 som da også er feil.*
Intervjuer: *12 + 5 det blir 17. Da har du 11 på denne siden og 17 på den andre. Er de like hverandre?*
Egil: *Nei, de er jo ikke det.*
Intervjuer: *Hva skulle det ha stått her? Nå som du har tenkt på det litt mer.*
Egil: *6.*

Igjen som i deloppgave a ser Egil at oppgaven 3b ikke er riktig og retter på seg selv. Siden han får et svar som er tilnærmet 12, som er alle tallene lagt samme, 14 + 9 – 12, kan vi si at han gjør en lignende feil som i deloppgave a. Her kan det også virker som at det siste tallet som er bak trekanten blir glemt. Det kan argumenteres om spørsmålet i intervjuet om de er like hverandre er ledende, men Egil sier før dette spørsmålet blir stilt at oppgaven er feil. Videre gir Egil riktig svar på oppgaven etter en kort tenkepause.

I deloppgave c har ikke Egil skrevet noe, men spurte underveis i oppgaveløsningen om hvordan den skal løses. Vi sa at hvis den var vanskelig, og eleven ikke visste hva som skulle gjøres kunne den hoppes over, så snakket vi om det etter alle oppgavene var ferdige. Det gjorde eleven.Når oppgavene var ferdige kom vi tilbake til deloppgave c og dette var det som ble snakket om:

Intervjuer: *Geometriske figurer er jo trekanter, firkanter og alle former. Og i denne oppgaven har vi 2 former. De er forskjellige, vet du hvorfor de er forskjellige?*
Egil: *Fordi de ikke betyr det samme tallet.*
Intervjuer: *Helt riktig kjempebra så her på denne siden har vi 9 og på den andre siden er det kun 6. Så hva kan det for eksempel stå i trekanten?*
(Eleven tenker seg godt om, men sier ikke noe.)
Intervjuer: *Skal trekanten eller firkanten ha størst tall?*
Egil: *Firkanten.*
Intervjuer: *Firkanten ja, så hva kan du skrive i trekanten da?*
Egil: *Kanskje 5.*
Intervjuer: *Ja, da får du 9 + 5 det blir.*
Egil: *Ehh, 14.*
Intervjuer: *Og hva må du skrive her da?*

Egil: *Da må jeg skrive... 8!*



Figur 22 - Bernt besvarelse på oppgave 3c

Egil forstår at de geometriske figurene er variabler, og at det betyr at de ikke behøver å stå samme tall i begge to, men at de ikke betyr det samme. Videre gir ikke han noen hint til hva som skal stå i trekanten, og når det blir spurt hvilke av figurene som skal ha størst svarer han at det må være firkanten. Egil kommer frem til at vi kan prøve å skrive 5 i trekanten, og får litt hjelp til at det blir 14 på den ene siden av likhetstegnet. Til slutt blir eleven spurt om hva om må stå på andre siden og eleven kommer frem til at det skal være 8. Derfor blir oppgaven 9 + 5 = 8 + 6. Dette kan tyde på at han begynner å forstå ekvivalens begrepet.

I deloppgave d svarer Egil 7, uten noen forklaring. Når vi spurte han hvorfor svaret ble 7 svarte han at siden det var 10 + 5 på høyre siden og det ble 15, så måtte det være 7 på den andre siden fordi 20 + 2 er 22 og 22 – 7 blir 15, derfor blir det likt. Til slutt ble eleven spurt igjen hva likhetstegnet betyr, og da klarte eleven å gi en definisjon som beskriver ekvivalens, som sagt tidligere.

Egil: Likhetstegnet viser likhet mellom de to forskjellige tallene.

Matthews et al. (2012) nivå 3, grunnleggende relasjonell forståelse, forklarer at elevene må godta en relasjonell forklaring av likhetstegnet. Egil gir som sagt ingen forklaring på likhetstegnet i starten, og sliter med å finne ordene. Det var tydelig at han var nervøs, men etter oppgavene var løst kom definisjon på likhetstegnet. Som sagt tidligere anser vi ordet «tallene» som ble brukt i definisjonen som mengdene. Både svarene i deloppgave a og b viser tegn på at operasjon-er lik-svar metoden er automatisert, noe som tyder på en mer tilnærmet rigid operasjonell forståelse. Likevel viser intervjuet at han har forståelse på et høyere nivå, der Egil retter på begge oppgavene og gir en relasjonell forklaring til begge oppgavene. Arket til Egil viser kun en forståelse for deloppgave d, siden oppgave a og b er feil, og c er ubesvart. Intervjuet med Egil gir et annet bilde av forståelsen, der han forstår feilene og forklarer oppgavene relasjonelt, med tanke på ekvivalens. Med vår forståelse av nivået, grunnleggende relasjonell forståelse, det vi har hørt og sett med Egil mener vi at han har en forståelse av nivå 3.

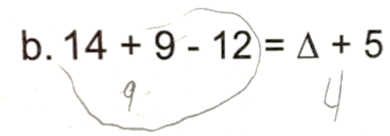
5.3.3 Fredrik

Fredrik sin forklarelse av likhetstegnet viser en høy forståelse av relasjonell tenkning. Dette sa han om likhetstegnet i intervjuet før oppgavene ble løst:

Intervjuer: *Sånn da, lurer jeg på når du tenker likhetstegnet, når det står er lik, hva betyr det?*
Fredrik: *Det er likt på begge sider av tegnet, og ikke at du skal finne svaret.*

Denne definisjonen av begrepet viser en klar forståelse om ekvivalens, fordi han forklarer at det handler om at det er likt på begge sider av likhetstegnet. Baroody og Ginsburg (1983) forklarer at elever med en relasjonell forståelse ser på likhetstegnet som et tegn på en relasjon mellom verdiene av det to sidene. Hvis eleven har en operasjonell forståelse forklarer Baroody og Ginsburg (1983) at de ser på likhetstegnet som et signal for å «gjøre noe», eller at det skal produseres et svar. At det blir presisert at det ikke handler om å finne svaret, gjør det enda tydeligere at dette handler om ekvivalens.

På deloppgave a og d har eleven svart riktig og kun svaret står uten mellomregning. I deloppgave b derimot har han fått feil svar.. Eleven har lagt sammen 14 + 9 – 12 og fått 9 som svar, deretter har eleven addert 4 med 5 for å få 9 på andre siden.

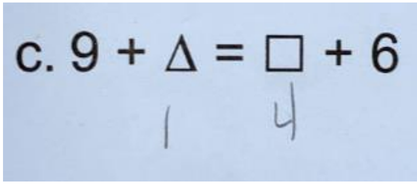


Figur 23 - Fredrik besvarelse 3b

Hvis man legger sammen sifrene på venstre side av likhetstegnet skal det bli 11. Så på høyre siden skal svaret være 6 + 5, som også blir 11. Det Fredrik har gjort er en regnefeil på venstre side av likhetstegnet, som resulterer i at svaret i trekanten blir 2 lavere enn det svaret skal være. Det er likevel konsekvent siden det er -2 på hver side av likhetstegnet og svaret han har fått blir 9 på begge sider av likhetstegnet. Dette viser en god forståelse av ekvivalens selv om svaret er feil.

I deloppgave c har eleven en spesiell løsning på oppgaven. Her har eleven skrevet 9 + 1 = 4 + 6. I intervjuet forklarer eleven hvorfor disse tallene ble valgt:

Intervjuer: *Hva har du tenkt der da?*
Fredrik: *Eh, jeg tenkte at det ikke fantes noen fasit, og at det bare måtte være like mye på hver side.*
Intervjuer: *Hva fikk deg til å velge de tallene som du gjorde?*
Fredrik: *Fordi de er tier-venner begge to.*



Figur 24 - Fredrik sin løsning av 3c

Grunnen til at Fredrik valgte tallene 1 og 4 er fordi de er tier-venner med 9 og 6 som allerede sto der. Tier-venner er noe mange elever lærer på barneskolen i Norge, og er kjent for de fleste. Eleven vet at disse tallene addert med hverandre er likeverdige og dette viser forståelse for ekvivalens.

Den grunnleggende relasjonelle forståelsen som Matthews et al. (2012) har utviklet er noe Fredrik forstår. Hans definisjon av likhetstegnet gir et klart inntrykk at han har en relasjonell forståelse, og ikke en operasjonell, som forklart tidligere. Selv om han gjør regnefeil i deloppgave b ser vi at det ekvivalent på begge sider. Dette viser at Fredrik forstår likninger med operasjoner på begge sider av likhetstegnet, og at de skal være likeverdige. I deloppgave c bruker han kjente tall, tier-venner, som er en god strategi fordi han vet på forhånd at disse er ekvivalente. Eleven har også gjort deloppgave a og d riktig. Vi kan på bakgrunn av dette si at eleven har en grunnleggende relasjonell forståelse.

5.3.4 Daniel

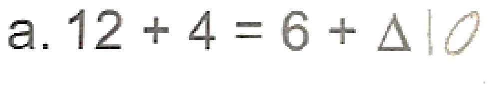
Som vi så i oppgave 2 nådde ikke Daniel helt opp til nivå 2 fordi eleven ikke klarte atypiske oppgaver, som er terskelen for å være på nivået. Det er viktig at vi tar frem Daniel i oppgave

3, fordi han får til noen av oppgavene. Hvorfor dette er viktig kommer vi frem til i oppsummeringen. Vi startet som vi gjorde med alle, å spørre om hva eleven trodde likhetstegnet betyr:

Intervjuer: *Da begynner jeg med det vi alltid spør om, hva tenker du om likhetstegn. Hva betyr det?*
Daniel: *Er lik? ehm.. Skal jeg forklare hva det er?*
Intervjuer: *Gjerne.*
Daniel: *Jeg tenker at... er lik betyr liksom hva det blir på slutten. For eksempel 3 + 2 det blir, det er lik som 5.*
Intervjuer: *Tenker du da at det blir et svar?*
Daniel: *Ja.*

Dette er ikke en relasjonell forklarelse av likhetstegnet, derfor spurte vi igjen etter oppgavene og fikk samme svar igjen. Nemlig at likhetstegnet er det som blir på slutten, et svar. Denne definisjonen henger sammen med en operasjonell forståelse.

