MASTEROPPGAVE
M5GLU
Mai 2022

Realistisk kontekst i læring og undervisning av algebra
Realistic context in learning and teaching algebra

Vitenskapelig artikkel

30 sp oppgave

Kristine Wiik Berg og Gaute Haugen

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier
Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Forord

Masteroppgaven markerer slutten for vår femårige lærerutdannelse. Vi kan begge se tilbake på en super studietid, selv om vi nå gleder oss til arbeidslivet. Arbeidet med masterstudien har vært lærerikt og spennende, men også utrolig krevende. Vi er begge glade for at vi ikke stod alene i dette, og for at vi fortsatt er venner!

Vi vil bruke anledningen til å takke flere. Først og fremst en stor takk til vår «kontlokvie» gruppe gjennom disse fem årene, og gjengen som har «bodd» sammen med oss på mastersalen. Vår veileder, Lars Reinholdtsen, fortjener også en takk, samt familie og venner som har gitt oss tilbakemeldinger på teksten. Videre er vi takknemlig for innsynet i Margrethe Naalsund sin doktorgradsavhandling om algebravansker. Og ikke minst en stor takk til elevene og skolen som lot oss gjennomføre vår forskning hos dem.

Kristine Wiik Berg og Gaute Haugen
Mai 2022
Oslo

Sammendrag

Denne oppgaven har undersøkt hvordan elever arbeider med algebraoppgaver basert på en realistisk kontekst. Altså en situasjon elevene kan se for seg. Resultater fra TIMSS 2015 viser at norske elever på 9. trinn presterer middels godt i matematikk med særlig svake prestasjoner i emnet algebra (Bergem, 2016, s. 22). Hensikten med prosjektet var å se om en alternativ tilnærming til algebraundervisning kunne bidra til bredere forståelse i emnet. Problemstillingen vi forsøker å besvare er:

På hvilken måte kan en realistisk kontekst i algebraundervisning påvirke elevenes forståelse i emnet?

Studiet har en kvalitativ tilnærming, med utgangspunkt i en aksjonsforskning over fire undervisningsøkter i en niendeklasse. Innledningsvis gjennomførte elevene en kartleggingstest for å innhente informasjon om elevenes kunnskap innen algebra. I undervisningssituasjonen har vi hentet data gjennom observasjonsnotater, lærerlogg og elevarbeid. Datainnsamlingen ble fullført med en posttest for å undersøke om det var forbedring i elevenes formelle algebraiske forståelse. Med inspirasjon fra tematisk analyse har vi kategorisert resultater fra undervisningsopplegget ved følgende temaer; 1) tolkning av variabler, 2) konstruksjon av algebraiske uttrykk og løsning av lineære likninger, og 3) tolkning av likhetstegnet og ekvivalens. Funnene i denne oppgaven tyder på at en realistisk kontekst i algebraundervisningen gjør matematikken mer tilgjengelig for elevene i arbeidet. Det bidrar til å gi mening til den algebraiske notasjonen og hjelper elevene med å bytte mellom algebraisk og naturlig språk. Resultatet fra pre- og posttest viser en generell forbedring, men det kan ikke vises til en kausal sammenheng mellom undervisningsmetoden og elevenes formelle algebraiske forståelse. Siden utvalget og tidsaspektet er begrenset i vår undersøkelse er det naturlig å oppfordre til videre forskning. Både med tanke på et større utvalg, rette fokus på utvikling av oppgaver med realistiske kontekster og lærerens rolle i en slik undervisningsmetode.

Abstract

This paper has studied how students work with algebraic tasks based on a realistic context. Results from TIMSS 2015 show that Norwegian students in the ninth grade perform average in mathematics, but below average in algebra (Bergem, 2016, s. 22). The purpose of this project is to investigate how an alternative approach to algebra education can improve students' formal understanding in the subject. The research question for this paper is:

How can a realistic context in algebra education influence students' understanding in the subject?

The study has a qualitative approach, based on action research over four lessons with a class in the ninth grade. Before the intervention the students were tested to evaluate their knowledge in algebra. Data was also gathered through observation and teacher notes. At the end of the intervention the students repeated the test to evaluate the effects on their formal algebraic knowledge. Inspired by thematic analysis, we created three categories used to evaluate the students work during classes: 1) interpretation of variables, 2) construction of algebraic expressions and solving of linear equations, and 3) interpretation of the equal sign and equivalence. The findings in this thesis suggest that a realistic context in algebra education helps make the mathematics more available to students. The context also helps students give meaning to the algebraic notation and helps the students in switching between algebraic and natural language. Comparing the results from the tests show a general improvement in the population, but we cannot conclude with any direct impact on their formal algebraic understanding from the intervention, due to the limitations of this study. We would suggest further investigation on the use of realistic contexts in algebra education, both with a larger population and control group, research to develope more suitable tasks, or focusing on the teacher role in these educational situations.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for prosjektet

Algebra er et sentralt tema i skolens matematikkundervisning. Det finnes mange definisjoner på algebra i litteraturen. Blant annet har matematikkpedagogen Kieran (1992) beskrevet algebra som den delen av matematikken som omhandler å symbolisere generelle numeriske forhold og matematiske strukturer, og arbeidet med disse strukturene. For matematikken på barne- og ungdomsskolen innebærer dette å uttrykke generaliseringer, etablere forhold mellom mengder, løse problemer med ukjente verdier, utforske egenskaper og kalkulere/regne ut (Arcavi, Drijvers & Stacey, 2017). Et slikt abstrakt og omfattende tema bidrar følgelig til å skape mange utfordringer for elever i skolen. Dette er mye av grunnen for vårt valg av tema. Etter fem år på lærerstudiet opplevde vi at algebra fortsatt var et utfordrende emne å forklare og å lære bort. Dessuten observerte vi i jobb og praksis at mange elever også opplevde området som krevende. Vi ønsket derfor å finne en måte å gjøre emnet mer tilgjengelig og forståelig for elever. Videre ønsket vi selv å kunne få innsyn i hvordan elever forstår og oppfatter algebra, samt tips til hvordan vi kan gjennomføre slik undervisning i fremtiden.

Skoleforskning peker på matematikkfaget som en «gatekeeper» for videre utdanning, og at det bidrar til å skape et sosialt skille i samfunnet (Gutierrez, 2013). Internasjonal forskningslitteratur påpeker at algebra spesielt kan være et hinder for elever i skolen (Arcavi et al., 2017; Drijvers, 2003; Jupri & Drijvers, 2016; Wijers, 2001). Dette gjør seg også gjeldene for norske elever (Naalsund, 2012). Resultater fra den internasjonale studien TIMSS i 2015 viser at de norske elevene presterer på et høyt europeisk nivå i matematikk på barnetrinnet, mens på ungdomstrinnet er de norske elevenes prestasjoner falt til et middels godt nivå. Emnet de norske elevene skårer dårligst på er algebra (Bergem, 2016). Dette underbygges også av PISA undersøkelsen fra 2012, som viser at norske elever ligger på gjennomsnittet matematisk, men skårer lavt på å formulere matematiske situasjoner, og anvende matematiske konsepter, fakta, prosedyrer og resonnering (Kjærnsli & Olsen, 2013). I norsk skole og utdanning har det derfor oppstått et stort fokus på algebra, noe som reflekteres i kjerneelementene i den nye læreplanen (Kunnskapsdepartementet, 2019). Udir skriver under kjerneelementene i læreplanen at «algebra handler om å utforske strukturer, mønstre og relasjoner og er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk», hvor både generalisering og modellering er to av kjerneelementene i faget. Selv med temaets sentrale rolle i faget, opplever mange elever algebra som utfordrende, uforståelig og utilgjengelig (Naalsund, 2012). I lys av dette oppstår det også flere misoppfatninger knyttet til algebraiske begreper og prosedyrer, som setter dype spor og er krevende å rette opp i (Brekke, 2002).

Elevers første møte med algebra er ofte uformelt og knyttet til en kontekst elevene kan kjenne seg igjen i, mens i tradisjonell undervisning er målet for ofte at man lærer formelle og automatiserte metoder så tidlig som mulig (Drijvers, 2003). Disse metodene er gjerne effektive, men er også roten til mange misoppfatninger i algebra. For mange elever skjer overgangen fra det uformelle og håndgripelige til automatiserte metoder for fort, og elevene sitter igjen med et ufullstendig bilde av hvordan algebraiske prosedyrer fungerer, og emnet blir redusert til et spill hvor eleven må gjette hvilke regler og lærte fremgangsmetoder som skal brukes i møte med ulike oppgaver (Drijvers, 2003).

Realistic Mathematics education (RME) ble utviklet som et alternativ til den tradisjonelle og reproduksjonsbaserte matematikken, og har etter dette fått bred annerkjennelse i matematematisk skoleforskning (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Undervisningsmetoden baserer seg på bruken av realistiske situasjoner som elevene kan forestille seg, og hvor disse situasjonene bidrar til at elevene selv kan utvikle uformelle matematiske konsepter, verktøy og prosedyrer. Etter hvert kan disse metodene gradvis formaliseres og generaliseres, og kunnskapen gjøres mindre kontekstspesifikk (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Utviklingen av disse uformelle og naturlige metodene nevnes som en av de viktigste ferdighetene for elevers matematiske fleksibilitet og mulighet til å håndtere nye matematiske situasjoner (Drijvers, 2003).

1.2 Studiens forskningsspørsmål

På bakgrunn av dette er det nærliggende å tenke at norske elevers algebrakompetanse kan forbedres ved å ta i bruk realistiske kontekster i undervisningen for å gjøre matematikken mer tilgjengelig. I tillegg kan konteksten bidra til å bedre deres uformelle forståelse av algebra, som igjen kan styrke elevenes formelle kompetanse i emnet. Vi ønsket å ta utgangspunkt i undervisningen, for å få et innblikk hvordan et alternativt undervisningsopplegg utspilte seg, og hvordan dette påvirket elevenes forståelse knyttet til algebra. I lys av dette vil vi undersøke følgende problemstilling:

På hvilken måte kan en realistisk kontekst i algebraundervisning påvirke elevenes forståelse i emnet?

For å tydeliggjøre oppgaven og i tillegg gi retning til innholdet, har vi også formulert tre forskningsspørsmål vi ønsker å besvare:

- *Hvordan kan en realistisk kontekst påvirke elevenes tolkning av variabler?*
- *Hvordan kan en realistisk kontekst støtte elevenes arbeid med konstruksjon av sammensatte uttrykk og lineære likninger?*
- *Hvordan kan en realistisk kontekst påvirke elevenes tolkning av likhetstegnet og ekvivalens?*

For å undersøke dette har vi gjennomført og observert en undervisningsperiode med en ungdomsskoleklasse på 9. trinn. Elevene har i denne alderen allerede erfaring med temaet algebra. Ved å se på elever i denne aldersgruppen vil vi kunne få informasjon om hvor elevene befinner seg, og forhåpentligvis kunne bidra til å finne ut hvordan man kan utvikle elevenes uformelle forståelse, slik at de er bedre forberedt på den formelle algebraen de møter. En pretest basert på «Chelsea diagnostic mathematics test – algebra» (Hart, Brown, Kerslake, Küchemann & Ruddock, 1985) ble brukt for å undersøke elevenes utgangspunkt knyttet til formell algebra. Elevenes feilsvar fra denne testen har blitt brukt som støtte for å tilpasse undervisningen til elevgruppen. Undervisningsopplegget er basert på Realistic mathematics education (RME), og oppgavene i perioden er basert på realistiske kontekster som elevene kan kjenne seg igjen i. Avslutningsvis gjennomførte vi en posttest for å sammenlikne elevenes formelle kompetanse i emnet før og etter undervisningsperioden. Lærerens rolle spiller en viktig rolle i RME-undervisning, men på grunn av oppgavens omfang vil fokuset være på elevenes arbeid, innspill og resultater. Lærerens rolle vil likevel komme til syne i forbindelse med planlegging, refleksjon og justering av aksjonsforskningen.

1.3 Oppgavens struktur

I denne masteroppgaven vil vi i kapittel 2 legge frem ulike tilnærminger, utfordringer og misoppfatninger knyttet til algebra i skolen, i tillegg til å presentere Realistic mathematics education (RME) og bruk av realistisk kontekst i undervisning. I kapittel 3 vil vi gjøre rede for oppgavens metode, aksjonsforskning. Dette innebærer pre-/posttest, planlegging og gjennomføring av undervisning og observasjon. Kapittel 4 inneholder en beskrivelse av de ulike undervisningsoppleggene. I kapittel 5 presenteres resultatene fra observasjonene og innsamlet arbeid fra undervisningsøktene. I tillegg har vi sammenliknet elevenes resultat fra pre- og posttesten. Disse resultatene blir videre diskutert i kapittel 6, der funn blir knyttet opp mot teori presentert i kapittel 2. I kapittel 7 konklusjon, samler vi trådene og svarer på problemstillingen vår. Avslutningsvis vil vi presentere forslag til justeringer for videre forskning på temaet.

2 Teori

Teorikapittelet vil ta for seg forskning om algebra og realistisk matematikkundervisning. I teorien om algebra vil vi konsentrere oss om elevenes utfordringer og vanskeligheter rundt innlæringen av algebraiske uttrykk og lineære likninger. Teorien om realistisk matematikkundervisning vil ta for seg bakgrunn for undervisningsmetoden, hva den innebærer, tidligere forskning og hvordan teorien kommer frem i vår oppgave.

2.1 Algebra, algebraiske uttrykk og likninger

Arcavi et al. (2017) skriver at det er vanskelig å sette ord på hva algebra er, men at ordet brukes for å betegne en spesifikk struktur, operasjoner og beregningsmetoder. De foreslår videre flere mål med algebraen; uttrykke generaliseringer, etablere relasjoner, løse problemer, utforske egenskaper, bevise teoremer og regne. Det «å gjøre algebra» omhandler blant annet håndtering av symbolske uttrykk i henhold til algebraiske regler, med et bestemt formål. Dette gjelder særlig i likningsløsning som denne oppgaven vil handle om. Likninger og algebraiske uttrykk er en sentral del av algebraen. Algebraiske uttrykk defineres som: «en kombinasjon av tall, bokstaver og tegn på operasjoner som er godt utformet i henhold til reglene for algebraisk syntaks» (Arcavi et al., 2017, s. 13) . I likninger finner vi to uttrykk med lik verdi på hver sin side av et likhetstegn, og det er ett eller flere ukjente tall som skal passe inn i stedet for bokstaven(e) (Birkeland, Breiteig & Venheim, 2018). I denne oppgaven vil vi bruke ordet «variabel» for å beskrive bruken av bokstaver i algebra. I tilfeller hvor vi ser etter en bestemt verdi for bokstaven (gjerne likninger) vil disse bli kalt for «ukjente».

2.2 Elevers utfordringer med å lære algebra

Algebra er et viktig verktøy i skolematematikk, og bidrar til å forenkle kompliserte kontekster. Samtidig er emnet utfordrende, og innlæringen av algebra er krevende for mange elever. Selv om algebra gjør vanskelig konsepter enkle, kan det i starten også gjøre enkle konsepter vanskeligere å forstå (Drijvers, 2003). Naalsund (2012) har i sin doktorgrad funnet at norske elever har spesielle problemer med algebra, og har en manglende forståelse av kjernealgebrabegreper. Forskningslitteraturen har lenge undersøkt akkurat hva som gjør emnet utfordrende for elever. I denne oppgaven tar vi opp fem aspekter identifisert av Drijvers (2003) som er utfordrende når elever skal lære algebra:

1. Den formelle algoritmiske karakteren til algebraiske prosedyrer som elever ikke klarer å knytte til uformelle og meningsfulle tilnærminger
2. Abstraksjonsnivået på oppgaver, sammenliknet med de konkrete situasjonene de oppstår i, og mangelfull mening elevene gir matematiske objekter på det abstrakte nivået
3. Behovet for å holde orden på den overordnede problemløsningsprosessen, og samtidig gjennomføre enkle algebraiske prosedyrer som er en del av den
4. Det kompakte algebraiske språket med spesifikke konvensjoner og symboler
5. Det objektive kjennetegnet knyttet til algebraiske formler og uttrykk, hvor elever oppfatter dem som prosesser eller handlinger, og dermed sliter med «lack of closure» om svaret ikke er «fullført».

2.2.1 Uformell og formell algebra

Elevers første møte med algebra skjer ofte naturlig og på uformelt vis, knyttet til et problem fra en kontekst de kjenner igjen. I tradisjonell undervisning har det likevel vært fokus på å utvikle formelle metoder som kan automatiseres og gjenskapes av elever så tidlig som mulig (Drijvers, 2003). Slike metoder er effektive, men er ofte bidragsyter til elevers misoppfatninger knyttet til algebra. Flere elever forstår ikke poenget med å lære algebra, og kan føle det er et emne med manglende mening (Arcavi et al., 2017). For mange elever er overgangen fra det uformelle til det formelle for kjapp, og metoder blir automatisert, forkortet og komprimert før elevene skjønner hvorfor algebraiske prosedyrer fungerer (Kindt, 1980, 2000 i Drijvers, 2003). Når elevene tar i bruk disse metodene gjør de ofte feil når de skal gjennomføre algebraiske prosedyrer, og innehar heller ikke forståelse til å finne og rette opp i feilene (Drijvers, 2003; Rosnick, 1981; Wagner, 1983). Elevene forstår algebra ved å bruke det de kan fra før, altså sine erfaringer med bokstaver og tall fra aritmetikken (Arcavi et al., 2017). Den formelle algebraen blir begrenset til pugging av regler og algoritmer uten mening (Naalsund, 2012). Dermed kan elever som klarer å gjennomføre metodene riktig likevel ha en begrenset forståelse, og kan lett miste oversikten om det er en liten endring i oppgaven (Drijvers, 2003). Utviklingen av formelle metoder tillater at «standard» oppgaver blir løst effektivt, men det kan også skape manglende matematisk fleksibilitet når elevene møter nye situasjoner, med mindre elevene evner å bruke uformelle og naturlige metoder (Küchemann, 1981).

2.2.2 Konkret og abstrakt tankegang

Alle elementene i matematikk er abstrakte, som innebærer at det ikke har noen fysisk eksistens utenfor menneskets sinn (Arcavi et al., 2017). Dette er et av aspektene som gjør det utfordrende for elever å forstå fordi det er vanskelig å se for seg. I algebraen beskrives ofte situasjoner for å forklare meningen, men dette innebærer at elevene er nødt til å bytte frem og tilbake mellom konkrete nivåer i realistiske situasjoner og det abstrakte og generelle algebraiske nivået (Drijvers, 2003). Det er spesielt vanskelig å lære algebra når den ofte presenteres i klasserommet uten noen kontekst, som «nakne» formler (Arcavi et al., 2017). Symboler og operasjoner får sin mening fra realistiske situasjoner, men Drijvers (2003) skriver likevel at det for mange kan være effektivt å se bort fra konteksten i gjennomføringen av en problemløsningsstrategi, og kun arbeide med algebraiske regler og egenskaper. Når elevene skal lære algebra krever det at de mestrer både det konkrete og abstrakte perspektivet, som ofte er utfordrende fordi det algebraiske rammeverket ikke er forstått av eleven (Drijvers, 2003).

2.2.3 Elementære prosedyrer og overordnet strategi

Enda et hinder elever møter i algebra er behovet for å holde orden på en overordnet problemstilling, samtidig som man skal gjennomføre grunnleggende algebraiske prosedyrer. Isolert er ikke de algebraiske prosedyrene utfordrende, men utfordringen oppstår når disse prosedyrene må sees på og gjennomføres som deler av et større problem (Drijvers, 2003). Når elevene ikke kan sette opp likninger eller uttrykk for å modellere en situasjon er de ikke i stand til å dra nytte av den praktiske verdien av algebra for problemløsning (Arcavi et al., 2017). De grunnleggende prosedyrene krever så mye oppmerksomhet at eleven mister oversikt over det helhetlige bildet, og klarer ikke lenger å se hvordan de separate prosedyrene henger sammen i en større kontekst (Drijvers, 2003).

2.2.4 Naturlig språk vs. Algebraisk språk

Algebra kan forklares som et eget matematisk språk, og bruken av bokstaver er et definerende trekk for mange (Arcavi et al., 2017). Det inneholder symboler, konvensjoner og notasjoner som er kompakte og entydige, men dette oppleves også som utfordrende for elevene ettersom det i stor grad skiller seg fra elevenes naturlige språk (Drijvers, 2003). Elevenes symbolforståelse og evne til å forstå meninger og strukturer av uttrykk og formler vil i stor grad påvirke hvordan elevene oppfatter en oppgave (Drijvers, 2003). Bokstaver i algebra representerer et vilkårlig element i en mengde, men en bokstav kan ha ulike funksjoner avhengig av kontekst og oppgavetype. I sammensatte algebraiske uttrykk er bokstaver generaliserte tall, som innebærer at de kan ha ulike verdier. I likninger viser bokstavene til sammenhengen mellom bestemte verdier. I andre tilfeller er hensikten med bokstavene å tydeliggjøre generaliserte mønstre, som gjør det mulig å se generelle matematiske sammenhenger (Kieran, 1992).

Küchemann (1981) gjennomførte en undersøkelse med 3000 elever i alderen 13-15 år for å se hvordan elever bruker og tolker bokstaver i generalisert aritmetikk. Med resultatene fra testene ble det identifisert seks forskjellige tolkninger av bokstaver:

1. Bokstaver blir gitt en numerisk verdi
2. Bokstaver blir brukt som objekt (enten som betegnelse, eller som objekt i seg selv)
3. Bokstaver blir ignorert
4. Bokstaver som en spesifikk ukjent
5. Bokstaver som generaliserte verdier
6. Bokstaver som variabler

Resultatene viste også at de fleste elevene i alle aldersgrupper brukte en av de første tre tolkningene av bokstaver, som alle tyder på svak forståelse, fordi de unngår å regne med bokstaven (Naalsund, 2012). Forskning viser at læreren kan være med å forsterke elevenes syn på bokstav som objekt med deres «fruktsalatalgebra», altså at 2b+3b blir det samme som 2 bananer + 3 bananer. Med andre ord lærer de feilaktig at bokstaver i algebra står for fysiske objekter i stedet for tall (Arcavi et al., 2017; Birkeland et al., 2018).

2.2.5 Algebra som prosess og objekt

En siste og avgjørende utfordring knyttet til algebralæring er den tosidige egenskapen til algebra. Algebra innehar egenskaper som både operasjonell prosess og algebraiske objekter (Drijvers, 2003)**.** Uttrykk som 3x+2 kan oppfattes som en prosess som skal gjennomføres for å gjøre en utregning, men kan også være et produkt av en slik prosess, eller et eget matematisk objekt (Naalsund, 2012). I tillegg vil likhetstegnet kunne oppfattes som en prosess og objekt (Se likhet, under misoppfatninger) (Drijvers, 2003). Dualiteten krever at elevene noen ganger må pakke ut prosessen som et uttrykk betegner, og andre ganger må behandle uttrykket som et eget matematisk objekt (Arcavi et al., 2017). At elevene evner å se algebraiske uttrykk som både en prosess og et eget matematisk objekt er sentralt for at elevene skal lykkes i arbeidet med algebra (Drijvers, 2003). I lys av denne tosidigheten dukker det opp tre utfordringer elever må ta tak i for å forstå algebra: «the lack of closure obstacle», «the expected answer obstacle» og «the parsing obstacle».

The expected answer obstacle handler om elevenes forventninger til at en oppgave skal føre til et enkelt numerisk svar (Jupri & Drijvers, 2016). «The lack of closure» er tett knyttet til dette, men handler om elevers utfordringer og ubehag med å akseptere et algebraisk uttrykk som er fullverdig svar (Naalsund, 2012). Gjennom det tidlige skoleløpet har man bygget opp en forventning om at et riktig svar på en matteoppgave er et enkelt numerisk uttrykk (Arcavi et al., 2017). Denne trangen til «lukking» fører til et ønske om at svaret ikke skal inneholde flere ledd, og elever kan dermed få 7ab som svar på 2a+5b (Arcavi et al., 2017). For å komme seg videre i algebra må eleven godta at et algebraisk uttrykk er et fullverdig svar på en oppgave (Naalsund, 2012).

«The parsing obstacle» handler om hvordan man regner med algebra og hvordan dette er i konflikt med elevenes naturlige språk. I det matematiske arbeidet innebærer dette hvordan elevene behandler sammensatte uttrykk og feil sammenslåing av summer. I algebra representerer sammensatte uttrykk som 5n multiplikasjon, mens slike sammensetninger i numerisk matematikk står for addisjon (eks. 3½ betyr 3+½). Dette fører til misforståelsen om at 5n er en sum (5+n) og ikke et produkt. Dette fører til at elever forkorter uttrykk feil, som for eksempel 4x-1 til 3x eller 3a+4b til 7ab (Naalsund, 2012).

2.3 Misoppfatninger i algebra

Matematikk er et komplekst og abstrakt fag. At elever gjør feil når de arbeider med oppgaver er ikke uvanlig, og trenger ikke være et stort problem. Problemet oppstår når feilen skyldes en gjennomgående misforståelse av temaer. Misoppfatninger kan defineres som en overgeneralisering av tidligere kunnskap knyttet til nye matematiske områder (Booth, McGinn, Barbieri & Young, 2017; Brekke, 2002). Tidligere forskning viser at jo mer overbevist elevene er om at misoppfatningen deres er riktig, jo vanskeligere er den å rette opp. I forskningslitteraturen er det flere misoppfatninger og vansker som går igjen (Booth et al., 2017). I denne oppgaven har vi valgt å begrense oss til utfordringene med likhet, bokstaver og regneregler.

2.3.1 Likhet

Fra numerisk aritmetikken oppfatter mange elever likhetstegnet som et signal for å gjennomføre en regneoperasjon, hvor svaret står på høyre side, heller enn at det er et symbol for ekvivalens og likeverdige uttrykk (Arcavi et al., 2017; Naalsund, 2012)**.** Mens en slik operasjonell tankegang av likhetstegnet kan fungere bra i de tidligere årene av matematikkundervisningen, vil det fort skape utfordringer når eleven skal tenke algebraisk. En riktig forståelse av likhetstegnet er avgjørende for at elever skal klare å manipulere og løse algebraiske likninger (Booth et al., 2017). En slik oppfatning er utilstrekkelig for algebra, da man bør se på likhetstegnet på en relasjonell måte som et utsagn om likhet (Arcavi et al., 2017)**.** Misoppfatninger om likhetstegnet fører blant annet til en tanke om at likhetstegnet ikke kan brukes i likninger uten en operator (eks. 5=5) eller at operatoren alltid må være på venstre side av likhetstegnet, og at svaret alltid står til høyre for likhetstegnet. Elever med en slik tankegang vil tenke at for eksempel 2+3=1+4 ikke er et gyldig svar, men heller at svaret skal skrives om til 2+3=5 og 1+4=5 (Arcavi et al., 2017; Booth et al., 2017). Slike misoppfatninger kan vi knytte opp til «the lack of closure obstacle» som nevnt tidligere, hvor elevene opplever et svar som uferdig dersom det fortsatt er operatorer i uttrykket. Evnen til å verdsette likhet og analysere struktur er svært viktig for å mestre algebraiske uttrykk (Arcavi et al., 2017). Et kjent didaktisk trekk er bruken av «balansemodellen», som handler om å legge til eller fjerne like mengder på begge sider av likhetstegnet for å opprettholde balanse (Arcavi et al., 2017).

2.3.2 Variabel

Tolkning av bokstaver er utdypet tidligere i oppgaven under naturlig språk vs. algebraisk språk. Arcavi et al. (2017) viser til fem måter å bruke variabler på; plassholder for et tall, et ukjent tall, en varierende mengde, et generalisert tall og en parameter. Den mest vanlige blant elever er å bruke bokstaver som en plassholder for en numerisk verdi. Og i likningsløsning brukes en bokstav ofte for å betegne et ennå ukjent tall (Arcavi et al., 2017). Mange elever oppfatter bokstaver i algebra som et objekt eller som navnsetting av et uttrykk. Et kjent eksempel fra litteraturen er «student and professor» problemet, hvor oppgaven er å lage et uttrykk for at det er seks ganger så mange elever som det er lærere. Feil forståelse av bokstaver vil føre til svaret 6S=P, hvor elever tolker S som navnsetting av studenter fremfor en variabel for antall studenter (Booth et al., 2017; Rosnick, 1981). Andre elever velger heller å overse variablene i sin helhet, altså svare et rent numerisk tall på et regnestykke som inneholder variabler (Küchemann, 1981). Noen elever knytter også verdi til bokstaver etter plasseringen i alfabetet. Ytterligere utfordringer knyttet til variabler er forståelsen om at samme variabel i et uttrykk eller tallrekke må representere samme verdi, eller at ulike bokstaver i samme uttrykk også kan representere samme verdi (Booth et al., 2017). Wagner (1983) skriver om at flere tror at forskjellige bokstaver må representere forskjellige ting, og hvis de endrer bokstaven i stykket vil også løsningen endres.

