MASTEROPPGAVE

Masterstudium i skolerettet utdanningsvitenskap med fordypning i matematikk og matematikkdidaktikk

November 2020

Kompetanse hos høyt presterende elever i matematikk

Erik Sexe Andersen

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier

GFU

Sammendrag

Kompetanse hos høyt presterende elever i matematikk er en kvalitativ studie som tar sikte på å analysere kompetansen til fem høyt presterende ungdomsskoleelever i matematikk. Studien forsøker å svare på hva som kjennetegner disse elevenes kompetanse og i hvilken grad denne kompetansen kan sies å være fremtidsrettet. Gjennom oppgavebaserte individuelle intervjuer og gruppeintervjuer har jeg undersøkt hvordan disse elevene jobber med matematikkoppgaver og sett på hvordan deres kompetanse fremstår. Jeg mener å ha vist at disse høyt presterende elevene har en kompetanse tilpasset skolens og eksamens mål, men at det må mer til for å si at kompetansen deres svarer på de krav og forventninger som stilles i matematikkfaget i ny læreplan.

Abstract

High achieving student's competence is a qualitative study which aims to analyse the competence of five high achieving students in mathematics in upper secondary school. The study tries to answer what characterises these students competence, and whether it can be said to be ready for the demands of the new curriculum. Through task-based individual interviews and group interviews I have examined how these students work with mathematical tasks and looked at what is typical of their competence. I claim to have shown that these high achieving students have competence adapted to the demands and goals of school and the exams, but that more is needed for their competence to fulfil the demands and expectations that we find in the new curriculum.

Metode

Oppgaven er en kvalitativ studie. Jeg har brukt oppgavebasert intervju som metode for å kartlegge kompetansen til fem høyt presterende elever i ungdomsskolen i Oslo. Intervjuene har blitt tatt opp med digital opptaker og er godkjent innsamlet av NSD til denne bruken forutsatt sikker oppbevaring av dataene.

Hovedfunn

Min problemstilling har vært: Hva kjennetegner den matematiske kompetansen til høyt presterende elever i matematikk og på hvilken måte er denne kompetansen i samsvar med kjerneelementene i Fagfornyelsen?

Jeg mener å ha vist at det som kjennetegner kompetansen hos elevene jeg har undersøkt er en sterk evne til å ta til seg og bruke det som kreves av dem for nettopp å være høyt presterende i skolen gjennom testsituasjoner og særlig eksamen. Jeg har analysert kompetansen til de aktuelle elevene og vist at de er særlig sterke innenfor symbol- og formalismekompetanse samt representasjonskompetanse. Jeg mener at de ikke har den sammensatte kompetansen som er etterspurt med den nye læreplanen med sine kjerneelementer, men at det gjennom en annen eksamensform og fornying av undervisningsprinsipper vil være høyst gjennomførbart for denne typen elever å fortsatt være høyt presterende. Dette er fordi disse elevene viser en evne til å tilpasse seg og ta til seg nettopp det som er etterspurt og de evner å gjøre dette både raskt og sikkert. Eleven tilpasser seg og mestrer det de blir bedt om å mestre. For å sikre en slik utvikling må man særlig se på utvikling av selvstendighet, evne til å stille de gode hvorfor-spørsmålene og slik stimulere nettopp de produktive karakterene ved kompetansen til elevene.

Forord

Det å gå løs på en mastergrad etter 18 år i skolen har vært både motiverende og skrekkinngytende. Det har vært en lærerik, men krevende prosess med deltidsjobb ved siden av et fulltids studium. Det å få anledning til å lære mer i et forsøk på å fortsette å utvikle seg i et yrke hvor jeg fortsatt ikke er halvveis i yrkesløpet har vært veldig givende. Undervisningen, kollokviene, selvstudium og opplevelsen med informanter har vært lærerik og utviklende.

Det har vært spennende å få et innblikk i nyere tanker om matematikkundervisning og ikke minst å få fordype seg i kompetansen til høyt presterende elever. Det føles nyttig og berikende å ta med seg erfaringer fra praksisfeltet tilbake på skolebenken og få prøvd egne ideer og opplevelser mot nye ideer. Jeg har fått gleden av å være student ved lærerutdanningen på Bislett på i kortere og lengre perioder i samtlige av de siste fire tiårene, og det har bestandig vært givende og utviklende.

Jeg må takke Laila Arntzen, min første rektor som lærer, som indirekte ga meg tilbake gleden ved matematikk da jeg begynte å undervise i det. Jeg må takke kollokviegruppa mi som har gjort dette til to år som har vært både interessante og hyggelige. Jeg må takke faren min for støtte til gjennomføringen av studiet. Jeg må også takke veilederen min som gjennom hele prosessen har vært en tilgjengelig og positiv samtalepartner og uvurderlig hjelp for å få retning, innspill og rettelser.

Aller mest må jeg takke min kone, uten hennes tilrettelegging og ansvarlighet på hjemmebane hadde jeg aldri kommet gjennom dette.

Jeg gleder meg til å ta med min nye kunnskap ut igjen i skolen og fortsette arbeidet som lærer.

Innledning

Oppgavens relevans

I denne oppgaven har jeg ønsket å se nærmere på høyt presterende elever i matematikk. Dette er en elevgruppe som fascinerer meg og som har blitt omtalt i medier som en neglisjert gruppe i enhetsskolen. Det er samtidig en elevgruppe som jeg i egen praksis har opplevd som interessert, engasjert og dermed motiverende å jobbe med. Skolen skal ha høye ambisjoner på vegne av alle elever, også de som allerede lykkes i skolen. Disse elevene trenger oppfølging for ikke å bli hindret i sin utvikling av en læreplan som i utgangspunktet skal sikre en minste felles plattform for samfunnsdeltagelse.