Når eleven da skulle begynne å løse oppgave 3 ble vi overrasket. Etter at eleven hadde gjort oppgave 1 riktig, og oppgave 2 feil, så vi for oss at disse oppgavene skulle bli for vanskelige. Likevel klarer eleven å gjøre deloppgave a riktig, som sett i figur 25.



Figur 25 - Daniel sin løsning av 3a

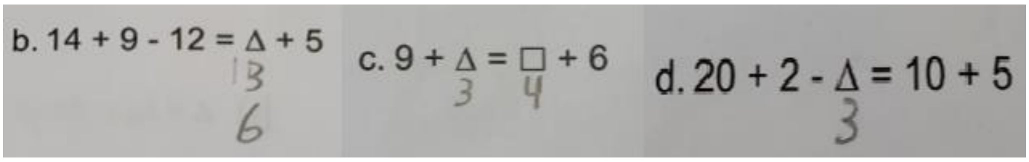
Når oppgavene var ferdige, spurte vi eleven om oppgave 3a:

Intervjuer: *I oppgave 3a. Hva har du gjort der? Der har du skrevet 10.*
Daniel: *Da, har jeg tatt 12 + 4 og det blir 16, også har jeg sett at det blir…, også står = tegnet ved siden av 6 og pluss 10 og da blir det svaret på den der oppgaven.*
Intervjuer: *Hva står det på hver side av likhetstegnet da?*
Daniel: *12 + 4 = 6 + trekant også 10, da tenker jeg at de er likeverdig.*

Denne forklaringen av oppgaven viser at Daniel har en forståelse for relasjonell tankegang, noe som kommer frem gjennom intervjuet og spesielt ved at eleven bruker ordet likeverdig.

Hvorvidt forståelsen er der, kan vi ikke si noe om. Derfor ser vi etter forståelsen i de andre deloppgavene.

I deloppgave b skriver Daniel 11 som svar, men etter det begynner eleven å tenke lenge. Etter tenkepausen visker eleven bort svaret 11, og skriver 3 som svar, som vi ser i figur 26. På neste deloppgave virker det ikke som han ser på oppgaven, men skriver 3 under trekanten og 4 under firkanten. På deloppgave d skriver han 3 på samme måte som i deloppgave c.



Figur 26 – Daniel sine løsninger av 3b, 3c, og 3d

Dette var noe vi måtte spørre Daniel om, fordi det så ut som et mønster. Han forklarer svarene sine på denne måten:

Intervjuer: *På oppgave 3b har du endret på svaret noen ganger. Hva endret du fra og til?*
Daniel: *Jeg endret fra 11 til 3.*
Intervjuer: *Hva tenkte du da?*
Daniel: *Jeg tenkte på ordet trekant.*
Intervjuer: *Hvorfor endret du til 3 da?*
Daniel: *3kant. 3.*
Intervjuer: *Så på 3c har du skrevet 3 og 4 under trekanten og firkanten.*
Daniel: *3kant. 3. 4kant. 4.*
Intervjuer: *Det er det ingen som har gjort enda, det har ikke vi tenkt på heller.*

Grunnen til at det står 3 på de resterende trekantene var fordi Daniel tenkte på ordet trekant, og tenkte derfor at alle trekanter må være 3. Det er tydelig at i den tenkepausen han hadde var det noe som gjorde at han forandret svaret sitt til 3. Når vi går tilbake til spørsmålet om 3b svarer han dette:

Intervjuer: *Du hadde 11 her på 3b først.*
Daniel: *Ja. Fordi da, jeg husker ikke helt, men da fikk jeg sikkert 14 + 9 og det blir 23. også tok jeg - 12 og det blir 11. Også skrev jeg svaret der.*
Intervjuer: *Men det står pluss tegn på slutten i den oppgaven.*

Daniel: *Ja, så må det her, ehm, 6.*

Dette viser at Daniel har en forståelse for oppgaver med operasjoner på begge sider. En annen grunn enn at han valgte 3kant svaret kan være konteksten av oppgaven. Hovedforskjellen på deloppgave a og b, er at deloppgave b har en minusoperatør og at trekanten har byttet plass i venstre ledd. Konteksten har mye å si om eleven får til oppgaven, spesielt når det trengs ny kunnskap for å løse oppgavene, eller man må bruke kunnskap som holder på å bli forstått (McNeil et al., 2006). Daniel skrev som sagt 11 først, og det er fordi venstre side til sammen blir 11. Det vi antar er at eleven ikke så det siste tallet, eller ikke visste hvordan det skulle bli brukt. Det viser han er sant når vi forklarer at det står et addisjonstegn på slutten. Noe som hjelper han til å gi det korrekte svaret, nemlig 6. Matthews et al. (2012) nivå 3 om grunnleggende forståelse er litt utenfor rekkevidde for Daniel. Eleven har ikke en relasjonell forklaring på likhetstegnet, og er derfor ikke på nivå 3. Likevel forstår eleven noen av oppgavene med operasjoner på hver side, slik som deloppgave a. Deloppgave b klarer eleven med litt hjelp, men dette kan gå på konteksten av oppgaven slik som tidligere forklart.

5.4 Oppgave 4

Som vi har nevnt tidligere er oppgave 4 laget med nivå 4 til Matthews et al. (2012) som bakgrunn for valg av oppgavestruktur. Elever med forståelse tilsvarende nivå 4 har en såpass konsekvent relasjonell forståelse av ekvivalens, at de ikke trenger å regne ut verdien av begge sider av likhetstegnet for å bestemme om de er ekvivalente. Samtidig er det viktig å notere seg at selv om elevene har svart riktig på oppgave 4, tilsier ikke dette automatisk at elevene har en komparativ relasjonell forståelse. For at elevene skal være på dette nivået av forståelse må de konsekvent vise til en relasjonell forståelse av ekvivalens gjennom de øvrige oppgavene, og i sine forklaringer av oppgavene.

5.4.1 Jonas

Første elev vi ønsker å trekke frem er Jonas, som vi mener ligger nærme å ha en komparativ relasjonell forståelse. Vi kommer tilbake til hvorfor vi mener dette, da vi først skal se nærmere på hans svar og forklaringer til oppgave 4.

Som med de andre elevene, ser vi på hvordan han forklarer likhetstegnet før oppgavestart.

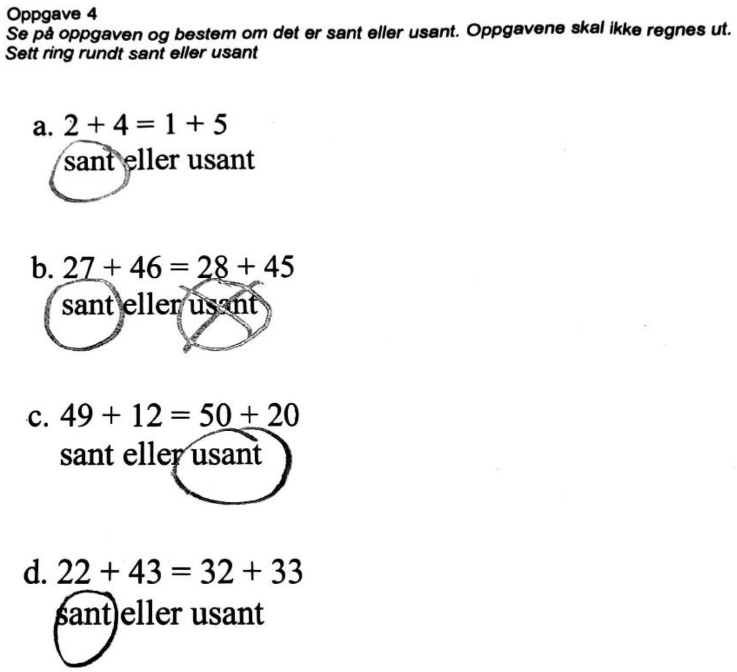
Intervjuer: *Så før vi begynner med oppgavene, så lurer jeg på, hva betyr likhetstegnet?*
Jonas: *Det betyr like mye, at der for eksempel 2 + 2 = 4 for da er det like mye på hver side.*

Denne forklaringen av likhetstegnet er litt spesiell, fordi den tilsier en relasjonell forståelse, men eksempelet er på en rigid operasjonell form. Jonas starter sin forklaring med å beskrive at «*det betyr like mye … da er det like mye på hver side*». Vi vet at en relasjonell forståelse henger sammen med at elever ser på likhetstegnet som et tegn på ekvivalens, altså at begge sidene skal ha lik verdi. Jonas, i sin forklaring, forteller om at tegnet signaliserer at det skal være et ekvivalent forhold mellom sidene. Det som er litt problematisk er eksempelet Jonas velger å bruke. Selv om det er like mye på hver av sidene, så er eksempelet operasjonelt i seg selv. Det kan tenkes at Jonas har en forståelse av at det ikke bare skal komme et svar etter likhetstegnet, men at i denne situasjonen var et slikt eksempel det mest naturlige, og enkleste å komme på. Eleven sier også selv, etter han har svart på oppgavene, at han ikke er vant til å jobbe med slike oppgaver. Det at han ikke er vant til oppgavene, kan ha en effekt på typen eksempel han valgte å oppgi. Det som vil gi utslag for hvilket nivå av forståelse denne eleven har vil være: hvordan Jonas har løst oppgave 4, forklarer løsningene og tankegangen sin, og til slutt løsning av de andre oppgavene og forklaringen av disse.