2.3.3 Regneregler

Et siste aspekt omhandler regneregler. Håndtering av symbolske uttrykk i henhold til algebraiske regler, er den vanligste handlingen i algebra (Arcavi et al., 2017). Mange elever ser bort fra, eller har ikke tilstrekkelig kunnskap om matematiske regneregler og rekkefølge, og regner fra venstre til høyre fremfor å bruke de konvensjonelle regnereglene i matematikken (Booth et al., 2017). Elever som lærer å løse likninger kan ha vansker med syntaks og anvendelse av regler (Arcavi et al., 2017). Bruken av parenteser kan være et hinder, og mange elever innser ikke at disse kan brukes både for å gruppere en mengde, samtidig som at innholdet i parentesen kan multipliseres med samme faktor, som for eksempel $(15 – 7) = 8$ og $– (15 – 7) = – 8$ (Booth et al., 2017). De fleste feil er i følge Naalsund (2012) på grunn av feil i arbeidsminnet fremfor dårlig innlærte regler. Feilsvar trenger med andre ord ikke være misoppfatninger, men oppstår ofte på grunn av erfaringer med prosedyrer fra aktiviteter i matematikktimene som likner eller som elevene ikke husker (Brekke, 2002). Reglene kan fort bli helt uforståelige og vanskelig å huske, om de ikke læres bort på en meningsfull måte (Birkeland et al., 2018).

2.4 Realistic mathematics education (RME)

Det å bruke realistiske kontekster for å hjelpe elevene til å forstå matematikken blir blant annet brukt i den nederlandske instruksjonsteorien Realistic mathematics education (RME). På norsk har vi oversatt dette til realistisk matematikkundervisning. Teorien ble utviklet på 1970-tallet i Nederland av Hans Freudenthal (1973) og hans kolleger. RME vokste frem som et motsvar til den mer tradisjonelle undervisningen i matematikk. Freudenthal (1991) hevder at lærere ofte introduserer et tema i matematikken ved å introdusere en formell definisjon, og så arbeider elevene med eksempler som er gitt ved formler. Han kritiserer dette og kalte det en antididaktisk intervensjon, fordi han mener det er å starte med sluttproduktet for en lang matematisk prosess, og elevene blir fratatt muligheten til å engasjere seg i læringsprosessen og matematikk som en levende aktivitet (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer & Doorman, 1999; Stephan, Underwood-Gregg & Yackel, 2014). Freudenthal mente at dersom matematikken skulle ha en verdi for elevene måtte den være tilknyttet realiteten, holde seg nære elevene og være relevant for samfunnet (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Elever bør lære matematikk i konkrete sammenhenger, og bruke dette for å utvikle abstrakt tenkning. Dette er med på å øke forståelsen for matematiske konsepter, samtidig som det kan motivere elevene. RME handler altså om at elevene skal anvende matematiske problemer basert på forhold elevene kjenner seg igjen i (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). For å løse et matematisk problem er tanken at elevene først skal jobbe ut fra sine intuitive metoder, og gjennom RME-undervisning og riktig veiledning, vil de bevege seg til mer anerkjente og formelle måter å jobbe på (Dickinson, Hough & Dudzic, 2012). RME handler ikke om å samle opp biter av ferdig kunnskap, men om elevenes kognitive vekst (Doorman & Gravemeijer, 2009).

RME baserer seg på at elevene er aktive deltakere i læringsprosessen i samarbeid med andre. Læreren og matematikken skal ha en veiledende rolle, og ved bruk av meningsfulle problemsituasjoner skal elevene bevege seg fra uformelle kontekstrelaterte løsninger til å se sammenhenger og få en helhetlig forståelse (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Det er ikke lett å finne en entydig definisjon av RME, men det er særlig noen begreper som stadig knyttes til undervisningsformen. For det første er bruken av realistisk kontekst sentralt, noe vi også vil sette søkelys på i denne oppgaven. Videre er kjerneelementene; Matematisering, veiledet gjenoppdaging (oversatt fra guided reinvention), didaktisk fenomenologi og fremvoksende modeller (oversatt fra emergent models) av stor betydning for RME, og vil derfor bli utdypet i de videre avsnittene (Drijvers, 2003; Gravemeijer & Stephan, 2002).

2.4.1 Realistisk kontekst

Realistisk matematikkundervisning bygger på en filosofi om at elevene skal utvikle sin matematiske forståelse ved å jobbe ut fra kontekster som gir mening for dem, altså realistiske kontekster (Dickinson et al., 2012). I stedet for å starte undervisningen med abstraksjoner eller definisjoner, starter RME med problemer i rike kontekster som krever matematisk organisering (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Elevenes bruk av meningsfulle kontekster er en hovedkarakteristikk ved RME-undervisning, og det er denne som blant annet bidrar til at elevene kan delta aktivt (Freudenthal, 1973; Van den Heuvel-Panhuizen, 2014; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

Videre er kontekstproblemene ment for å støtte elevenes oppdaging av meningen bak formell matematikk (Gravemeijer & Doorman, 1999). Den formelle matematikken kan bygges fra en rekke små steg fra det uformelle arbeidet med kontekster (Birkeland et al., 2018). Kontekstproblemer defineres som problemer hvor problemsituasjonen er erfaringsmessig reell for eleven, og kan brukes som forankringspunkter for gjenoppfinnelse av matematikken for elevene (Gravemeijer & Doorman, 1999). Konteksten gir elevene ledetråder om hensiktsmessige løsningsmetoder og strategier for å løse matematiske problemer (Wijers, 2001).

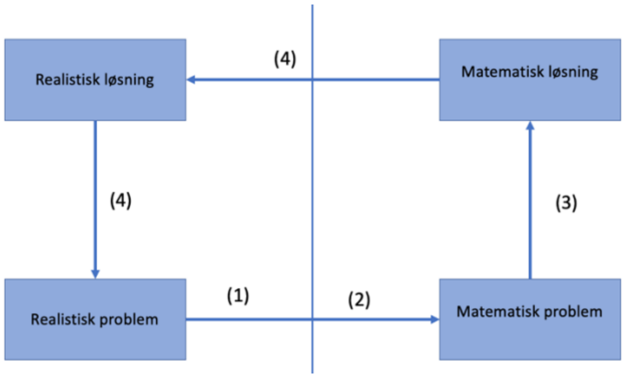
Ordet realistisk i realistisk matematikkundervisning betyr ikke nødvendigvis at oppgaven skal være tatt fra elevenes egne liv, eller være ekte eller autentisk i den forstand. En realistisk kontekst vil si at det er en situasjon som elevene kan forestille seg (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Det kan være en situasjon elevene har erfaring med, kan leve seg inn i og gi mening til (Gravemeijer & Doorman, 1999). Med andre ord skal elevene, gjennom kontekster som gir mening og oppleves som ekte, utvikle sin matematiske forståelse (Dickinson et al., 2012).

2.4.2 Matematisering

Matematisering defineres av Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) som aktiviteten med å løse problemer og lete etter problemer, organisere materie fra virkeligheten eller matematisk materie. Matematisering er tett knyttet til det konstruktivistiske læringssynet om at matematikk læres best ved å gjøre matematikk, og at matematikken er en menneskelig aktivitet (Freudenthal, 1999). Det handler altså om å gjøre om eller oversette realistiske problemer til den matematiske verdenen, og omvendt. I tillegg til at det omhandler reorganiseringen og konstruering innenfor matematikkens verden (Jupri & Drijvers, 2016). Treffers (1978; 1987 i Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003) var den første til å skille mellom to typer matematisering; horisontal og vertikal. Freudenthal (1991) beskrev at horisontal matematisering handler om å gå fra den virkelige verden, der du bor og handler, til symbolverdenen. Og vertikal matematisering skjer innenfor symbolverdenen der symboler blir formet, omformet og manipulert. Med andre ord handler horisontal matematisering om å bruke matematiske verktøy for å organisere og løse et problem fra hverdagen, mens vertikal matematisering handler om operasjoner innenfor selve det matematiske systemet. Blant annet å se sammenhenger mellom konsepter eller lage snarveier innenfor symbolverdenen (Drijvers, 2003; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

Horisontal- og vertikal matematisering kan likevel ikke sees på som to helt separate deler, og skillet mellom de avhenger av situasjoner, personer og personenes miljø (Freudenthal, 1991). De utfyller hverandre og kan forekomme på alle nivåer innenfor matematisk aktivitet (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Prosessen der elevene konstruerer og gjenoppdager matematikk inneholder både horisontale og vertikale komponenter, og blir kalt *progressiv matematisering* (Doorman & Gravemeijer, 2009). Prosessene kan være forskjellig for elevene, og de kan derfor ta ulike veier, eller ulike *læringsbaner*. Dette er avhengig av elevenes oppfatninger av den realistiske situasjonen, deres ferdigheter og dere problemløsningsevner (Jupri & Drijvers, 2016). De Lange (2006) beskriver prosessene som sykliske (Se figur 1). Elevene blir først gitt et meningsfylt og realistisk problem (steg 1) som de gjennom problemløsning forstår og identifiserer relevante matematiske begreper. Deretter formulerer de problemet til en matematisk modell, før de løser det matematiske problemet som inngår i problemet (steg 2). Til slutt er elevene i stand til å tolke den matematiske løsningen (steg 3) ut fra den opprinnelige situasjonen, og har kommet frem til en realistisk løsning (steg 4).



Figur 1: Oversettelse av De Lange (2006) sin modell av progressiv matematisering

2.4.3 Veiledet gjenoppdagelse

Veiledet gjenoppdagelse er oversatt fra engelske «guided reinvention». Det handler om å sette elevene i stand til å koble sine uformelle representasjoner av verden til formell matematikk (Freudenthal, 1991). Elevene skal ikke gjenoppdage matematikk som har tatt forskere mange år å oppdage. De skal gjennom utforskning oppdage sammenhenger og gjøre generaliseringer for å øke sin matematiske kompetanse ved at læreren legger til rette og veileder dem (Stephan et al., 2014). Med andre ord skal læreren legge til rette for, og finne oppgaver som hjelper elevene til, å gjenoppdage matematikken på en slik måte at de føler de selv har vært ansvarlige for å lære den (Freudenthal, 1991). Undervisningen innenfor RME innebærer altså et skifte i autoriteter fra lærere til elever, men læreren har likevel en sentral og krevende rolle (Solomon, Hough & Gough, 2020). Læreren skal veilede elevene til gjenoppdaging, altså gi de nødvendige mulighetene for å veilede elevene gradvis. Dette er en evne som kan ta mange år å utvikle (Stephan et al., 2014). I tillegg skal elevene være aktive deltakere i å utvikle matematisk innsikt og matematiske verktøy selv, fremfor at læreren serverer dem ferdig matematikk (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). For eksempel skal elevene i algebra bli veiledet til å utføre algoritmer fremfor å lære selve algoritmen (Freudenthal, 1991). Læreren skal «orkestrere» en matematisk diskusjon i hele klassen mot et spesifikt mål, og for å gjøre dette spiller blant annet valg av kontekst en sentral rolle (Doorman & Gravemeijer, 2009; Solomon et al., 2020).

2.4.4 Didaktisk fenomenologi

Freudenthal (1983) satt sammen begrepene fenomenologi og didaktikk, og introduserte begrepet didaktisk fenomenologi for å vise at matematikkens fenomenologi kan bli ansett fra et didaktisk perspektiv i RME-undervisning. Matematisk fenomenologi beskriver matematiske konsept, strukturer eller ideer som objekter, som settes i relasjon til og organiserer den fysiske, sosiale og mentale verden (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014). Didaktikken refererer til måten man underviser elever på og organiseringen av undervisningsprosesser (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014). Altså omhandler disse begrepene satt sammen om å vurdere matematikkens fenomenologi fra et didaktisk perspektiv (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014). Ifølge den didaktiske fenomenologien bør oppgaver eller undervisningssekvenser, som er ment å støtte læringen av matematikk, plasseres i en kontekst. Denne konteksten skal kunne organiseres produktivt av elever som bruker den matematikken (Larsen, 2018). Dermed gir den didaktiske fenomenologien blant annet informasjon om hvordan læreren kan undervise matematikk, og hva slags matematiske objekter som kan hjelpe med å organisere og strukturere fenomener i virkeligheten (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014). På denne måten kan den didaktiske fenomenologien fungere som et analytisk verktøy som lærere kan bruke for å bestemme hva slags matematikk som er verdt å lære og hvilke faktiske fenomener som kan gi muligheten til å utvikle denne forståelsen (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014).

I RME kan didaktisk fenomenologi fungere som en grunnmur i utviklingen av undervisningsopplegg, fordi den ønsker å avsløre kildene til matematikk i virkeligheten, altså finne hvilke situasjoner som kan fungere som kontekster for en utvikling av matematiske konsepter, verktøy og prosedyrer (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014). Rike og realistiske situasjoner blir gitt en sentral posisjon i læringsprosessen (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

2.4.5 Emergent models

Emergent models eller fremvoksende modeller henger tett sammen med veiledet gjenoppdagelse og didaktisk fenomenologi. Den blir foreslått som et middel for å støtte prosessen med progressiv matematisering (Gravemeijer & Doorman, 1999). Fremvoksende modeller er et verktøy for å konseptualisere hvordan elevenes uformelle matematiske aktivitet kan komme ut av en utgangspunktkontekst og deretter utvikle seg til den mer formelle matematikken som er målet for undervisningen (Larsen, 2018). En matematisk modell er et objekt som er ment for å stå for eller representere noe annet (Niss & Blum, 2020). Modellen kan både være fysisk, konkret, abstrakt, visuell og så videre. I denne oppgaven vil det først og fremst være snakk om visuelle og abstrakte former for modeller, og bruk av konteksten som modell for tenking og læring. En modell er ofte i utgangspunktet kontekstspesifikk, og gjennom arbeidet med denne skal den få gradvis en mer generell karakter og utvikle seg til en modell for matematisk resonnement. Det er dette som refereres til som utviklingen fra modell-av til modell-for matematikk (Gravemeijer & Doorman, 1999; Stephan et al., 2014; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

2.4.6 Hypotetiske læringsbaner

Doorman og Gravemeijer (2009) skriver om at veiledet gjenoppdaging innenfor RME handler om å lage en hypotetisk læringsbane for hvordan elevene kan gjenoppfinne formell matematikk. En hypotetisk læringsbane er en forventning av en vei som eleven(e) kan følge mens de engasjerer seg i oppgavene, og kan være nyttig for planleggingen av undervisningen og de matematiske samtalene (Stephan et al., 2014). Læringsbanene brukes til å beskrive transformasjonen som følger av deltakende aktiviteter i læring av matematikk, og består av tre komponenter (Nuraida & Amam, 2019). De skal bestå av læringsmål som definere retningen, læringsaktiviteter og hypoteser for læringsprosessen for å forutsi hvordan elevenes forståelse utvikler seg i sammenheng med læringsaktivitetene. De hypotetiske læringsbanene i denne oppgaven er formulert ved tre punkter, A, B og C. A er det forventede utgangspunktet vi har til elevene, og via B, en uformell forståelse av en oppgave/problem skal de nå, C, formell algebraisk «forståelse» eller notasjon.

Gravemeijer og Doorman (1999) mener at formell matematikk er noe som vokser frem gjennom elevenes aktivitet, og ideelt sett skal den hypotetiske læringsbanen være utformet slik at formell matematikk dukker opp gjennom elevenes matematisering. De hypotetiske læringsbanene henger sammen med didaktisk fenomenologi. En didaktisk fenomenologisk analyse gir informasjon om hvordan lærere kan undervise matematikk, hvilke matematiske objekter som kan hjelpe og hvilke fenomen i matematikken som kan bidra med å utvikle et bestemt matematisk konsept. I tillegg viser det hvordan elevene kan komme i kontakt med dette (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014).

2.4.7 Tidligere forskning om RME

Realistisk matematikkutdanning har vokst frem i Nederland, men flere land har latt seg inspirere av tilnærmingen til matematikkundervisning. På 1990-taller ble RME som undervisningsmetode brukt i et amerikansk prosjekt kalt Mathematics in Context (MiC), som senere ble kjøpt opp av Manchester Metropolitan University (MMU) (Dickinson et al., 2012). MMU står også bak mye av materialet denne masteroppgaven har tatt utgangspunkt i under utforming av undervisningsopplegg (Se kapittel 4). Mathematics in context har i USA blitt tatt i bruk av et stort antall skoledistrikter, og har i følge Romberg (2001, gjengitt i Dickinson et al., 2012) produsert imponerende elevprestasjoner. Etter innføringen av MiC viste resultater fra statsdekkende matematikkprøver (PISA og TIMSS) at prosentandelen av elever som skåret på de laveste prestasjonsnivåene hadde falt, og prosentandelen på de høyere prestasjonsnivåene hadde økt. I UK gjennomførte MMU et 6 års prosjekt på tjue skoler, som fikk ekstremt positive reaksjoner. Prosjektet baserte seg på å utvikle en forståelse av RME i en engelsk kontekst, forstå hvordan elevene utvikler seg og støtte lærere til å utvikle praktiske ferdigheter og en dyp kunnskap om RME (Dickinson et al., 2012). På en evaluering gjort i 2011 var lærere generelt enige om at elevene som undervises i RME var mer positive til matematikk sammenlignet med de mer tradisjonelle metodene. I tillegg er det mer sannsynlig at elevene løser et problem riktig, men også at de viser forståelse gjennom sin evne til å forklare strategien sin (Dickinson et al., 2012).

Flere andre utenlandske studier dokumenterer også effekten av realistisk matematikkundervisning på elevers matematikkresultater. Flere tyrkiske studier fant at RME-tilnærmingen har en positiv effekt på elevenes akademiske prestasjon sammenlignet med den tradisjonelle undervisningen (Dönmez, 2018; Tarim & Kütküt, 2021). Tarim og Kütküt (2021) undersøkte elever på mellomtrinnet sin forståelse av geometri og målelæring, og fant at RME-tilnærmingen hadde en signifikant effekt på elevenes matematikkprestasjon. De hevdet at undervisningsmetoden ga elevene muligheter til å produsere matematikken selv, og løse oppgaver ved hjelp av sin egen kunnskap fremfor en innlært algoritme eller regel. I tillegg understrekte de betydningen av å bruke meningsfull matematikk og problemer som elevene kan møte i dagliglivet. Dönmez (2018) fant at elever i 7. klasse med RME undervisning scoret bedre på en matematisk prestasjonstest enn de med forelesningsbasert undervisning. Det ble også oppdaget en signifikant økning i scoren på algebraiske uttrykk, og en positiv effekt på deres beregnings- og matematiske operasjonsevne. Disse funnene er i tråd med hva blant annet Gravemeijer og Doorman (1999) fant flere år tidligere om rollen dagliglivsproblemer har i matematikken.

Også i Indonesia har RME vist seg å hjelpe elevers matematikk prestasjoner. En studie viste at elever som ble undervist med RME oppnådde bedre resultater i problemløsningsevne og kognitive prestasjoner enn andre elever som hadde konvensjonell undervisning (Laurens, Batlolona, Batlolona & Leasa, 2018). De fant videre at lærere som brukte RME i klasserommet i større grad kunne gjøre abstrakte matematiske begreper mer forståelige. Liknende resultater fant Warsito, Darhim og Herman (2018) i sin studie, der de konkluderte med at elever som fikk undervisning basert på RME og progressiv matematisering hadde større forbedring i matematisk representasjon enn elever som fikk tradisjonell problemløsningsundervisning.

Når der gjelder algebra i RME gjennomførte Palinussa (2020) en studie der han sammenliknet læringsutbyttet til elever som hadde mottatt RME-undervisning, en kooperativ læringsmodell og en konvensjonell læringsmodell. Artikkelen konkluderer med at algebra-læringsresultatene til elever som brukte RME-læringsmodellen var signifikant høyere enn de andre undervisningsmodellene, og RME-modellen var den overlegne modellen for å lære algebraiske operasjoner. Dette mente de hadde sammenheng med at RME lar lærere og elever koble konteksten til abstrakt læringsmateriell, altså at RME bistår lærere med å utforme læring som er relevant for elevenes behov i virkelige kontekster. I tillegg opplevde de en økning i læringsaktiviteter og elevaktivitet, og begrunner det med at undervisningsmetoden skaper nysgjerrighet for temaet blant elevene, og at elevene får mulighet til å arbeide sammen for å fullføre den gitte oppgaven.

2.4.8 Realistisk matematikkundervisning i denne oppgaven

For å besvare problemstillingen; *På hvilken måte kan en realistisk kontekst i algebraundervisning påvirke elevenes forståelse i emnet?* har vi i denne oppgaven utformet undervisningsøkter som baserer seg på realistisk matematikkundervisning. Undervisningen har blitt planlagt med tanke på prinsippene og kjerneelementene til RME, og vi har tatt utgangspunkt i teorien om hypotetiske læringsbaner i planleggingen og analysen. Vi vil først og fremst konsentrere oss om delen av RME undervisningen som omhandler den realistiske konteksten, og undersøke hvordan den spilte en rolle for elevenes matematiske arbeid.

3 Metode

For å besvare problemstillingen; *På hvilken måte kan en realistisk kontekst i algebraundervisning påvirke elevenes forståelse i emnet?* har vi benyttet oss av ulike metoder for å samle og analysere data. Vi utførte og gjennomførte først en pre-test som skulle hjelpe oss å kartlegge vanskeligheter, velge temaer og planlegge undervisningen. Undervisningen vi gjennomførte var basert på den nederlandske instruksjonsteorien realistisk matematikkundervisning (RME). Metoden vi benyttet for planlegging, gjennomføring og analyse av undervisningsopplegget var aksjonsforskning. For å samle inn resultater og analysere funn observerte vi og skrev observasjonslogg etter gjennomført undervisning. I tillegg gjennomførte vi en post-test identisk til pretesten for å undersøke om vi fant noen signifikante forskjeller eller interessante funn. Vi vil videre i dette kapittelet begrunne og beskrive forskningsdesign, utvalg, etiske overveielser, troverdighet og gjennomførbarhet og hvordan vi analyserte datamaterialet.

3.1 Forskningsdesign

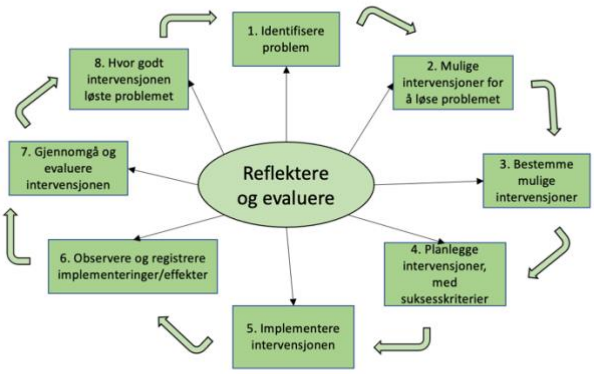
I denne oppgaven har vi hovedsakelig en kvalitativ forskningsmetode. Dette er en metode som bygger på tekstdata, og i vårt tilfelle tekstdata fra undervisning og observasjon. Fokuset til en kvalitativ forskningsmetode er på betydningen av hendelser og erfaringer, definisjoner, kjennetegn og beskrivelser (Ringdal, 2013). Dette stemte godt overens med det vi ønsket å forske på da vi skulle undersøke arbeidet med et undervisningsopplegg. Vi har i denne oppgaven samtidig et lite innslag av kvantitativ data, i form av resultatene fra testene som ble gjennomført. Kvantitativ metode baserer seg på talldata, men har som regel et høyere krav til antall deltakere enn vårt utvalg (Ringdal, 2013). På den andre siden har vi tallfestet dataen i form av tabeller og poengscore, som gjør det lettere å sammenlikne dataen mellom pre- og posttest, mellom deltakere og mellom oppgaver. De kvantitative resultatene vil kun bli brukt som en del av den større kvalitative metoden, aksjonsforskning.

3.1.1 Aksjonsforskning

I denne oppgaven har vi benyttes oss av metodologien aksjonsforskning. Aksjonsforskning er en kvalitativ metode, og et godt verktøy for lærere som vil forbedre egen praksis. Metoden kan benyttes dersom man ønsker å undersøke et spesifikt utdanningsspørsmål (Cohen et al., 2018; Creswell, 2012). Det blir stadig stilt høyere krav til lærere og skolene om å ta i bruk en form for systematisk læring (Postholm & Jacobsen, 2011). Lærerprofesjonen innebærer å

utvikle seg selv, både individuelt og i samspill med andre (Kunnskapsdepartementet, 2017). Lærerens profesjonalitet vil i så måte kreve at man har et forskende blikk på egen praksis, eller en endrings- og utviklingskompetanse. Altså skal lærere samhandle med kolleger for skolens utvikling, med utgangspunkt i kritisk refleksjon rundt egen praksis (St.meld. nr. 11 (2008-2009), s. 15). Utgangspunktet for oppgaven var et ønske om mer erfaring og forståelse for hvordan undervisningen av algebra kan foregå, og utprøving av et undervisningsopplegg som tar utgangspunkt i realistiske kontekster. Dermed er aksjonsforskningen en passende metode da denne metoden både fokuserer på handlinger og forskningen rundt handlingene (Christoffersen & Johannessen, 2012). Lærere får mulighet gjennom aksjonsforskning til å reflektere over egen undervisning, og forbedre den (Creswell, 2012).
Aksjonsforskning blir ofte forbundet med et utviklingsarbeid lærere gjør sammen i skolen, men det behøver ikke være slik (Furu, 2013). Aksjonsforskning har en variert utforming og kan spenne fra mindre individuelle undersøkelser knyttet til utvikling og bedring av praksis, til mer omfattende kollektive forskningsstudier. På bakgrunn av dette kan et slikt forskningsarbeid like gjerne utføres i mindre grupper (Cohen et al., 2018; Ulvik, 2016). I vår studie har vi tatt utgangspunkt i «teacher as researcher» bevegelsen, eller «lærer som forsker» (Cohen et al., 2018; Furu, 2013). Det vil si at vi som forskere innehar rollene som både lærere og forskere i egen undervisningspraksis. «Læreren som forsker» fokuserer på at individuelle lærere (to i vårt tilfelle) skal bygge ut sin egen kunnskapsbase, gjennom prosesser av refleksjon og etterforskning (Cohen et al., 2018).

Det er stor variasjon i hva forskere definerer som aksjonsforskning, og hva det innebærer. Vi har i dette forskningsprosjektet valgt å ta utgangspunkt i Cohen et al. (2018) sin åtte-stegs modell for aksjonsforskning i planleggingen og gjennomføringen av vår aksjon. Denne modellen er basert på McAteer (2013 sitert i Cohen et al., 2018) sin fem-stegs prosess i aksjonsforskning, men er utvidet for å ta høyde for planlegging og forberedelse knyttet til gjennomføringen av aksjonsforskning. De åtte stegene i modellen er som følger (se også figur 2):



Figur 2: Oversettelse av Cohen, Manion og Morrison (2018) sitt rammeverk for aksjonsforskning

Steg 1 handler om å velge ut et problem som man har erfart, eller et område man ønsker å forbedre. Vårt ønske var å forbedre egen undervisning knyttet til algebra, fordi vi opplever temaet som utfordrende basert på egne erfaringer. I tillegg viser forskning og internasjonale tester (PISA/TIMSS) at algebra er et av temaene norske elever opplever som spesielt utfordrende (Bergem, 2016; Kjærnsli & Olsen, 2013). I og med at algebra er et stort tema valgte vi å fokusere på tolkning av variabler, konstruksjon av sammensatte algebraiske uttrykk og likninger, og tolkning av likhetstegnet og ekvivalens da dette er noe vi så var utfordrende for elever. I steg 2 er målet å identifisere ulike årsaker til problemene, og diskutere mulige løsninger. Her kan man inkludere en fremstilling av spørsmålene som skal besvares. I vårt tilfelle diskuterte vi blant annet hvilke undervisningsformer som kunne føre til dypere forståelse av algebraiske uttrykk hos elevene, og hva vi som lærere kunne gjøre for å undervise om dette på en forståelig måte. I tillegg var vi innom hvilke sider av aksjonsforskningen som kunne bringe oss nærmere svar på problemstillingen.