Jeg har gått inn for å fordype meg i hva slags kompetanse høyt presterende elever viser.

I en brytningstid mellom to læreplaner, Kunnskapsløftet og Fagfornyelsen, har jeg ønsket å både beskrive kompetansen disse elevene viser når de jobber med oppgaver, men også å se på hvilken kompetanse læreplan og andre offentlige dokumenter faktisk etterspør både nå og for framtiden, samt se på i hvilken grad disse elevene besitter en slik fremtidsrettet kompetanse.

Studiens formål og forskningsspørsmål

I denne studien beskriver jeg kompetansen hos fem høyt presterende elever i matematikk i 9. klasse på to skoler i Oslo. Jeg har laget en kompetanseprofil for hver av de fem elevene og drøfter hva som kjennetegner kompetansen deres og i hvilken grad denne kompetansen svarer til det som er etterspurt i de nye læreplanene og i samfunnet i årene som kommer.

Problemstillingen min er:

Hva kjennetegner den matematiske kompetansen til høyt presterende elever i matematikk og på hvilken måte er denne kompetansen i samsvar med kjerneelementene i Fagfornyelsen?

For å svare på denne problemstillingen prøver jeg å beskrive elevenes kompetanse slik den framstår i øyeblikket. Jeg vil samtidig se på hva som blir antatt å være etterspurt kompetanse i matematikk i årene framover og da ikke minst i den nye læreplanen Fagfornyelsen. Jeg har stilt meg disse underspørsmålene:

- Hvordan ser kompetanseprofilen til høyt presterende elever ut?
- Hvordan svarer elevenes kompetanse på forventningene til en fremtidsrettet kompetanse?
- I hvilken grad samsvarer disse elevenes kompetanse med kjerneelementene i Fagfornyelsen.

Oppgavens struktur og oppbygning

I denne oppgaven har jeg først gått gjennom teori om kompetanse og hvilke forventninger som stilles til kompetanse i skolen. Jeg har også sett på hva som menes med høyt presterende elever i matematikk. Videre har jeg presentert en teoretisk innramming og begrunnelse for metodene jeg har valgt og oppgavene jeg har brukt for å benytte denne metoden i min studie. Videre har jeg analysert intervjuene jeg har gjort, og det er her hoveddelen av oppgaven er. Jeg presenterer disse resultatene både som kompetanseprofiler og i oppsummerende tabeller for å tydeliggjøre hvilken kompetanse jeg har kartlagt hos de aktuelle elevene. Til slutt har jeg drøftet hva som kjennetegner denne kompetansen og i hvilken grad den kan sies å være fremtidsrettet.

Innhold

Teoridel

Begreper

Hva menes med høyt presterende elever

Høyt presterende elever er ikke i seg selv et klart definert begrep. Derfor må dette begrepet avklares for å komme videre i arbeidet med denne oppgaven. Jeg skal gi en oversikt over noen teoretiske perspektiver på dette feltet og oppsummere dem til den forståelsen jeg har valgt å legge til grunn i min oppgave.

Jeg har valgt å se nærmere på hva som kom fram om denne elevgruppa i NOU 2016:14 «Mer å hente»(NOU 2016:14, 2016) og i en forskningsoppsummering fra Kunnskapssenter for Utdanning hos Norsk Forskningsråd (Børte, Lillejord & Johansson, 2016) som ligger til grunn for arbeidet med NOU 2016:14. Jeg har også funnet fram til noen andre kilder som har sett på dette emnet.

I flere land har det blitt sett på som elitistisk, og undergraving av likhetsprinsippet, å sette inn tiltak for evnerike elever og elever med stort læringspotensial. Argumentet mot har blant annet vært at de ressurssterke klarer seg selv. (Børte et al., 2016) Eksempler på dette har man også sett i hvordan undervisning har blitt lagt opp i grupper for de sterkeste matematikkelevene i England. (Gates, 2001, kapittel 6) Disse tankegangene har også gjort seg gjeldende i norsk skole. (Skogen & Idsøe, 2011)

Elevene det her er snakk om er en stor og sammensatt gruppe som benevnes på flere forskjellige måter i både norsk og internasjonal litteratur. På engelsk brukes ord som «gifted, talented, high achieving og exceptional», mens vi på norsk kan se ord som «evnerike, begavede, talentfulle, høyt presterende og eksepsjonelle». Ifølge Kunnskapssenter for utdanning brukes begavelse om teoretiske og akademiske evner mens talent benyttes når det er snakk om sport eller praktiske ferdigheter på engelsk. I andre europeiske språk er ikke dette skillet like klart og begrepene kan brukes sammen eller hver for seg. I henholdsvis Spania og Frankrike brukes det tidvis mer beskrivende definisjoner knyttet til intellekt, evner og modenhet. (Børte et al., 2016, s. 13)

Brevik og Gunnulfsen definerte høyt presterende elever som

«elever som oppnår karakterer over middels». (Brevik & Gunnulfsen, 2016, s. 211)

Dette er en veldig tydelig definisjon, men en som inkluderer veldig mange elever. Jeg ønsker derfor å finne en definisjon som spisser mer hvilke elever som kan regnes som høyt presterende. I Meld. St. 20 (2012-2013) er høyt presterende elever definert som elever som får karakteren 5 eller 6, og denne gruppen har ikke vært økende de senere årene selv om gruppa som får svake karakterer har blitt mindre. (Kunnskapsdepartementet, 2013)