Når vi innledningsvis spør han om oppgave 4 generelt, svarer han selv direkte at:

Intervjuer: *I den siste oppgaven. Sant eller usant.*
Jonas: *Der regnet jeg.*

Svararket til Jonas, som vi ser i figur 27, viser ingen tegn til utregning av leddene som han selv sier. Han har ombestemt seg om deloppgave 4b, men utover det er det ingen andre endringer. Oppgavearket viser ingen tegn til utregning, men heller ingen bevis på at eleven ikke har regnet ut, slik som han sier.


Oppgave 4
Se på oppgaven og bestem om det er sant eller usant. Oppgavene skal ikke regnes ut.
Sett ring rundt sant eller usant

a. 2 + 4 = 1 + 5
sant eller usant

b. 27 + 46 = 28 + 45
sant eller usant

c. 49 + 12 = 50 + 20
sant eller usant

d. 22 + 43 = 32 + 33
sant eller usant

Figur 27 - Jonas sine svar på oppgave 4

Det vi vet om hva Jonas har tenkt om svarene han har oppgitt, er det vi kan lese av transkripsjonene våre fra intervjuet. Som vi har sett, sier han selv at han regnet ut. Leser vi derimot transkripsjonen fra da vi spurte Jonas om hva han faktisk har tenkt underveis, gir det oss et annet inntrykk enn først tenkt. Som når vi spurte han om deloppgave c, svarte Jonas:

Intervjuer: *I oppgave c, hvordan tenkte du der, hvorfor sa du usant?*
Jonas: *Jeg husker egentlig ikke helt. Jeg tenkte bare at hmm. Liksom den og den ligner ikke, kommer ikke nærme de og de. For eksempel 20 er litt unna 12 og 50 er nærmere 49, men du må bruke 1 da for å få 50, men da har du 11 der. Derfor valgte jeg usant.*

Som vi nevnte i kapittel 4.4, er det tydelig at Jonas ikke har regnet ut summen av leddene på høyre og venstre siden av likhetstegnet. Når han sier at «*…den og den ligner ikke, kommer ikke nærme de og de*» beskriver eleven at tallene på tvers av hverandre ikke er like nok hverandre, og kan derfor ikke være ekvivalente. Videre forklarer han at tallene 50 og 49 er nærme nok til at det kan gå, men når det er mer enn 1 imellom 12 og 20 skjønner han at det ikke er mulig at deloppgave 4c er sann.

Forklaringen til Matthews et al. (2012) når det gjelder nivå 4, tilsier at elever kan: "Successfully solve and evaluate equations by comparing the expressions on both sides of the equals sign…" (s. 320). Måten Jonas forklarer sin tankegang på tilsier at han har sett på forholdet mellom tallene på hver side av likhetstegnet, og med den informasjonen sammenliknet differansen og derfra konkludert at det ikke stemte. Under kjernelikningsstrukturer forklarer Matthews et al. (2012) at elever løser likninger, som de i oppgave 4, med å bruke enkle transformasjoner. Jonas gjorde kanskje ikke direkte transformasjoner på oppgaven, men gjennom forklaringen kan man tyde at tanken har vært å se på differansen mellom tallene på hver side og se om det går opp eller ikke.

Etter å ha fått en forklaring på deloppgave 4c, spurte vi Jonas videre om hvorfor han valgte å ringe rundt «riktig» på 4d:

Intervjuer: *Sånn kan man gjøre det. På den siste oppgaven, der ser alle tallene ganske like ut. Hvorfor blir det sant?*
Jonas: *Jeg husker ikke helt, jeg tenkte bare at der er det 2 og der er det 2 og der er det 3 og der er det 3 så hvis jeg da tar en over dit, blir alle tallene like.*

Som oppfrisking så var oppgave 4d: $22 + 43 = 32 + 33$. Det var ofte at elevene starter sine forklaringer med «jeg husker ikke», eller «jeg vet ikke», noe som kan være for å «kjøpe» seg selv mer tid til å tenke på. Når Jonas får startet å forklare, gir han en relativt tydelig forklaring på sin tankegang. Måten han forklarer at han tenkte for å sjekke om det var sant eller ikke, var fortsatt ikke regning av leddene, som han sa tidligere i intervjuet. Jonas har, som han forteller selv, sett hvordan enerne i oppgaven står mot hverandre, og hvordan tierne er i forhold til hverandre. Han legger merke til at enerne går opp i par, hvor det er to 2'ere og to 3'ere, som gjør at enerne er like på hver side. Videre ser han på hvordan tierne matcher hverandre. Det han legger merke til der er at hvis han flytter en tier fra 43 til 22 så vil begge sidene av likhetstegnet være identiske, og derfor også være ekvivalente.

Måten vi har sett at Jonas har resonert seg frem til at denne deloppgaven var riktig, gir oss et godt innblikk i hvilken forståelse han har av både ekvivalens, men også forholdet mellom tall og hvordan de kan byttes på ekvalente måter. Denne relasjonelle forståelsen kommer tydelig frem i forklaringen av både deloppgave 4c og 4d, da han viser forståelse for hele beskrivelsen av nivå 4. Matthews et al. (2012) forklarer at nivå 4 handler om å lykkes med å løse og evaluere likninger gjennom sammenlikning av sidene, og å bruke kompensatoriske strategier og å gjenkjenne at ekvivalensen beholdes etter likeverdige endringer. Fra det vi har hørt Jonas har forklart, og som vi har diskutert, tyder det på at han har forståelse opp mot nivå 4. Men som Matthews et al. (2012) skriver for å være på nivå 4, må eleven vise til en konsekvent relasjonell forståelse. I kapittel 5.5 vil vi diskutere videre om forståelsen til eleven, og hvor vi mener at forståelsen hans ligger.

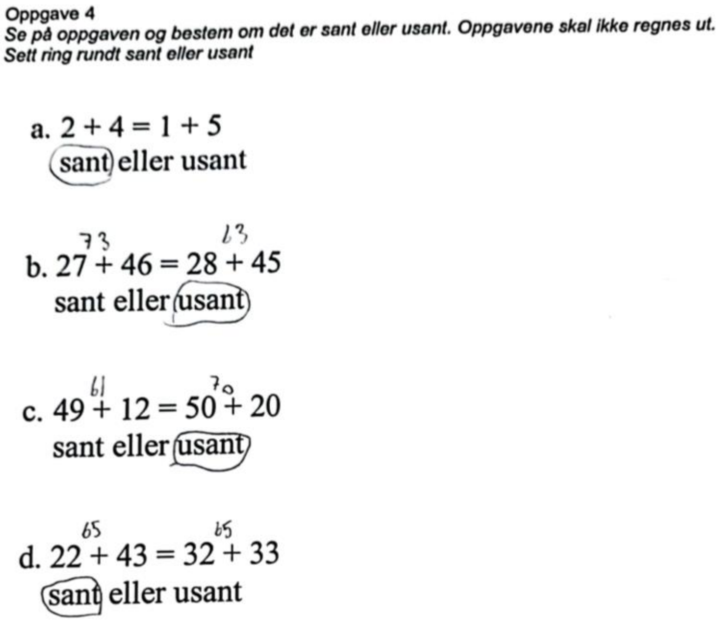
5.4.2 Fredrik

Videre vil vi ta for oss en elev som vi har tidligere sett på i kapittel 5.3.3, nemlig Fredrik. Han ga oss en forklaring på likhetstegnet som tilsier en relasjonell forståelse. Det kan vi trekke ut av transkripsjonen, hvor eleven sa:

Fredrik: *Det er likt på begge sider av tegnet, og ikke at du skal finne svaret.*

Som vi nevnte tidligere, er en forklaring som inneholder at det skal være likt på begge sider av tegnet, et tegn på en relasjonell forståelse. Inkluderingen av at «du ikke skal finne svaret» støtter opp om at han er tydelig at det er en relasjonell forståelse han vil frem til.

Selv om Fredrik gir oss en relasjonell forklaring på likhetstegnet før han begynner på oppgavene, så gir løsningen av oppgave 4 oss et annet syn på elevens forståelse:


Oppgave 4
Se på oppgaven og bestem om det er sant eller usant. Oppgavene skal ikke regnes ut.
Sett ring rundt sant eller usant

a. 2 + 4 = 1 + 5
sant eller usant

b. 27 + 46 = 28 + 45 (73, 73)
sant eller usant

c. 49 + 12 = 50 + 20 (61, 70)
sant eller usant

d. 22 + 43 = 32 + 33 (65, 65)
sant eller usant

Figur 28 - Oppgave 4 løst av Fredrik

Først og fremst har Fredrik enten ikke lest oppgaveteksten, eller så har han bare oversett denne instruksen. Som vi ser på figur 28, har han regnet sammen leddene på hver side av likhetstegnet på deloppgave b, c, og d. Fordi det ikke er en utregning over deloppgave a, kan vi gå ut ifra at Fredrik klarte å se at sidene var ekvivalente uten å regne, men vi kan ikke være sikre. Dessverre spurte vi ikke eleven om hva han tenkte når han løste oppgaven, og har derfor ikke transkripsjon som kan sette lys på tankegangen. Vi kan derfor ikke konkludere med hvilken type forståelse eleven hadde rundt denne oppgaven. Fredrik vil bli diskutert videre i kapittel 5.5, på bakgrunn av hvordan eleven har løst de øvrige oppgavene koblet opp mot forklaringen av likhetstegnet, er interessant.

5.4.3 Bernt

En annen elev vi har tatt opp tidligere er Bernt. Han la frem sin forklaring av likhetstegnet på en relasjonell måte, da han sa at det skulle være like mye på hver side av likhetstegnet. Som vi nevnte tidligere, bruker han eksempelet om at det kan være 51 % på begge sider, noe som er et uvanlig eksempel, men som viser forståelse.