Videre tok det oss inn i steg 3 som innebærer idémyldring rundt mulige praktiske løsninger til problemet. Dette førte oss til en gjennomgang av eksisterende forskning på området. Vi var innom anerkjente undervisningsmetoder som diagnostisk undervisning, problemløsning og undersøkelseslandskap. I steg 4 valgte vi oss, på bakgrunn av denne gjennomgangen, RME-undervisning som den undervisningsmetoden vi så mest formålstjenlig for vår intervensjonsstudie. Bakgrunnen for valget baserer seg på undervisningsmetodens natur, som gjør oppgavene mer forståelig og tilgjengelig for elevene. I tillegg til tidligere forskning som tyder på at RME-undervisning virker positivt på elevers deltakelse og oppnåelse (Se kapittel 2.4.7 om tidligere forskning). Suksesskriteriene var opprinnelig at elevene gjennom RME-basert undervisning skulle score bedre på en formell post-test, men ble senere omgjort til at elevene gjennom bruk av realistisk kontekst skulle få bedre forståelse for variabler, enklere kunne konstruere sammensatte algebraiske uttrykk og lineære likninger, og bedre forståelse for likhetstegnet og ekvivalens. I tillegg så vi på hvordan RME-undervisning kunne implementeres i praksis. Dermed planla vi ulike undervisningsseksjoner basert på prinsippene og oppbygningen til RME, sett i lys av resultatene fra pretesten.

Under planleggingen av undervisningen brukte vi Simon (1995) sin teori om hypotetiske læringsbaner. Læringsbanene fungerte både som veileder i designprosessen, men også som rettesnor underveis i undervisningen og som ledetråd for å bestemme fokuset for analysen. Trinn 5 handler om forberedende arbeid knyttet til den planlagte undervisningen. Dette innebærer gjennomtenkte valg av materialer, innhold, metoder for læring og undervisning, i tillegg til valg om forskningsprosedyrer, metoder og hvordan man samler data. Innebygd i aksjonsforskning kan man finne flere ulike forskningsdesign som inkluderer ulike metoder for å samle data. I vårt tilfelle innebar dette å ta observasjonsnotater og innsamling av elevbesvarelser, i tillegg til en pre- og posttest for å skape en oppfatning av elevenes matematiske prestasjoner i emnet (Cohen et al., 2018)**.** I steg 6 skal planen ut i livet, og det omhandler å overvåke, justere og evaluere det som skjer. Etter gjennomføring av aksjonen evalueres resultatet i steg 7. Vi bruker da suksesskriteriene fra steg 5 og de hypotetiske læringsbanene, for å evaluere i hvor stor grad problemet er adressert og løst. Til slutt skal man ifølge Cohen et al. (2018) gjennomgå og planlegge hva som skal gjøres i lys av evalueringene.

Vi valgte i vårt prosjekt å gjennomføre tre «aksjoner» eller undervisningssekvenser som til sammen inneholdt 4 ulike økter. De 4 øktene samlet skulle utgjøre én større aksjon med mål om å bedre undervisningen om algebraiske uttrykk og likninger, og dermed forbedre elevenes forståelse for variabler, algebraiske uttrykk og likninger, og ekvivalens og likhetstegnet. Vi analyserte altså hver undervisningsseksjon for å eventuelt justere og forbedre neste. Sentralt i figuren finner vi refleksjon og evaluering, fordi dette forekommer på alle stadier av aksjonsforskningen (Cohen et al., 2018). Dette innebærer at hvert steg i prosessen inneholder refleksjon og selvrefleksjon knyttet til videre arbeid med intervensjonen. Aksjonsforskning er ikke bundet til noen bestemt datainnsamlingsmetode, men man bruker ofte ulike metoder for å samle inn mest mulig relevant data (Christoffersen & Johannessen, 2012).

3.1.2 Utvalg

I og med at en av forfatterne allerede underviste en niendeklasse i matematikk ønsket vi å bruke denne klassen som forskningsobjekt. Videre var det også i denne settingen utgangspunktet for problemstillingen dukket opp. Vi anså én klasse som tilstrekkelig for å samle data til vårt forskningsprosjekt. Dette var både med tanke på tilgjengelig tid, størrelse på datamaterialet vi skulle analysere og problemstillingen vi skulle besvare. Vi tenkte også gjennom fordelene vi fikk av å undersøke en klasse som den ene forskeren allerede hadde kjennskap til, med tanke på kunnskap om tidligere erfaringer/resultater og relasjonen til elevene. I tillegg var dette bekvemt med tanke på Covid-19 situasjonen. Dette ble med andre ord et såkalt bekvemmelighetsutvalg, der forskeren hadde kjennskap til informanter (Christoffersen & Johannessen, 2012). Valget vårt av forskningsobjekter ga føringer med tanke på personvern og metodevalg, og stilte krav til nøye refleksjon rundt etiske overveielser (se kapittel 3.4).

3.1.3 Pre- og posttest

Ifølge Cohen et al. (2018) kan bruk av pre- og posttester være en god metode for datainnsamling og sekundærdata for å samle inn numerisk data, men ved bruk av tester er det flere forhold man må huske på. Viktigst er hvorfor vi bruker tester i det hele tatt. Vi ønsket å bruke en test av flere grunner. For det første ønsket vi å undersøke hvordan vårt utvalg responderte på en rekke oppgaver som var knytte til typiske utfordringer og misoppfatninger fra tidligere forskning på algebra. Dette både for å verifisere at «typiske» feil fra forskning også gjaldt for vårt utvalg, og for å tilpasse undervisningen vi hadde til rådighet til de vanskene vårt utvalg hadde. I tillegg utformet vi pre- og posttesten identisk for å kunne produsere et numerisk datagrunnlag vi kunne sammenlikne. Etter hvert som vi arbeidet med masteroppgaven, valgte vi å redusere fokuset på testene. Vi ønsket heller å ha undervisningen og funnene vi gjorde der som hoveddel da det var dette vår aksjonsforskning i hovedsak handlet om. Vi har for lite empirisk grunnlag til å gi en kausal konklusjon på om bedret resultat kommer som følge av RME-undervisning. Vi gjennomførte heller ikke prosjektet med en kontrollgruppe, altså kan vi ikke slå fast at de samme resultatene ikke hadde dukket opp hos en gruppe med en tradisjonell eller en alternativ undervisningsform.

Pretesten ble i hovedsak brukt som en del av planleggingen av undervisningen. Både med tanke på hvilke områder som vi ønsker å fokusere på i undervisningen, og hva som måtte antas å være mer krevende for elevene. Videre kunne den bidra til informasjon til de hypotetiske læringsbanene, både deres matematiske utgangspunkt, og hva vi kunne forventet at elevene skulle gjøre i ulike matematiske situasjoner. Selv om vi ikke kan generalisere resultatene, eller overføre de til andre situasjoner, vil vi likevel argumentere for at de gir oss nyttige innspill. Dette med tanke på refleksjoner rundt påvirkningen undervisningen hadde i denne spesifikke situasjonen og hvordan dette kan bidra til utvikling av praksisen. Testene ga oss en mulighet til å se noen forskjeller på hvordan elevene arbeidet med oppgaver med og uten kontekst, og individuelt kontra i samhandling med andre i undervisningen.

Testen (Se vedlegg 1) har tatt utgangspunkt i, og er revidert fra «Chelsea diagnostic mathematics tests – Algebra» (Hart et al., 1985). I og med at vi ønsket å fokusere på algebraiske uttrykk, har vi ekskludert de oppgavene vi opplevde som irrelevant for vårt formål. I tillegg har vi ut fra annen forskning (Berggren & Jom, 2020; Naalsund, 2012) lagd oppgaver som baserer seg på typiske misoppfatninger mange elever innehar. Dermed vil testen i stor grad likne en diagnostisk test, som er utformet for å identifisere typiske utfordringer og misoppfatninger med tanke på algebraiske uttrykk (Brekke, 2002; Cohen et al., 2018). Bakgrunnen for valget av denne typen oppgaver er at disse er konstruert for å avsløre eventuelle misoppfatninger hos elevene (Brekke, 2002).

Pre- og posttesten var identiske, og ble gjennomført med 4 ukers mellomrom. Pretesten ble gjennomført uken før intervensjonsperioden, og post-testen to uker etter siste undervisningstime (grunnet vinterferie). Resultatene fra pretesten ble ikke gjennomgått eller diskutert med elevene i mellomtiden. Testen består av 13 oppgaver, hvorav noen har underspørsmål. Noen oppgaver er helt åpne, mens andre er begrenset til et sant/usant spørsmål og er derfor lukket. Noen av oppgavene er tekstoppgaver, mens andre er begrenset til å «skrive uttrykkene så enkelt som mulig». Elevene fikk 60 minutter til rådighet, selv om en stor del av elevene var ferdig etter ca. 30 minutter. Vi ønsket ikke at tiden skulle sette begrensninger eller virke som et stressmoment og ga derfor elevene god tid til å gjennomføre oppgavene.

Testen er en ikke-parametrisk test fordi vi kun undersøker denne ene klassen over en mindre periode. Testen vår er gitt for denne bestemte klassen, altså gjør den ingen antagelser om fordelingen av populasjonen eller egenskapene til populasjonen (Cohen et al., 2018). Ikke-parametriske tester tilbyr lærere en mulighet for rask og relevant tilbakemelding, og kan brukes i svært spesifikke situasjoner (Cohen et al., 2018). Testen og elevsvar vil fungere som et grunnlag for planlegging av undervisningen. I tillegg vil resultatene fra pre- og posttest brukes til å underbygge observasjoner fra undervisningssituasjonen, og diskutere i hvilken grad et slikt undervisningsopplegg har overføringsverdi til formell algebraisk kompetanse. Ved å bruke og ta inspirasjon fra anerkjente og anvendte diagnostiske tester ønsker vi å øke validiteten i testen, og sørge for at testen måler det den er ment til å måle. Likevel må vi være observante i den videre analysen og diskusjonen på at vi ikke kan konkludere med kausale sammenhenger. Og vi kan ikke si for sikkert at et feilsvar på en oppgave betyr at elevene har en kjent misoppfatning. Vi kan ikke vite om det er andre faktorer som spiller inn og påvirker svaret til elevene.

3.1.4 Observasjon

En datainnsamlingsmetode som er godt egnet for å innhente data med tanke på vårt problemområde, er observasjon. Observasjon brukes når man som forsker ønsker førstehånds eller «levende» data fra sosiale situasjoner som skjer i naturlige settinger (Cohen et al., 2018).

Observasjon handler om å samle inn sanseinntrykk på en systematisk måte, gjennom å skrive ned det som skjer og bruke dette til å forstå mer ved analyse (Germeten & Bakke, 2013). Observasjonen vår ble gjennomført i tre undervisningstimer av 90 minutter i en klasse på niende trinn. Elevene var plassert på fem grupper med 3-5 personer per gruppe. Gruppene var tilfeldig plassert, og bestemt av deres kontaktlærer. Klassen består av 22 elever, men det var alltid noen borte så antallet elever til stede varierte fra 17 til 18 elever.

Hoveddelen av datamaterialet bygger på observasjonen av disse timene. Som nevnt tidligere var en av forskerne i studiet læreren til utvalget fra før. Vi opplevde det derfor som hensiktsmessig å selv gjennomføre undervisningen, og med dette påta rollen som fullt deltakende observatør. Å være fullt deltakende observatør vil si at man som forsker har stor grad av nærhet til elevene som observeres, og inngår i hendelsene på en naturlig måte (Germeten & Bakke, 2013). Som deltaker i undervisningen blir rollen som observatør delvis skjult, fordi man som lærer naturlig påtar seg en observerende rolle (Dalland, Bjørnestad & Andersson-Bakken, 2021). Som fullt deltakende observatør står man selv midt i aktiviteten, og man får førstehåndserfaring for hvordan aktiviteten utspiller seg. Selv om dette kan gi nyttig data, er rollen også svært krevende. Man har mye å tenke på samtidig, og flere hensyn å ta (Cohen et al., 2018). I vårt tilfelle innebar dette å gjennomføre undervisningen med en ny type undervisningsmetode, i tillegg til å være observant på nyttig data fra elevene, være veiledende, men samtidig ikke for styrende, og registrere relevant data underveis. Det er derfor viktig å planlegge godt, tenke gjennom hva man ser etter og hva som kan dukke opp av uforutsette hendelser for eksempel (Cohen et al., 2018). Med tanke på at læreren ikke har mulighet til å skrive underveis ble observasjons- og refleksjonsnotater skrevet ned etter undervisningsøktene. Disse bidrar til å skape en distanse mellom læreren og de prosessene man har vært en del av. På denne måten kan det bli enklere å reflektere over de prosessene som har vært gjennomført (Postholm & Jacobsen, 2011).

Flere forskere kan, med fordel, observere samme fenomen. Vi valgte derfor at en av forskerne var fullt deltakende, mens den andre som ikke hadde kjennskap til utvalget fra før inntok rollen som ikke-deltakende og delvis deltakende. På den måten ville vi få fatt i både indre og ytre aspekter ved observasjonen (Germeten & Bakke, 2013). I tillegg vil forskeren som ikke hadde kjennskap til elevene bidra til et mer objektivt bilde av situasjonen. Observatøren noterte sine observasjoner med penn og papir. Ved å benytte oss av videoobservasjon eller lydopptak hadde vi hatt mulighet for å registrere mer data, men vi vurderte at dette ikke var nødvendig. Ved å være to observatører får vi likevel inn mye data, og video/lydopptak er mer problematisk med tanke på personvern og godkjennelser. Vi vurderte det derfor som godt nok uten. I helklasseaktiviteten satt observatøren bakerst i klasserommet og var ikke-deltakende. I aktiviteter i mindre grupper deltok forskeren tilfeldig i aktiviteten sammen med den andre forskeren, og kunne stille oppklarende spørsmål eller be elevene forklare hva de hadde tenkt. På denne måten kunne vi innhente mer data og observere mer enn en forsker kan alene. Hen var altså en delvis deltakende observatør, eller i «den balanserte deltakerrollen» (Postholm, Jacobsen & Søbstad, 2018).

Begge forskere forsøkte å være så objektive som mulig for å registrere så riktig og autentisk data som mulig (Cohen et al., 2018). I og med at forskeren tar med seg kunnskaper, erfaringer og opplevelser inn i settingen, vil det være umulig å være helt objektiv (Christoffersen & Johannessen, 2012), men vi forsøkte å øke objektiviteten ved å ha en utenforstående som ikke har kjennskap til klassen fra før som delvis deltakende observatør. Dokumentasjonsmetoden som ble brukt av den delvis deltakende observatøren var feltnotater skrevet ned i observasjonsskjemaer. Observasjonsnotatene kan imidlertid ikke oppfattes som en objektiv eller verdinøytral beskrivelse av handlingene som utspiller seg, men heller et resultat av de utvelgelsene lærerforskeren gjør i løpet av observasjonene (Postholm & Jacobsen, 2011).

Utgangspunktet for observasjonsnotatene var ustrukturert og åpen observasjon, for å skaffe en rik beskrivelse av situasjonen (Cohen et al., 2018). Observasjon kan føre til at man «går seg vill» og at man ønsker å notere alt man ser (Johannessen, Christoffersen & Tufte, 2021). Dette merket vi i vår studie etter første undervisningstime. Man kan risikere å forsøke å rapportere «alt» om man har for ustrukturerte observasjonsnotater. Da kan men ende med å overse hva man faktisk forsker på, og analysearbeidet får et for stort omfang (Fangen, 2010). Vi justerte og reviderte derfor observasjonsskjemaet med stikkord eller kategorier vi ønsket å se etter (Se vedlegg 3). Vi valgte ut fra RME-teorien stikkordene; bruk av kontekst, matematisering, didaktisk fenomenologi og veiledet gjenoppdaging, og besluttet at vi skulle observere om dette kom til syne i undervisningen. Dette var ikke temaene vi endte opp å analysere etter, på grunn av vårt endrede fokus til bruken av realistisk kontekst (Se kapittel 3.2), og observasjonen kunne derfor vært mer spisset mot vår nåværende problemstilling om vi heller hadde brukt dette.

Observasjonen ble likevel delvis strukturert, fordi observasjonsskjema fortsatt var relativt åpent. Vi hadde ikke et synlig skille mellom observasjon og tolkning, men valgte å markere tolkninger med en annen farge. På denne måten kunne vi senere gjøre tolkninger av situasjonen beskrevet og reflektere over om de tolkningene som ble gjort høres rimelige ut (Dalland et al., 2021). Observasjonsskjemaet var også delt inn etter de ulike gruppene elevene var plassert i for å lettere kunne sammenlikne ulike timer med hverandre og se eventuelle sammenhenger mellom testene og undervisning. Dette var også en fordel da vi senere valgte å fokusere på de hypotetiske læringsbanene til to av gruppene som analysegrunnlag (Se kapittel 3.2 analysemetode).

I tillegg til observasjonen av klasseromsaktivitetene valgte vi også å samle inn elevarbeidet. Dette for å kunne huske flere observasjoner og flere detaljer, og kunne analysere det skriftlige matematiske arbeidet de hadde gjort. Elevarbeidet var både blanke ark som elevene hadde brukt til å svare på oppgaver fra lysbildepresentasjonen og oppgaveark til «vekt»-økten (Se vedlegg 2, økt 3). Disse ble sentrale for resultatene da de knyttet arbeidet sammen med observasjonsnotatene, og det var her vi fikk observert løsningsstrategier og arbeidsmåter elevene brukte.

3.2 Analysemetode

For å besvare oppgavens problemstilling og forskningsspørsmål er det nødvendig å organisere og trekke mening ut av datamaterialet som ble samlet inn. Dataen i denne undersøkelsen er i hovedsak kvalitativt, og det finnes ingen fasit for hvordan man skal analysere dette. Den kvalitative dataanalysen handler om hvordan man benytter seg av datamaterialet for å oppnå forståelse, forklaring og tolkning av fenomenet som forskes på (Cohen et al., 2018). Dette innebærer å organisere, beskrive, forstå, forklare og gi mening til data og oppdage mønstre. Analyseprosessen vår ble både drevet av teori og empiri, og bar derfor preg av en dynamisk analyseprosess.

Datamaterialet vårt bestod som nevnt av observasjonsnotater, lærerlogg, elevarbeid og elevbesvarelser på pre-/posttester. Med andre ord var datamaterialet relativt stort og flytende, og vi oppfattet det som noe uhåndterlig og vanskelig å trekke konklusjoner ut fra. I tillegg var problemstillingen i utgangspunktet ganske vid. Dette brukte vi mye tid på, og gikk mye frem og tilbake på fremgangsmåte og valg av temaer vi analyserte ut ifra. Først sorterte vi deres skriftlige elevarbeid etter bordnummer, før vi analyserte resultater på pre- og posttesten for å undersøke om disse kunne sees i sammenheng med hva vi hadde observert i timen (Se beskrivelse av klasseromsoppsettet i kapittel 4.1). Under analysearbeidet av testene gjorde vi ikke et skille mellom kognitive feil og slurvefeil, eller noen annen grad av uriktig svar. Først ved den kvalitative analysen av undervisningen og elevarbeidet gikk vi inn i de individuelle svarene og tolket disse i lys av resterende data og relevant teori. I tillegg diskuterte vi ut fra teorien vi hadde lest om algebra og vanlige misoppfatninger, og om det var noen overordnede temaer eller kategorier som gikk igjen i elevenes besvarelser. Teorien kan ha en viktig rolle i analysen da den kan være med å støtte opp og utvikle forståelse for funnene (Postholm & Jacobsen, 2011; Postholm et al., 2018). Dataen virket likevel fortsatt uhåndterlig og vanskelig å trekke mening ut fra. For å gi ytterligere mening til dataen, er det naturlig å utforske og gi mening til dataen, for eksempel gjennom å organisere og kategorisere den inn i nøkkelkonsepter (Tjora, 2012).

Vi ønsket derfor å identifisere noen mønstre eller temaer, slik at dataen ble mer oversiktlig og håndterbar. Dermed endte vi med å la oss inspirere av en tematisk analyse, som er en fleksibel metode som kan bidra til et rikt og detaljert datamateriale (Tjora, 2012). Det finnes ingen klar definisjon på hva en tematisk analyse er, eller hvordan man gjennomfører det (Braun & Clarke, 2006). Det handler om å identifisere noen overordnede temaer som du finner igjen i dataene, og som henger sammen med problemstillingen. I tillegg til å sortere dataen etter temaer valgte vi også å begrense oss til å hovedsakelig analysere dataen til to av gruppene (totalt 7 elever). Det var disse som hadde vært store bidragsytere i undervisningen, og hadde fullført alle oppgavene vi ga dem i timen. Altså var dette elevene vi hadde mest interessant data på. Vi formulerte tre temaer som vi organiserte og analyserte dataen vår inn i. Disse temaene ble videre formulert til våre tre forskningsspørsmål. Temaene vi først formulerte i forbindelse med problemstilling og forskningsspørsmål var; forståelse for den ukjente, konstruere algebraiske uttrykk og løsning av lineære likninger og forståelse av likhetstegnet og ekvivalens. Ut fra dette ble oppgaven mer konsentrert og oversiktlig, og det ble mer veiledende for oss å kunne konkludere på den overordnede problemstillingen (Braun & Clarke, 2006). Våre forskningsspørsmål er:

- *Hvordan kan en realistisk kontekst påvirke elevenes tolkning av variabler?*
- *Hvordan kan en realistisk kontekst støtte elevenes arbeid med konstruksjon av sammensatte uttrykk og lineære likninger?*
- *Hvordan kan en realistisk kontekst påvirke elevenes tolkning av likhetstegnet og ekvivalens?*

På den ene siden skal problemstillingen styre valg av teori og forskningsmetode, og derfor kan det virke mot sin hensikt at vi endret problemsstillingen etter innsamlet data (Johannessen et al., 2021). På den andre siden skal problemstillingen være med å avgrense og gi retning til arbeidet, og når vi til å begynne med hadde valgt en for generell og omfattende problemstilling så vi dette som nødvendig. Ved å spisse problemstillingen til å konsentrere oss om elevers bruk av realistisk kontekst, og hvordan denne spilte inn på disse tre områdene oppnår vi nå en mer oversiktlig analyse og diskusjon, som kan føre til mer konkrete svar på forskningen. Dette er i tråd med det Postholm og Jacobsen (2011) beskriver som deskriptiv analyse. Kodingsprosessen vår gikk videre ut på å gå gjennom testene, observasjonsnotatene, elevarbeidet og lærerloggen får å sortere ulike interessante funn under de tre forskningsspørsmålene. Vi noterte ned dataen vi fant under hvert av de tre områdene der vi mente den passet best og noterte også om det var noen funn som passet inn i flere av dem. Underveis i denne prosessen ble også data som vi ikke så som relevant for problemstillingen ekskludert. Dette gjelder både innspill fra elevene og hele oppgaver fra undervisningen. Postholm og Jacobsen (2011) mener denne prosessen er helt uunnværlig for å redusere antall enheter som det skal jobbes videre med og gruppere det som dekker det samme.

3.3 Kvalitet i forskningen (Validitet og reliabilitet)

Det er flere utfordringer knyttet til forskningens validitet og reliabilitet, særlig når læreren er forsker i egen undervisningspraksis. Begrepene reliabilitet og validitet blir ofte knyttet til kvantitativ forskning, mens i kvalitativ forskning er det diskutert om de i det hele tatt skal brukes (Ringdal, 2013; Tjora, 2012). I kvalitativ forskning blir ofte begrepene troverdighet og bekreftbarhet brukt fremfor reliabilitet og validitet. I tillegg brukes overførbarhet fremfor generaliserbarhet (Ringdal, 2013). Aksjonsforskningen bygger på et sett av verdier, og er derfor ikke nøytral. Forskerne ønsker å endre praksis, og ved å velge aksjonsforskning prioriterer man bestemte verdier. I vårt tilfelle prioriterer vi for eksempel at arbeidet med kontekster og i grupper fører til forståelse. Problemet er at det også finnes konkurrerende verdier og prioriteringer og ulike syn på hva som er en god praksis (Ulvik, 2016).

En vurdering av kvalitative datas reliabilitet er egentlig forskerens refleksjon over hvordan datainnsamlingen har foregått, med sikte på å bli seg bevisst mulige feilkilde (Ringdal, 2013). Forskerens kunnskap er en ressurs, men hvordan kunnskapen brukes i en analyse, må gjøres eksplisitt. Med tanke på oppgavens troverdighet eller reliabilitet er særlig utvalget en faktor som vi måtte reflektere rundt. Tidligere kjennskap til utvalget, i tillegg til at utvalget er såpass lite kan svekke troverdigheten (Tjora, 2012). De som blir observert kan bli påvirket til å oppføre seg på én måte når de kjenner forskeren fra før, men dette trenger ikke nødvendigvis være negativt. Ved å kjenne deltakerne vil forskeren vite hvordan de vanligvis oppfører seg eller presterer, og vil i sin observasjon kunne reflektere rundt dette. Kunnskap om deltakerne kan være en fordel for å stille presise spørsmål og tilpasse undervisningsopplegget, samtidig som det kan være en ulempe om man har med seg for mange forutinntattheter (Tjora, 2012). Derfor er det viktig å være transparent i forskningen, slik at leseren selv kan vurdere reliabiliteten (Cohen et al., 2018; Tjora, 2012). Samtidig vil den utenforstående forskeren fungere som en slags sikkerhet. Ved at flere forskere observerer det samme, og reflekterer sammen kan troverdigheten øke (Postholm et al., 2018).

Reliabilitet handler også om å kunne reprodusere en studie, noe som vil være vanskelig i vår oppgave. Møtet mellom forskeren, forskningsfeltet og menneskene som deltar i studien vil fortone seg forskjellig i kvalitative studier (Postholm et al., 2018). Derfor vil funn i kvalitative studier representere kontekstuell kunnskap, og forskerens subjektivitet må legges frem som en del av kontekstene som funnene skal forstås innenfor (Postholm et al., 2018). I vårt tilfelle vil det si at vi viser til vår kunnskap, erfaringer og relasjoner med forskningsfeltet, og så langt det lar seg gjøre begrunne alle valg gjort i forskningsprosessen. Gjennom hele studiet har vi, forskerne, reflektert sammen rundt undersøkelsen og om vi som deltakere kan ha påvirket resultatet. I tillegg har vi forsøkt å beskrive undervisningsopplegget og valg gjort rundt dette såpass detaljert at det kan bli utført av en annen lærer i en helt annen klasse. Disse resultatene vil ikke nødvendigvis bli helt like, da alle lærere og elever er forskjellig og har ulike utgangspunkt.

Validitet eller bekreftbarhet handler om hvor gyldig dataen er, altså om vi har dekning for våre fortolkninger av funn og resultater (Cohen et al., 2018; Postholm & Jacobsen, 2011). I vår oppgave har vi først og fremst lest mye litteratur og fagfellevurderte artikler rundt temaene vi undersøker, og gjort sammenlikninger mellom det vi har funnet i feltet knyttet til tidligere forskning. Forskere trekker også frem triangulering for å øke validiteten (Cohen et al., 2018; Postholm & Jacobsen, 2011). Vi har benyttet oss av triangulering til en viss grad. Ved å være to forskere, benytte ulike datainnsamlingsmetoder (deltakende og delvis-deltakende observasjon, lærerlogg, innsamling av elevarbeid og en pre- og posttest) og samle inn data på flere tidspunkt får vi «tykkere» og mer beskrivende data.

I tillegg til dette anbefaler Cohen et al. (2018) å ikke overse avvik eller overraskelser som dukker opp underveis i observasjonen. I kvalitativ forskning blir forskningen til underveis, og med en delvis strukturert observasjon er det nettopp slike overraskelser som kan lede til verdifull data. Dette gir utslag i form av overraskende svar på pretesten eller elevuttalelser i undervisningen. På den andre siden er det en utfordring å opprettholde validiteten med observasjon som metode. Forskerens forståelse vil kunne påvirke og legge verdier i det som er observert (Germeten & Bakke, 2013). Vi som forskere er en del av den verdenen vi forsker på, og kan derfor ikke være helt objektive om den, selv om man som forsker skal strebe å være så ærlig som mulig i rapporteringen (Cohen et al., 2018). Underveis har vi vært observante på, og vurdert, rivaliserende forklaringer. Altså at et elevsvar ikke nødvendigvis kommer som følge av undervisningsmetoden, eller at en forbedring på testresultatet ikke trenger å ha en sammenheng med den gjennomførte undervisningen. Vi ønsket ikke gå i det Postholm et al. (2018) kaller den «kausale fella», og forsøkte heller å undersøke den kausale prosessen, altså hva som skjedde i klassen når dette nye undervisningsopplegget ble prøvd ut.

Overførbarheten eller den ytre gyldigheten, som i kvantitative studier ofte blir omtalt som generaliseringen, er også en utfordring. I og med at utvalget er relativt lite, og datainnsamlingen har skjedd over en kortere periode vil vi ikke kunne trekke noen generaliserende slutninger. Med andre ord kan vi ikke gjøre noen statiske generaliseringer (Postholm et al., 2018). Aksjonsforskning tenderer ofte til å holde seg litt for seg selv, og resultatene blir derfor ofte kun gjeldende for et utvalg og en situasjon. Hvis vår forskning skal produsere kunnskap som har overføringsverdi, må den rapporteres, og den som leser må få innsikt til å se likheter med egen situasjon (Ulvik, 2016).