Innenfor gruppa med begavede elever skiller man også ofte mellom de som får gode resultater, og de som har potensiale til å få gode resultater eller å lære mye, men som ikke nødvendigvis får full uttelling for dette. Idsøe skiller tydelig mellom skoleflinke og de med akademisk talent, og peker på behovet for et læringsmiljø som møter deres behov. (Idsøe, 2014) Idsøe peker på de hun kaller skoleflinke som motiverte, og det er nettopp motivasjon og innsats som er de viktigste faktorene for å prestere høyt. (Reis og Renzulli (2009) i Børte et al., 2016)

Det er også varierende syn på i hvilken grad det å være begavet eller evnerik er medfødt og konstant eller noe som kan formes og utvikles. (Laine m fl. (2016) i Børte et al., 2016)

Jøsendalutvalget ble oppnevnt av Kongen i statsråd i 2015

«for å vurdere forutsetninger og foreslå konkrete tiltak for at flere elever skal prestere på høyt og avansert nivå i grunnopplæringen, og for at høyt presterende elever skal få et bedre skoletilbud.»(NOU 2016:14, 2016)

I denne utredningen blir det både gjort rede for bruk av flere av begrepene og kjennetegn ved elever som presterer høyt. Her nevnes det blant annet at elever som presterer høyt ofte er bedre i problemløsning. Det gås ikke nærmere inn på hva som menes med problemløsning, men jeg ser nærmere på hvordan det kan forstås i delkapittelet om oppgaver.

I Jøsendalutvalgets rapport fremheves det at utredningen er nødvendig fordi det ikke blir gitt nok riktig oppfølging til denne elevgruppa i norsk skole (NOU 2016:14, 2016, s. 8). I presentasjonen av elevgruppa forsøker utvalget å bruke begreper som hentyder til at intelligens og evner er dynamiske og flytende i stedet for noe statisk og medfødt.

I internasjonale tester er det få norske elever som presterer på de høyeste nivåene. Norske elever underpresterer i algebra mens de er bedre i dagligdagsmatematikk, noe vi også finner igjen i både Finland og Sverige. Elevene som presterer godt i Norge bruker kontroll-, utdypnings- og hukommelsesstrategier, blir motivert av konkurranse, er selvdrevne og selvsikre og har høy selvoppfatning i faget. Videre finner man at elever som presterer høyt er mer selvdrevne enn andre og i større grad prøver å finne informasjon hvis det er noe de ikke forstår og i mindre grad repeterer eksempler for å huske framgangsmåter. (NOU 2016:14, 2016)

Utvalgets mandat var som nevnt å foreslå tiltak for et bedre skoletilbud for høyt presterende elever. Utvalget valgte å justere dette og heller se på elever med stort eller ekstraordinært læringspotensial. Dette er elever som lærer raskere og tilegner seg mer kompleks kunnskap enn jevnaldrende, men som ikke nødvendigvis lykkes eller presterer høyt resultatmessig i skolen. Gruppa med stort læringspotensial vurderes til å kunne inkludere 10-15 prosent av elevpopulasjonen, mens de med ekstraordinært læringspotensial kan være 2-5 prosent av elevpopulasjonen. (NOU 2016:14, 2016)

Gjennomgående finner jeg litteratur som ser på de elevene som har stort læringspotensial, er evnerike, begavede eller talentfulle, men som av forskjellige grunner ikke lykkes eller trives i skolen. Fokuset er på hvordan man kan bedre situasjonen for disse.

Elever med stort læringspotensial er en spennende gruppe, men for en oppgave som min anser jeg det som for utfordrende og tidkrevende å sikkert finne og identifisere elever i denne gruppa. Jeg har derfor tatt utgangspunkt i de som viser gjennom resultater at de er høyt presterende for så å beskrive kompetansen disse kan vise meg gjennom oppgaver. Mine informanter er 9.klassinger som alle har fått 6 i matte, og hvor tre av fem fullførte 10. klasse våren 2020 gjennom sin skoles opplegg for forsert løp. I 10. klasse fikk 7,8% av elevkullet karakteren 6 som standpunktkarakter i 2019 og 9,1% i 2020. (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Hva menes med kompetanse

Kompetanse er et begrep som brukes mye både i offentlige styringsdokumenter og debatter om fag, og fagets plass og nytte i samfunnet. Ikke minst har læreplanene i fag kompetansemål som er rammen for hva det er ønskelig at elevene skal lære på skolen. I tillegg har man en teoretisk forståelse for hva kompetanse er i matematisk forstand og fra et matematikkdidaktisk ståsted. I det følgende skal jeg se nærmere på noen av disse perspektivene.

Kunnskapsløftet

LK06 sier om matematikk at:

«Faget grip inn i mange vitale samfunnsområde, som medisin, økonomi, teknologi, kommunikasjon, energiforvalting og byggjeverksemd. Solid kompetanse i matematikk er dermed ein føresetnad for utvikling av samfunnet.» (Kunnskapsdepartementet, 2006)

I Kunnskapsløftet er kompetanse definert på denne måten:

«evnen til å løse oppgaver og mestre komplekse utfordringer. Elevene viser kompetanse i konkrete situasjoner ved å bruke kunnskaper og ferdigheter til å løse oppgaver. Det kan handle om å mestre utfordringer på konkrete områder innenfor utdanning, yrke og samfunnsliv eller på det personlige plan»(Utdanningsdirektoratet, 2016)

I den videre forklaringen av hva som ligger i begrepet understrekes det at kompetanse er mer enn enkeltkunnskaper eller ferdigheter. Det handler om en sammensetning av kunnskaper og ferdigheter og det er sentralt å kunne anvende disse.