Bernt valgte riktig på alle deloppgavene i oppgave 4, og virket ikke usikker i avgjørelsene sine. Vi startet med å forhøre oss om oppgave 4 med å spørre om hva han mente at «sant» betydde i denne sammenhengen:

Intervjuer: *Vi ser på siste oppgaven her. Du har sagt at det er sant, sant, usant og sant. Hva betyr det at det er sant.*
Bernt: *Det er riktig.*
Intervjuer: *Hva betyr at det er riktig i denne oppgaven?*
Bernt: *At, det er like mye på begge sider.*

Bernt gir oss igjen en forklaring som tilsier at han i det minste har forstått hva som er målet med oppgaven. Dette gjenspeiles i at han har fått riktig på samtlige oppgaver i oppgavesettet. Alt riktig av svar betyr derimot ikke at det er en forståelse som tilsvarer det oppgaven er ute etter. Da han ble spurt om oppgave 4a, svarte han:

Bernt: *Fordi 4 + 2 er 6 og 1+ 5 er 6, og da er det like mye på begge sider.*
Intervjuer: *Løste du oppgaven uten å regne?*
Bernt: *Nei, jeg regna.*

Det vi er interesserte i er om Bernt har regnet ut oppgavene eller brukt en annen strategi, bare at han ser på det som regning. Det at en elev sier at han har regnet, betyr ikke alltid at vi ser på det som utregning. Knuth et al. (2006) trakk frem poenget om at en relasjonell forståelse hjelper for å forstå og skape likninger, samtidig som det hjelper for å jobbe med likninger. En relasjonell forståelse vil da hjelpe eleven med å se sammenhengene til sidene uten å måtte regne de ut. Denne intuitive forståelsen er noe av det som skiller en elev fra nivå 3 forståelse, til overgangen mot nivå 4.

Videre spurte vi Bernt om hans tankegang på deloppgave 4c:

Intervjuer: *Hvis du for eksempel skulle se på oppgave c, som du vet at er usann hvis du bare ser på tallene. Hvordan kan du se at det blir usant?*
Bernt: *Kanskje fordi at det er mindre der selv om det bare er en mindre på 50 enn 49, så er det mindre fordi der er det 12 og der er det 20, så da måtte det vært 22 på den for at de skulle bli likt.*

Matthews et al. (2012) skriver om at elever på nivå 4 kan bruke det de kaller for kompensatoriske strategier, som er en avansert relasjonell strategi. Disse strategiene innebærer at man ser på forholdet mellom tallene på de ulike sidene av likhetstegnet, og at det da ikke blir nødvendig å gjøre kalkulasjoner. Denne måten å tenke på kan vi gjenkjenne i forklaringen av oppgave 4c til Bernt. I likhet med det vi diskuterte i kapittel 5.4.1 om Jonas, beskriver også Bernt forholdet mellom tallene på de ulike sidene av likhetstegnet. Begge elevene viser at de mestrer kompensatoriske strategier, noe som Matthews et al. (2012) sier er et tegn på at eleven er opp mot nivå 4 av likhetstegnsforståelse. Når Bernt forklarte oss tankegangen sin, la han frem at han la merke til differansen mellom tallene var nærme hverandre i verdi. Han la merke til at det var 1 i differanse mellom 49 og 50, men mer enn 1 i differanse mellom 12 og 20. Vi er litt usikre på hvor han tenker at 22 skulle stå, men dette velger vi å se bort ifra da han viser forståelse for at det det ikke var ekvivalent uansett.

Bernt sa selv at han regnet oppgavene, men måten han forklarer tankegangen sin på deloppgave 4c tilsier ikke det vi ser på som regning i denne konteksten. Bruken av en kompensatorisk regnestrategi viser en høy grad av relasjonell forståelse, som Matthews et al. (2012) selv sier, og regnes ikke som tradisjonell utregning. På grunn av manglende utspørring under intervjuet kan vi ikke konkludere noe mer utover det vi har gjort til nå om elevens tankegang rundt oppgave 4, men det han har sagt viser god relasjonell forståelse.

5.4.4 Egil

Vi har tidligere diskutert Egil sin forklaring av likhetstegnet. Han starter med å ikke oppgi en forklaring, men etter oppgavene er løst gir han denne forklaringen:

Intervjuer: *Vi må prøve en gang til tenker jeg. Hva betyr likhetstegnet?*
Egil: *Likhetstegnet viser likhet mellom de to forskjellige tallene.*

Som vi diskuterte i kapittel 5.3.2 viser denne forklaringen teknisk sett til en relasjonell forståelse, fordi Egil forklarer at det er en likhet mellom de to forskjellige tallene. Selv om han bruker ordet «tallene», tolker vi det som mengdene, og derfor som en forståelse for ekvivalens.

Med denne forståelsen som bakgrunn, går vi videre på å se hva eleven har gjort, og sagt, om sine løsninger av oppgave 4. Egil har oppgitt riktige svar på deloppgave 4b, c, og d, men ombestemte seg på deloppgave a og får derfor ikke poeng for den. Videre kan vi se nærmere på hva som er blitt sagt i under intervjuet angående oppgave 4. Til å begynne med tar vi oppgaven som han oppga feil svar på:

Intervjuer*: I disse oppgavene skal du sette ring rundt den som er sant eller usant.*
Egil*: Ja.*
Intervjuer: *Hva betyr det at det er sant?*
Egil: *Hvis det blir det samme 2 + 4 er jo 6. Altså 1 + 5 er jo også 6 ja så det er egentlig sant, men det gikk litt fort.*

Her blir Egil blir spurt om et generelt spørsmål rundt oppgaven hvor eleven selv finner en feil den har gjort. I det Egil, kanskje, skulle bruke deloppgave 4a som eksempel på en oppgave som ikke var riktig, innså han selv at hans oppgitte svar var feil. Som han forklarer selv, kan det hende at han gikk litt fort frem og tenkte seg ikke om, derav feilsvar.
Videre i samtalen med Egil snakker vi om deloppgave 4c, og hva han tenkte om løsningen av den:

Intervjuer: *I den neste oppgaven, her skal du også ikke regne ut oppgavene.*
Egil: *Jeg skal se.*

Intervjuer: *Du skal se ja, hvordan kan man se det da? Hvis vi bruker 4c som eksempel, hvordan så du at den er usann?*
Egil: *Fordi det er 49 + 12 og 50 + 20, og da er jo to store forskjellige tall (50 og 20) og den er jo mye mindre enn den (12 og 20).*
Intervjuer: *Det var en fin løsning. Mange andre har sagt at 9 + 2 blir 1 og 0+0 blir 0 så derfor kan det ikke være sant.*
Egil: *Jeg tenkte mer på at de to var så forskjellige.*

Egil, som andre elever vi har diskutert, ser altså på differansen mellom tallene, og ikke på enerne til tallene. Han brukte altså en kompensatorisk strategi, slik som vi har tidligere diskutert er dette et tegn på en høy relasjonell forståelse (Matthews et al., 2012). Egil ser selv at for å ikke regne ut verdien av hver side, så kan en metode for å sjekke ekvivalens være å se på forholdet mellom tallene som er likest i verdi på hver side av likhetstegnet. Videre spurte vi Egil om hvorfor han mente at deloppgave 4d var sann:

Intervjuer: *Kjempe fint, god løsning. 4d hvorfor er den sann?*
Egil: *Fordi jeg tror... Eller jeg bare vet at 4 + 2 blir 6 og det blir 3 + 3 også. Også hadde de like tall der (enerplassen har likt tall i alle ledd (2 og 3)).*

Denne forklaringen kan man tolke som at Egil intuitivt vet hva summen av både $4+2$ og $3+3$ er, uten å måtte regne det ut. Siden vi velger å tolke strategien på denne måten så mener vi at dette, i likhet med Jonas og Bernt, er en kompensatorisk strategi. Egil reduserer oppgaven til at han bare ser på hvorvidt tierne går opp i hverandre, fordi han har allerede konkludert med at enerne er de samme på begge sider av likhetstegnet. På bakgrunn av det kommer han til konklusjonen at det må være et ekvivalent forhold mellom sidene av likhetstegnet, og derfor blir svaret «riktig». Kompensatoriske strategier som denne, som vi har diskutert tidligere, tyder på en høy relasjonell forståelse for ekvivalens, og tyder derfor på at eleven i det minste nærmer seg nivå 4 (Matthews et al., 2012).

Det kan tenkes at noen ville tenkt at fordi Egil sier at han vet hva både $4 + 2$ og $3 + 3$ er, så er det en måte å regne ut på svaret på. Hadde det vært tilfellet, ville dette ikke vært et høyt nivå av relasjonell forståelse. Vi vil derimot argumentere for at Egil har tenkt relasjonelt da han løste oppgaven. Hvis han hadde regnet ut oppgaven så hadde forklaringen hans heller inkludert verdien av hver side, enn å beskrive forholdet mellom tierne på hver side. Vi ser hvordan det kan argumenteres for at selv om Egil ikke sier direkte hva summen er, så trenger han ikke regne den ut. Det er derimot akkurat derfor han har tenkt relasjonelt, fordi han ikke behøver å regne ut summen for å se ekvivalensen i likningen.

Videre i neste kapittel tar vi for oss nivåinndelingen av elevene sin forståelse av likhetstegnet i sin helhet, og diskuterer videre om utvalget vårt.

6 Hvilken forståelse har elevene i vårt utvalg?

I denne delen av oppgaven ønsker vi å starte med å diskutere hvilket nivå av forståelse for likhetstegnet vi mener de elevene vi har skrevet om tidligere er på. Vi kommer til å trekke frem alle elevene vi har diskutert tidligere. Deretter forklare hvorfor vi mener de er på det nivået de er på basert på transkripsjonene og oppgavene de har gjennomført. Dette blir gjort ved å se på hvert nivå av likhetstegnforståelse som presentert av Matthews et al. (2012), og diskutere hvilke av elevene som vi mener er på de aktuelle nivåene. Videre vil vi diskutere rundt hva vi kan si om utvalget vårt, basert på det vi har erfart og beskrevet i løpet av denne oppgaven.