Det kan argumenteres for at prosjektet vil kunne ha en viss overførbarhet, fordi det likner det som tidligere har blitt gjort av andre forskere og i andre land, men det kan allikevel ikke generaliseres for å gjelde alle liknende situasjoner. Altså vil prosjektet ha en viss naturalistisk generalisering (Postholm et al., 2018). En slik generalisering innebærer at teksten blir nyttig og relevant for leseren ved at den kan fungere som et tankeredskap og et utviklingsredskap for leserens egen praksis. Tjora (2012) hevder at oversettelsen til overførbarhet er problematisk, fordi generalisering er godt etablert som en kvalitetsindikator for forskning, men ikke alle studier skal ha som mål å generalisere noe. For denne studien innebærer dette et større fokus på å belyse et konkret problem om algebraundervisning, snarere enn å utvikle innsikt som går langt ut over dette (Tjora, 2012). Ulvik (2016) skriver at verdien til arbeidet avhenger av om leseren finner det overbevisende, om det er autentisk, troverdig og genuint. På sitt beste kan aksjonsforskning oppmuntre og inspirere andre i lignende kontekster om de ser likhet mellom sin situasjon og andres.

3.4 Etiske overveielser

Aksjonsforskning fordrer etiske avveininger og vurderinger hele veien fordi det dreier seg om samhandling mellom mennesker, og vi skal forske på barn. I planleggingsfasen har vi utformet og gjennomført en ROS-analyse (risiko og sårbarhetsanalyse). I tillegg har vi fått prosjektet godkjent av NSD (Norsk vitenskapelig datatjeneste) og fulgt deres etiske retningslinjer for forskningsprosjekter.

Informantene ble i forkant av studien informert muntlig ved flere omganger om studien før de fikk et informasjonsskriv og samtykkeskjema som foresatte måtte skrive under på. I tillegg ble godkjennelse fra skolen til å forske på en klasse hentet inn. Selv om deltakerne var under 15 år, og dermed måtte ha samtykke av foresatte, var det viktig for oss at elevene også ble spurt og samtykket. Samtykkeskjemaet ga informasjon om hva elevene deltok på, at det var frivillig, og at de som deltok ikke skulle bli skadelidende. I og med at forskeren var kjent, og at forskningen foregikk i undervisningstiden, var det også viktig å få frem at deltakelse i prosjektet ikke ville ha noen innvirkning på karakteren deres i matematikk. Særlig så vi det hensiktsmessig å understreke at pre- og posttesten ikke lå til grunn for elevenes vurdering i matematikk, og at formålet med disse testene utelukkende var for å sammenlikne elevenes prestasjon før og etter undervisningsoppleggene. Disse resultatene vil kun bli brukt til å tallfeste elevenes prestasjon i sammenheng med forskningsprosjektet. Samtlige elever fikk samtykke om at vi kunne samle inn besvarelsene deres (test og oppgaver i undervisningen). Foresatte til to av elevene ønsket ikke at deres barn skulle bli observert i undervisningen.

Disse elevenes muntlige innspill i undervisningen er derfor ikke notert ned, og vil heller ikke brukes som en del av datamaterialet for denne artikkelen.

Det er også en utfordring når læreren og forskeren er samme person, fordi det stilles ulike krav til en lærer og til en forsker (Furu, 2013). I tillegg vil det som skjer i klasserommet, gjennom aksjonsforskning, få et bredere publikum. Derfor er det blant annet viktig å tenke på taushetsplikten (Ulvik, 2016). Med dette tatt i betraktning skrev begge forskere under på taushetserklæring til skolen, og var påpasselig med tanke på å diskutere situasjoner utenfor klasserommet. I tillegg var vi nødt til å tenke grundig gjennom anonymisering og hvilke data vi kunne samle inn. Under utarbeidelsen av ROS-analysen var særlig tematikken om elevenes anonymitet diskutert. Med tanke på utvalget vil det ikke være umulig å oppsøke hvilken klasse vi har forsket på, derfor er det ekstremt viktig å reflektere rundt alle valg slik at elevene ikke vil være skadelidende av forskningen. Dette innebærer at vi har anonymisert så godt det lar seg gjøre. Navn, kjønn eller andre beskrivende opplysninger som kan identifisere enkeltpersoner vil ikke bli nevnt i denne oppgaven. Elevbesvarelser, både muntlig og skriftlig, vil kun bli diskutert i henhold til gruppene de jobbet i. I tillegg gjorde vi noen valg allerede før datainnsamlingen. Vi valgte å ikke intervjue eller gjøre lydopptaker og videoobservasjoner, da dette stiller strengere krav til personvern. Videre undersøker vi kun det matematiske arbeidet til elevene, og dermed er det ikke lagt vekt på enkeltelevers forhistorie knyttet til kompetanse eller oppførsel som kan stå i fare for å identifisere enkeltpersoner.

4 Undervisningsopplegget

I dette kapittelet skal vi ta for oss planleggingen og utformingen av undervisningsopplegget som er brukt i dette forskningsprosjektet. Opplegget i sin helhet ligger vedlagt som vedlegg nummer 2. Undervisningsopplegget tok utgangspunkt i teorien om realistisk matematikkundervisning (RME) og bruken av realistiske kontekster, som beskrevet i kapittel 2.4. Undervisningsøktene ble planlagt i henhold til teorien om hypotetiske læringsbaner, som er tett knyttet til RME.

4.1 Bakgrunn for undervisningsopplegget

Vi ønsket i utgangspunktet å gjennomføre undervisningsopplegget til Manchester Metropolitan University om algebra (2018-2020), men så at dette opplegget både strakk seg over en lengre periode enn hva vi hadde forespeilet oss, og var beregnet for yngre aldersgrupper enn utvalget vårt. Derfor ønsket vi å revidere et slik opplegg slik at det passet vårt utvalg og tiden vi hadde til rådighet. Som nevnt i kapittelet om pre- og posttest var resultater og refleksjoner vi gjorde oss etter pretesten en del av grunnlaget for planleggingen av undervisningsøktene. I tillegg til denne kunnskapen brukte vi også det vi hadde lært om vanlige feil og misoppfatninger hos elevene inn i utformingen av oppleggene (Se kapittel 2.2 og 2.3).

Prinsippene og kjennetegnene til RME-undervisning var utgangspunktet for hele undervisningsperioden. Den realistiske konteksten er sentral, og all undervisning bygger på dette. Konteksten skal være et hjelpemiddel for elevene i arbeid med algebraiske problemstillinger. I tillegg ønsket vi å legge opp til muligheter for både horisontal- og vertikal matematisering. Med andre ord ønsket vi å finne situasjoner og oppgaver som fungerer som kontekster for en utvikling av matematiske konsepter, verktøy eller prosedyrer for elevene, og planla hvordan læreren kunne veilede de på veien mot de matematiske målene. I «RME-vokabularet» blir dette kalt didaktisk fenomenologi og veiledet gjenoppdagelse (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Vi la ikke like stor vekt på det siste kjerneprinsippet, emergent models, men prøvde å skape kontekstspesifikke visuelle modeller som elevene kunne bruke i arbeidet med algebra.

For å oppnå målene lagde vi på forhånd hypotetiske læringsbaner for undervisningen. Det overordnede målet for vår aksjon, eller øktene våre, var at elevene skulle oppnå en formell forståelse av den variabler og ekvivalens, gjennom lineære likninger. Ved å gjøre matematikken mer tilgjengelig for elevene gjennom en realistisk kontekst ønsket vi at elevene skulle nærme seg dette målet. I realiteten vil det ikke være sannsynlig at alle elevene oppnår en formell algebraisk forståelse, eller at de får rettet opp i alle misoppfatninger. Elever har ulikt matematisk utgangspunkt, motivasjon og arbeidstempo, og det vil derfor være naturlig at de følger noe ulike læringsbaner og ender på ulikt sluttpunkt (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). For å oppnå det overordnede målet lagde vi også separate, men sammenhengende læringsmål for hver økt. Disse er formulert videre under beskrivelsen av hver økt. Det forventede utgangspunktet til elevene baserte seg på resultater fra pretesten, men ble også diskutert og revidert for hver økt med utgangspunkt i de foregående øktene.

De hypotetiske læringsbanene for hver økt er utformet etter tre punkter, og den overordnede hypotetiske læringsbanen så slik ut: Det første punktet (A) er elevenes forventede utgangspunkt, basert på elevsvar fra pretesten. Det andre punktet (B) var at elevene via en realistisk kontekst skulle arbeide med matematikken på et uformelt nivå. Før de til slutt nådde målet om å formulere oppgavene på et formelt algebraisk nivå (C). Målet (punkt C) til de fire øktene ble valgt ut fra resultater på pretesten og kunnskap om typiske eller vanlige feil hos elever. Vi kom som nevnt frem til tre overordnede temaer, som senere ble omformulert til forskningsspørsmål, og vil bli drøftet i diskusjonen av denne oppgaven.

- *Hvordan kan en realistisk kontekst påvirke elevenes tolkning av variabler?*
- *Hvordan kan en realistisk kontekst støtte elevenes arbeid med konstruksjon av sammensatte uttrykk og lineære likninger?*
- *Hvordan kan en realistisk kontekst påvirke elevenes tolkning av likhetstegnet og ekvivalens?*

De fire ulike øktene med deres hypotetiske læringsbaner, og planleggingen av disse er beskrevet under.

4.2 Organisering av øktene

Øktene foregikk i et klasserom med 17-18 elever fordelt på 5 bord med 3-5 elever på hvert bord. Vi har i analysen av resultatene og diskusjonen valgt å undersøke 2 av disse bordene for å svare på vår problemstilling. Undervisningen foregikk over tre undervisningstimer på 90 minutter med 5 minutters pause halvveis i økten. Vi valgte å beholde gruppefordelingen som allerede var i klassen, som ifølge kontaktlæreren, var heterogene og tilfeldig valgt.

Undervisningen inneholdt noe introduksjon og veiledning fra læreren, men vi ønsket at elevene i størst mulig grad skulle oppdage matematikken på egenhånd. Øktene vekslet mellom klasseromsdiskusjon og gruppearbeid. Lærerens rolle er å veilede elevene gjennom det matematiske landskapet. Det er vanskelig for elevene å nå de matematiske målene alene, og dermed har læreren en proaktiv rolle i å veilede og orkestrere undervisningen (Stephan et al., 2014).

4.3 Økt 1 – Binders

Figur 3: Skjermbilde fra økt 1 - Binders

Den første økten blir kalt «Binders», der vi introduserte en kontekst med en boks med ukjent antall binders for å hjelpe elevenes forståelse for variabler og utrykke seg algebraisk. Undervisningsøkten tar utgangspunkt i en lysbildepresentasjon på en ressursside for lærere (TES, 2015). Læringsmidlene som ble brukt var visuelle modeller i form av bilder på en PowerPoint-presentasjon, og elevene skulle diskutere både i gruppene de satt i og i helklassen. Den hypotetiske læringsbanen for økten så slik ut:

A – Elevenes utgangspunkt: mange av elevene så på variabler som enten et objekt eller som et spesifikt tall.

B – oppdagelse av matematisk innhold fra konteksten: visuell kontekst hvor elevene ikke kan gi et nøyaktig numerisk svar, og hvor de skal uttrykke endringer i konteksten ved hjelp av sammensatte uttrykk

C – Formell representasjon: elevene utforsker og oppdager at variabler ikke nødvendigvis trenger å stå for et spesifikt tall, og at et svar på en oppgave kan være av ukjent verdi. I tillegg kan de uttrykke ulike situasjoner algebraisk

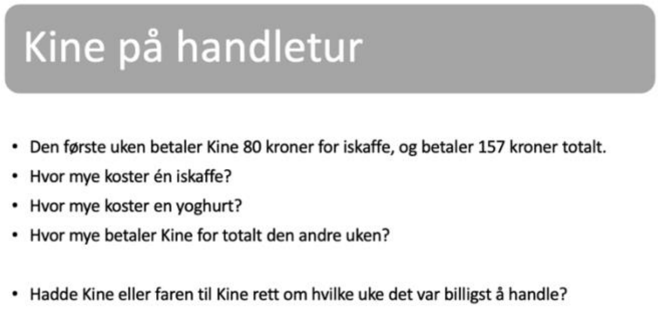
Som en del av den hypotetiske læringsbanen var det noen didaktiske situasjoner eller utfordringer vi hadde sett for oss i denne økten, med utgangspunkt i resultatene fra pretesten. Vi forventet at flere elever ville ha vanskeligheter med å forstå hvordan de kan regne når de ikke vet hvor mange binders det er. Vi ønsket å la elevene selv oppdage, gjennom utprøvning og diskusjon, at antallet binders vanskelig lar seg tallfeste. Å bruke en variabel blir derfor et naturlig steg videre. Ved å vise elevene at en bokstav kan stå for en ukjent verdi, vil elevene i neste steg oppdage at bokstaver lar oss uttrykke sammenhenger på en kortfattet og presis måte. Konteksten hjelper elevene til å se at de har kunnskap, og hjelper elevene med å forestille seg for eksempel x-10 som «10 mindre enn noe vi ikke vet».

Innledningsvis ble elevene bedt om å gjette antall binders i boksen (Se figurnummer 3). Vi ønsket å få opp ulike svar for å vise at det er vanskelig å vite nøyaktig hvor mange binders det er. Dette er ment å lede elevene videre til å oppdage at vi kan representere antall binders i boksen ved å bruke bokstaver (x, n, b eller liknende). Elevene skal videre bruke variabelen til å lage uttrykk som passer til konteksten for å vise hvor mange binders det er totalt i hvert tilfelle. Vi ønsket at elevene skulle lage algebraiske uttrykk for alle endringene i konteksten. Den hypotetiske læringsbanen legger til rette for at elevene kommer frem til hvordan de uttrykker endringer av konteksten ved hjelp av variabler, som senere kan støtte dem i arbeidet med likninger (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Deretter får elevene vite at en boks inneholder 300 binders, og skal nå kunne bruke uttrykkene de har laget til å regne ut antall binders i hvert tilfelle. På denne måten ønsker vi at de oppdager sammenhengen mellom den aritmetiske regningen i numeriske og algebraiske uttrykk, og at de forvisser seg om at uttrykkene stemmer. Altså konsoliderer sammenhengen mellom konteksten og de algebraiske uttrykkene. Etter dette får de vite at boksen kun inneholdt 267 binders og skal igjen regne ut antall binders i hvert tilfelle, med formål om at elevene skal oppdage at en bokstav ikke er nødt til å ha én bestemt verdi. I denne oppgaven bruker elevene variabelen som en plassholder for en verdi som først er ukjent for dem. Alle uttrykkene inneholder kun numeriske endringer, og vi forventer derfor at dette skal være overkommelig for de fleste elevene. Baktanken er at elevene skulle få forståelse for hvordan bokstaver kan brukes i matematikk, og at vi senere skal bruke konteksten med at variabelen (for eksempel b) står for mengden binders i boksen, og ikke er et eget objekt, eller brukes for å sette navn bindersboksen eller binders.

4.4 Økt 2 – Kine på handletur

Figur 4: Skjermbilde fra undervisning, bilde 1

I den andre økten, «Kine på handletur», baserer konteksten seg på at Kine skal handle yoghurt og iskaffe. Dette er både en situasjon elevene selv kan komme i, og varer de vanligvis handler har kjennskap til. Vi ønsker med denne konteksten å hjelpe elevene til å konstruere algebraiske uttrykk ut fra en kontekst. Den hypotetiske læringsbanen var formulert slik:



Figur 5: Skjermbilde fra undervisning, bilde 2

A – Elevenes utgangspunkt: mange elever opplevde det som utfordrende å konstruere algebraiske uttrykk (fra pretest), og se sammenhengen mellom variabler, eller endringer i variabler

B – oppdagelse av matematisk innhold fra konteksten: Elevene skal lage sammensatte uttrykk med flere variabler som representerer en kontekst. De må forholde seg til to relaterte kontekster, som gjør at definisjonene av variablene må være helt presise, og elevene oppdager at upresise definisjoner av variablene hindrer dem i å formulere og å tolke uttrykkene.

C – Formell representasjon: Elevene kan formulere og tolke sammensatte algebraiske uttrykk, og forstå sammenhenger mellom ekvivalente uttrykk, og sammenhenger mellom relaterte uttrykk.

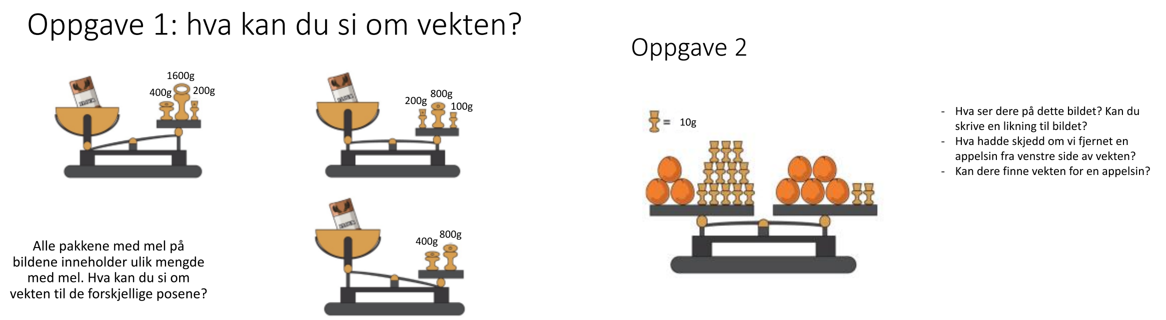
Forventede utfordringer vi hadde sett for oss til denne økten handlet for det første om elevenes tolkning av bokstaver. Vi forventet at flere elever ville tolke variabler som en ukjent mengde etter introduksjonsøkten, men også at en del av dem fortsatt kunne tolke bokstaven som en benevning. I tillegg forventet vi at bruken av variabler kunne være en utfordring for flere, og at de var avhengig av numeriske verdier for å kunne forstå oppgaven i sin helhet.

Det matematiske målet for økten var at elevene skulle uttrykke ukjente verdier med bokstaver, og lage likninger basert på konteksten. I RME handler det mye om å få forståelse av et matematisk konsept gjennom en kontekst, der konteksten gir elevene pekepinner for å utvikle strategier, bygge på matematisk kunnskap og kan være drivkraften for vekst i matematisk forståelse (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Både å forstå hva de ulike variablene representerer og det å sette opp et algebraisk uttrykk var utfordrende for flere av elevene. Konteksten var tenkt å gi elevene en overgang fra elevenes naturlige språk, som for eksempel «Kine kjøper fem iskaffe, og syv yoghurter», over til enn algebraisk likning på formen $ax + by = c$ for å uttrykke prisen.

Den hypotetiske læringsbanen tenkt for elevene i denne økten starter med å uttrykke situasjonen med to variabler Gjennom kontekst skal elevene formulere et algebraiske uttrykk som representerer prisen til handleturen. Etter dette får elevene oppgitt endring i prisen til produktene i form av dobling og halvering, med formålet om at de skal vise endringen gjennom de opprinnelige uttrykkene. De skal videre sammenlikne utrykkene den første og andre uken, og undersøke om de kan si noe om hva som er dyrest/billigst. Uttrykkene elevene kommer frem til skal diskuteres og sammenliknes i hele klassen. I tillegg skal uttrykkene fra den opprinnelige konteksten til endret kontekst sammenliknes og diskuteres for å få et innblikk i hva som skjer med hele uttrykket når variabelen endres. Til slutt blir de presentert for numeriske verdier som sammen med uttrykkene vil gi elevene mulighet til å verifisere eller forkaste deres hypoteser om hvorvidt prisen er lavest den første eller andre uken

Hensikten med oppgavene er at elevene oppdager at de ikke er avhengig av numeriske verdier for å uttrykke et matematisk forhold, og at svar på en oppgave også kan være et algebraisk uttrykk. Videre skal elevene diskutere og reflektere, fortsatt uten å vite hva elementene koster, om når Kine brukte minst penger. Altså skal de sammenlikne uttrykkene sine fra den originale konteksten og etter prisjusteringene. Målet er at elevene skal undersøke variablene, og se hvordan en endring av en variabel påvirker hele uttrykket. Først etter dette får elevene numeriske verdier å jobbe med, og deres oppgave blir nå å regne ut om deres hypoteser stemte eller ikke. Dette danner et godt grunnlag for en klasseromsdiskusjon rundt uttrykkene, variablene og påvirkningene endringer har.

4.5 Økt 3 – Vekt



Figur 6: Skjermbilde fra undervisning

Denne økten hadde til formål å se likhet og ulikhet i lineære likninger (likevekt). Opprinnelig er undervisningsopplegget utformet av Manchester Metropolitan University (2018-2020), men vi har forkortet, oversatt og revidert opplegget slik at det bedre passer vårt utvalg. Økten skiller seg litt ut fra de andre øktene ved at denne inneholder flere oppgaver, men modellen med vektskåler er gjennomgående i alle oppgavene. Økten bestod av oppgaver på tavlen, som ble diskutert på grupper og i fellesskap. I tillegg fikk elevene oppgaveark som de samarbeidet om på gruppene. Alle oppgavene fra økten ligger vedlagt, og her vil vi kun presentere noen av dem. Den hypotetiske læringsbanen for økten var formulert slik:

A – Elevenes utgangspunkt: flertall av elevene oppfatter likhetstegnet som et signal for å gjennomføre regneoperasjon, og svært få har forståelse for likhetstegnet som et symbol for ekvivalente uttrykk.

B – oppdagelse av matematisk innhold fra konteksten: observere ekvivalens fra konteksten, man behøver ikke å ha likt antall eks. appelsiner på hver side for at sidene skal veie like mye. I tillegg til å bruke modellen (vektskåler) for å forstå at likhetstegnet viser til ekvivalens, og ikke som en kommando for utregning.

C – Formell representasjon: at uttrykk som ser ulike ut kan ha samme verdi/være ekvivalente, og få en forståelse av likhetstegnet som et symbol på ekvivalens. Ender opp på den algebraiske formen $ax + b = cx + d$ (i motsetning til $ax + b = c$ eller $ax + by = c$ som vi har hatt tidligere)

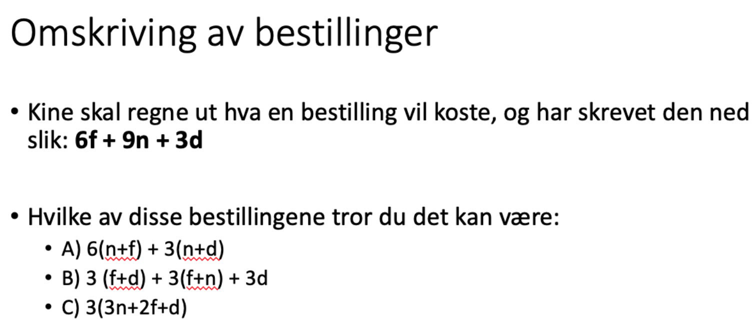
I utgangspunktet har elevene allerede kjennskap til likninger, men ofte med oppgaver der den ukjente befinner seg kun på venstre side av likhetstegnet. Forskningen viser at elever har større vanskeligheter når den ukjente befinner seg på høyre eller begge sider (Arcavi et al., 2017). Gjennom de ulike oppgavene med vektene skal læreren og oppgavene gradvis veilede dem til å uttrykke situasjonene algebraisk, og med dette oppdage ekvivalente algebraiske uttrykk, og hvordan uttrykkene kan være like selv om de ser ulike ut. I tillegg kan elevene finne strategier som går utover det klassiske algebraiske formspråket «gjør det samme på begge sider» eller «flytte og bytte», fordi de gjennom konteksten gradvis bygger opp en formell algebraisk notasjon. En sentral handling er at elevene formulerer likninger med sammensatte uttrykk på begge sider av likhetstegnet.

Oppgave 1:
Innledningsvis i denne økten, skal elevene undersøke likhet/ulikhet og bygge opp en forståelse av konteksten. Vi ønsker at denne oppgaven skal skape et bilde av ekvivalens, og gjennom dette forstå at likhetstegnet handler om likeverdige uttrykk. Formålet er at elevene oppdager at det kun er på vekten med likevekt at de kan sette et likhetstegn, og bestemme en nøyaktig vekt på melposen. Altså kan de bare bruke likhetstegnet når verdien på hver side er like stor, som i dette tilfellet er bildet øverst til høyre. Altså ønsker vi å skape en kontrast mellom likhetstegnet og «større enn»/«mindre enn».

Oppgave 2:
Elevene blir nå introdusert for oppgaver med variabler på begge sider av likhetstegnet (ax+b=cx+d). Tanken vår er at de nå har jobbet med og kommet inn i konteksten slik at matematikken vil være mer tilgjengelig for alle elevene. Dersom elevene ønsker kan de bruke den visuelle fremstillingen og se for seg at de fjerner appelsiner og vekter på hver side av vektskålen, og forstå at dersom den skal forbli i balanse er de nødt til å fjerne like mye på hver side. Målet er at elevene skal klare å bruke konteksten for å tolke situasjonen, og videre uttrykke situasjonen formelt.

4.6 Økt 4 – Fastfood

Figur 7: Skjermbilde fra undervisning



Figur 8: Skjermbilde fra undervisning

Denne avsluttende økten, «Fastfood», har tatt utgangspunkt i en RME-basert økt utformet av Manchester metropolitan university (2018-2020). Vi har oversatt den opprinnelige konteksten som handlet om fish and chips, til burger og fries, for å være en mer treffende kontekst for vår elevgruppe. I tillegg har vi også her forkortet og revidert for at det skal passe vårt utvalg. Ut fra både MMU´s beskrivelse og vår diskusjon rundt økten har vi formulert den hypotetiske læringsbanen til at elevene arbeidet uformelt med problemer som involverer forenkling av uttrykk, substitusjon, utvidelse av parenteser og faktorisering av uttrykk (Manchester Metropolitan University, 2018-2020). Den hypotetiske læringsbanen for økten så slik ut:

A – Elevenes utgangspunkt: at elevene kan uttrykke enkle sammensatte algebraiske uttrykk med utgangspunkt i en gitt kontekst.

B – oppdagelse av matematisk innhold fra konteksten: at ulike algebraiske uttrykk (fra konteksten) kan uttrykke det samme (ekvivalens)

C – Formell representasjon: forenkle sammensatte algebraiske uttrykk og løse opp parenteser for å observere og utforske ekvivalente uttrykk

Fra tidligere økter forventet vi at noen elever ville slite med å holde oversikt på den overordnede problemstillingen, ettersom disse oppgavene var mer sammensatte enn de tidligere oppgavene, og elevene måtte forholde seg til flere nye uttrykk samtidig. Gjennom undervisningen skal elevene arbeide med å oversette hverdagsspråk til algebraisk notasjon, gå fra tekstoppgaver til algebraiske uttrykk og endre eller skrive om algebraiske uttrykk. Elevene skal bruke sitt hverdagslige språk for å «bestille mat» og arbeide med å «oversette» dette til algebraisk språk. En hensikt er at elevene på denne måten får et innblikk i at vår venstre til høyre lesing av et uttrykk ikke nødvendigvis er rekkefølgen på de matematiske operasjonene. Videre blir de introdusert for ekvivalente uttrykk, hvor elevene skal se at uttrykk kan representere det samme uten å se identiske ut. Noen uttrykk er bedre beskrivelser av konteksten, mens andre igjen er mer effektive for en utregning. I tillegg skal elevene jobbe fra uttrykk tilbake til konteksten ved at de får se et uttrykk, og må beskrive hva som kan være bakgrunnen til de forskjellige uttrykkene.

5 Resultater

I dette kapittelet vil vi presentere funn og analyse, med utgangspunkt i observasjon og gjennomføring av undervisningsopplegget. Målet med analysen er å besvare problemstillingen; *På hvilken måte kan en realistisk kontekst i algebraundervisning påvirke elevenes forståelse i emnet?* Under planleggingen av undervisningsopplegget (Se kapittel 4) formulerte vi en hypotetisk læringsbane med mål for de fire øktene. Vi vil i dette kapittelet presentere resultatene fra én og én økt ved se på de faktiske læringsbanene opp mot de hypotetiske. For å begrense datamaterialet, vil vi som nevnt, fokusere på to av elevgruppene. Elevene på gruppe 1 og 2 er presentert med tallene 1-4 og 5-7. Likevel vil innspill fra andre i klassen under helklassediskusjon også komme frem som en del av datamaterialet. Disse har tall høyere enn 7. Resultatene vil senere bli diskutert i lys av teori i påfølgende kapittel. Avslutningsvis i kapittelet vil vi presentere resultatene fra pre/posttesten, og hvordan disse resultatene har endret seg fra start til slutt av aksjonen.