Også i eksamensveiledningen er det å anvende sentralt i forståelsen av elevenes kompetanse. Kompetansemålene og de grunnleggende ferdighetene er utgangspunktet for hva som skal vurderes, men oppgavene skal gi mulighet til å vise at man kan ta i bruk ferdighetene og kunnskapene. Begrepet resonnementskompetanse er brukt i eksamensveiledningen for 2020, men som et underpunkt til en enkeltoppgave. Veiledningen deler matematikkompetansen inn i tre hovedområder, begreper, forståelse og ferdigheter, problemløsning og kommunikasjon.

Andre offentlige styringsdokumenter

I NOU 2014:7, «Elevenes læring i fremtidens skole» skrives det at

«Hver enkelt elev og lærling skal tilegne seg verdier og kompetanse for egen utvikling og aktiv samfunnsdeltakelse. Skolen skal utvikle kompetanse som er bærekraftig gjennom flere tiår.»(NOU 2014:7, 2014, s. 13)

Utredningen tar utgangspunkt i et bredt kompetansebegrep som skal gi grunnlag for å løse oppgaver og møte utfordringer i forskjellige sammenhenger.

Videre peker NOU 2015:8, «Fremtidens skole» på fire kompetanseområder som bør prioriteres når fagene i skolen skal fornyes. De er:

- Fagspesifikk kompetanse
- Å kunne lære
- Å kunne kommunisere,
- Samhandle og delta

I denne oppgaven undersøker jeg den matematiske kompetansen hos høyt presterende elever. Da er det nødvendig å avklare hva som menes med kompetanse. De rent leksikalske definisjonene er av mindre interesse enn hva som forstås med kompetanse i skolesammenheng, men kan gi en bakgrunn for å forstå hva vi mener med begrepet. Bokmålsordboka definerer kompetanse som «kvalifikasjon, dyktighet til noe» mens Store norske leksikon forklarer begrepet med «evne eller kvalifikasjoner» Kunnskapsløftet (LK-06) er læreplanen elevene jeg undersøker har fulgt. Alle fag har sine spesifikke kompetansemål og læreplanens forståelse og definisjoner blir dermed helt vesentlige. Ettersom læreplanen kommer i forkant av den tiden elevene faktisk skal anvende kompetansen sin er det også interessant å se litt framover. I Fagfornyelsen (LK20) og i forarbeidene til denne, som NOU 2014:7 – Elevenes læring i fremtidens skole, NOU 2015:8 – Fremtidens skole og Stortingsmelding 28 2015-16, Fag – Fordypning – Forståelse, sies det noe om hvilken kompetanse elevene ventes å ha behov for i tiden som kommer. Mye av det som er i disse dokumentene er av generell karakter, men under læreplaner i fag i både LK-06 og LK20 vil jeg finne en del om de rent fagspesifikke kompetansene i matematikk, spesielt i de nye kjerneelementene i matematikk i LK20. I overgangen til den nye læreplanen ser jeg på det som spesielt interessant å fordype meg i en beskrivelse av hvilken kompetanse disse elevene har, og hvordan den samsvarer med de antatte behovene for kompetanse i tiden fremover.

Ved siden av å se på styringsdokumentene vil jeg også se på hva slags kompetanse som etterspørres til eksamen. Selv om eksamen skal være et middel til å vurdere om kompetansemålene er oppnådd vil den ofte fremstå som selve målet med grunnskolen for mange elever. De elevene jeg undersøker er vurdert til å ha nådd mange av disse målene, men vil sannsynligvis ha blitt undervist i tråd med disse forventningene.

Ved siden av tilnærmingen til hva som menes med kompetanse i de offentlige styringsdokumentene ønsker jeg et mer teoretisk perspektiv på hva som forstås med matematisk kompetanse eller kompetanse i matematikk. Her tar jeg særlig utgangspunkt i den danske rapporten Kompetencer og matematikklæring fra 2002(Niss & Højgaard, 2002). Den har en grundig utdypning av hva som menes med kompetanse i matematikk og deler disse kompetansene inn i åtte hovedkategorier. Denne rapporten har også vært vesentlig for hva man har lagt vekt på i utformingen av nasjonale prøver ifølge Mona Røsseland ved Matematikksenteret (Røsseland, 2005).

Opplæringsloven og Kunnskapsløftet

Det har vært et mål helt siden Normalplanen av 1939 (N39) at elevene skal kunne anvende kunnskapen sin, men det er først i Kunnskapsløftet at begrepet kompetanse brukes som gjennomgripende og i planer for grunnskolen. (NOU 2014:7, 2014, s. 56)

I forskriften til opplæringsloven er begrepet kompetanse brukt gjentatte ganger i kapitlene om vurdering og underveisvurdering. Det sies at vurderingen skal si noe om elevens kompetanse opp mot kompetansemålene i fagene. Det er allikevel ingen tydelig beskrivelse av hva som menes med kompetanse, men en henvisning til kompetansemålene i de ulike fagene.(Opplæringslova, 2006)

I læreplanen fra 2006, Kunnskapsløftet (LK06) har hvert fag sin læreplan med sine kompetansemål. Kompetansemålene angir hva elevene skal kunne etter avsluttet opplæring på det enkelte trinn og skal på fagets premisser ha integrert mål for de fem grunnleggende ferdighetene å kunne uttrykke seg muntlig, å kunne lese, å kunne skrive, å kunne regne og å kunne bruke digitale verktøy.