6.1 Nivå 1 – Rigid operasjonell

Dette nivået har vi diskutert nærmere i kapittel 4.1 og 5.1, men det er likevel hensiktsmessig å se på helheten blant elevutvalget vårt. Essensen til nivå 1, rigid operasjonell forståelse, ligger i at elevene ikke har mulighet til å forstå eller løse oppgaver som går utover den rigide oppgavestrukturen: $a + b = c$. Med tanke på denne rigide oppgavestrukturen, ser vi en sammenheng med at elever ser på likhetstegnet som et svar istedenfor å tenke på ekvivalens. En mulig forklaring på det, er som nevnt tidligere, at barn tidlig får erfaring med addisjon og subtraksjon gjennom daglige interaksjoner hvor de får et klart «svar» (Ginsburg, 1977).

Etter intervjuene var gjennomført, og transkripsjonene skrevet, lagde vi et regneark hvor vi ga elevene poeng ut ifra om de hadde svart riktig svar (1 poeng) på oppgavene eller feil (0 poeng). I tillegg ga vi 0,5 poeng hvis det ikke var svart i det hele tatt, slik at vi kunne skille mellom de som hadde prøvd, men svart feil, fra de som hadde besvart. I regnearket fikk de disse fargekodene: Grønn – riktig, rød – feil, oransje – ikke svart.

I figur 29 ser vi hvordan fordeling av svar elevene oppga i oppgave 1. Hver kolonne viser hvordan elevene svarte på den tilhørende deloppgaven, og hver rad representerer en elev. Fra figur 29 ser vi, som vi har diskutert tidligere, at bortimot alle elevene svarte riktig på alle deloppgavene i oppgave 1. Det er to elever som svarte feil på hver sin deloppgave, men dette var en regnefeil som ikke henger sammen med forståelsen av likhet, og er derfor ikke viktig.

1	1A	1B	1C
2	1	1	1
3	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1
6	1	1	1
7	1	1	1
8	1	1	1
9	0	1	1
10	1	1	1
11	1	1	1
12	1	1	0
13	1	1	1
14	1	1	1

Figur 29 - Svarfordeling oppgave 1

Definisjonen av nivå 1, som gitt av Matthews et al. (2012), sier at elevene beskriver likhetstegnet operasjonelt, og at de bare klarer å løse og forstå likninger på formen $a + b = c$. Elevene vi har snakket med, viser tydelig at de mestrer nivå 1, basert på at tilnærmet alle klarte hele oppgave 1. Derimot er det 8 av 13 som gir en relasjonell forklaring på likhetstegnet når vi spør enten før eller etter oppgaveløsningen. Samtidig som at disse elevene også viser forståelse ved å løse de resterende oppgavene, viser dette til en høyere forståelse enn nivå 1.

Daniel, som vi tidligere skrev at ikke klarte noen av deloppgavene i oppgave 2. Det han gjør i oppgave 2 er å legge sammen. Daniel klarer ingen av "baklengs" oppgavene, og hvis vi kun ser på disse kan vi si at eleven har en forståelse som tilsier nivå 1. Likevel, så klarer eleven oppgave 3a alene og 3b med litt hjelp. Oppgave 3 inneholder også atypiske oppgaver som eleven får til, men som Matthews et al. (2012) forklarer kan begynnende relasjonell forståelse sameksistere med et operasjonelt syn, som sier at eleven fortsatt vil være på et operasjonelt nivå. Derfor mener vi i forhold til rammeverket at Daniel er på nivå 1.

Magnus er en elev som syntes dette var veldig vanskelig, noe eleven ga uttrykk for i interjuvet. Eleven fikk til alle deloppgavene i oppgave 1, og en deloppgave i oppgave 4. Grunnen til at Magnus fikk til en deloppgave i b var fordi eleven sa at alle deloppgavene i 4 var usant. Derfor mener vi at eleven har en rigid operasjonell forståelse.

6.2 Nivå 2 – Fleksibel operasjonell

Definisjonen av nivå 2, som Matthews et al. (2012) beskriver det, sier at elevene blir mer fleksible med hensyn til typene likningsformater de kan løse og akseptere som riktige. Disse atypiske likningene kan være "baklengs" likninger, slik som oppgave 2. De fleste av elevene vi har snakket med viser at de mestrer nivå 2, fordi de klarer hele oppgave 2. Av de 11 elevene som mestret nivå 1, var det 9 som klarte alle deloppgavene i oppgave 2. De to elevene som ikke klarte alle oppgavene hadde feil på deloppgave a, men klarte deloppgave b og c. Begge elevene la sammen på deloppgave a og rettet på seg selv i intervjudelen, slik som vi så Jonas gjøre, vi mener derfor at de også viser forståelse for nivå 2.

Tidligere i oppgaven har sett og diskutert noen av løsningene til elevene som har løst oppgavene og blitt intervjuet. Videre skal vi se på noen elever som har fleksibel operasjonell forståelse, og hvorfor vi mener de har det.

Vår analyse viser at Anders ikke viser forståelse tilsvarende nivå 3 fordi han ikke forklarer likhetstegnet som et relasjonelt symbol. I oppgavene derimot viser Anders forståelse for nivå 3 og 4 på flere av oppgavene. Når vi intervjuet han sa først at likhetstegnet var et svar. Etter oppgavene var ferdige spurte vi en gang til og eleven sa dette:

Intervjuer: *Første så sa du at likhetstegnet skulle være et svar, har du endret mening siden det.*
Anders: *Nei, jeg har ikke endret noe, men jeg har følt at det er noe annet som er i det.*

Anders endrer ikke forklaring på hva likhetstegnet er, men sier at det er en følelse om at det er noe annet i det. Det virker som at han er på vei til å knekke koden, og forstå likhetstegnet som et relasjonelt symbol. Hvis Anders hadde forklart likhetstegnet på et relasjonelt nivå hadde han vært på nivå 3, på grunnlag av at eleven klarte flere av deloppgave i oppgave 3 og 4.

En annen elev som ikke klarte å forklare likhetstegnet på en relasjonell måte var Inge. Inge gjorde det veldig bra på oppgavene, og hadde kun en feil som var på oppgave 4b. Likevel er en av tersklene for å nå nivå 3 å forklare likhetstegnet som et relasjonelt symbol. Når vi spurte Inge hva likhetstegnet betydde første gang fikk vi dette som svar:

Intervjuer: *Da vil jeg gjerne begynne med å spørre, hva betyr likhetstegnet?*
Inge: *Det betyr for eksempel når 3 + 5 for eksempel, da blir det jo lik 8. Noe som forteller hva det er.*
Intervjuer: *Tenker du at det er noe som er svaret, eller at det er likt?*
Inge: *Svar.*

Det første svaret til Inge var uklart for oss så for å være sikker spurte vi en gang til med en operasjonell forklaring og en relasjonell en. Inge valgte deretter den operasjonelle. Vi spurte en gang til mot slutten av intervjuet, men fikk igjen at likhetstegnet er svaret. Hvis Inge hadde klart å forklare likhetstegnet som et relasjonelt symbol kunne vi ha argumentert for at han er på det høyeste nivået, nivå 4. Grunnet at eleven kun hadde en feil i oppgavesettet.

I forhold til rammeverket mener vi at både Anders og Inge viser i det oppgavebaserte intervjuet en forståelse tilsvarende nivå 2, det fleksible operasjonelle nivået.

6.3 Nivå 3 – Grunnleggende relasjonell

Det første relasjonelle nivået av likhetstegnet man kan tilegne seg, er ifølge Matthews et al. (2012), det grunnleggende relasjonelle nivået. På dette nivået må elevene godta en relasjonell definisjon, eller forklaring, av likhetstegnet. Elevene må også begynne å forstå likninger med operasjoner på begge sider av likhetstegnet, for eksempel $a + b = c + d$. For å nå opp til nivå 3 må elevene gi sin egen relasjonelle definisjon av likhetstegnet, slik vi har sett noen av elevene vi intervjuet gjøre (se kapittel 5.3). Hvis forklaringen er operasjonell kan de ifølge definisjonen ikke være på nivå 3, slik som Anders og Inge i forrige delkapittel. Videre diskuterer vi noen elever som viser nivå 3 forståelse, men mangler litt for å nå opp til nivå 4, og diskuterer hvorfor vi mener dette.

Fredrik er en elev som blir diskutert om i kapittel 5.3.3 og 5.4.2. Som sagt har han en veldig presis forklaring på likhetstegnet som forklarer at det er et relasjonelt symbol og ikke et operasjonelt. *"Det er likt på begge sider av tegnet, og ikke at du skal finne svaret."* Å beskrive likhetstegnet som et relasjonelt symbol er et kriterium for å kunne være på de relasjonelle nivåene, nivå 3 og 4.

Tidligere i vår diskusjon om oppgave 3 (se kapittel 4.3) ble det diskutert at Fredrik kun har feil svar på deloppgave b. Selv om det ble feil svar anser vi forståelsen av oppgaven som riktig, fordi han gjør klart hvor mye det skal være på hver side av likhetstegnet, selv med regnefeilen på venstre side. Resten av oppgavene gjør han riktig. Grunnen til at han ikke når opp til nivå 4 er som diskutert i kapittel 5.4 at Fredrik regner ut alle deloppgavene på oppgave 4. Dette viser ikke en komparativ relasjonell forståelse og på grunnlag av dette er han på nivå 3, med en grunnleggende relasjonell forståelse.

Lars er en elev vi ikke har diskutert tidligere fordi han ikke sier mye i intervjuet. Eleven har en vag forklarelse av likhetstegnet: *"På en måte som at vi, ehm. 2+2, ehm er jo 4. Så hvis man skal ha likhetstegn da så er det 4 på grunn av at 2+2 er like mye som 4, eller det samme som 4."*. Grunnen til at denne er vag er fordi Lars sier at likhetstegnet betyr er like mye som, som er en muntlig måte å definere likhetstegnet på, og som i seg selv ikke er relasjonell. Det som gjør at han likevel er innenfor nivå 3 er at han sier: *"eller det samme som 4"*. Dette er en mer relasjonell forklaring.