5.1 Økt 1: «Binders»

I den første økten, «Binders», var målet at elevene skulle få forståelse for den ukjente, og at en variabel er dynamisk og kan ha ulike verdier. Da de innledningsvis skulle gjette antall binders i en boks ved hjelp av et bilde av boksen, kom de frem til ulike svar fra hver gruppe. Noen grupper resonerte seg frem til et intervall, mens andre gjettet et spesifikt tall. Dette var også ønskelig da vi ville ha frem ulike svar på tavlen, for å vise at man kunne uttrykke alle de ulike verdiene med en felles variabel. På gruppe 2 diskuterte de seg frem til at det sannsynligvis ville være mellom 500-1000, men den ene eleven på gruppen også poengterte at de ikke kunne vite dette sikkert, og når man ikke visste sikkert kunne man si x. Likevel svarte de som gruppe mellom 500-1000 da læreren spurte etterpå. På gruppe 1 utspilte denne diskusjonen seg:

<u>Dialog 1:</u>

Elev 4: *Jeg tror det kan være rundt 300 (binders).*

Elev 1: *Ja, eller kan vi regne det ut. Hvor mange klarer vi telle? Kan vi liksom tenke volum?*

Elev 3: *Hva med gjennomsnitt?*

Elev 1: *Ja, men gjennomsnitt gir jo ikke nøyaktig, det er jo mål for sånn cirka..* [begynner å telle binders ved å peke på tavlen].

Elev 3: *Men volumet gir vel sånn cirka det også?*

***Elev 2:** Det er jo helt umulig å telle alle de der, så da tror jeg også vi kan si omtrent 300*.

***Elev 1:** Jeg tror det er flere, for jeg kunne telle sånn 50 bare der* [peker mot tavlen], *så kanskje 500 i alle fall.*

Ut fra svaret og diskusjonen til begge gruppene ser vi starten på den hypotetiske læringsbanen vi hadde sett for oss stemte. Begge grupper kom frem til et numerisk svar på oppgaven. Dette strider ikke imot det elevene er vant til, og regner som gyldig svar på en oppgave. Formålet i starten av timen var å skape en diskusjon rundt hvor presist de kunne uttrykke den konteksten de hadde fått presentert, og dermed hva en bokstav i dette tilfellet representerte. Spesielt når de senere i oppgaven skal uttrykke endringer ved konteksten som sammensatte uttrykk, og dermed oppdage hvordan de kan uttrykke det totale antallet binders etter endring i en kontekst. Læreren stilte derfor spørsmål om hvor sikkert svaret de hadde kommet frem til var. Spørsmålet ble stilt i en helklassediskusjon etter at alle gruppene hadde kommet med et numerisk svar på hvor mange binders det var i boksen. Videre følger en gjenfortelling av deler av diskusjonen som oppsto.

<u>Dialog 2:</u>

***Elev 11**: Jeg tror at når man ikke vet, så kaller man det x.*

***Læreren:** Ja, du har jobbet med x før?*

***Elev 4**: så vi kan ikke vite hvor mange det er så det er x.… det er litt rart.*

***Elev 6:** må vi kalle det x?*

***Lærer:** Godt spørsmål. Når det er et antall vi ikke vet hva er, så kaller vi det gjerne x, men må vi kalle det x?*

***Elev 2**: man kan vel bruke alle bokstaver egentlig, det beskriver ikke et spesifikt antall?*

***Elev 11**: Vi har kalt det b for binders, kan vi det? Kan x være b?*

***Elev 2**: Ja, fordi det kan være like tall.*

***Elev 7**: Nei, i samme regnestykke kan det ikke være samme tall.*

***Lærer**: Hva tror dere? Kan vi bruke ulike bokstaver? Og kan to ulike bokstaver ha samme verdi, eller være samme tall? Snakk litt sammen på gruppene.*

[Etter litt summing på gruppene rekker én elev opp hånden]

***Elev 4**: Okey, si at to fotballag spiller mot hverandre* [lag a og lag b], *også skal vi finne ut hvor mange spillere som er med på kampen til sammen da. Da kan det være forskjellig antall spillere om de har med seg ulikt antall innbyttere, men de kan også ha med seg likt antall og da blir de ukjente like* [antall spillere på lag a og lag b].

Ut fra diskusjonen i klassen, og på de mindre gruppene, gjenoppdaget de sammenhengen mellom variabelen *x* og «det ukjente». Flere grupper hadde vært innom å svaret «x antall binders», men i og med at læreren til å begynne med spurte etter et antall gjettet de derfor numeriske svar. Det var også ønskelig å utvikle et algebraisk begrepsapparat for å støtte en enklere overgang til at elevene skal bruke variabler. I et forsøk på å beskrive situasjonen endte vi opp i en diskusjon rundt bruken av variabler og hvorvidt de kunne ha samme verdi, selv om det var ulik bokstav. Noen elever trodde at de ikke kunne navngi den ukjente forskjellig mellom gruppene, fordi den ukjente var det samme i denne konteksten. Dette ble videre utforsket fordi Elev 7 var sikker på at i samme regnestykket kunne ikke ulike bokstaver være samme tall. Ut fra pretesten så vi tendenser til at dette kunne være en tankegang som gjaldt hos flere, og læreren så det derfor som formålstjenlig å ta diskusjonen videre, selv om det ikke var direkte relevant for binders-konteksten. Ved hjelp av et annet eksempel på en realistisk kontekst kom Elev 4 frem til et eksempel som virket oppklarende for noen elever i klassen. Eleven brukte en kjent situasjon som et ordproblem, for å gi et visuelt bilde på at ulike variabler kan ha lik verdi. Elevene er også opptatt av hvilken bokstav som brukes, og de fleste brukte bokstaven *b* som variabelen til antallet binders i boksen. I refleksjonen vår av økten bet vi oss merke i dette, og var bekymret for at flere elever nå så på variabelen som en benevning, eller at den alltid sto for antallet til en gjenstand. Derfor la vi dette inn i vår hypotetiske læringsbane for påfølgende økter, og konsentrerte oss om å poengtere dette.

Elevene forsto nytten av å uttrykke antallet binders med en variabel da de videre skulle lage sammensatte uttrykk for å vise endringer i antallet binders ved ulike situasjoner (Se figur 9). Ved å bruke variabelen som en plassholder for det reelle (og ukjente) antallet binders klarte alle elevene å lage uttrykk for situasjonene. Med dette hadde økten en naturlig progresjon, hvor elevene startet med kjente numeriske verdier, hvor variasjonen i elevsvar videre førte til en diskusjon om variabler og bruken av variabler. Ved å bruke bilde av bindersboksen som et visuelt hjelpemiddel får elevene noe å forholde seg til, og forstår også hvorfor en variabel er nødvendig når de til slutt skal lage sammensatte algebraiske uttrykk for å beskrive endringen gjennom algebraisk språk.

	Uttrykk	300 Antall binders	267 Antall binders
Hele boksen	X	300	267
Fjerne 12 binders	X - 12	288	255
Legge til 100 binders	X + 100	400	367
Legge til en ekstra boks	2X	600	534
Legge til to bokser	3X	900	801
Halvparten av boksen	$\frac{X}{2}$	150	133.5
legge til 4 binders	2(x + 4)	608	542

Figur 9: Elevarbeid fra "Binders"

5.2 Økt 2: «Kine på handletur»

For å bygge videre på første økt hadde vi planlagt spørsmål som fikk elevene til å tenke over hva variabelen representerte, og med dette knytte den formelle matematikken nærmere konteksten. Til å begynne med skulle elevene uttrykke hvor mye penger Kine brukte da hun kjøpte 5 iskaffe og 7 yoghurt i løpet av en uke, uten å vite noen priser. Vår baktanke var at elevene med dette var tvunget til å bruke variabler, og å se at bokstavene (eksempelvis *i* og *y*) representerte prisene til produktene, og ikke var egne objekter. Likevel viste det seg at elevene fortsatt var opptatt av numeriske verdier. Flere grupper diskuterte hva iskaffe og yoghurt vanligvis kostet på butikken, og en elev uttrykte at: «vi må ha med prisene for å kunne lage en likning». Elevene kom etter hvert frem til likningen 5i+7y=p for å uttrykke situasjonen.

Dialog 3:

Lærer: *Hva står p for i dette uttrykket?*

Elev 5: *Prisen for yoghurt og iskaffe.*

Lærer: *Hva med i. Hva står den for?*

Elev 2: *I er iskaffe.*

Lærer: *Hva da iskaffe?*

Elev 2: *Hvor mange iskaffe hun Kine kjøper.*

[Liten pause]

Elev 2: *nei, nei, nei, det er prisen for iskaffen, ikke sant?*

Mange av elevene aksepterer enda ikke algebraiske uttrykk som fullstendige svar, og flere tolker fortsatt bokstavene som benevning til en viss grad, men bruker konteksten for å resonnere seg frem til hva variablene representerer.

I den neste oppgaven var først iskaffen på halv pris, før de også fikk vite at yoghurten kostet det dobbelte. Hensikten med dette var at elevene aktivt måtte forholde seg til variablene i konteksten, i tillegg til endringen i konteksten. På denne måten må elevene holde styr på hva variablene står for i både det første og andre uttrykket, og presisere at i er prisen for iskaffe i uke 1, og tilsvarende for y. Gruppe 2 valgte å endre til nye bokstaver for variablene for å vise at prisene var endret. De formulerte likningen $5x + 7k = P_2$ der x var den nye prisen til iskaffe, k den nye prisen til yoghurt og P_2 var den nye prisen for varene. Dette var ikke en del av vår hypotetiske læringsbane, da vi trodde elevene ville ta utgangspunkt i variablene fra det første uttrykket (uke 1) for å vise endringen (uke 2). De begrunnet dette med at nå som de hadde fått nye priser måtte de sette en ny bokstav for «den nye ukjente». Gruppe 1 formulerte likningen $2{,}5i + 14y = P_2$ etter en diskusjon om de kunne halvere og doble tallene foran variabelene eller ikke:

<u>Dialog 4:</u>

Elev 2: *Siden det skal være halvparten og dobbelt så tror jeg vi kan skrive 2,5 fordi det er jo halvparten av 5, og 14 er dobbelte av 7. Enig?*

Elev 3: *Ja.*

Elev 4: *Men man kan jo ikke si 2,5 iskaffe? Eller man kan jo det, men det er jo ikke hele tall*

Elev 3: *Nei, det er sant. Kan vi skrive* $\frac{5}{2}$ *da?*

Elev 2: *Blir ikke det det samme?*

Elev 3: *Men nå er det jo plutselig 2,5 iskaffe og 14 yoghurt? Hun kjøper jo fortsatt det samme. Så jeg tror vi må skrive 5i delt på 2 og 7y gange 2, ellers blir antallet feil.*

Elev 1: *Nei, men se her.* [Skriver ned $\frac{5i}{2}$ og 2,5i]. *Det her blir det samme, fordi vi kan ikke dele ién i to, og derfor blir svaret på 5i delt på 2 det samme som 2,5i.*

Elev 3: *Herregud ja, jeg tror jeg tenker for mye sånn at det blir feil. Jeg må slutte å tenke så mye* [ler].

Elevene konkluderer så med at likningen deres kan skrives sånn fordi det «blir det samme» som om du skulle delt variabelen på to eller doblet den. De fortsetter foreløpig ikke å diskutere utsagnet elev 3 kom med om 2,5 står for antall iskaffe, selv om de i den første oppgaven konkluderte med at 5 i 5y sto for antall iskaffe og i står for prisen av én iskaffe, ut fra konteksten som ble gitt. Vårt forventede svar for å uttrykke prisen i uke 2 var $5 * \frac{i}{2} + 7(2y) = P_2$. Dette ble gjort på en av de andre gruppene. I dette tilfellet har elevene tatt utgangspunkt i prisene fra første uke, og representerer endringer i prisen ved å kun vise endringene på variablene. Elevene har i dette tilfellet videreført variablene fra første uke, og forholder seg i stor grad til konteksten.

Fordi elevene produserte ulike måter å representere endring i pris fra første til andre uke, valgte vi å bygge videre på dette. De tre ulike løsningene ble skrevet opp på tavlen for diskusjon. Elevene skulle diskutere hvilke av de tre likningene læreren hadde skrevet opp som de likte best, og hvilken de syntes beskrev konteksten best. Vi ønsket at elevene skulle gjenoppdage sammenhengen mellom konteksten og de algebraiske symbolene, og oppdage at uttrykk som ser ulike ut kan være ekvivalente, men at noen enklere kan sees i sammenheng med en gitt kontekst.

1. $2{,}5i + 14y = P_2$
2. $5x + 7k = P_2$
3. $5 * \frac{i}{2} + 7(2y) = P_2$

Dialog 5:

Elev 1: *Jeg synes jo nummer 1 er bra, for den lagde jeg* [ler]. *Men jeg synes nummer 3 forklarer best fordi da skjønner jeg liksom hva som skjer. Nummer 1 må man liksom skjønne 3 først, den blir på en måte utregningen da.*

Lærer: *Hva med nummer 2?*

Elev 1: *Nei, på nummer 2 må man vite mer.*

Elev 6: *Jeg synes nummer 1 er utydelig fordi det er 14 yoghurt.*

Elev 3: *Jo, for den forklarer liksom resultatet.*

Elev 6: *Resultatet? Kine kjøper jo like mange iskaffe og yoghurt.*

Elev 5: *Det er derfor jeg satte en ny bokstav* [viser til likning 2], *fordi man har en ny pris. Y var jo prisen til yoghurt, og nå er jo den endret og ikke antall yoghurt.*

Elev 1: *men blir ikke k det samme som 2y, for liksom k er jo den nye prisen og den er dobbelt så stor som den gamle?*

Lærer: *Det er interessant det du sier om at k er det samme som 2y, kan du ikke huske på det, også kan vi undersøke det etter at vi nå får noen priser.*

Flere av elevene syntes likning nummer 3 forklarte konteksten best, og elev 7 skrev i notatene sine at «3 er den letteste å forstå (fra konteksten) og forklarer mer om den nye prisen, og dens forhold til den gamle prisen». Elevene følger med dette en læringsbane gjennom å oppdage at likninger som utseendemessig ser ulike ut, kan representere det samme. Elev 1 sitt svar om at k er det samme som 2y blir tatt opp senere i timen når elevene har fått vite hva varene koster.

Videre i økten skal elevene sammenlikne uttrykkene fra første og andre uke (før og etter prisjustering) om når Kine brukte mest penger. På gruppe 2 diskuterte de hvorvidt det var mulig å si noe som helst om prisen, så lenge de ikke hadde mer informasjon:

Dialog 6:

Elev 5: *Det er helt umulig å vite før vi får vite prisene til iskaffen og yoghurten!*

Elev 7: *Jeg tror kanskje det kan være likt jeg, siden det er dobling og halvering .*

Elev 6: *Jeg tror ikke det er likt, for de kjøper jo ulik mengde, så da kommer det an på prisen, ja.*

Elev 5: *Ja, for hvis en iskaffe koster 1000 og yoghurt 1 så er det billigere den ene uken, liksom. Men da blir det vel som regel billigst første uken da?*

Elev 6: *Hun kjøper jo mer yoghurt, og du dobler, så med mindre iskaffen koster unaturlig mye er det dyrere andre uka.*

Elev 7: *men om vi går ut fra at begge deler koster det samme da, for eksempel sånn 10 kroner. Da kan vi regne ut.*

Elev 5: *Ja, men vi vet jo ikke om de koster det samme, og det gjør de sikkert ikke, så det er jo ikke noe poeng. Jeg tror det er billigst første uken.*

Ut fra denne diskusjonen ser vi at elevene sliter med å konkludere med noe før de får numeriske verdier. Likevel bruker de den realistiske konteksten for å forsøke å nærme seg riktig svar. De er inne på konseptet med dobling og halvering, og sammenlikner ulike priser på varene og hva slags påvirkning de har på uttrykket. I Oppgaven som følger får elevene vite at Kine betalte 80 kroner for iskaffe og 157 kroner totalt den første uken. Tanken er at de nå kan bruke uttrykkene de har laget til å finne ut både hvor mye én iskaffe og én yoghurt kostet begge ukene, hvor mye Kine betalte totalt andre uken og hvilken uke hun brukte mest penger. Istedenfor å fylle inn disse verdiene i likning de hadde fra før, valgte mange av elevene å løse oppgaven i konteksten og løsrevet fra en algebraisk notasjon. Kun en elev på gruppe 1 valgte uoppfordret å jobbe med likningen 5i=80 for å finne prisen til en iskaffe, og videre prisen til en yoghurt. De resterende elevene jobbet med uformelt i konteksten, uten algebraisk notasjon. Det kan tenkes at eleven har laget sin egen oppgave fra konteksten, f.eks. «5 iskaffe koster 80 kroner. Hvor mye koster én iskaffe?». Det samme blir gjort videre for å finne prisen av yoghurt, med å ta totalprisen 157-80 (pris for iskaffe) = 77 kroner. 7 yoghurt koster 77 kroner, så det koster 11kr per.

Avslutningsvis i timen blir diskusjonen om sammenhengen mellom de tre likningene for prisen den andre uken tatt opp igjen.

<u>Dialog 7:</u>

Lærer: *Elev 1, du sa tidligere at k var det samme som 2y. Kan du vise på tavlen og forklare hva du mente med det?*

[Elev 1 skriver k=2y og $7k = 7(2y)$ på tavlen]

Elev 1: *ikke sant, for å finne hva k er, så vet vi at det er det dobbelte av uken før, og uken før kostet det y. Vi visste jo ikke hva det kostet da heller, og det dobbelte av y er 2 gange y.*

Lærer: *Fint, er det noen som har spørsmål til dette?*

Elev 16: *Jeg skjønner ikke, hva mener du med at det er det samme som hverandre?*

Lærer: *Dere har jo nå funnet ut at yoghurt kostet 11 kroner den første uken, ikke sant? (Flere elever nikker). Y er altså 11 kroner* [skriver y=11 på tavlen]. *Elev 5, hvordan regnet du ut hva k var, altså hva yoghurt kostet den andre uken?*

Elev 5: *Jeg ganget 11 med 2, og fikk 22 kroner.*

Lærer: *Du multipliserte 11 med 2 og fikk 22, som da er verdien til k* [skriver 11*2=22 på tavlen under y=11]. *Vi vet jo at y er det samme som 11, så vi kan bytte ut 11 her med y, og Elev 5 regnet jo ut for oss at k var 22.* [Skriver $y * 2 = k$].

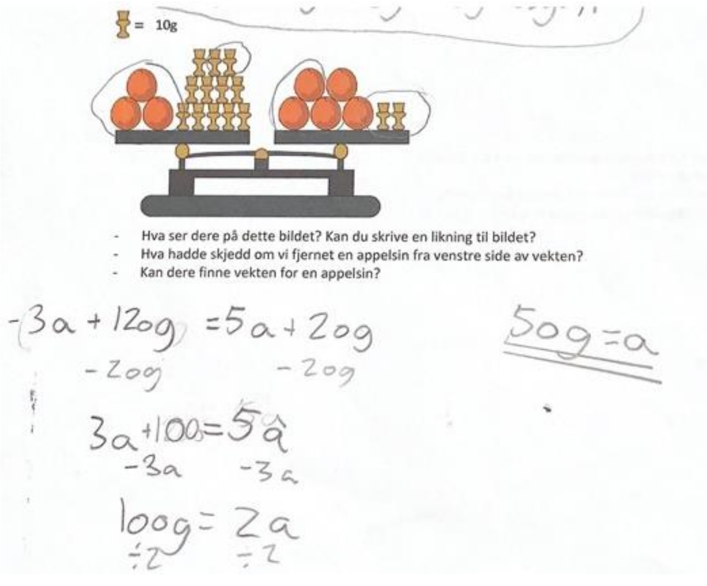
Forslaget til den ene gruppen (Gruppe 2) og hva elevene selv hadde kommet frem til ble brukt for vise sammenhengen og ekvivalensen i uttrykkene, og knytte de «nye» bokstavene x og k til de tidligere i og y. Ut fra økten fikk elevene jobbe med ekvivalensen til de ulike uttrykkene de lagde for «Kine på handletur», dermed kunne vi ta med oss dette videre inn i de neste øktene og bygge videre på det. De hadde nå begynt arbeidet med å gjenoppdage forståelsen for at ulike uttrykk kan være ekvivalente.

5.3 Økt 3 - «Vekt»

I «vekt» økten opplevde vi brudd fra den hypotetiske læringsbanen allerede fra start. Vektskålene var tiltenkt en rolle som en gjenkjennelig modell og realistisk kontekst for å veilede elevene til gjenoppdagelse av likhet og ekvivalens. Flere av elevene hadde derimot ingen erfaringer med en slik vektskål, og konteksten ble ikke like gjenkjennelig som først antatt. Innledningen av økten gikk derfor ut på å bygge en felles forståelse av vektskålene. Dette ble gjort ved å sammenligne vektskålene med en «dumpe-huske». Dette var en kontekst som var mer kjent for elevene, og flere bekreftet at de forstod hva som skjedde når begge sider var like tunge eller den ene siden tyngre enn den andre.

Den første oppgaven i denne økten gikk ut på at elevene diskuterte 3 ulike vekter både med og uten likevekt, og skulle bestemme hva man kunne si om vekten til de forskjellige posene. Elevene kom frem til at det kun var vekten med likevekt hvor vi kunne bestemme nøyaktig hvor mye melposen veide. På gruppe 1 diskuterte de i tillegg de to vektene som ikke hadde likevekt. De snakket først om at på bildet der melposen var tyngst måtte den veie mer enn 2,2 kg, og der den veide minst måtte den veie mindre enn 1,2 kg. Videre så de også på differansen mellom vekten på det første og det siste bildet og kom frem til at den letteste melposen måtte veie minst 1 kg mindre enn den tyngste. Elev 3 uttalte at: «den letteste posen veier mindre enn 1200g og den tyngste veier mer enn 2200g, 2200-1200=1000, derfor er det minst 1000 gram forskjell.» Elevene brukte altså konteksten til å gå videre fra den tenkte oppgaven, og utforsket sammenhenger og egenskaper i matematikken.

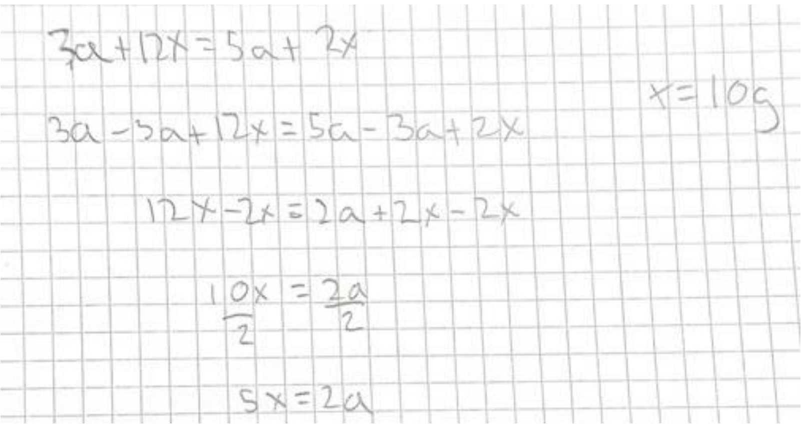
Senere i økten skulle elevene finne vekten til en appelsin, og fikk en illustrasjon av en vekt med både appelsiner og vektlodd på begge sider av vekten. Denne oppgaven ble løst forskjellig på de to gruppene da elevene på gruppe 1 i større grad benyttet seg av illustrasjonen, og dermed konteksten, som et hjelpemiddel, og med det fulgte vår hypotetiske læringsbane, enn hva gruppe 2 gjorde.



Figur 10: Gruppe 1 sitt arbeid med oppgaven

Elevene på gruppe 1 brukte illustrasjonene og konteksten aktivt. De viste til illustrasjonen i sin samtale og da de forklarte sin tankegang. Elevene startet med å finne hva som var likt på begge sider, og ringet rundt dette for å markere at de «fjernet» disse fra vekten. De forklarte at vekten fortsatt ville være balansert fordi de tok bort akkurat det samme fra begge sidene. Da satt de igjen med 2 appelsiner på den ene siden og 100g på den andre siden. Ut fra dette regnet de seg frem til at en appelsin måtte veie 50g. Videre formulerte de en likning ut fra hva de hadde funnet. Da læreren spurte hvordan de hadde kommet frem til svaret forklarte de steg for steg ved vise til illustrasjonen. «Først fjernet vi to vekter fra begge sider, fordi da blir det ingen igjen på høyre siden, også fjernet vi tre appelsiner fra begge sider fordi da blir det ingen appelsiner igjen på venstre siden. Også er det to appelsiner igjen, så da må vi dele den resterende vekten på de to.»

Gruppe 2 fulgte ikke vår hypotetiske læringsbane i like stor grad. De formulerte en likning ut fra hvilken informasjon de hadde fått oppgitt i illustrasjonen, men gikk vekk fra konteksten etter dette. Disse elevene ønsket å løse oppgaven formelt algebraisk. Det var én elev på gruppen som tok styringen (Elev 5), og løste likningen mens de andre så på. Læreren spurte denne eleven om hva de hadde kommet frem til, for å undersøke hva slags forståelse eleven hadde for det som ble gjort:



Figur 11: Elev 5 sin utregning av oppgaven

<u>Dialog 8:</u>

Elev 5: *En appelsin veier 50.*

Lærer: *Hvordan vet du det?*

Elev 5: *Fordi 5x er det samme som 5 gange x og x er 10, 5 gange 10 er 50.*

Lærer: *Jeg ser du har trukket fra 3a på begge sider her* [peker på linje to], *hvorfor har du gjort det?*

Elev 5: *For å få x alene.*

Lærer: *Men hvorfor på begge sider?*

Elev 5: *Fordi vi har lært at man må gjøre det samme på begge sider av likhetstegnet.*

Elev 5 viste til de matematiske reglene de tidligere hadde lært om likninger på spørsmålene læreren stilte, men viste ikke til konteksten. I tillegg var de to andre på gruppen mer passive sammenliknet med gruppe 1, og det er usikkert om disse fulgte elev 5 sitt resonnement. Ut fra økten så det ut til at de fleste mestret å konstruere likninger ved hjelp av bilder og kontekst, men at flere fortsatt begrunnet matematikken med innlærte regneregler når de ikke benyttet seg av konteksten. Likevel viste de forståelse for ekvivalens, som den siste økten også bygget videre på.

5.4 Økt 4 - «Fastfood»

I Fastfood ble elevene tatt med inn i en kontekst som var kjent for dem, nemlig å bestille mat. Vi ønsket først at elevene skulle tenke seg til hvordan de ville bestilt til vanlig, før de senere skulle skrive det ned algebraisk. Elevene skulle skrive ned slik en ansatt kunne gjort det, og hvordan de ville skrevet det ned om de skulle regnet ut prisen. Formålet var at elevene skulle diskutere hvordan algebraisk uttrykk sies, skrives og representeres. Og med dette gi mening til den algebraiske notasjonen.

<u>Dialog 9:</u>

Lærer: *Hva ville dere sagt om dere skulle bestilt mat til alle på bordet deres?*

Elev 3: *Jeg ville sagt at vi skulle ha 4 burgere og 4 fries.*

Elev 12: *Jeg ville sagt til én og én, liksom sånn, hun skal ha en burger og en fries, han skal ha en burger og løkringer og så videre da.*

Lærer: *Ja, begge deler er jo helt greit. Men hvis dere skulle hjulpet Kine, eller jobbet for Kine, hvordan ville dere regnet ut hvor mye hvert bord skulle betale til sammen? Hvis alle tar utgangspunkt i gruppe 1 sin bestilling på 4 burgere og 4 fries. Hvordan ville dere gjort det? Etter litt småprat på gruppene og notering på arkene som var delt ut, stilte læreren igjen spørsmålet om hvordan de ville regnet ut totalsummen.*

Elev 3: *Vi er jo fire personer, så det blir 4 burgere og 4 fries. Da kan vi skrive* $4 * 22 = 88$ *og* $4 * 28 = 112$ *og* $112 + 88 = 200$.

Elev 7: *Jeg har skrevet* $4 * 50 = 200$.

Elev 3: *Hvorfor 50?*

Elev 7: *Fordi jeg vet 28+22 er 50, og det er liksom enklere tall.*

Elev 3: *Å ja-a, det var lurt!*

Lærer: *Begge deler gir samme svar. Kunne dere laget en likning, om vi for eksempel ikke hadde visst prisen på burger og fries? Samarbeid på gruppene deres.*

På gruppe 1 jobbet de med elev 3 sin måte å regne ut prisen, og kom med dette frem til at de kunne skrive 4b+4f=p.