Under «Formål med faget» heter det at

«Solid kompetanse i matematikk er dermed en forutsetning for utvikling av samfunnet»

og

«På den måten er matematisk kompetanse nødvendig for å kunne forstå og kunne øve innflytelse på prosesser i samfunnet.» (Kunnskapsdepartementet, 2006)

Samtidig er det slik at matematikkfaget har et dobbelt siktemål. Det skal både være et redskapsfag som øver opp ferdigheter og kunnskaper, bidrar til teknologisk utvikling i samfunnet og er en allmenndannende del av kulturarven. (NOU 2014:7, 2014, s. 82)

LK06 sier også at både problemløsning og språklige aspekter som å resonnere og kunne kommunisere ideer inngår i en matematisk kompetanse. Det sies også litt om hvordan man skal jobbe for å utvikle denne kompetansen. Det skal gjøres gjennom varierte arbeidsformer både teoretisk og praktisk med veksling mellom lekende, utforskende, kreative og problemløsende aktiviteter samt ferdighetstrening. Rike erfaringer skal lede til positive holdninger og solid fagkompetanse.

I denne oppgaven ser jeg på elever i ungdomsskolen, nærmere bestemt på 9. trinn, og det er dermed kompetansemålene etter 10. trinn som blir mest relevante. Det er disse målene elevene har jobbet etter under LK06. Kompetansemålene her er sortert i fem hovedområder: *Tall og algebra, Geometri, Måling, Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk og Funksjoner*. I beskrivelsene av kompetansemålene er det brukt verb som bruke, regne, anvende, eksperimentere og så videre. Dette forteller om en kompetanseforståelse som sier at kunnskapen skal anvendes og peker tilbake til fagets formål som beskriver matematikk som et redskapsfag.

Kompetansemålene er knyttet nært til spesifikke faglige delemner og behandlingen av disse. Det er konkretisert ned på et tidvis ganske detaljert nivå hva det skal jobbes med og på hvilket nivå når det for eksempel står at eleven skal kunne:
«løse likninger og ulikheter av første grad og enkle likningssystemer med to ukjente» eller «gjøre rede for tallet π og bruke dette i beregninger av omkrets, areal og volum»(Kunnskapsdepartementet, 2006). Samtidig brukes det åpne og runde formuleringer som gir ganske stort tolkningsrom i mål som *«gjennomføre undersøkelser og bruke ulike databaser til å søke etter og analysere statistiske data og utvise kildekritikk»* (Kunnskapsdepartementet, 2006).

Det er på den ene siden søkt å være ganske tydelige om hvilke faglige delemner man skal innom samtidig som det er forsøkt å gi frihet til arbeidsmåter, rom for differensiering og åpning for forskjellige løsningsmetoder og tilnærminger til oppgaver.

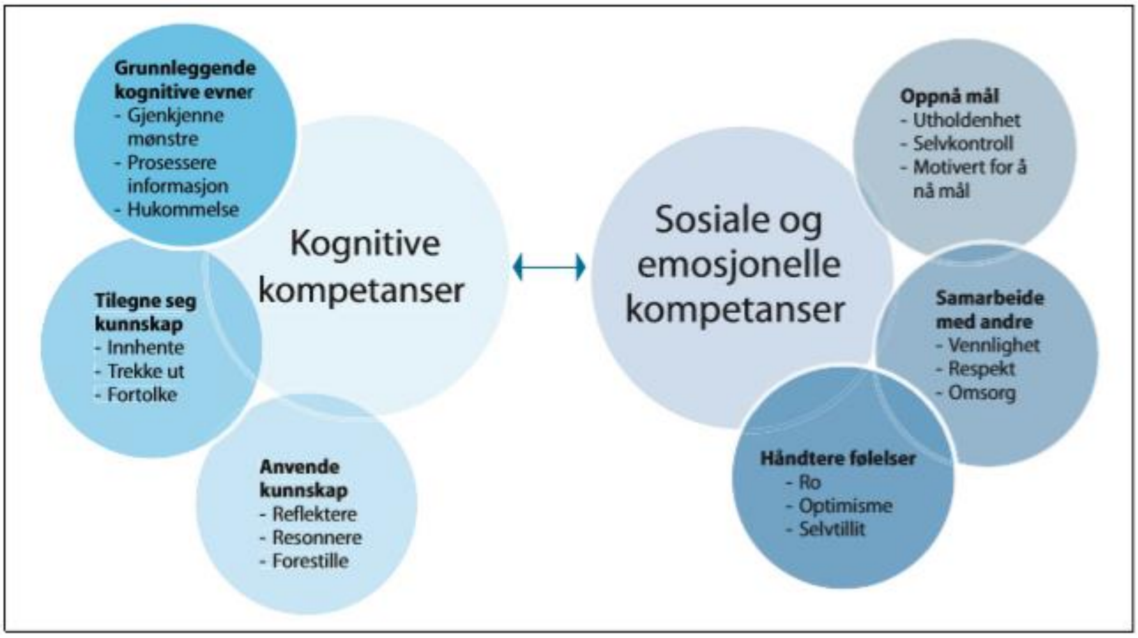
Begrepet kompetanse er i liten grad definert i Opplæringsloven og var heller ikke det i Kunnskapsløftet da det først kom til tross for at det er et sentral og mye brukt begrep. I forarbeidene til den nye læreplanen fagfornyelsen gjøres det en del analyse av hvilken forståelse av kompetanse som ligger til grunn, og det skal jeg komme nærmere inn på i neste delkapittel.