Lars har gjort oppgave 1, 2, 4 og halve 3 riktig. I oppgave 3b har han gjort et forsøk på å løse oppgaven, men gitt opp tidlig. Oppgave 3d har han hoppet over uten et forsøk. Dette kan ha med at oppgave 3b og 3d er like i format, $a + b – c = d + e$. At han ikke får til disse oppgavene sier at han ikke har full forståelse for nivå 3, men vi mener likevel at det viser nok forståelse i de andre deloppgavene til å plasseres i nivå 3. Grunnen til at Lars ikke er på nivå 4 er som tidligere nevnt på grunn av oppgave 3, men også at han ikke sier noe om hvordan oppgave 4 er løst. Vi spør Lars, men får bare svar som: husker ikke eller vet ikke. Derfor vet vi ikke om oppgave 4 har blitt regnet, eller om oppgaven er løst slik som den er ment å løses.

Gard sin forståelse av likhetstegnet er relasjonell. Når spurt om definisjon av likhetstegnet sier han: *"At, hvis det står i et matte-spørsmål, at det skal være likt på begge sider."* Det kommer tydelig fram at likhetstegnet handler om likhet på begge sider av tegnet, og betyr at det handler om ekvivalens. Dette er en beskrivelse som er godt innenfor det grunnleggende relasjonelle nivået.

I oppgavene gjør Gard oppgave 1, 2 og 3 riktig, men forstår ikke oppgave 4. Han begynner oppgaven med å spørre hvordan oppgaven skal løses, og sliter med å fullføre den. Gard blir usikker og ringer rundt flere alternativer per deloppgave og visker ut flere ganger. Oppgave 4 ender med at Gard får til oppgave a, men de resterende deloppgavene blir feil. Når vi spør hvorfor han valgte svarene sine får vi bare vite at han ikke vet hvorfor valgene ble som de ble. Dette er grunnen til at vi tolker at eleven har en forståelse tilsvarende nivå 3, det grunnleggende relasjonelle nivået.

6.4 Nivå 4 – Komparativ relasjonell

Det høyeste nivået av forståelse man kan ha, ifølge Matthews et al. (2012), er den komparative relasjonelle forståelsen av likhetstegnet. Elever som er på dette nivået vil ha en såpass god forståelse for ekvivalens, at de ikke alltid må ty til å regne ut verdien av hver side av likhetstegnet for å sjekke ekvivalens. Strategier hvor man ikke behøver å regne ut, men hvor man heller ser på forholdet mellom sidene, kalles for kompensatoriske strategier. I tillegg til å se på forholdet mellom tallene, kan man også se på verdien av de ulike tallene i likningen, og konkludere derfra om det er ekvivalent eller ikke.

Elever som har forståelse som tilsier nivå 4 skal konsekvent bruke en relasjonell forståelse for likhetstegnet, i tillegg til å bruke strategier som kompensatoriske og gjenkjenne ekvivalente transformasjoner gjort på hver side av likhetstegnet. Samtidig som elever kan være på dette nivået av forståelse, er det viktig å huske på det faktum at elevenes forståelse kan variere mellom nivåene. Derfor er det mulig å ha en høy relasjonell forståelse, men samtidig i noen situasjoner ty til ren operasjonell tankegang. Denne operasjonelle tankegangen kan eksempelvis komme frem og bli brukt om ikke oppgaven krever en mer avansert forståelse.

Vi har gjennom oppgaven diskutert løsningene og tankegangen til flere elever som vi intervjuet. Videre i dette delkapittelet skal vi ta for oss de elevene vi mener har en komparativ relasjonell forståelse, og hvorfor vi mener det.

Egil starter med å ikke oppgi en forklaring på likhetstegnet, men kommer etter hvert opp med forklaringen at det handler om likhet. Han oppgir feil svar på deloppgave 4a, men retter selv opp i det underveis i intervjuet. Som vi har diskutert tidligere viser Egil forståelse for kompensatoriske strategier når han har løst deloppgave 4c og 4d. Vi fikk ikke snakket med Egil om deloppgave 4b, men måten han har tenkt da han løste de øvrige deloppgavene sikter til en komparativ relasjonell forståelse. Som vi vet, må man i tillegg til å bruke disse strategiene også forstå likhetstegnet konsekvent relasjonelt. Basert på hvordan Egil svarte om tankegangen sin rundt oppgavene i oppgave 3, i tillegg til at han har svart riktig, konkluderer vi med at Egil har en komparativ relasjonell forståelse av likhetstegnet.

Jonas starter med å gi oss en relasjonell forklaring av likhetstegnet, men med et eksempel som er på en operasjonell form. Det at han sa « *…like mye på hver side*» signaliserer at han har en relasjonell forståelse, men i denne situasjonen kanskje ikke kom på noe bedre måte å forklare det på. Jonas var en av fire elever som oppga riktig svar på alle fire deloppgavene under oppgave 4. I tillegg til alle riktige svar, forklarer han sin fremgangsmåte på både deloppgave 4c og 4d med en tanke som viser til en kompensatorisk strategi. Dette koblet sammen med at Jonas forklarer seg godt på den deloppgaven som ikke var korrekt i oppgave 3, viser til en komparativ relasjonell likhetstegnforståelse. Han viser at selv om det var en feil i oppgave 3, forklarer han feilen sin og retter opp, og derfor opprettholder han en konsekvent relasjonell forståelse.

Bernt starter intervjuet med å gi oss en forklaring som tilsier en relasjonell forståelse, på tross av et litt rart eksempel med 51 %, så er det snakk om likt på begge sider av likhetstegnet. Han har løst både oppgave 2 og 3 helt riktig, men på oppgave 3 er det noen feil svar. Som vi har diskutert tidligere i kapittel 5.3.1, viser Bernt forståelse for løsningen av oppgavene selv og oppgir svarene muntlig. I oppgave 4 svarer han riktig på alle deloppgavene. I transkripsjonen sier Bernt at han har regnet ut når han løste oppgave 4, men måten deloppgavene blir forklart på viser til en annen forståelse enn bare ren utregning. Bernts forklaring viser til at han har brukt en kompensatorisk strategi, hvor han så på differansen mellom enkelte tall på hver side av likhetstegnet. Denne måten å løse oppgave 4 på, sett sammen med den konsekvente relasjonelle forståelsen i den øvrige oppgaveløsningen, indikerer at han har forståelse på nivå 4. På bakgrunn av dette kan vi konkludere med at Bernt har en komparativ relasjonell forståelse.

Konstantin som vi ikke har diskutert tidligere, starter med å fortelle oss at likhetstegnet betyr at det er likt på samme side, med samme verdi. Forklaringen er en veldig presis forklaring av ekvivalens, da han nevner både likhet på hver side, og at det skal være samme verdi. Konstantin svarer riktig på bortimot alle deloppgaver i oppgave 1, 2, og 3, utenom oppgave 2a. I transkripsjonen når han blir spurt om 2a forklarer han først at de to første tallene skal legges sammen, men skjønner hva som er feil når vi spør om likhetstegnet. Denne feilen regner vi som en slurvefeil, da han mest sannsynlig gikk for fort frem og overså plasseringen til likhetstegnet. Videre på oppgave 4, har eleven riktig på alle fire deloppgavene utenom deloppgave b. Konstantin har ikke gitt oss noen forklaring på deloppgave 4b. Derimot oppga han en forklaring som tilsier en kompensatorisk strategi for deloppgave 4c, hvor han så at de bakerste tallene på høyre siden er null, og venstre siden ikke hadde null som enere. Deloppgave 4d, derimot, forklarer Konstantin at han ser begge sider har like enere, og at summen av tierne på begge sider blir 60. Han har ikke regnet ut direkte hva summen blir, men det er på grensen til hva vi kan kalle for kompensatorisk strategi. Alt i alt mener vi at Konstantin har akkurat nådd opp til nivå 4, men han er akkurat innenfor. Han viser god forståelse for nivåene opp til nivå 4, noe som viser til en konsekvent relasjonell forståelse. Samtidig som han har kompensatoriske strategier er det litt mer tvilsomt med forståelsen av 4d.

Helge er også en elev vi ikke har diskutert tidligere. Han forklarer likhetstegnet på en relasjonell måte, ved å gi eksempelet: $1 + 3 = 2 + 2$, og å si at det skal være likt. Av oppgaver, klarer Helge å gi riktig svar på alle oppgaver utenom deloppgave 3b. Her ser vi av oppgavearket at han glemte et steg i utregningen sin, som resulterte i et feilsvar. Videre kan vi se at han har klart alt på oppgave 4. Men, på grunn av manglende utspørring underveis i intervjuet har vi ikke noe informasjon om hva han har tenkt underveis når han løste oppgave 4. Det eneste vi hørte var at han begynte å snakke om de ulike tallene på hver side av likhetstegnet i deloppgave 4b, men kom ikke noe lengre med oppgaven enn det. Av disse grunnene mener vi at Helge nærmer seg en forståelse som vil tilsi nivå 4, men på grunn av manglende informasjon og at han tilsynelatende ikke har helt forståelse for kompensatoriske strategier, kan vi ikke si at Helge når opp til nivå 4.