Dialog 10:

Lærer: *Kan dere forklare hva denne likningen betyr?*

Elev 3: *Det betyr 4 burgere og 4 fries koster til sammen 200. Eller 200 vet vi jo ikke da, men det blir til sammen.*

Elev 1: *Men hæ, du sa jo før [*henviser til læreren*] at b var prisen, er ikke det 28?*

Elev 2: *28 burgere?*

Elev 1: *Nei, nei, prisen.*

Elev 3: *Ja, det var jo det jeg mente da.*

Lærer: *Ja, det stemmer, b er den ukjente prisen, så hvis dere nå fyller inn prisen til fries og burgere, hvordan ser det da ut?*

[Elev 1 skriver $4 * 28 + 4 * 22 = \mathrm{p}$]

Lærer: *Ja, og hvordan ville dere regnet ut svaret, eller p?*

Elev 1: *Jeg ville først tatt 4 gange 28, også 4 gange 22, også plussa sammen.*

Elev 3: *Det var jo akkurat det jeg gjorde, og det blir 200.*

Elev 3 tolket først bokstavene som en benevning for burger og fries, men blir hjulpet tilbake til at det var prisen det handlet om. De oversetter det hverdagslige språket til algebraisk, og klarer å benytte seg av likningen de hadde laget for å regne ut. Dermed oppdager de sammenhengen mellom det hverdagslige språket til en bestilling, og hvordan dette kan beskrives algebraisk.

På gruppe 2 diskuterte de elev 7 sin måte å regne på, som foreslo å skrive $(b + f) * 4 = p$. Eleven forklarte at da regner man først ut prisen for hva en burger pluss en fries kostet, før man så ganget det med fire personer. De andre på gruppen aksepterte forklaringen. Læreren skrev begge likningene på tavlen og spurte klassen om likningene var like.

Dialog 11:

Elev 12: *Ja, jeg bare tror det.*

Lærer: *Hvordan kan vi vite at de er like? De ser jo ikke like ut?*

Elev 5: *Om vi putter inn prisene så får vi jo akkurat det samme svaret, så da er de jo på en måte like.*

Elev 2: *Men hvorfor er det sånne greier* [viser til parentesene] *i den likningen egentlig?*

Lærer: *Kan noen hjelpe elev 2 med å forklare dette?*

Elev 7: *Parentesen viser at vi skal regne ut det inni parentesen først.*

Elev 6: *Ja, liksom, du sier egentlig bare at alt inni parentesen skal ganges med 4, og det er jo det elev 3 gjorde også. Tok 28 gange 4 pluss 22 gange 4,*

Lærer: *Så det dere sier er at det har ingenting å si om jeg først adderer prisen til en burger og en fries også multipliserer med fire personer, eller om jeg først finner prisen til 4 burgere, også 4 fries, og adderer de sammen?*

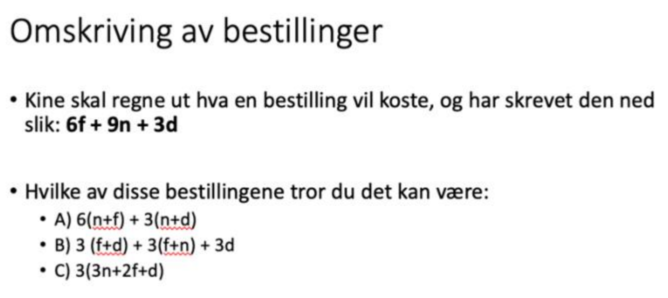
Elev 7: *Nei, fordi det var jo det vi gjorde forskjellig, og det ble jo helt likt!*

Elev 2: *Jeg synes det er litt rart.*

Lærer: *Hva synes du er rart?*

Elev 2: *Nei, jeg skjønner det liksom, men det er så rart at de er helt like når de ser så ulike ut.*

Elevene begrunner først at likningene er like fordi svaret blir det samme, men noen blir forvirret av bruken av parenteser. Elev 7 viser til regelen om regnerekkefølge, mens elev 6 forklarer at den viser at man må multiplisere alt inne i parentesen med det utenfor. For å understreke ekvivalensen oppsummerer læreren det elevene hadde sagt.



Figur 12: Oppgave fra "fastfood" økten

I en senere oppgave (se figur 12) skulle elevene jobbe med ekvivalente uttrykk ved at de fikk et uttrykk som viste hva som hadde blitt kjøpt, og skulle gjenkjenne hvilke av de andre uttrykkene som kunne vært bestillingen som ble skrevet ned. Begge fokusgruppene brukte elimineringsmetoden, og fant raskt ut hvilket alternativ det ikke kunne være. De forklarte at i det ene alternative var det bestilt seks dipp, og i utregningen var det bare 3. I tillegg ble elevene bedt om å lage eksempler til de to alternativene som kunne være bestillingen til utregningen: $6f + 9n + 3d$. Den ene eleven på gruppe 2 forklarte at til $6(n + f) + 3(n + d)$ kunne det være en gjeng på 9 personer der 6 personer bestilte en nugget og en fries hver og 3 bestilte en nugget og en dipp hver. $3(3n + 2f + d)$ kunne være tre personer som skulle ha tre nuggets, 2 fries og en dipp hver, men påpekte også at dette var urealistisk mye mat til en person.

5.5 Pre/post-testen

Etter undervisningsperioden gjennomførte vi også den samme testen som før perioden. Vi brukte pretesten i størst grad for å bestemme hva undervisningen skulle dreie seg om, men ønsket også å gjennomføre den samme testen igjen for å undersøke om det fantes åpenbare forbedringer etter undervisningsperioden. Slik vi kan lese ut fra tabell 1 og 2 var det en liten forbedring fra pre- til posttest. Resultatene var allikevel noe tilfeldige, da elever som hadde riktig på pretesten kunne svare feil på samme oppgave på posttesten.

Figur 13: Forklaring på fargekoder til tabell 1 og 2

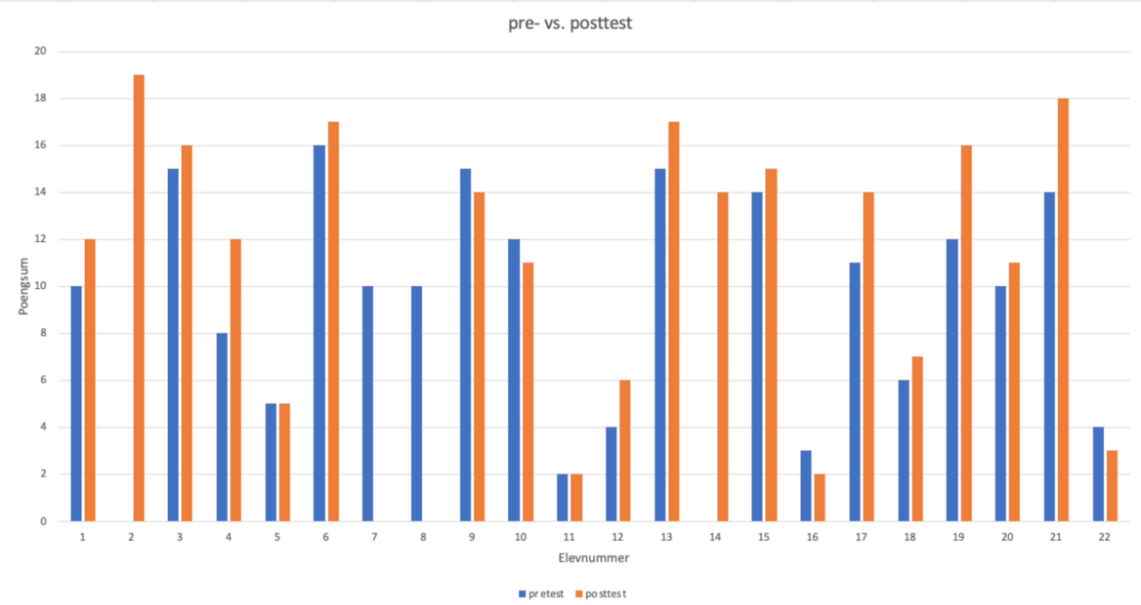
Tabell 1: Resultater fra pretest:

elev/oppgave	1	2	3	4a	4b	5a	5b	5c	6	7	8	9	10a	10b	11	12	13a	13b	13c	13d	sum (20)
1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	10
2	IT																				IT
3	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	15
4	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	8
5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	5
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	16
7	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	10
8	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	10
9	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	15
10	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	12
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2
12	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4
13	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	15
14	IT																				IT
15	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	14
16	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		0	0	0	0	1	0	0	0	3
17	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	11
18	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	6
19	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	12
20	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	10
21	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	14
22	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	4
sum hver oppg.	19	7	4	8	3	19	14	11	6	1	9	16	0	14	10	2	19	12	8	14	

Tabell 2: Resultater fra posttest:

elev/oppgave	1	2	3	4a	4b	5a	5b	5c	6	7	8	9	10a	10b	11	12	13a	13b	13c	13d	sum (20)
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	12
2	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	19
3	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	16
4	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	12
5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	5
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	17
7	IT																				IT
8	IT																				IT
9	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	14
10	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	11
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
12	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	6
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	17
14	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	14
15	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	15
16	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
17	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	14
18	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	7
19	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	16
20	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	11
21	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	18
22	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
sum hver oppg.	20	9	8	12	5	18	17	12	10	4	13	14	2	13	12	6	16	14	11	15	

Tabell 3: Sammenlikning av pre- og posttest per elever:



I tabell 1 leser vi at på 10 av oppgavene hadde under 10 elever svart riktig. Videre var det kun 4 av oppgavene hvor over 15 av elevene svarte riktig. Gjennomsnittlig poengsum blant de 18 elevene som var til stede på begge tester, var før undervisningsopplegget 9,8 av 20 poeng. Etter undervisningsopplegget steg gjennomsnittet til 11 av 20 poeng. På tabell 2 ser vi at det kun er 6 av oppgavene der færre enn 10 elever har svart riktig. Mens det er 5 av oppgavene hvor over 15 av elene svarte riktig. Fra Tabell 3 kan vi se at 12 av de totalt 22 elevene hadde et bedre resultat på posttesten. To av elevene hadde likt resultat, mens fire av elevene hadde én mindre rett enn på pretesten. De resterende fire elevene var kun til stede på en av testene, og vi kan følgelig ikke sammenlikne deres resultater.

5.6 Oppsummering av resultatene

Resultatene viser at elevene klarer, i de fleste tilfeller, å engasjere seg i matematiske oppgaver ut fra en gitt kontekst. I hvilken grad matematikken er uformell/formell eller konkret/abstrakt er varierende. Likevel viser samtlige elever at deres tolkning av variabler, likhetstegnet og ekvivalens har blitt påvirket av undervisningsopplegget. Det samme gjelder deres arbeid med konstruksjon av sammensatte uttrykk og lineære likninger. Elevene bruker konteksten aktivt i arbeidet med de matematiske oppgavene. Resultatene viser varierende tolkning av variabler, spesielt i overgangen mellom hverdagslig til algebraisk språk, og vice versa. Elevene byttet mellom å tolke bokstavene som egne objekter og som en spesifikk ukjent. Mange elever ønsket å gi variabelen eller den ukjente en numerisk verdi så fort som mulig. I arbeidet med å formulere sammensatte uttrykk fikk de gradvis forståelse for behovet av en variabel når de skulle forklare situasjonen matematisk. Selv om elevene klarte å formulere algebraiske uttrykk og likninger ut fra oppgavene valgte de å jobbe rent numerisk dersom oppgaven tillot det. Elevene oppdaget også ekvivalens i arbeidet med disse uttrykkene. Både ved å undersøke likevekt i «vekt» økten, og gjennom å utforske ulike, men ekvivalente algebraiske uttrykk. I tillegg ble ekvivalens knyttet til elevenes numeriske forståelse i «fastfood», da elevene konkluderte med at 4f+4b er det samme som 4(f+b) fordi resultatet ble det samme i begge tilfeller.

6 Diskusjon

I følgende kapittel vil vi diskutere funn fra resultatkapittelet opp mot relevant teori som presentert i kapittel 2. Vi vil med dette diskutere svar til problemstillingen;

På hvilken måte kan en realistisk kontekst i algebraundervisning påvirke elevenes forståelse i emnet?

Diskusjonen vil bli delt inn i tre deler der vi først diskuterer forskningsspørsmålene;

- Hvordan kan en realistisk kontekst påvirke elevenes tolkning av variabler?
- Hvordan kan en realistisk kontekst støtte elevenes arbeid med konstruksjon av sammensatte uttrykk og lineære likninger?
- Hvordan kan en realistisk kontekst påvirke elevenes tolkning av likhetstegnet og ekvivalens?

Avslutningsvis i kapittelet vil vi diskutere vår aksjonsforskning sammenliknet med tidligere studier med liknende temaer, og resultatene fra den gjennomførte testen.

6.1 Tolkning av variabler

Algebra er et eget språk, som inneholder sine symboler, konvensjoner og notasjoner, og dette språket kan oppleves krevende for elever (Drijvers, 2003). Særlig er bruken av bokstaver i matematikken utfordrende for elever å hanskes med (Naalsund, 2012). Elevers forståelse av variabler var et av temaene vi ønsket å undersøke, og hvordan arbeidet innenfor en realistisk kontekst kunne påvirke tolkningene deres.

6.1.1 Variabler som objekt

Tidligere forskning viser at flere elever tolker bokstaven som et objekt (Küchemann, 1981; Naalsund, 2012). Altså at bokstaven som representerer den ukjente mengden sees på som en betegnelse, eller som et objekt i seg selv. Et eksempel på dette kom allerede opp i pretesten da flertallet svarte feil på en oppgave som skulle gi svar på hva variablen representerte eller hadde av verdi. Oppgave 6 (Se vedlegg 1) gikk ut på at elevene skulle forklare hva variabelen y sto for, når p og g sto for antall poteter og gulrøtter, når en potet kostet 7 kroner og en gulrot kostet 4 kroner, i likningen $7p + 4g = y$. Et av feilsvarene som gikk igjen var «hvor mange gulrøtter og poteter de kjøpte». Elevene kan ha tolket p og g som betegnelse for potet og gulrot, og dermed oppfattet bokstavene som et objekt (Küchemann, 1981).

I følge Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) kan bruk av kontekst være med på å hjelpe elevene til å forstå hva variabelen representerer, ved at de knytter en gjenkjennbar situasjon til det algebraiske uttrykket eller likningen. På den ene siden var elevene gitt en kontekst i dette eksempelet med en tekstoppgave, og de kunne brukt denne og kommet frem til riktig løsning. På den andre siden viser Jupri og Drijvers (2016) at ordproblemer ofte kan være krevende for elever å forstå. Deres forskning kom frem til at elever har vansker med å forstå problemene og formulere matematiske modeller om oppgavene er for teksttunge. Ordproblemer kan gjøre den horisontale matematiseringen utfordrende, altså elevenes arbeid med å trekke matematikken ut av en realistisk situasjon (Jupri & Drijvers, 2016; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

En kontekst som er kjent for elevene kan bidra til å gjøre denne matematiseringen enklere. I undervisningen ble derfor teorien til Freudenthal (1973) forsøkt fulgt ved å gi elevene en realistisk kontekst som de kunne kjenne seg igjen i og dermed trekke matematikken ut av. Likevel ble det observert gjennomgående gjennom hele perioden at elevene til stadighet oppfattet bokstavene som en benevning for noe eller som et objekt i seg selv. For eksempel i «Kine på handletur» (dialog 3) der noen elever trodde variablene i og y sto for iskaffe og yoghurt, fremfor at de representerte prisen på objektet. Og i «Fastfood» ble variablene b og f til tider oppfattet som en benevning for burger og fries (Dialog 10). Denne misoppfatningen kan tenkes å være såpass innprentet at aksjonsprosjektet var av for kort varighet til å endre på den (Küchemann, 1981). I tillegg viser forskning at elevene begynner å forstå algebra med sine «gamle briller», altså at de bygger videre på deres tidligere erfaringer med bokstaver og tall (Arcavi et al., 2017). Elevene har i aritmetikken eller tallregningen, tilegnet seg en forståelse av for eksempel bokstaven m som en benevning for meter, mens den i algebra representerer verdier (Naalsund, 2012). Booth et al. (2017) kaller denne feilen for «mangel på numerisk referent», når de oversetter 5y til 5 yoghurt i stedet for 5 ganger prisen til yoghurt. Denne tankegangen kan komme fra læreres «fruktsalatalgebra», altså at læreren forklarer 3a+2a+4b=5a+4b som tre appelsiner pluss 2 appelsiner pluss 4 bananer gir 5 appelsiner og 4 bananer (Arcavi et al., 2017; Brekke, 2002). Elevene kan ut fra dette tolke bokstavene som navn, og dermed som et objekt i seg selv, og ikke som en variabel (Küchemann, 1981). For eksempel hadde elevene kommet frem til at i sto for prisen av iskaffe. Likevel konkluderte de i dialog 4 at man «ikke kunne si 2,5 iskaffe» fordi det ikke var hele tall, og er dermed tilbake til å tolke bokstaven som et objekt i seg selv. Dette kan ha en sammenheng med utfordringene Drijvers (2003) skriver om rundt det å bevege seg inn og ut av kontekst, fra det konkrete til det abstrakte. Dette vil bli drøftet ytterligere i avsnittet om å konstruere algebraiske uttrykk og løsning av lineære likninger.

Likevel så vi tendenser i en senere økt til at elevene beveget seg nærmere en forståelse for bokstavene som spesifikke ukjente. I «Fastfood» ble læreren korrigert underveis på at variabelen *b* ikke sto for burger, men *prisen til en burger*. Altså viste eleven til at bokstaven representerte en hittil ukjent verdi. Dette eksempelet var en del av en diskusjon rundt en kontekst. Desto mer abstrakt matematikken er, jo vanskeligere er det for elevene å drive matematisering, og konteksten kan derfor ha hjulpet å konkretisere hva variabelen representerte (Arcavi et al., 2017; Drijvers, 2003). Samtidig kan en konkret kontekst føre til ytterligere misoppfatninger for variabler som objekt når overgangen fra det konkrete og uformelle til det formelle og abstrakte går for fort (Kindt, 1980, 2000 i Drijvers, 2003). Om elevene ikke har skapt seg en forståelse av variabelen som noe mer enn et objekt kan oversettelsen av bestillingen «4 burgere og fries» til uttrykket 4b+4f som noe annet enn «4 burgere pluss 4 fries» være forvirrende. Dette ble observert i dialog 10 da en elev hadde skjønt at *b* var prisen til burgere, og dermed måtte b=28 (ut fra prisene på menyen). En annen elev tolket dette som at de hadde «28 burgere».

6.1.2 Variabelen blir gitt en numerisk verdi eller behandlet som en spesifikk ukjent

Videre var det iøynefallende hvor ofte elevene ønsket å endre variabelen til et numerisk tall. Küchemann (1981) skiller mellom tolkningen av bokstaver som en spesifikk ukjent og at bokstavene blir gitt en numerisk verdi. De fleste elever han undersøkte ga bokstaver en numerisk verdi. Dette er ikke uvanlig blant elever da dette stiller mindre kognitive krav enn å behandle bokstaven som en spesifikk ukjent. På denne måten unngår de den generaliserte aritmetikken. Elever har ofte en forventning om å få et numerisk resultat i stedet for et algebraisk uttrykk (Jupri & Drijvers, 2016). I Bindersøkten mente først elevene det var umulig å uttrykke antallet binders i bindersesken om man ikke telte alle. Og da de skulle uttrykke hvor mye penger Kine brukte på en uke, var dette også «helt umulig» uten å vite noen priser først.

I «Binders» økten var det tiltenkt at elevene skulle bevege seg vekk fra sitt naturlige utgangspunkt og ønske om et rent numerisk svar på en oppgave, altså gi den variabelen en numerisk verdi. Ved å senere lage sammensatte uttrykk skulle de oppdage behovet for bruk av en variabel. Elevene ble gitt en visuell modell av bindersesken fra en realistisk kontekst hvor de, ved å jobbe uformelt med konteksten, oppdaget behovet for bruk av en variabel da de skulle uttrykke situasjoner som «en bindersboks som du tar ut fire binderser av». Da elevene i dialog 2 diskuterte at de skulle si «b» om variabelen i «Binders» økten kunne de fortsatt ha tanken om bokstaven som en benevning, altså b for binders. Ved hjelp av konteksten og situasjonene ved å legge til og trekke fra binders ble elevene veiledet til å forstå at bokstaven måtte representere den ukjente mengden i bindersboksen, altså antallet binders. Den realistiske konteksten har til hensikt å hjelpe elevene med å gi mening til variablene som noe mer enn en uforstående bokstav og mer som en representasjon av en hittil ukjent mengde (Laurens et al., 2018). I tillegg vil bruken av en visuell modell kunne fungere som et hjelpemiddel i den forstand at den er ment for å representere, eller være et konkret bilde på et mer abstrakt fenomen, slik som variabler (Niss & Blum, 2020). På den andre siden kan elevene, med mangel av ferdighet for den horisontale matematiseringen, ikke klare å oversette den konkrete modellen til en modell for annen matematikk (Gravemeijer & Doorman, 1999). Det blir derfor viktig hvordan læreren har lagt opp aktiviteter, spørsmål og oppgaver med tanke på den didaktiske fenomenologien, for å veilede elevene til gjenoppdagelse av bokstaven som noe mer enn et objekt (Freudenthal, 1983; Van den Heuvel-Panhuizen, 2014).

Elevene ga også variablene en numerisk verdi til å begynne med i «Kine på handletur» (dialog 6). Elevene forsøkte å diskutere seg frem til hva iskaffe og yoghurt kunne koste på butikken, fordi de hadde «ingen annen måte» å uttrykke dette på uten å vite noen priser. Det kan argumenteres for at de nå hadde et syn på variablene som en spesifikk ukjent, men siden de ikke var gitt tilstrekkelig informasjon til å regne seg frem til verdien visste de heller ikke hva de skulle gjøre. Dette henger også sammen med deres ferdigheter med å konstruere algebraiske uttrykk, og vil derfor bli diskutert i følgende kapittel. Etter at noen elever hadde kommet frem til et algebraisk uttrykk for konteksten, var det likevel ikke fullstendig klarhet rundt hva bokstavene representerte. I uttrykket $5i + 7y = p$ viste elevene forståelse for hva p representerte, altså prisen for yoghurt og iskaffe (dialog 3). Elevene er vant til å regne seg frem til et svar eller jobbe problemløsende for å finne svaret ut fra en tekstoppgave. I tillegg har de også en forventning om at det som kommer etter likhetstegnet er et enkelt numerisk svar på hvor mye noe eksempelvis blir «til sammen» (Drijvers, 2003; Jupri & Drijvers, 2016). Ytterligere viser elevene en forståelse for overgangen mellom det naturlige og algebraiske språket. Elevene kan inneha en viss grad av symbolforståelse og evne for horisontal matematisering når de ser sammenhengen mellom oppgaveteksten «…hvor mye det vil koste for Kine..» til den algebraiske variabelen p. Likevel viser de ikke denne forståelse da de i samme oppgave misforstår variablene *i* og *y* som et objekt i seg selv eller en benevning for iskaffe og yoghurt. På den andre siden så elevene raskt at dette var en feilaktig tankegang etter veiledende spørsmål fra lærer, og henvisning til konteksten. Gjennom veiledet gjenoppdagelse kan elevene bli i stand til å koble den formelle matematikken til situasjonen (Freudenthal, 1991).

Om bokstavene blir gitt en numerisk verdi kan situasjoner slik som den i «Binders» økten oppstå. I dialog 2 hadde elevene en oppfatning om at ulike bokstaver ikke kunne ha samme verdi i samme regnestykke. For å oppklare dette var det en elev som selv lagde en realistisk kontekst i form av en situasjon der variablene kunne ha samme verdi, i form av antall fotballspillere på ulike fotballag. Gjennom dette knyttet eleven det abstrakte nivået av variabler over til noe mer konkret, som ofte er lettere for elevene å hanskes med (Drijvers, 2003). Konteksten ble et forankringspunkt som veiledet elevene til å oppdage hvordan deres oppfatninger av variabelen var feilaktige, og ga en gjenkjennbar forklaring til hvorfor, utover «fordi det bare er sånn» (Gravemeijer & Doorman, 1999). Videre var også variablene gitt en numerisk verdi hos den ene gruppen i «Kine på handletur». Gruppen hadde først behandlet variablene som en spesifikk ukjent ved å komme frem til hva variabelen *i* og *y* representerte i den gitte situasjonen, men da situasjonen endret seg (prisene ble halvert og doblet), mente de selv at dette også krevde nye bokstaver. På den ene siden er dette forståelig da elevene hadde behandlet variablene som spesifikke ukjente for den gitte situasjonen, og nå var situasjonen endret. De gikk fra at variabelen *i* sto for prisen for iskaffe, mens den nå skulle stå for prisen for iskaffe den første uken.

I etterkant av aksjonene observerte vi at den RME-baserte undervisningen og den realistiske konteksten kunne føre til en sterkere tanke om at bokstaven representerte en spesifikk ukjent. I introduksjonsøkten med det ukjente antallet binders ble elevene for eksempel veiledet til å se at de kunne bruke en bokstav om en mengde som ennå ikke var kjent for dem, og de kunne dermed «bytte ut» denne når de fant ut hva den ukjente sto for. Og det samme gjaldt i samtlige av de andre oppgavene, der et av målene var å finne verdien eller mengden til den ukjente. Med andre ord ble ikke aspekter av bokstaven som variabel eller som generaliserte verdier satt søkelys på i særlig grad. I følge Arcavi et al. (2017) så betraktes ofte bokstaven som et ennå ukjent tall som må finnes slik at man kan løse likningen. Dette trenger nødvendigvis ikke være en uting, da det i likningsløsning er formålstjenlig å behandle bokstaven slik for å løse likningen og identifisere den ukjente. Det kan på den andre siden være problematisk da elevene senere skal forstå variabler i for eksempel funksjoner, og forstå at variabelen ikke alltid kan identifiseres som et spesifikt tall, men heller viser forhold mellom ulike mengder (Wagner, 1983). Samtidig kan det være en fordel for elevene å konsentrere seg om én ting av gangen, fordi det for mange er vanskelig å skille de ulike rollene en bokstav kan spille (Jupri & Drijvers, 2016). Studien til Naalsund (2012) viser også at for at barn skal ha noen reell forståelse av algebra, må de være i stand til å håndtere elementer som krever bruk av en bokstav som en spesifikk ukjent. Ved at man reduserer variabelen til å stå for antall binders i en boks, vekten til en appelsin eller prisen på en iskaffe så reduserer man bokstavenes betydning fra noe ganske abstrakt til et matematisk objekt som oppleves som mer konkret og håndgripelig for elevene. På denne måten får flere elever til å svare på oppgaver som de ellers ikke hadde taklet (Küchemann, 1981; Naalsund, 2012). Det ble for eksempel observert mer elevaktivitet i den fjerde økten sammenliknet med den første, og flere elever som ikke hadde svart på tilsvarende oppgaver i pretesten bidro aktivt i undervisningen. Dette samsvarer godt med hva Palinussa (2020) fant i sin forskning, da han observerte en økning av elevaktiviteter og læringsaktiviteter når læreren fulgte realistisk matematikkundervisning.

6.2 Konstruere algebraiske uttrykk og løsning av lineære likninger

En sentral del av algebraen omhandler å sette opp likninger og uttrykk for å modellere situasjoner for å utnytte den praktiske verdien av algebra til problemløsning (Arcavi et al., 2017). Jupri og Drijvers (2016) hevder at noe av det mest utfordrende for elever innenfor teamet algebra er å løse problemer i form av en tekst. For å konstruere algebraiske uttrykk må elevene inneha kunnskap om matematisering (Arcavi et al., 2017). Ved å bruke en realistisk kontekst som hjelpemiddel er tanken at denne prosessen blir mer tilgjengelig for elevene.

6.2.1 Konstruksjon og tolkning av uttrykk og lineære likninger

Som nevnt tidligere syntes det mindre utfordrende for elevene å konstruere og regne med algebraiske uttrykk når de hadde noen numeriske verdier å forholde seg til. Dette kan forstås ut ifra at de fleste elever ser på algebraen som en prosess, fremfor et objekt (Arcavi et al., 2017). Med andre ord er de vant til å gjennomføre en utregning og få et enkelt numerisk uttrykk (Naalsund, 2012). I bindersøkten skulle elevene uttrykke hvor mange binders det var i en boks ut ifra beskrivelser, og målet var blant annet at de skulle godta et algebraisk uttrykk som et fullverdig svar på en oppgave, og på denne måten se på algebraen som et matematisk objekt. Ideen med at de først skulle prøve selv bygde på en teori om at elever flest ønsker et numerisk svar på en oppgave, i teorien kalt for «the expected answer obstacle» og «the lack of closure obstacle» (Arcavi et al., 2017; Jupri & Drijvers, 2016; Naalsund, 2012). Gjennom oppgaven ble elevene veiledet i tråd med hva Freudenthal (1983) anbefaler, at matematikken presenteres slik at elevene selv oppdager behovet for en variabel, og representere situasjonene med algebraiske uttrykk. Med det visuelle hjelpemiddelet av en bindersboks som elevene skulle ta ut og legge til binderser i, ble de veiledet av konteksten til å drive horisontal matematisering, altså oversette situasjonen til algebraiske uttrykk (Doorman & Gravemeijer, 2009). Det er ønskelig at elevene etter hvert kan utnytte slike kontekster som en modell for andre situasjoner, det som i teorien henvises til som en modell av-modell for (Gravemeijer & Doorman, 1999). På den ene siden er det nødvendig at elevene ser algebraen som et objekt, slik at de får forståelsen av algebra som beskrivende for matematiske strukturer (Arcavi et al., 2017). Samtidig er også prosesskunnskapen helt essensiell. Algebraiske uttrykk representerer en prosess og et objekt samtidig. I løsning av likninger må elevene kunne pakke ut de algebraiske uttrykkene for å se operasjonene, og hva de betyr (Arcavi et al., 2017).