Forarbeidene til ny læreplan

NOU 2014:7 er en delutredning i forarbeidene til ny læreplan for å vurdere situasjonen i skolen etter en del år med LK-06 og for å gi ideer om hva elevene vil trenge i fremtidens samfunn. Selve hovedutredningen er NOU 2015:8 som gir konklusjoner på situasjonen og anbefalinger til utviklingen av ny læreplan. De to utredningene er til slutt utgangspunktet for Stortingsmelding 28:2015-2016

NOU 2014:7 – Elevenes læring i fremtidens skole

Elevene skal lære seg de fire grunnleggende ferdighetene, å lese, å skrive, å regne og digitale ferdigheter. Disse er integrert i kompetansemålene for fag på fagets premisser.(NOU 2014:7, 2014, s. 32) Kompetansebegrepet knyttes til karakterene og det sies at sluttvurderingen med karakter skal «vise den kompetansen eleven har ved avslutningen av opplæringen.» (NOU 2014:7, 2014, s. 28) Utredningen beskriver at skolen har et bredt kompetansebegrep og sier at: «Delutredningen legger til grunn at kompetanse handler om å kunne løse oppgaver og møte utfordringer i ulike sammenhenger» (NOU 2014:7, 2014, s. 32) I utredningen snakkes det både om *kognitiv læring og kompetanse* og *sosial og emosjonell læring og kompetanse*. I det brede kompetansebegrepet henger disse to aspektene sammen og utredningen understreker at nyere forskning støtter tanken om at den sosiale og emosjonelle kompetansen er avgjørende for i hvilken grad elevene lykkes videre i livet. For å fremme elevenes læring bør de de delta aktivt i og forstå læringsprosessene. Utviklingen av denne metakognitive kompetansen anbefales knyttet til de aktuelle fagene- og kunnskapsområdene elevene arbeider med. Kompetanse skal utvikles på tvers av fagområder, og selv om man ikke kan dokumentere at elever umiddelbart klarer å overføre dette mellom situasjoner, antar man at det å stimulere elevene slik øker muligheten for at de tar i bruk kompetanse i uvante situasjoner. Fordi skolen skal bidra til læring i et livslangt perspektiv blir kompetanse i det å lære helt sentralt. Dette består ifølge læringsforskning av *metakognisjon, selvregulering og læringsstrategier. (NOU 2014:7, 2014, s. 36)* Metakognisjon forklares som tenking om egne kognitive prosesser og resultater og evne til å reflektere over og overvåke dette. Læringsstrategier vil si hvilke handlinger og tanker som finner sted under de forskjellige læringsaktivitetene for å fremme læring. Selvreguleringen overlapper metakognisjonen på mange områder, men handler særlig om å håndtere og regulere egne følelser og motivasjon underveis. Denne evnen henger sammen med elevens mestringsforventninger slik vi kjenner dem fra for eksempel Bandura. (Bandura, 1977)



Figur 1: Figur 3.3 side 38 i NOU 2014:7

Det er de kognitive kompetansene som særlig må utvikles fagspesifikt, de sosiale og emosjonelle kompetansene er også med som forutsetninger for læring, men kan og må innarbeides generelt i alle fag.

I PISA-studien fra 2012 hadde norske elever resultater rundt gjennomsnittet for OECD i problemløsning. Internasjonalt ser man at det er elevene som presterer godt i lesing, matematikk og naturfag også er gode i problemløsning, men norske elever gjør det altså litt bedre her enn generelt i matematikk og elever fra lav sosioøkonomisk bakgrunn overpresterer også noe her.

NOU 2014:7 klargjør grunnlaget for hvilken kompetanse offentlige myndigheter ser for seg at det vil være behov for i fremtidens samfunn. NOU 2015:8 forsøker å klargjøre både hvordan kompetanse er forklart i LK06, men også hva slags kompetanse morgendagens skole bør utvikle.

I NOU 2015:8 pekes det på flere kjennetegn ved samfunnsutviklingen framover: «et samfunn med større mangfold, høy grad av kompleksitet og hurtige endringer. … kommunikasjons og medieteknologier i rask utvikling, utfordringer med bærekraftig utvikling, demografiske endringer lokalt og globalt med etnisk, kulturelt og religiøst mangfold, urbanisering, forbruksvekst og et kunnskapsbasert og internasjonalisert arbeidsliv.» (NOU 2015:8, 2015, s. 8). På bakgrunn av dette har utvalget endt med å anbefale fire kompetanseområder for innholdsfornyelse i skolen: fagspesifikk kompetanse, kompetanse i å lære, kompetanse i å kommunisere, samhandle og delta og kompetanse i å utforske og skape.(NOU 2015:8, 2015, s. 8)
NOUen legger opp til at disse fire kompetanseområdene skal utvikles gjennom arbeidet med fagene. I tillegg blir matematikk trukket fram som et særskilt viktig fagområde som opptrer i sammenheng med naturfag og teknologi. Utredningen peker på behovet for matematisk kompetanse både for kunnskapsutvikling i andre vitenskapsfag, innovasjon og sikring av konkurransedyktig næringsliv. Det pekes også på individets behov for matematisk kompetanse både innen arbeid og utdanning, men ikke minst med tanke på hverdagsliv og egen økonomi. Disse behovene skal i hovedsak ivaretas gjennom matematikkfaget, men også gjennom regning som grunnleggende ferdighet gjennomgripende i alle skolens fag. (NOU 2015:8, 2015, s. 24) Denne innlæringen gjennom grunnleggende ferdigheter i andre fag enn den rene matematikken baserer seg på internasjonale erfaringer med å gjøre det samme med tallforståelse og matematisk literacy.

I forståelsen av kompetanse legges det videre vekt på at kompetanse kan læres og utvikles og som kommer til uttrykk gjennom handlinger og aktiviteter. Denne kompetanseutviklingen skal både oppfylle samfunnsmandatet overfor eleven og dennes behov for utvikling samtidig som det gjør eleven til en bidragsyter i et storsamfunn som blir mer og mer globalisert og avhengig av internasjonal samhandling. Den personlige utviklingen forstås også som å skulle skje både gjennom å lære å ta initiativ i egen læringsprosess og gjennom samspill med andre.