Carl forklarer likhetstegnet for oss først som at det skal være likt, men bruker et regnestykke som er på operasjonell form. Vi spør om det skal være likt på begge sider, og han svarer ja. Denne forklaringen ser vi på som relasjonell, da Carl selv snakker først om at det skal være likt, på tross av eksempelet. Han løser alle oppgavene riktig, med unntak av deloppgave 4b. Gjennom oppgaveløsningen viser han at til en konsekvent relasjonell tankegang, og relasjonelle måter å løse oppgavene på. Der Carl derimot ikke leverer på et komparativt relasjonelt nivå, er når det kommer til oppgave 4. Selv om han har løst nesten alle oppgavene riktig forteller han oss i intervjuet at han har regnet ut oppgave 4c, og gir oss verdien av de to sidene. Hadde Carl gitt oss noe uttrykk for en kompensatorisk strategi i intervjuet om oppgave 4, kunne vi vurdert om Carl var på nivå 4. Beklageligvis mangler vi en forklaring rundt de andre deloppgavene i oppgave 4, og kan derfor ikke konkludere med noe annet enn at Carl er på et høyt nivå 3.

6.5 Hva er generaliserbart fra det vi har sett?

I dette kapittelet vil vi ta for oss hva utvalget vi har, kan gi oss av generell informasjon om hvilken forståelse norske elever har av likhetstegnet.

Det vi har hatt mulighet til å observere i dette studiet er basert på det utvalget vi har hatt tilgang til. Utfallet av studiet skal være reliabelt og valid, i den grad det er mulig å få det til med det utvalget vi har hatt. Selv om vi har vært på skoler i Oslo, kan det være mulig å generalisere noe av resultatene til resten av skoler og elever i Norge. Når det er sagt, vil det likevel være lokale variasjoner når det kommer til prosentvis inndeling av hvilket nivå elevene faller inn under. Samtidig ville det vært sannsynlig hvis noen andre gjennomførte samme studiet, at de kunne fått et annet utfall enn vi gjorde. Hvis flere hadde gjennomført samme prosjekt, kan det være hensiktsmessig å gjennomføre en skårsreliabilitet test. En slik test vil etterprøve kvalitative studier som dette, og bedømme validiteten av studiene (Befring, 2015). Som nevnt i kapittel 3.2 har vi nådd målet for informantmetningen. Det vil derfor være mindre sannsynlig at lokale variasjoner oppstår.

Først og fremst vil det være hensiktsmessig å legge frem en oversikt over hvor mange elever som vi mener hører til hvert nivå. På nivå 1 fant vi ut av at det var 2 elever, nivå 2 var det også 2 elever, nivå 3 var det 5 elever, og til slutt var det 4 elever på nivå 4. Det som var interessant med disse dataene var hvor liten andel av elevene som var på de to første nivåene. Litteraturen (Baroody & Ginsburg, 1983; Kieran, 1981; McNeil et al., 2006) poengtere at barneskoleelever for det aller meste har en operasjonell forståelse av likhetstegnet. I vårt utvalg var ikke dette like tydelig som i litteraturen. Over $\frac{2}{3}$ av alle elevene vi hadde til intervju viste seg å ha en relasjonell forståelse, da disse elevene var på nivå 3 eller 4.

Samtidig var det noen av elevene på nivå 3 som nærmer seg veldig nivå 4, eller som egentlig har en nivå 4 forståelse bare at den ikke kom frem for oss. En tanke vi hadde underveis da vi skrev transkripsjonene, og da vi analyserte, var hvordan talevansker og elever som ikke har norsk som morsmål kanskje ikke har like lett for å forklare seg. Det å gi en definisjon av likhetstegnet når det ikke er så lett å uttrykke seg til vanlig, er ikke enkelt. Da også spesielt i en situasjon som mest sannsynlig er uvant for elevene. Vanskeligheter med å uttrykke seg sammenhengende og meningsfullt kan dermed ha vært et hinder for enkelte elever. På bakgrunn av det kan det hende at noen av elevene vi snakket med kunne ha vist en bedre forståelse enn det som kom frem i intervjuene.

Anders og Inge klarer ikke å gi en relasjonell forklaring på likhetstegnet, men de viser forståelse for oppgavene som kommer etter nivå 2. Dette kommer av at Matthews et al. (2012) rammeverk er strengt på at elevene må ha en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Vi kunne selvsagt gitt rom for at hvis elevene hadde høyere forståelse, slik som disse elevene har, og plassert dem på et høyere nivå. Dette hadde virket mot sin hensikt da vi følger rammeverket.

7 Refleksjoner og videre forskning

Underveis i arbeidet med denne masteroppgaven har vi kontinuerlig reflektert over både hvordan vi arbeidet underveis, hva vi kunne gjort bedre, og hva som kanskje burde vært annerledes. I dette delkapittelet vil vi trekke frem disse refleksjonene vi har gjort oss underveis.

7.1 Refleksjoner over datainnsamling og analyse

Da vi holdt på å analysere hvilket nivå vi mente elevene var på, fant vi ut av at intervjuene vi hadde gjennomført med flere av elevene var litt mangelfulle. Dette merket vi spesielt da vi undersøkte nivå 4. Det var et par elever vi tror kunne vist en bedre forståelse hvis vi hadde stilt flere spørsmål om tankegangen deres til flere deloppgaver i oppgave 4. Ikke bare med de elevene burde vi vært nøyere, men på generell basis rundt oppgave 4 burde vi ha spurt elevene mer utfyllende. Denne tanken kan vi også ta med oss rundt oppgave 3, i tillegg til at vi kunne ha spurt alle elevene om deres definisjon av likhetstegnet både før og etter oppgaveløsning.

Oppgave 2 merket vi at kunne ha blitt satt opp bedre. Deloppgave 2a har samme struktur som oppgave 1, bare at addisjon symbolet og likhetstegnet har byttet plass. Dette merket vi at flere elever ikke la merke til, så de bare la sammen de to første tallene. På grunn av dette fikk flere elever feil på denne deloppgaven, selv om de mest sannsynlig hadde forståelse for den. Flere av elevene la merke til at oppgaven var annerledes i deloppgave 2b, fordi 2b har trekanten i *b* leddet. Vi tenker derfor at deloppgave 2a burde ha byttet plass med deloppgave 2b, for å gjøre det tydeligere at oppgaven ikke er like som oppgave 1.

7.2 Refleksjoner rundt rammeverket

Noe vi mener kunne vært fordelaktig for flere av elevene var om vi hadde lest alle deloppgavene for elevene. Eksempelvis: $39 = \Delta + 28$ kunne vil lest for eleven som: trettini, er lik, trekant pluss tjueåtte. Bernt sa under intervjuet at «*fordi jeg skjønte ikke hvorfor 12 + 4 skulle være 6.*» fordi han ikke hadde lest ferdig regnestykket. Hadde vi lest alle deloppgavene mener vi at dette kanskje ikke hadde blitt et like stort problem.

En oppgave som vi i ettertid ønsker at vi hadde tatt med, er en hvor elevene blir presentert med flere definisjoner av likhetstegnet og skal velge hvilken de mener er den beste. I rammeverket vi har brukt blir nivå 3 definert som at elevene skal godkjenne en relasjonell forklaring av likhetstegnet. Dette var noe vi egentlig ikke fikk testet hos elevene, men valgte å bruke deres definisjon som utgangspunkt.

7.3 Videre forskning

Vi merket en mangel på forskning om hvordan norske elever forstår likhetstegnet. Videre forskning på området, kan fokusere på effekten av å innføre instruksjon som fremmer en relasjonell forståelse tidlig. Bakgrunnen til en slik studie kan være for å se om introduksjonen av oppgaver som nødvendiggjør relasjonell tenking tidlig har en effekt på norske elever.

Det kunne vært interessant å se om det er noen signifikante forskjeller i alderstrinn. Dette kunne også gitt en pekepinn på når elever begynner å utvikle seg fra den operasjonelle til den relasjonelle forståelsen.

Vi tenkte også på forskning der man tidlig begynner å lære elever om forståelse på nivå 2, 3 og 4. I istedenfor å starte innlæringen av addisjon og subtraksjon med kun oppgaver på operasjon-er lik-svar oppsettet, gir man elevene oppgaver på mange ulike strukturer. Som eksempelvis: $8 = ? - 4$, og $3 + 3 = 4 + ?$. På denne måten hopper man over det rigide operasjonelle nivået, og gjør at elevene får en bredere forståelse av ekvivalens fra starten av. Forskningen kan følge en elevgruppe fra 1. klasse frem til muligens VG3, for å få frem effekten av innlæringen over lengre tid.

8 Avslutning

Gjennom arbeidet med denne studien har vi lært mye om likhetstegnet, ekvivalens, og spesielt om elevers forståelse av likhetstegnet. Viktigheten av likhetsforståelse på barneskolen var ikke noe vi tenkte på noe særlig før oppgaven, men nå ser vi forspranget elever med høyere forståelse av likhetstegnet, og ekvivalens, har. Som nevnt tidligere har elever med god likhetsforståelse lettere for å forstå avanserte likninger og algebra på ungdomsskolen og videregående.

Etter at TIMSS åpnet øynene til politikerne om norske elever sine kunnskaper om algebra, ble det satt et større fokus på å få elevene våre til å mestre nettopp algebra. Som vi, og øvrig forskning, har lagt frem er det å innarbeide relasjonelle strategier i elevenes hverdag i møtet med matematikk en god start. Algebra og en relasjonell forståelse av likhetstegnet henger tett sammen, og av den grunn burde det settes enda større fokus på innlæring av atypiske oppgavestrukturer av regning tidlig i skolen.

Denne masteroppgaven hadde som formål å belyse hvilken forståelse elever på 5. og 6. trinn hadde av likhetstegnet. Måten vi gikk ut for å gjøre det på, var å gjennomføre oppgavebaserte individuelle intervjuer med elever på 3 ulike skoler i Oslo. Gjennom disse intervjuene fikk vi vite hvordan elever tenker om, og løser, oppgaver som er designet for å teste fire nivåer av økende likhetstegnsforståelse. Analysen vi gjorde av elevenes tanker og løsninger viste at en større andel av elevene vi intervjuet hadde en relasjonell forståelse. Dette står litt imot det den tidligere forskningen gjort på feltet sier om barn i samme alder, og generelt om barneskole elever. Hvis funnene vi har observert er de samme for resten av landet, vil dette love godt for en positiv trend rundt norske elever sin fremtidige forståelse av algebra.