Jupri og Drijvers (2016) fant i sin forskning at elever i tradisjonell undervisning særlig hadde vanskeligheter med den horisontale matematiseringen, altså å konstruere algebraiske uttrykk ut fra en situasjon. En av de hyppigste vanskene som ble observert handlet om å formulere likninger. Dette innebærer å løse ordproblemer og å forstå problemene og formulere matematiske modeller (Jupri & Drijvers, 2016). I undervisningen ble blant annet «Kine på handletur» brukt som en kontekst der elevene gradvis ble veiledet til å konstruere algebraiske uttrykk og likninger ut av konteksten. Ved at elevene ikke fikk noen numeriske verdier kunne konteksten hjelpe dem med å oppdage hvordan bruk av bokstaver kunne uttrykke situasjonene når verdiene fortsatt var ukjent. Ved å presentere elevene for realistisk kontekst, skal arbeidet med den horisontale matematiseringen, formuleringen av algebraiske uttrykk, være mer forståelig og håndterbart for elevene (Tarim & Kütküt, 2021; Warsito et al., 2018). Elevene skal ved hjelp av konteksten trekke ut det matematiske for å formulere en likning. Det kan likevel oppstå utfordringer knyttet til dette. I undervisningen om «Kine på handletur» ville elevene, i stedet for å oversette det naturlige språket til algebraisk, forsøke å finne numeriske verdier selv, eller konkludere med at oppgaven ikke lar seg løse (dialog 6). Hendelsen kan forklares ved at elevene er innøvd på oppgaver der de skal finne en numerisk verdi for variabelen (Arcavi et al., 2017).

I utgangspunktet har ikke nødvendigvis elever vansker med ordproblemer eller tekstoppgaver. Problemet er at oppgaver i lærebøker ofte er lagt opp på en slik måte at elevene lærer seg å trekke ut algebraen enkelt og løse denne operasjonelt, uten noen særlig form for forståelse (Naalsund, 2012). Dermed kan elevene formulere algebraiske uttrykk uten å nødvendigvis ha noen forståelse for uttrykket de produserer. Vanskeligere er det når elevene selv må forstå problemene og formulere matematiske modeller (Jupri & Drijvers, 2016). Eksempelvis var det på pretesten et fåtall av elevene som mestret å formulere en likning ut fra gitt informasjon (oppgave 10, vedlegg 1). Samtidig var det i siste undervisnings økt («Fastfood») ingen elever som viste særlige problemer med å lage en likning til prisen på en bestilling. Wijers (2001) viser til en frakopling mellom det å lære instrumentelle algebraiske ferdigheter og å løse algebraiske problemer. Når elevene får jobbe sammen i klassen og får veiledning til å forstå hva eksempelvis variablene står for i uttrykket de har laget, er det mer overkommelig for dem å dra matematikken ut av konteksten. På denne måten kan de bruke konteksten som en brobygger mellom situasjonen og matematikken. Likevel fant vi ingen nevneverdig forbedring på denne oppgaven til posttesten, men dette kan skyldes flere grunner. Det kan være blant annet på grunn av elevenes varierende deltakelse i oppgaven, gruppesammensetninger, eller at vår intervensjonsperiode var tidsmessig kort.

Imidlertid er det ikke slik at en realistisk kontekst automatisk fører til at elevene kan drive horisontal matematisering og formulere likninger og uttrykk problemfritt. Utfordringer dukker opp når elevene for eksempel må bevege seg inn og ut av konteksten, og skifte mellom en konkret og abstrakt tankegang. I «Kine på handletur» hadde elevene, med suksess, konstruert uttrykket til situasjonen der Kine hadde handlet fem iskaffe og 7 yoghurt, men når likningene skulle omformuleres til å gjelde etter prisjusteringer oppstod noen uenigheter (dialog 4). Drijvers (2003) skriver også om at elever kan møte på vanskeligheter når de både må holde styr på en overordnet problemstilling, og samtidig gjennomføre mer grunnleggende algebraiske prosedyrer. Elevene brukte, og skulle forholde seg til, likningen $5i + 7y = P_1$ og skulle nå uttrykke at prisen for iskaffe (i) halveres og prisen for yoghurt (y) dobles.

En elev går ut av konteksten og driver algebraisk manipulasjon, eller vertikal matematisering ved å omformulere uttrykket til $2{,}5i + 14y = P_2$. I den vertikale matematiseringen ser eleven sammenhenger mellom konseptene, begrunner matematikken ut fra de multiplikative regnereglene. Det kan dermed se ut som at denne eleven har en formell forståelse for matematikken involvert, klarer løsrive seg fra konteksten, og å behandle algebraen som et objekt (Drijvers, 2003). For andre elever kan skiftet mellom det konkrete og abstrakte gått for raskt, og de avviser forslaget fordi de tolker det algebraiske språket feil i overgangen til det muntlige, og forstår likningen som at Kine nå har kjøpt 2,5 iskaffe og 14 yoghurt. Altså kan konteksten virke begrensende for deres oppdaging av ekvivalensen i uttrykkene og de matematiske forholdene i uttrykket. Videre viser likevel den første eleven til ekvivalensen ved $\frac{5i}{2}$ *og 2,5i*, og hvordan det matematisk gir det samme svaret. Elevene aksepterer svaret fordi det gir det samme produktet.

Dette kan tyde på at elevene klarer å bevege seg ut av konteksten igjen, og se sammenhengen. På den andre siden kan det også bety at de grunnleggende prosedyrene krever så mye oppmerksomhet at eleven mister oversikt over det helhetlige bildet, og kun konsentrerer seg om den algebraiske manipulasjonen (Drijvers, 2003). Det kan for elevene være effektivt å innimellom kun arbeide med algebraiske regler og egenskaper, nettopp fordi skiftet mellom abstrakt og konkret tankegang er utfordrende (Arcavi et al., 2017). Det vil da igjen være viktig at læreren hjelper til og veileder i overgangen mellom konteksten og den formelle matematikken, slik at ikke konteksten blir et hinder, men heller et hjelpemiddel som kan føre til dypere matematisk forståelse (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

6.2.2 Regning og løsning av lineære likninger

En sentral del av vanskene elever har med algebra omhandler løsning av likninger. Elevene har gjerne både vansker med syntaks og anvendelse av regler, og flere føler denne delen av matematikken mangler mening (Arcavi et al., 2017; Wijers, 2001). Allerede i «Binders» økten skulle elevene regne med algebraiske likninger. De hadde, som nevnt, først konstruert uttrykkene før de fikk numeriske verdier på hvor mange binders en boks inneholdt. Som beskrevet i resultatdelen observerte vi ingen særlige vansker med å finne det totale antall binders når elevene hadde algebraiske uttrykk å ta utgangspunkt i. Elevene er vant til å løse matematiske regnestykker i hodet med en numerisk resonnering og elevene har siden tidlig barneskole arbeidet med aritmetikk (Arcavi et al., 2017). Dermed var det for eksempel ikke overraskende at elevene i «Kine på handletur» uttrykte at de ikke ønsket å bruke likninger, fordi deres uformelle eller numeriske metoder opplevdes enklere.

Dette er i tråd med det Arcavi et al. (2017) skriver om at elevene ønsker så godt det lar seg gjøre å gå fra et kjent tall, for å beregne en annen mengde**.** Videre viser også Naalsund (2012) til en motvilje blant elever om å faktisk bruke en likning i løsningsprosessen av et problem. Likevel er selve utregningen de utfører samsvarende med stegene i en likning selv om de ikke anerkjenner det selv. For at elevene skal ønske å gjennomføre likninger må de oppleve det som nyttig (Arcavi et al., 2017). Med andre ord kan oppgavene elevene ble presentert for være for lite utfordrende slik at de enkelt kan gjøres uten den formelle algebraen. I tillegg kan elevene miste av syne hva de gjør og hvorfor, når de plutselig går fra uformell matematikk til å måtte bruke algoritmer (Wijers, 2001). På den andre siden er noe av poenget med RME og realistiske kontekster, at elevene skal gjenoppdage blant annet algoritmer (Solomon et al., 2020; Stephan et al., 2014). Videre understreker Freudenthal (1991) at elevene bør bruke algoritmer ved at de oppdager den fremfor å lære om den.

I tradisjonell undervisning og lærerbøker møter elever ofte på likninger der den ukjente er på venstre side av likhetstegnet, og de skal regne seg frem til hvilken verdi variabelen har, som de skriver på høyre side. Naalsund (2012) viser til det hun beskriver som et didaktisk kutt, når elevene går fra slike likninger til å operere med likninger med bokstaver på begge sider av likhetstegnet. I undervisningen ble den visuelle modellen med vekter brukt for å, blant annet, understreke betydningen av «å gjøre det samme på begge sider av likhetstegnet». Dette for å forstå hvordan man i formell likningsløsning kommer frem til verdien av den ukjente.

Ut fra observasjonene så vi hvordan elevene som brukte illustrasjonen/konteksten aktivt i sin problemløsning for å finne den ukjente vekten til en appelsin, var vellykket i sine forsøk på å finne korrekt vekt. I tillegg kunne elevene forklare alle stegene i deres likningsløsning ved å henvise til konteksten og illustrasjonen. Gruppen som derimot overså illustrasjonen og konteksten, og heller lente seg på regnereglene for likninger brukte også disse reglene da de skulle forklare hva de hadde gjort (dialog 8). Det kan derfor se ut til at elevene som benyttet seg av konteksten hadde en større forståelse for balanseprinsippet, likningsløsning og likhetstegnets funksjon. På den andre siden kan det, som nevnt, være effektivt å løsrive seg fra konteksten for å løse likninger (Drijvers, 2003).

At eleven lente seg på de algebraiske regnereglene i sin forklaring er ikke nødvendigvis et tegn på svakere forståelse, kanskje til og med tvert om. Å regne på det abstrakte nivået med formell matematikk er noe av det som viser seg som mest krevende for elever. I tillegg er det også mange lærere som finner det utfordrende å undervise om dette med mening (Wijers, 2001). Samtidig kan det også tenkes at den RME-baserte undervisningen gjorde de abstrakte begrepene mer forståelig, fordi den oppfordrer til problemløsning og engasjerer elevene til å delta (Laurens et al., 2018) Videre har også elevene ulikt utgangspunkt og følger ulike læringsbaner, og det kan tenkes at noen elever allerede var på et høyere nivå av forståelse for algebra, og i dette tilfellet ikke hadde behov for en uformell løsningsmetode.

6.3 Tolkning av likhetstegnet og ekvivalens

Naalsund (2012) beskriver ekvivalens av algebraiske uttrykk som kjernen i omformingsarbeidet i algebra, og til tross for dette har det blitt utført relativt lite forskning på ekvivalens. I algebra er det ofte likhetstegnet som er grunnlaget for misoppfatninger, noe som har en sammenheng med kunnskap om ekvivalens. Frem til elevenes møte med algebra har tegnet betydd «regn ut svaret», mens i algebraen skal det forstås som et ekvivalenstegn og bety «ekvivalent med» (Birkeland et al., 2018; Jupri & Drijvers, 2016; Naalsund, 2012).

6.3.1 Likhetstegnet

Resultatene fra flere av oppgavene i pretesten tydet på en operasjonell forståelse rundt likhetstegnet for mange av elevene. For eksempel viste oppgave 4 og 13 (se vedlegg 1), der elevene skulle regne ut eller skrive algebraiske uttrykk så enkelt som mulig, at flere tolket likhetstegnet som en kommando for å regne ut noe. Flere elever skrev rene numeriske svar eller unnlot å svare på de oppgavene som skulle ha en variabel i svaret. Videre var det også flere som slo sammen ulike variabler og dermed endte opp med at eksempelvis $n + 5 + 4 = 9n$. Dette er ikke ulikt det Naalsund (2012) har funnet i sin forskning om at elevene ser likhetstegnet som et signal for å gjennomføre en regneoperasjon. Dessuten viser Booth et al. (2017) at en vanlig misoppfatning er at svaret alltid skal stå på høyre side av likhetstegnet, og være numerisk. Ytterligere skriver Drijvers (2003) om «the lack of closure obstacle» som beskriver vanskene elever har med å la et uttrykk stå som svaret på et regnestykke, fordi de da ikke føler seg «ferdig» med regnestykket.

Det var særlig i «Vekt» økten at likhetstegnet var i fokus. Ved å bruke den realistiske konteksten med en vekt var hypotesen at elevene ville nærme seg en forståelse av likhetstegnet som et tegn på «likevekt», i stedet for en kommando for å gjennomføre regneoperasjoner. Modellen med vekten fra disse situasjonene skulle skape grunnlag for en modell for likevekt i formelle algebraiske oppgaver. Dette er i samsvar med hva Gravemeijer og Doorman (1999) skriver om skiftet mellom en modell-av til modell-for. Elevene forstod raskt prinsippet med likevekt på selve vekten, og skjønte blant annet at om man tar bort en gjenstand fra den ene siden så ville vekten komme i ubalanse, og man måtte gjøre det samme på den andre siden om vekten skulle komme i balanse igjen. Hverken elevene eller læreren nevnte eksplisitt at vekten var en modell for likhetstegnet og de ulike sidene representerte hver sin side i en likning. Likevel viste elevene en viss forståelse for dette, blant annet da de skulle bestemme vekten til tre ukjente mengder mel. To av vektene var i ubalanse og det var ingen uenighet blant elevene om hvilket situasjonsbilde de kunne svare på med sikkerhet hva melposen veide. Det var kun vekten med i balanse som de kunne si helt sikkert, og for å si helt sikkert på de andre måtte de skape likevekt først. Arcavi et al. (2017) påpeker at løsningsmetoden til likninger må gi mening for elevene. Da kan «balansemodellen» være veiledende ved å hjelpe elevene til å se utsagnet om likhet i seg selv som et «objekt» som operasjoner kan utføres på. Med andre ord er det ønskelig å veilede elevene vekk fra en tanke om likninger kun som en prosess, der beregninger av den ene siden produserer den andre (Arcavi et al., 2017).

På den ene siden kan noe av undervisningen som ble gjennomført føre til en forsterkning av tankegangen om likhetstegnet som en kommando og uttrykkene som en prosess. Dette med tanke på at elevene ved flere tilfeller nettopp skulle finne verdien for en ukjent. For eksempel i «Binders» økten der elevene først skulle lage utrykk for å beskrive situasjonen, og deretter fikk numeriske verdier for antall binders, og dermed kan elevene ha tolket dette som «målet». I slike situasjoner blir ikke de algebraiske uttrykkene nødvendigvis verdsatt som fullverdige svar. I flere av elevenes svar skrev de «uttrykk» i kolonnen hvor de skulle uttrykke konteksten ved hjelp av en variabel og «antall binders» i kolonnen der de kunne regne ut et numeriske svar. Liknende gjaldt også i «Kine på handletur» og «Fastfood» da flere oppgaver omhandlet å komme frem til et numerisk svar på høyre side av likhetstegnet. På den andre siden ble det observert i flere av øktene at elevene oppdaget ekvivalensen i uttrykk.

6.3.2 Ekvivalens

At uttrykk som ser ulike ut kan være ekvivalente og ha samme verdi var for flere av elevene rart og nytt. Naalsund (2012) understreker hvor viktig forståelsen av venstre-høyre-ekvivalensen med et likhetstegn som skilletegn er for å forstå likninger. I «Kine på handletur» diskuterte blant annet en gruppe i dialog 4 at $\frac{5i}{2}$ *og 2,5i* ble det samme. Først diskuterte de at 2,5 iskaffe ikke er mulig, men da de frigjorde seg fra konteksten og kun utførte matematikk på uttrykkene kom de frem til at «de var det samme». Dette kan sees i sammenheng med det Drijvers (2003) skriver om nytten av å kunne arbeide med algebraiske regler og egenskaper, eller en vertikal matematisering. Ved å distansere seg fra konteksten kan elevene oppdage sammenhengene innenfor den symbolske verden. På den andre siden kan ofte elever miste oversikt over hva de gjør og hvorfor, når de beveger seg over til et mer abstrakt plan og bruker algoritmer (Wijers, 2001). Dette kan føre til kommentarer som for eksempel «nå er det jo plutselig 2,5 iskaffe og 14 yoghurter ...».

Videre var også ekvivalens gjeldende da elevene skulle sammenlikne de tre ekvivalente uttrykkene de hadde kommet frem til for å uttrykke yoghurtene og iskaffen sine nye priser. Blant annet var det en gruppe som hadde laget nye variabler. Det ble stilt spørsmål rundt hvordan de hadde kommet frem til disse nye variablene. De elevskapte verktøyene og eksempler ble brukt for å støtte de under overgangen fra det uformelle til det formelle (Stephan et al., 2014). På denne måten oppdaget elevene selv ekvivalensen mellom det de hadde gjort og de andre algebraiske uttrykkene. Å ta utgangspunkt i elevenes arbeid med matematikken blir støttet av RME-teoretikere, fordi matematikken læres best ved at elevene selv gjør matematikk (Freudenthal, 1999). Ved at elevene er aktive deltakere i å utvikle matematisk innsikt, og dermed oppdager ekvivalensen i uttrykkene og at de samtidig representerer konteksten på ulike måter, vil de i følge Van den Heuvel-Panhuizen og Drijvers (2014) få en dypere forståelse (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). RME-tilnærmingen gir dermed elevene muligheter til å produsere eksemplene selv og løse problemer ved hjelp av sin egen kunnskap, i motsetning til å huske et sett med regler i arbeidet med oppgavene (Tarim & Kütküt, 2021).

Et annet hjelpemiddel for å forstå den abstrakte matematikken ved ekvivalens er ved hjelp av visuelle modeller. Som nevnt i forrige kapittel ble vekt-modellen brukt til blant annet dette formålet. Modellen er med på å konseptualisere den matematiske ekvivalensen (Larsen, 2018). Oppgavene og de visuelle modellene kan bygge bro mellom det konkrete til den abstrakte forståelsen av at algebraiske likninger skal «være i balanse» (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Når elevene ser på innholdet på vekten kan de se hvordan utseendemessig ulike mengder på hver side av vekten er i balanse, og dermed ekvivalente. Samtidig kan vektmodellen påvirke tolkningen deres av variabler mot å tolke det som objekter, slik diskutert i kapittel 6.1.1. På den andre siden kan bruken av vekt som hjelpemiddel vise til at det er verdien av den ukjente man er ute etter, og at man dermed ikke kan direkte oversette «3 appelsiner» til «3a», men heller «vekten av 3 appelsiner». Det handler også her om å veilede elevene på veien, slik at ikke misoppfatninger oppstår uoppdaget.

I «Fastfood» økten ble konteksten brukt for at elevene skulle oppdage ekvivalensen. «Fastfood» økten så ut til å være den der elevene levde seg mest inn i konteksten, og var mest delaktig fra start til slutt. I dialog 9 skulle elevene bestille mat på en restaurant og uttrykke dette med hverdagsspråk, og undersøke hvordan prisen kunne uttrykkes numerisk og algebraisk. Gruppene kom frem til to ulike algebraiske uttrykk, $4(b + f) = p$ og $4b + 4f = p$, og oppdaget at uttrykkene var ekvivalente gjennom numerisk regning fra konteksten.

En av elevene på gruppe 1 observerte at burger og fries til sammen kostet 50 kroner, som var et enklere tall å multiplisere med 4 enn 22 og 28. Forskjellen i uttrykkene og regnemåtene ble gjenstand for diskusjon omkring hvorfor dette var tilfellet. Ved å «brette ut» matematikken i uttrykkene så de at selv om regneoperasjonene de utførte var ulike, men resultatet ble det samme (Arcavi et al., 2017). At elevene jobbet med en «faktorisert» versjon og en «utvidet» versjon er ifølge forfatterne av det opprinnelige opplegget ikke så farlig. Det som betyr noe er at elevene er komfortable med konteksten, kan regne ut totalkostnaden og innse at det er forskjellige måter å få det samme riktige svaret på (Manchester Metropolitan University, 2018-2020). Ytterligere understrekes verdien av å fortsette å understreke betydningen av at de variablene «b» og «f» er «kostnaden for henholdsvis en burger og en fries». Ved å forstå dette kan det være enklere for elevene å se ekvivalensen i form av bokstaver, og strekker seg videre mot en formell forståelse (Drijvers, 2003). Elevenes symbolforståelse henger også sammen med å forstå uttrykkene, og dermed forstå hvordan det kan være ekvivalent med andre uttrykk som ser forskjellige ut (Arcavi et al., 2017).

Etterfulgt av dette skulle elevene vurdere tre ulike algebraiske uttrykk i hensikt av å finne hvilke av de som var ekvivalente med en bestilling gitt med hverdagslig språk. De skulle altså tolke det algebraiske språket til det naturlige, i tillegg til å vurdere om de algebraiske var ekvivalente eller ikke. Med andre ord, en horisontal matematisering fra symbolverden til hverdagsverden, samtidig som de også undersøker uttrykkene innenfor symbolverden med vertikal matematisering (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Med denne oppgaven skal en mer formell eller konvensjonell forståelse av algebraisk notasjon utvikles (Manchester Metropolitan University, 2018-2020). Nå som elevene gradvis hadde engasjert seg i den realistiske konteksten skulle de se sammenhengen mellom det formelle algebraiske og uformelle hverdagslige, og dermed identifisere hvilke av de tre uttrykkene som ikke var ekvivalente med situasjonen. Ut fra formelle regneregler og horisontal matematisering argumenterte elevene for hvilket uttrykk som ikke var ekvivalent. De oversatte det algebraiske uttrykket til en kontekst, og denne konteksten var ikke lik de andre. Det kan dermed se ut til at konteksten hjelper eleven til å forstå den formelle matematikken i dette eksempelet.

6.4 Testresultat og oppsummering av drøfting

I tillegg til observasjonene ønsket vi også å se om det var en overføringsverdi fra elevenes arbeid med algebra i en kontekst over til deres formelle forståelse i emnet. Elevene gjennomførte samme kartleggingstest etter undervisningsopplegget. 12 av 18 elever som deltok på begge testene skåret bedre etter intervensjonen. Dette kan tyde på at elevene har tilegnet seg en bredere forståelse av emnet på bakgrunn av undervisningen. I arbeid med nye matematiske problemer er elevenes uformelle forståelse av algebra viktig for deres matematiske fleksibilitet (Drijvers, 2003). Selv om elevene klarer å gjennomføre grunnleggende algebraiske formler, kan de allikevel ha en begrenset forståelse av konseptet. Denne begrensede forståelsen gjør det også vanskelig å rette opp i disse feilene (Drijvers, 2003; Rosnick, 1981; Wagner, 1983).

Ved å jobbe med oppgaver med en kontekst som elevene har kjennskap til, har de også mulighet til å knytte matematikken til noe kjent. Elever som undervises ved hjelp av realistiske kontekster har større sannsynlighet for å løse problemet riktig, i tillegg til å vise forståelse for hvorfor strategiene fungerer (Dickinson et al., 2012). Den abstrakte naturen til matematikk er også en utfordring for mange elever (Arcavi et al., 2017). Ofte får matematikken sin mening fra konkrete og realistiske situasjoner, og dette krever at eleven evner å bytte mellom det konkrete og abstrakte nivået i en oppgave (Drijvers, 2003). Bruk av en realistisk kontekst vil kunne bidra til elevers utvikling av denne egenskapen, fordi elevene må oppdage matematikken i en reell kontekst. På denne måten blir elevene tvunget til å erfare og bytte mellom en konkret og abstrakt tankegang, som igjen kan bidra til en dypere forståelse av det algebraiske rammeverket (Drijvers, 2003).

Likevel har noen elever skåret likt eller dårligere på posttesten, altså etter gjennomført undervisning. Fire elever fikk samme resultat på begge testene, mens to elever gjorde det dårligere etter intervensjonen. Dette kan forklares ved intervensjonens begrensede omfang. Tidligere forskning på bruk av realistisk kontekst i oppgaver og baserer seg på intervensjonsperioder fra 5 uker og opp mot flere år (Dickinson et al., 2012; Dönmez, 2018). Dette kan tyde på at en slik undervisningsmetode krever et mer inngripende prosjekt for å bidra til økt forståelse i et gitt emne. I tillegg viser også Stephan et al. (2014) til at det tar tid å lære seg en ny lærings- og undervisningsmetode. Det kan også skyldes lite deltakelse fra elevene, da dette er vanskelig å få med seg når man observerer gruppearbeid.

7 Konklusjon og avslutning

Problemstillingen var i denne oppgaven; *På hvilken måte kan en realistisk kontekst i algebraundervisning påvirke elevenes forståelse i emnet?* Gjennom oppgaven har vi kommet frem til at en realistisk kontekst kan hjelpe elevene med å arbeide med algebraiske problemer på en uformell og forståelig måte. Ifølge teori er det viktig at elevene har en uformell forståelse av temaet for å kunne tilpasse formelle metoder effektivt. Resultatene tyder på at oppgaver med en realistisk og gjenkjennelig kontekst gjør oppgavene mer tilgjengelig for elevene. Det gjør også at elevene enklere ser sammenhengen mellom deres naturlige språk og det formelle algebraiske språket.

Med tanke på hvordan den realistiske konteksten påvirket elevenes tolkning av bokstaver i algebra har vi observert at den gjør det enklere for elevene å gi mening til bokstavene. Vi ser imidlertid at tolkningen av bokstavene som et objekt fortsatt er til stede. Det kan synes tendenser til at misoppfatningen har blitt noe utvasket, og at flere elever heller tolker bokstavene som en spesifikk ukjent, men dette har vi ikke nok datamateriale for å bevise. Resultatene våre kan likevel tyde på en utvikling i den retningen.

Videre tyder resultater på at konteksten gjør oppgaver eller problemstillinger mer oversiktlig for elevene når de skal lage eller formulere sammensatte uttrykk og lineære likninger. Med andre ord har vi tolket observasjonene dithen at det er enklere for elevene å holde styr på hva de ulike uttrykkene og bokstavene representerer og dermed se sammenhengen mellom hverdagslig eller uformelt språk til det algebraiske.

Ytterligere kan også konteksten ha vært med på å påvirke elevenes tolkning av likhetstegnet og ekvivalens. Flere av elevene startet perioden med å tro at man ikke kunne bruke ulike bokstaver om en ukjent verdi, ville ha et numerisk tall på høyre side av likhetstegnet og så ikke ekvivalensen i deres egne og medelevers uttrykk. Gjennom gradvis engasjering i realistiske kontekster og bruken av modeller oppdaget de at uttrykk som tilsynelatende så ulike ut faktisk kunne representere det samme og være ekvivalente. I tillegg kan det tenkes at elevene gjennom bruken av balansemodellen oppdaget hvorfor de må fjerne og legge til lik verdi på begge sider av likhetstegnet, i tillegg til å visuelt se at likhetstegnet er noe mer enn en kommando for å regne ut et svar.

Det kan altså tyde på at konteksten fungerer som en «veileder» gjennom oppgaven, slik at elevene ikke mister oversikten når de bytter mellom det konkrete og det abstrakte. Konteksten bidrar også til at elevene har mulighet til å løse oppgaven uformelt og med egne metoder, som senere kan formaliseres og bidra til å knytte elevenes uformelle forståelse med de formelle regnereglene. Med andre ord virker det som om konteksten bidro til å gjøre algebraen mer tilgjengelig for flere. Derimot kan vi ikke konkludere med en kausal sammenheng mellom den realistiske konteksten og elevenes forståelse for algebra. Resultatene fra testene viser til en bedring hos de fleste elevene, men vi kan ikke vite om vi hadde fått det samme resultatet med tradisjonell undervisning. Det kan tenkes at den konsentrerte undervisningen om algebraiske uttrykk og likninger var det som var utslagsgivende, og nødvendigvis bruk av den realistiske konteksten. Samtidig tolker vi ut fra våre observasjoner i undervisningen at elevene som engasjerte seg i konteksten ofte brukte den videre i sin forklaring for hvorfor deres algebraiske uttrykk og likninger stemte.