Kritisk vurderingsevne og god problemløsningsevne trekkes fram som elementer som kan vise en kompetanse som den nevnt over. Derfor anbefales det å trene på å stille utforskende spørsmål, analysere og løse problemer sammen med andre. Dette sees i sammenheng med at vitenskapelige tenkemåter og metoder vil være relevante for fremtiden. Et verktøy både fagovergripende og for flere av delelementene vil være digital kompetanse. Utredningen trekker også inn literacybegrepet og forklarer det ved både å knytte det til kommunikasjon samt lesing, skriving og muntlige ferdigheter.

Fagspesifikt er det interessant for matematikkfaget at regneferdigheter stadig skal læres inn i flere fag, og at matematikkfaget forutsettes tettere knyttet til naturvitenskapelige og teknologiske fag.
I delen om fagfornyelse beskrives i tillegg matematisk kompetanse nærmere ved fem komponenter:

- Forståelse: Oppbygging av begrepsmessige strukturer, evne til å se sammenhenger og ulike representasjoner.
- Beregning: Evne til å anvende og veksle mellom ulike prosedyre.
- Anvendelse (strategisk tankegang): Gjenkjenne og formulere matematiske problemer og utvikle løsningsstrategi.
- Resonnering: Evne til å forklare tankegang, argumentere og følge gyldighet i bevis og hypoteser.
- Engasjement: Evne til å se faget som nyttig g verdifullt samt avhengig av innsats.

Disse komponentene foreslås å fungere i samspill med hovedområdene som fra før var i læreplanen, tall og algebra, måling, geometri og statistikk.
Konklusjonen for prinsipper når læreplanen skal fornyes er at det skal legges til rette for dybdelæring, de vertikale og horisontale sammenhengene i læreplanen skal styrkes, matematisk kompetanse skal tydeliggjøres og styrkes spesielt i naturfagene og samfunnsfagene og flerfaglige temaer tas opp på en systematisk måte.

Stortingsmelding 28 2015-16

Under første kapittel «Høye ambisjoner» finner vi det følgende: «Kunnskap og kompetanse er nødvendige forutsetninger for å finne løsningene på dagens og fremtidens samfunnsutfordringer». Dermed er tonen tydelig satt for hvor vesentlig kompetansebegrepet skal være i den nye læreplanen. Lista legges høyt når vi skal sette elevene i stand til å løse utfordringene samfunnet står overfor både nå og i fremtiden.

Stortingsmeldingen peker på flere faktorer som har gitt et sammensatt behov for å fornye læreplanene. Man fant en manglende sammenheng mellom generell del og læreplanene for fag, ikke minst i synet på kunnskap og kompetanse. Det blir pekt på at læreplanene har manglet konsistens og i for ulik grad har mål for det som omtales som kompetanser for det 21. århundre som kritisk tenking, samarbeid og problemløsing. Det pekes også på at det har blitt lagt for lite til rette for dybdeforståelse av lærestoff. (Kunnskapsdepartementet, 2015-2016, s. 11) Behovet for endring henger også sammen med at fag og vitenskap hele tiden er i utvikling og derfor naturlig må fornyes med jevne mellomrom.

Tanken ved fornyelsen av læreplanen er å lage en plan som forbereder for livet i et omskiftelig, usikkert, tvetydig og komplekst samfunn.

Hovedkomponentene i arbeidet med utviklingen av ny læreplan er: kunnskaper, kognitive kompetanser, sosiale kompetanser, fysisk og mentalt velvære, emosjonelle kvaliteter, metakompetanser og verdiformidling. (Kunnskapsdepartementet, 2015-2016, s. 14) I denne oppgaven om kompetanse i matematikk er det særlig kunnskaper, kognitive kompetanser og metakompetanser jeg vil komme nærmere inn på gjennom fagkunnskaper, fagovergripende begreper, innhold, problemløsning, kreativitet, selvrefleksjon og effektive læringsstrategier. Sosial kompetanser som samarbeidsevner og kommunikasjon blir også aktuelt.

Dybdelæring presenteres basert på forskning som en nøkkel til den moderne kompetansen. Fokus skal være på helhetlig forståelse og evne til å se sammenhenger. Ved å stimulere refleksjon over egen læring og opplæring i læringsstrategier ventes både elevenes faglige læring og motivasjon å blomstre.

Den nye generelle delen skal få tydelig fram at skolens viktigste oppgave er å sette elevene i stand til å møte fremtiden gjennom identitet, kunnskap og helhetlig kompetanse og at den teknologiske utviklingen endrer kravene til arbeidsliv og verdiskapning.(Kunnskapsdepartementet, 2015-2016, s. 20-21)

Meldingen legger opp til å videreføre arbeidet med grunnleggende ferdigheter, men at de skal knyttes tydeligere til kompetansemål som er faglig relevante. Det blir gjort tydelig at grunnleggende ferdighet i regning ikke er det samme som matematikk, men at det forstås som anvendelse av od matematikk. En tydelig binding mot definisjonen som brukes for kompetanse.

For å motvirke en tendens til stofftrengsel, jobbe med dybdelæring og fokusere på det mest sentrale i fagene anbefales det innført kjerneelementer i fagene i den nye læreplanen. Fagspesifikk kompetanse er utgangspunktet for Fagfornyelsen, men det skal også legges vekt på god sammenheng mellom fag og tverrfaglige temaer. (Kunnskapsdepartementet, 2015-2016, s. 46)

I vurderingen av kompetansene i den nye læreplanen skal det gis tydelige og læringsfremmende tilbakemeldinger som er knyttet til en tydelig progresjon i kompetansemål for fag.