Vi kommer til å ta med oss det vi har lært i denne studien videre som nyutdannede lærere, og hjelpe elever til å utvikle en tidlig relasjonell forståelse av likhetstegnet.

9 Referanseliste

Baroody, A. J. & Ginsburg, H. P. (1983). The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign. *The Elementary school journal*, *84*(2), 199-212.

Barsalou, L. W. (1982). Context-independent and context-dependent information in concepts. *Memory & Cognition*, *10*(1), 82-93.

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Cappelen Damm akademisk.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. & Stylianou, D. (2017). Implementing a Framework for Early Algebra. I (s. 27-49) (ICME-13 Monographs). Cham: Springer International Publishing.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt forl.

Collis, K. F. (1974). *Cognitive development & mathematics learning*. Shell Mathematics Unit Centre for Science Education, Chelsea College, University of London.

Dalland, O. (2020). *Metode og oppgaveskriving* (7. utgave. utg.). Gyldendal.

Denmark, T. B., E.; Voran, J. (1976). *Final Report: A Teaching Experiment on Equality. PMDC Technical Report No. 6.* Florida state university.

Gattegno, C. (1974). *The Common Sense of Teaching Mathematics*. Educational Solutions.

Ginsburg, H. (1977). *Children's arithmetic: The learning process*. D. Van Nostrand.

Grønmo, L. S. & Olsen, R. (2005). Matematikkprestasjoner i TIMSS og PISA. *Om å greie seg i utdanningssystemet i nord og sør. Innføring i internasjonal pedagogikk. Bergen: Fagbokforlaget*.

Guest, G., Bunce, A. & Johnson, L. (2006). How Many Interviews Are Enough?: An Experiment with Data Saturation and Variability. *Field methods*, *18*(1), 59-82.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational studies in mathematics*, *12*(3), 317-326.

Kieran, C. (2017). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- To 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*. Cham: Springer International Publishing AG.

Knuth, J. E., Ana, C. S., Nicole, M. M. & Martha, W. A. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. , *37*(4), 297-312.

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg. utg.). Gyldendal akademisk.

Matematikksenteret. (2022). *Matematikksenteret*.

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., Eldoon, K. M. & Taylor, R. (2012). Measure for Measure: What Combining Diverse Measures Reveals about Children's Understanding of the Equal Sign as an Indicator of Mathematical Equality.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S. & Krill, D. E. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition and instruction*, *24*(3), 367-385.

Pepin, B., Bergem, O. K. & Klette, K. (2014). Rethinking algebra teaching in the light of 'orchestration of signs ' - exploring the "equal sign" in a Norwegian mathematics classroom. I (s. 39-57).

Prediger, S. (2009). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of mathematics teacher education*, *13*(1), 73-93.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S. & McEldoon, K. L. (2011). Assessing Knowledge of Mathematical Equivalence: A Construct-Modeling Approach. *Journal of educational psychology*, *103*(1), 85-104.

Sjøberg, S. (2014). PISA-syndromet – Hvordan norsk skolepolitikk blir styrt av OECD. 30-43.

10 Vedlegg

Oppgave 1

Løs oppgaven slik at du bytter ut de geometriske figurene med riktig tall.

b. $15 + 27 = \Delta$

c. $47 + 14 = \Delta$

d. $153 + 137 = \Delta$

Oppgave 2
Løs oppgaven slik at du bytter ut de geometriske figurene med riktig tall.

a. $27 = 12 + \Delta$

b. $39 = \Delta + 28$

c. $105 = 73 + \Delta$

Oppgave 3

Løs oppgaven slik at du bytter ut de geometriske figurene med riktig tall.

a. $12 + 4 = 6 + \Delta$

b. $14 + 9 - 12 = \Delta + 5$

c. $9 + \Delta = \square + 6$

d. $20 + 2 - \Delta = 10 + 5$

Oppgave 4
Se på oppgaven og bestem om det er sant eller usant. Oppgavene skal ikke regnes ut.
Sett ring rundt sant eller usant

b. 2 + 4 = 1 + 5
sant eller usant

c. 27 + 46 = 28 + 45
sant eller usant

d. 49 + 12 = 50 + 20
sant eller usant

e. 22 + 43 = 32 + 33
sant eller usant

Meldeskjema / Likhetstegnet i barneskolen / Vurdering

Vurdering

Referansenummer
567560

Prosjekttittel
Likhetstegnet i barneskolen

Behandlingsansvarlig institusjon
OsloMet – storbyuniversitetet / Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier / Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Prosjektperiode
17.01.2022 - 31.10.2022

Meldeskjema

Dato	Type
25.01.2022	Standard

Kommentar
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 25.01.2022 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og Personverntjenesten. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNIngeR OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger frem til 31.10.2022.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra de foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være de foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

Vi vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

Vi vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

Vi legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Nettskjema er databehandler i prosjektet. Vi legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:

https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra ossfør endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å

avklare om behandlingen av

personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos oss: Sturla Herfindal Lykke

til med prosjektet!

OSLOMET

Medforfattererklæring

Om to eller tre studenter gjennomfører og/eller skriver masteroppgaven sammen, skal det legges ved et medforfatterklæring, jf. emneplan MGMO5900:

"For studenter som velger å gjennomføre masteroppgaven som gruppearbeid, skal det gå tydelig fram i egen redegjørelse hvordan arbeidet er fordelt, og hvordan hver enkelt oppfyller kravet om selvstendig vitenskapelig arbeid. Her benyttes en medforfattererklæring som begge eller alle tre parter signerer."

Masteroppgavens tittel:

Norske elever på 5. og 6. trinn sin forståelse av likhetstegnet

Redegjørelse på hvordan arbeidet er fordelt, og hvordan den enkelte oppfyller kravet om selvstendig vitenskapelig arbeid:

Vi har begge vært med å formulere og utarbeide spørsmål som skal stilles og oppgavesett før vi dro ut og intervjuet elever på skolene deres. Vi byttet på å være intervjuer og observatør i intervju med elevene. I transkripsjonene har vi delt så begge har transkribert halvparten av elevene, deretter leste vi hverandres transaksjoner. Sammen har vi diskutert og blitt enige om elevsvar og diskutert analysen, drøfting og resultater. Vi har begge blitt enige om arbeidsforhold i oppgaven og har arbeidet med forskjellige deler av oppgaven, deretter byttet så begge har fått bidratt på alle delene. Vi antar at vi har skrevet tilnærmet like mye i oppgaven.

Undertegnede bekrefter å ha bidratt til følgende deler av masteroppgavearbeidet:

Prosjektskisse, idé og tema for masteroppgaven	Ja/Nei
Praktisk gjennomføring av studien for eksempel innhenting av data	Ja/nei
Analyse, drøfting og tolkning av resultatene	Ja/Nei

Undertegnede har lest og godkjent den innsendte versjonen av masteroppgaven

Oslomet	15/05-22	Marcus J. Hansse
Oslomet	15/05-22	[illegible]
....	....	....
(sted)	**(dato)**	**(signatur)**

OSLOMET

Avtale om samskriving

For studenter som ønsker å skrive masteroppgave i felleskap, gjelder følgende:

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning (GFU) ved OsloMet legger de såkalte Vancouver-kriteriene til grunn for hva som kan regnes som felles forfatterskap innenfor master i Grunnskolelærerutdanning (MGLU). GFUs kriterier for samarbeid om masteroppgave er:

1. Alle parter må levere et substansielt bidrag til konsept eller idé og innsamling av data og analyse og fortolkning av data.
2. Det kreves at alle deltagere har deltatt i utformingen av masteroppgaven, og at alle deltagere har levert en substansiell del av tekstmaterialet.
3. Det settes krav til at alle forfattere skal ha godkjent den versjonen som sendes inn for publisering.

Alle tre kriteriene må være oppfylt. Alle forfattere er gjensidig ansvarlig for at masteroppgaven følger gjeldende regler for sitering og bruk av andres materiale.

Veiledningen skal i hovedsak være felles om to eller tre studenter gjennomfører og/eller skriver masteroppgaven sammen.

Studentene forplikter seg til å bruke uenighet produktivt. Det forventes at studentene skal ha som målsetning om å komme fram til en felles forståelse om hva som tjener arbeidet med masteroppgaven best. Dersom det oppstår konflikt i arbeidet, forplikter studentene seg til å ta dette opp med veileder for så raskt som mulig for å komme fram til en løsning slik at framdriften opprettholdes.

Dersom en student blir syk i løpet av arbeidet med masteroppgaven, trenger permisjon eller ikke følger planlagt progresjon, kan den/de andre studentene fortsette og ferdigstille arbeidet uten den som trekker seg. Dette må skje etter avtale med veileder. Studenten som ikke følger planlagt progresjon, vil kunne bruke allerede innsamlet data som grunnlag for sin masteroppgave, men da med en annen tematisk vinkling.

Om to eller tre studenter gjennomfører og/eller skriver masteroppgaven sammen, skal det legges ved et medforfatterklæring, jf. emneplan MGMO5900:

"For studenter som velger å gjennomføre masteroppgaven som gruppearbeid, skal det gå tydelig fram i egen redegjørelse hvordan arbeidet er fordelt, og hvordan hver enkelt oppfyller kravet om selvstendig vitenskapelig arbeid. Her benyttes en medforfattererklæring som begge eller alle tre parter signerer."

Studentene bekrefter herved å ha gjort seg kjent med de retningslinjer som gjelder for samarbeid om masteroppgaver, og forplikter seg med dette til å følge opp sin del av plikter og retningslinjer ved skriving av masteroppgaven.

Dato: 13/01 sign.: Niklas Møn Dato:_____ sign.:__________
Dato: 13/1 sign.: Marcus T. Hansen