7.1 Forslag til videre forskning

Slik vi nevnte i metodekapittelet kunne dette aksjonsforskningsprosjektet vært en del av et større prosjekt. Vi foreslår videre forskning på bruk av realistisk kontekst i matematikkundervisningen, særlig til innlæringen av algebra. Vi tror at dette er en undervisningstilnærming som elevene trives med, og som lærere var det en fin måte å undervise om algebraemnet for å gi mer mening til innholdet. Forskning viser at elever oppfatter algebra som mer tilgjengelig dersom det legges frem i en realistisk kontekst som elevene kan se for seg. Ved å utvikle deres uformelle forståelse innenfor emnet vil elevene ha større matematisk fleksibilitet i møte med formelle algebraiske problemstillinger (Dickinson et al., 2012; Drijvers, 2003; Gravemeijer & Doorman, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Da vi i vårt utvalg og under denne korte perioden også så tendenser til dette, mener vi absolutt at dette er et felt som er verdt mer forskning på for norske lærere. Norge har fortsatt en vei å gå på elevers forståelse og undervisning i algebra, og da kan RME-undervisning være et effektivt bidrag til en positiv utvikling.

Samtidig hadde vi en enkeltstående studie med snevert utvalg og kort intervensjonsperiode, som gjør at man kun kan se tendenser til vårt utvalg informanter, og ikke konkludere med noe. Vi synes det hadde vært interessant å gjennomføre en større intervensjonsstudie over en lengre periode, og i tillegg ha med kontrollgruppe slik at vi kan sammenlikne elevenes resultater på en pre- og posttest. Videre var det et begrenset fokus på lærerens rolle i vår studie, og det hadde også vært interessant å se hvor stor påvirkning og hvordan læreren påvirker elevenes forståelse i et RME-klasserom. Eksempler på dette er lærerens bruk av spørsmål, diskusjoner, veiledning og så videre. Om vi skulle gjennomført denne studien en gang til ville vi også brukt enda lengre tid på å sette oss inn i undervisning av RME og hvordan RME oppgaver opparbeides på en best mulig måte. Det kan tenkes at vår begrensede erfaring med denne typen undervisning kan ha påvirket resultatene. På den andre siden har vi som lærere og forskere lært masse av prosjektet, og har fått et bedre innblikk i hvordan elevers forståelse for algebra kan utvikles og hvordan man eksempelvis kan undervise på en mer forståelig måte om dette.

8 Kilder

Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra : ideas, insights. and activities*. London,New York: Routledge.

Bergem, O. K. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O. K. K. Begem, Hege Nilsen, Trude (Red.), *Vi kan lykkes i realfag - Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 22-44). Oslo: Universitetsforlaget.

Berggren, S. A. & Jom, P. E. O. (2020). Typiske misoppfatninger om algebra. *Riktig*. Hentet fra https://riktig.gyldendal.no/artikler/typiske-misoppfatninger-om-algebra

Birkeland, P. A., Breiteig, T. & Venheim, R. (2018). *Matematikk for lærere 1* (6. utg. utg.). Oslo: Universitetsforl.

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C. & Young, L. K. (2017). Misconceptions and Learning Algebra. I(s. 63-78). Springer International Publishing.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* (Bokmål[utg.]. utg.). Oslo: Læringssenteret.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8th ed. utg.). London: Routledge.

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (4th ed. utg.). Boston: Pearson.

Dalland, C. P., Bjørnestad, E. & Andersson-Bakken, E. (2021). Observasjon som metode i barnehage- og klasseromsforskning. I E. Andersson-Bakken & C. P. Dalland (Red.), *Metoder i klasseromsforskning: forskningsdesign, datainnsamling og analyse* (s. 125-153). Oslo: Universitetsforlaget.

De Lange, J. (2006). Mathematical literacy for living from OECD-PISA perspective. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 25*.

Dickinson, P., Hough, S. & Dudzic, S. (2012). *Using Realistic Mathematics Education in UK Classrooms* Mathematics in Education & Industry Schools Project.

Doorman, L. M. & Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM, 41*(1), 199-211. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0130-z

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment : design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: CD-ß Press.

Dönmez, P. (2018). *The Effect of Using Realistic Mathematics Education on the 7th Grade Students' Mathematical Achievement about Algebraic Expression and Attitude Towards Mathematics* (Masteroppgave, Yeditepe University). Tyrkia. Hentet fra https://acikbilim.yok.gov.tr/handle/20.500.12812/339650

Fangen, K. (2010). *Deltagende observasjon* (2. utg.). Bergen: Fagbokforl.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task* Springer, Dordrecht.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Springer Netherlands.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education : China lectures* (1st ed. 2002. utg.). Dordrecht ;,Boston: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1999). Mathematics as an Educational Task. *Mathematics teaching*, (167), 43.

Furu, E. M. (2013). Lærerstudenten som aksjonslærer i klasserommet. I M. Brekke & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker: innføring i forskningsarbeid i skolen* (s. 45-62). Oslo: Universitetsforlaget.

Germeten, S. & Bakke, J. (2013). Observasjon: å innta klasserommet med egne sanser. I M. Brekke & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker: innføring i forskningsarbeid i skolen* (s. 109-124). Oslo: Universitetsforlaget.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example. *Educational studies in mathematics, 39*(1/3), 111-129. https://doi.org/10.1023/A:1003749919816

Gravemeijer, K. & Stephan, M. (2002). Emergent Models as an Instructional Design Heuristic. I K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Van Oers & L. Verschaffel (Red.), *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education* (s. 145-169). Dordrecht: Springer Netherlands.

Gutierrez, R. (2013). The Sociopolitical Turn in Mathematics Education. *Journal for research in mathematics education, 44*(1), 37-68. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.44.1.0037

Hart, K. M., Brown, M., Kerslake, D., Küchemann, D. & Ruddock, G. (1985). *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests: Teacher´s guide* Nfer-Nelson.

Johannessen, A., Christoffersen, L. & Tufte, P. A. (2021). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (6. utg. utg.). Oslo: Abstrakt forlag AS.

Jupri, A. & Drijvers, P. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in Algebra. *Eurasia journal of mathematics, science and technology education, 12*(9), 2481-2502. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1299a

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 340-419). New York: Macmillan.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (2013). *Fortsatt en vei å gå : norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforl.

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del - verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn* (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Küchemann, D. (1981). Algebra. I K. M. Hart (Red.), *Children´s understanding of mathematics: 11-16* (s. 102-119). London: John Murray.

Larsen, S. (2018). Didactical phenomenology: The engine that drives realistic mathematics education. *For the learning of mathematics, 38*(3), 25-29.

Laurens, T., Batlolona, F. A., Batlolona, J. R. & Leasa, M. (2018). How does realistic mathematics education (RME) improve students' mathematics cognitive achievement? *Eurasia journal of mathematics, science and technology education, 14*(2), 569-578. https://doi.org/10.12973/ejmste/76959

Manchester Metropolitan University. (2018-2020). Teaching materials for Unknowing the Unknown (A1). Hentet fra https://rme.org.uk/our-materials/algebra-1/

Niss, M. & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Abingdon, Oxon, New York: Routledge.

Nuraida, I. & Amam, A. (2019). Hypothetical learning trajectory in realistic mathematics education to impove the mathematical communication of junior high school students *Infinity (Bandung), 8*(2), 247-258. https://doi.org/10.22460/infinity.v8i2.p247-258

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult?: a study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency*. [Oslo]: Faculty of Educational Sciences, University of Oslo.

Palinussa, A. L. (2020). Comparison of algebra learning outcomes using realistic mathematics education (RME), Team assisted individualization (TAI) and conventional learning models in junior high school 1 Masohi. *Infinity (Bandung), 9*(2), 173-182. https://doi.org/10.22460/infinity.v9i2.p173-182

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk : innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforl.

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I. & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Ringdal, K. (2013). *Enhet og mangfold : samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (3. utg. utg.). Bergen: Fagbokforl.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The Mathematics Teacher*, *74*(6), 418-450. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/27962524

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for research in mathematics education, 26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Solomon, Y., Hough, S. & Gough, S. (2020). The role of appropriation in guided reinvention: establishing and preserving devolved authority with low-attaining students. *Educational studies in mathematics, 106*(2), 171-188. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09998-5

St.meld. nr. 11 (2008-2009). *Læreren Rollen og utdanningen*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/stmeld-nr-11-2008-2009-/id544920/

Stephan, M., Underwood-Gregg, D. & Yackel, E. (2014). Guided Reinvention: What Is It and How Do Teachers Learn This Teaching Approach? I *Transforming Mathematics Instruction* (s. 37-57). Cham: Springer International Publishing.

Tarim, K. & Kütküt, H. B. (2021). The Effect of Realistic Mathematics Education on Middle School Students’ Mathematics Achievement. *Cukurova University Faculty of Education Journal*, *50*(2), 1305-1328.

TES. (2015). Maths with letters. Hentet fra https://www.tes.com/teaching-resource/fun-and-accurate-introduction-to-algebra-7214771

Tjora, A. H. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Ulvik, M. (2016). Aksjonsforskning - en oversikt. I M. Ulvik, H. Riese & D. Roness (Red.), *Å forske på egen praksis: aksjonsforskning og andre tilnærminger til profesjonell utvikling i utdanningsfeltet* (s. 17-36). Bergen: Fagbokforlaget.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education as work in progress. I F. L. Lin (Red.), *Common Sense in Mathematics Education*. Taipei, Taiwan: The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education: An Example from a Longitudinal Trajectory on Percentage. *Educational studies in mathematics, 54*(1), 9-35. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Didactical Phenomenology (Freudenthal). I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 174-176). Dordrecht: Springer Netherlands.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 713-717). Cham: Springer International Publishing.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *ZDM*, *37*(4), 287-307. https://doi.org/10.1007/BF02655816

Wagner, S. (1983). What Are These Things Called Variables? *The Mathematics Teacher, 76*(7), 474-479. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/27963648

Warsito, Darhim & Herman, T. (2018). Improving students' mathematical representational ability through RME-based progressive mathematization. *J. Phys.: Conf. Ser, 948*(1), 12038. https://doi.org/10.1088/1742-6596/948/1/012038

Wijers, M. (2001). How to deal with algebraic skills in realistic mathematics education? I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red.), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI): The future of the teaching and learning of algebra 2,* (s. 649-654). Melbourne, Australia: Department of Science and Mathematics Education, Univerity of Melbourne.

9 Vedlegg

Vedlegg 1 – Pre/post-test

Kartlegging

NAVN:

1. Ranger disse fra lavest til høyest.

   n+1 *n+4* *n-3* *n* *n-7*

   Svar (start med laveste):

2. Hva er størst av 2n og n+2? Begrunn svaret ditt

3. Fyll inn, slik at uttrykket blir balansert

   4 + a + ___ = 3 + 3a + ___

4.
a) 4 addert med *n* kan skrives som *n+4*.
Adder 4 med uttrykkene under, og regn ut et svar om mulig:

3	8	n+5	3n
_*3+4=7*__	________	________	________

b) n multiplisert med 4 kan skrives som 4n.
Multipliser uttrykkene under med 4, og regn ut et svar om mulig:

3	8	n+5	3n
__*3*4=12*__	________	__________	_________

5.

5a)	5b)	5c)
Hvis: a+b=43	*Hvis:* n-246=762	*Hvis:* e+f=8
Hva er da: a+b+2=	*Hva er da*: n-247=	*Hva er da*: e+f+g=

6. På Kiwi koster en potet 7 kroner, og en gulrot koster 4 kroner.

a) Hvis **p** står for antall poteter kjøpt og **g** står for antall gulrøtter kjøpt, hva står **y** for i uttrykket **7p+4g=y**?

____

7.

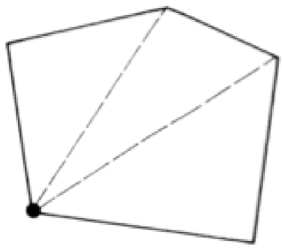
a) Adam har halvparten så mange flasker med brus som Mathias. Lag en likning som viser hvor mange flasker med brus de har til sammen.

____

8.

I en slik figur kan du finne totalt antall diagonaler ved å trekke 3 fra det totale antall sider.

Det vil si at en figur som har 5 sider (slik som denne) har 2 diagonaler.



En figur med 57 sider har _________ diagonaler

En figur med *k* sider har __________ diagonaler

9. Hva kan du si om *r* hvis *r=s+t og r+s+t=30*

10a.

Vemund jobber på Baker Hansen og tjener 600 kroner i uken. Han får også betalt 120 kroner for hver time han jobber overtid.

Hvis **t** står for antall timer overtid som han jobber, og
hvis **L** står for den totale ukelønnen (i kroner)
Skriv ned en likning som viser hvor mye Vemund tjener hver uke:

10b.
Hvor mye ville Vemund tjent på en uke dersom han hadde jobbet 4 timer overtid?

11. Når er påstanden sann? Alltid, aldri eller noen ganger? Sett strek under riktig svar, og begrunn dersom det kun er sant noen ganger.

A + B + C = C + A + B	Alltid	Aldri	Noen ganger, når ___________________
L + M + N = L + P + N	Alltid	Aldri	Noen ganger, når ____________________

12. På en bondegård er det fire lam per sau. Skriv en likning som representerer at det er fire ganger så mange lam som sauer.

13. Skriv disse uttrykkene så enkelt som mulig

a) 2a + 5a=_______________

b) 2a + 5b + a=_______________

c) 31 – b + a=______________

d) a + 4 + a – 4=_______________

Vedlegg 2- Undervisningsopplegget

Økt 1 - «Binders»

Binders

Hvor mange binders er det i boksen?

Antallet binders i boksen

	Hvor mange binders er det?
Hele boksen	
Fjerne 12 binders	
Legge til 100 binders	
Legge til en ekstra boks	
Legge til to bokser	
Halvparten av boksen	
legge til 4 binders i to bokser	

Antallet binders i boksen

Dere får vite at det er 300 binders i en boks, hvor mange binders er det totalt i hvert tilfelle?

	uttrykk	Antall binders
a) Hele boksen		
b) Fjerne 12 binders		
c) Legge til 100 binders		
d) Legge til en ekstra boks		
e) Legge til to bokser		
f) Halvparten av boksen		
g) legge til 4 binders i to bokser		

Antall binders

?

Dere teller over og finner ut at det egentlig bare er 267 binders i hver boks

beskrivelse	uttrykk	300 i esken	267 i esken
Hele boksen			
Fjerne 12 binders			
Legge til 100 binders			
Legge til en ekstra boks			
Legge til to bokser			
Halvparten av boksen			
Legge til 4 binders i to bokser			

Økt 2 – «Kine på handletur»

Kine på handletur

Kine skal handle iskaffe og yoghurt for hele uken (mandag-fredag). Hun drikker én iskaffe hver morgen, og spiser en yoghurt til lunsj hver dag. I tillegg trener hun to kvelder og spiser en yoghurt når hun er ferdig på trening.

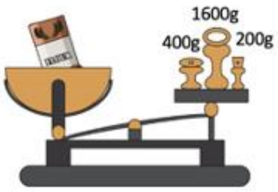
- Lag en ligning for hvor mye det vil koste Kine å handle yoghurt og iskaffe for hele uken.
- Neste uke skal Kine handle det samme, og ser at iskaffe er på halv pris. Når hun skal betale ser hun at yoghurten koster dobbelt så mye som den gjorde forrige uke. Hvordan blir det nye uttrykket?
- Faren til Kine påstår at det var billigst å handle da iskaffen var på salg. Kine mener at det var billigere første uken. Hvem har rett tror dere? Begrunn svaret.

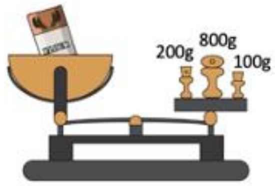
Kine på handletur

- Den første uken betaler Kine 80 kroner for iskaffe, og betaler 157 kroner totalt.
- Hvor mye koster én iskaffe?
- Hvor mye koster en yoghurt?
- Hvor mye betaler Kine for totalt den andre uken?

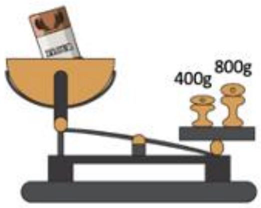
- Hadde Kine eller faren til Kine rett om hvilke uke det var billigst å handle?

Hva kan du si om vekten?



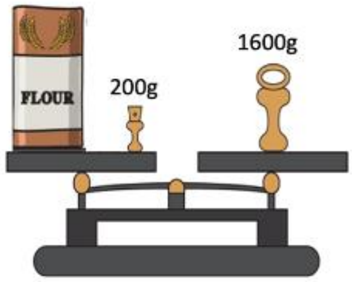


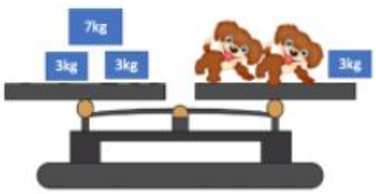
Alle pakkene med mel på bildene inneholder ulik mengde med mel. Hva kan du si om vekten til de forskjellige posene?



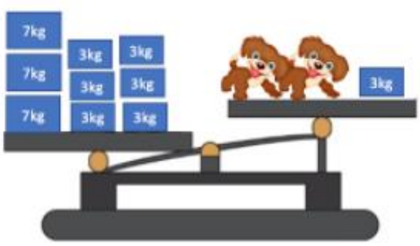
Her er en måte å veie 1,4kg med mel

- Hvordan kan jeg vite at dette er 1,4 kg?
- Beskriv til sidekameraten din hvordan jeg kan være sikker på dette, og hva jeg har gjort for å finne vekten. Har jeg rett?





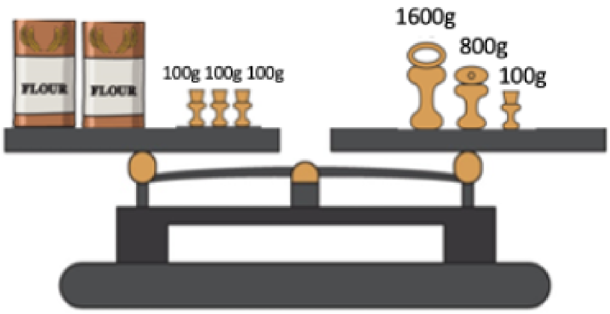
Hva skjer om vi tredobler vekten på venstre side?



Hva må vi gjøre for å balansere vekten igjen?

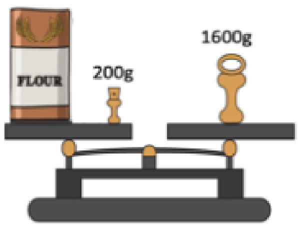
Oppgave 1: Hva ser du i dette bildet?

- Hva veier en pose mel?

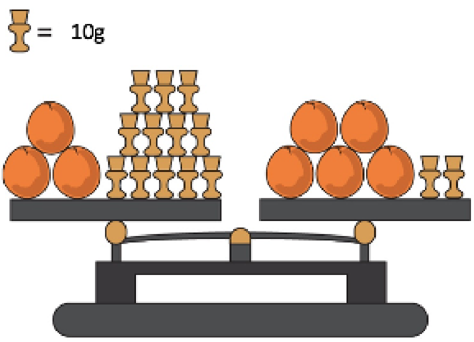


Oppgave 2

- Jeg har vektlodd som veier 100g, 200g, 800g og 1600g
- Hvordan kan jeg finne vekten til en pose med mel på: 700g, 3000g og 1,5kg
- Finn vekten til melposene på minst 2 forskjellige måter



Oppgave 3

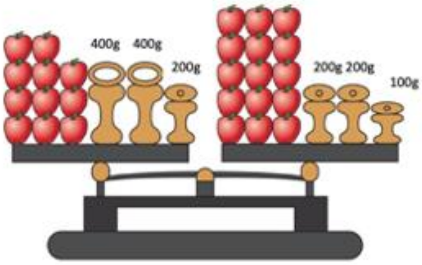


- Hva ser dere på dette bildet? Kan du skrive en likning til bildet?
- Hva hadde skjedd om vi fjernet en appelsin fra venstre side av vekten?
- Kan dere finne vekten for en appelsin?

Oppgave 4

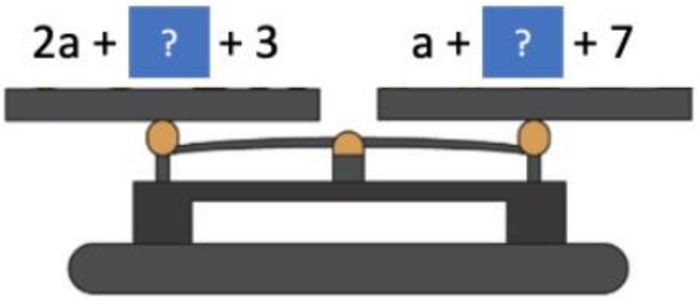
I en annen klasse har en gruppe fått liknende oppgave, og skrevet en forkortelse i stedet for å tegne

- Forklar hvordan de har tenkt
- Kunne man skrevet det på en annen måte?
- Finn ut hva et eple veier ved å bruke tegningen, prøv så å gjøre det samme med likningen
- Hva står e for i likningen?



11e + 400 + 400 + 200 = 15e + 200 + 200 + 100

Oppgave 5: Hva skjuler seg under boksene?



Oppgave 6

1) Tegn en vekt for denne likningen: **4b + 8 = 2(b + 7)**
2) Finn verdien til *b*
3) Hvordan kan du sjekke om verdien av *b* er riktig?
4) Prøv nå å løse denne likningen: **8t + 4 = 5 + 3(2t + 1)**

Økt 4 – «Fastfood»

Ta i mot ordre

Kine har begynt å jobbe på en fastfood restaurant, og her er menyen

a) Hvis du vil bestille burger med fries til deg og hele gruppen du sitter med, hvordan ville du sagt dette til Kine?

b) Skriv ned hvordan du ville regnet ut hvor mye dette hadde kostet

Meny

Burger	28,-
Nuggets (6pk)	35,-
Fries	22,-
Løkringer (6pk)	21,-
Dip	8,-

Store bestillinger

Kine får ofte lange bestillinger ved middagstid, og da pleier hun å skrive de ned, før hun regner ut prisen

Kine får en bestilling som hun skriver ned på denne måten:

3(b+f) + 4 (n+l) +1f + 2l + 2(b+l)

Kollegaen Svein tar lappen, og skriver det på denne måten for å regne ut hva totalprisen blir:

5b + 4n + 4f + 8l

Har Svein gjort det riktig?

Hva blir prisen?

Meny

Burger	28,-
Nuggets (6pk)	35,-
Fries	22,-
Løkringer (6pk)	21,-
Dip	8,-

Omskriving av bestillinger

- Kine skal regne ut hva en bestilling vil koste, og har skrevet den ned slik: **6f + 9n + 3d**
- Hvilke av disse bestillingene tror du det kan være:
  - A) 6(n+f) + 3(n+d)
  - B) 3 (f+d) + 3(f+n) + 3d
  - C) 3(3n+2f+d)

Vedlegg 3 - Observasjonsskjema

Observasjonsdag nummer:

Fokus: Bruk av kontekst, matematisering, didaktisk fenomenologi og veiledet gjenoppdaging

Aktivitet:					
	Gruppe 1	**Gruppe 2**	**Gruppe 3**	**Gruppe 4**	**Gruppe 5**
Observasjon					
Annet					

Vedlegg 4 – Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vil du delta i forskningsprosjektet

Realistisk matematikkundervisning

Dette er et spørsmål til deg om ditt barn vil delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan en realistisk matematikkundervisning kan bidra til forståelsen av algebra. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål
Informasjonen som blir hentet inn vil bli brukt i et masterprosjekt om algebraundervisning og forståelse. Prosjektet vil foregå over 2 uker i matematikkundervisningen, og innledes og avsluttes med en test for å måle eventuell endring av elevenes resultater. Målet med undersøkelsen er å se om et undervisningsopplegg knyttet til realistiske hverdagssituasjoner kan være med på å øke elevenes forståelse innenfor emnet algebra. Forskningsprosjektet er en del av en masteroppgave, og opplysningene skal ikke brukes til noen andre formål.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
OsloMet – fakultetet for lærerutdanning og internasjonale studier er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Læreren i matematikk [redacted] skal, sammen med en medstudent [redacted], skrive masteroppgave. Derfor er det ønsket å bruke elevene i klassen til å gjennomføre forskningsprosjektet.

Hva innebærer det for deg å delta?
Matematikkundervisningen i de aktuelle ukene vil foregå som normalt, men basere seg på et forskningsbasert undervisningsopplegg. Øktene vil i tillegg bli observert, og besvarelser fra tester/oppgaver vil bli samlet inn og brukt som empirisk grunnlag i masteroppgaven. Enkelte besvarelser kan bli brukt som eksempler, men alt vil selvfølgelig bli anonymisert. Observasjonene vil anonymiseres og kun noteres for hånd.

Deltagelse i forskningsprosjektet vil ikke ha en påvirkning på elevenes karakter i faget.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du lar ditt barn delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn dersom du/dere ikke vil delta eller senere velger å trekke samtykket. Om du ikke godkjenner ditt barns deltakelse, vil eleven gjennomføre samme undervisningopplegg, men besvarelser vil ikke bli brukt som empirisk eller observasjonsgrunnlag for prosjektet.

Personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker ditt barns opplysninger
Vi vil kun bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

I tillegg til oss vil også ansvarlig veileder ha tilgang til opplysningene. Observasjonsnotater vil være anonymisert. Navnene vil erstattes med en kode som lagres på en egen navneliste adskilt fra øvrige data. Orginalkopiene av tester og oppgaver blir anonymisert og innelåst under forskningsprosjektet.

Alt blir makulert etter endt forskningsprosjekt, som etter planen er 15. mai 2022. Elevene vil ikke kunne bli gjenkjent i publikasjonen.

Dine rettigheter
Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om ditt barn, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om ditt barn,
- å få slettet personopplysninger om ditt barn, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av ditt barns personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra OsloMet har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

OsloMet ved:
Gaute Haugen på epost (s325186@oslomet.no)
Kristine Wiik Berg på epost (s315076@oslomet.no)
Veileder og førsteamanuensis, Lars Reinholdtsen på epost (larsere@oslomet.no) eller på telefon: 67 23 74 58
Vårt personvernombud: Ingrid S. Jacobsen på epost (personvernombud@oslomet.no) eller på telefon: 67 23 55 34

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Lars Reinholdtsen	*Kristine Wiik Berg*	*Gaute Haugen*
(veileder)	(masterstudent)	(masterstudent)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Realistisk matematikkundervisning* og har fått anledning til å stille spørsmål.

- ☐ Jeg samtykker at mitt barns besvarelser blir samlet inn, og brukt i masteroppgaven
- ☐ Jeg samtykker at mitt barn blir observert i undervisningsøkter knyttet til dette masterprosjektet

Jeg samtykker til at mitt barn ____(navn på elev) sine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av foresatt, dato)

Vedlegg 5 – NSD Godkjenning

Vurdering

Referansenummer
265145

Prosjekttittel
Realistisk matematikkundervisning

Behandlingsansvarlig institusjon
OsloMet – storbyuniversitetet / Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier / Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Prosjektperiode
01.02.2022 - 15.05.2022

Meldeskjema

Dato	**Type**
20.12.2021	Standard

Kommentar
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 20.12.2021, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.05.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Ettersom de registrerte er under 15år vil samtykke også innhentes fra deres foresatte. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte og de foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

· lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte og de foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
· formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
· dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
· lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), og dataportabilitet (art. 20).
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.
Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).
Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring eller videosamtale) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.
For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema
Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 6 – Medforfattererklæring

Medforfattererklæring

Om to eller tre studenter gjennomfører og/eller skriver masteroppgaven sammen, skal det legges ved et medforfatterklæring, jf. emneplan MGMO5900:

"For studenter som velger å gjennomføre masteroppgaven som gruppearbeid, skal det gå tydelig fram i egen redegjørelse hvordan arbeidet er fordelt, og hvordan hver enkelt oppfyller kravet om selvstendig vitenskapelig arbeid. Her benyttes en medforfattererklæring som begge eller alle tre parter signerer."

Masteroppgavens tittel:

«Realistisk kontekst i læring og undervisning av algebra»

Redegjørelse på hvordan arbeidet er fordelt, og hvordan den enkelte oppfyller kravet om selvstendig vitenskapelig arbeid:

Arbeidet i forbindelse med denne masteroppgaven er jevnt fordelt mellom begge forfattere. Begge har tatt like stor del av planlegging, og under innsamling av data har én undervist og den andre observert. Arbeidet med utforming og rapportering har også begge tatt del i. Kravet om selvstendig vitenskapelig arbeid er oppfylt gjennom dokumentering av kjennskap til tidligere forskning, metode og gjennom å bidra til ny forståelse ved å sette søkelys på vår problemstilling.

Undertegnede bekrefter å ha bidratt til følgende deler av masteroppgavearbeidet:

Prosjektskisse, idé og tema for masteroppgaven	Ja/Nei
Praktisk gjennomføring av studien for eksempel innhenting av data	Ja/Nei
Analyse, drøfting og tolkning av resultatene	Ja/Nei

Undertegnede har lest og godkjent den innsendte versjonen av masteroppgaven

Oslo	14/05-22	Kristine W. Berg
Oslo	14/05-22	Gaute Haugen
(sted)	(dato)	(signatur)