Eksamen

Eksamen er sluttvurderingen etter 10 års skoleløp og påvirker undervisningen og hva som forventes i de fleste klasserom. (Burkhardt & Schoenfeld, 2018 i på like vilkår) (Bjørnset, Fossum, Rogstad & Smestad, 2020)

I FAFO-rapportene om matematikkeksamen fra 2017-2019 (Andresen, Fossum, Rogstad & Smestad, 2017; Bjørnset et al., 2020; Bjørnset, Fossum, Smestad & Talberg, 2018) gis det en vurdering av oppgavetypene i eksamenssettene. Her blir det skilt mellom algoritmiske og kreative oppgaver.

Fagfornyelsen

Forarbeidene i NOU 2014:7, 2015:8 og St. Meld. 28 1015-16 har munnet ut i den nye læreplanen Fagfornyelsen. For matematikkens del er det særlig her vi finner forståelsen og fortolkningen av hva som fremover skal ligge i den fagspesifikke kompetansen som forarbeidene omtaler.

Definisjonen av hvordan kompetanse skal forstås ble tydelig presentert i St. meld. 28. (Kunnskapsdepartementet, 2015-2016) «*Kompetanse er å tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning.*»

Det ble lagt vekt på at hvert fag skal inneholde sine egne kjerneelementer og for matematikk er disse:

- Utforsking og problemløsing
  Dette er beskrevet som evne til å finne mønster og lete systematisk samt å finne algoritmer for å bryte ned problemer i deloppgaver. Systematisk løsning og bruk av hensiktsmessige verktøy hører inn under dette punktet.

- Modellering og anvendelse
  Overføring og beskrivelse av virkelige fenomener i og med matematikk. Anvendelse av og kritisk vurdering av matematiske modeller for å forstå sammenhenger i verden.

- Resonnering og argumentasjon
  Evne til å kunne følge forklaringer og bevis og gjenkjenne at matematikk ikke er et sett tilfeldige regler, men logiske systemer med begrunnelser.

- Representasjon og kommunikasjon

Måter å uttrykke matematikk symbolsk, konkret, visuelt, verbalt og kontekstuelt. Evne og anledning til å kommunisere om og med matematikk på forskjellige måter etter behov.

- Abstraksjon og generalisering
  Handler om å kunne gå fra det konkrete til mer formelle og symbolske resonnement. Det dreier seg også om kunne oppdage strukturer og sammenhenger og å kunne utforske heller enn å bli presentert for en ferdig løsning.

- Matematiske kunnskapsområder – Dette siste punktet består av faglige emner eller hovedområder, og er tilnærmet de samme som var hovedområder i forrige læreplan, tall og tallforståelse, algebra, funksjoner, geometri, statistikk og sannsynlighet.

Kompetansemålene for ungdomsskolen er nå knyttet til hvert enkelt alderstrinn i stedet for hele treårsløpet som tidligere.

Niss

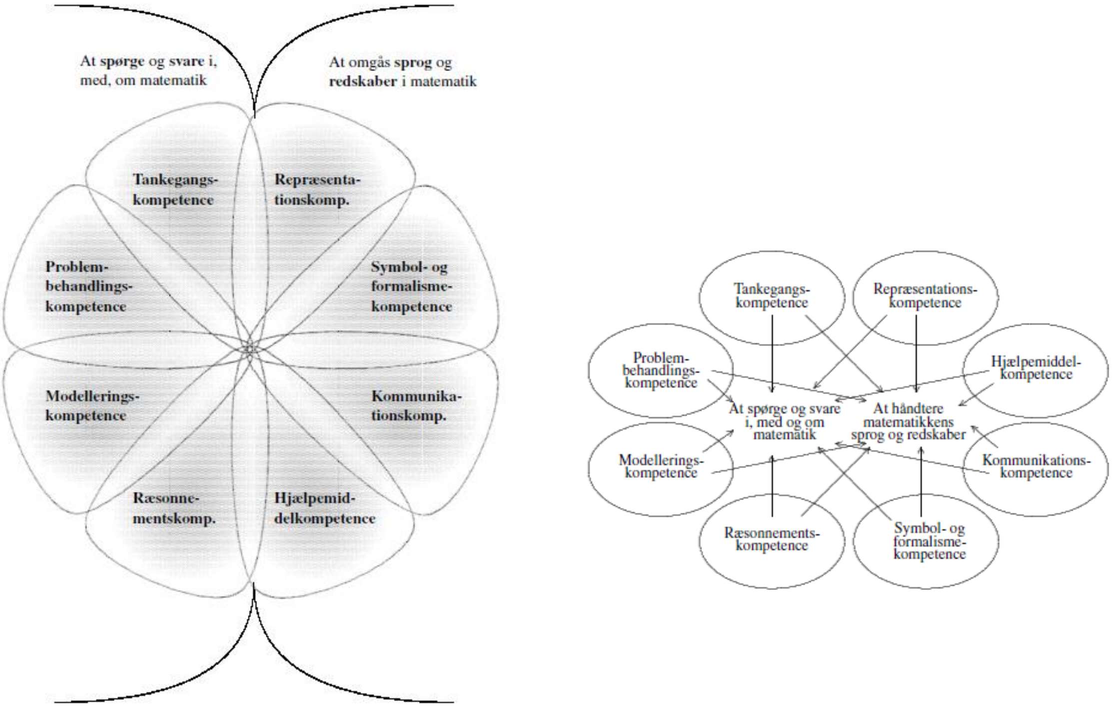
Kompetanser hos Niss

For å definere nærmere hva som menes med kompetanse spesifikt i matematikk vil jeg bruke en modell utviklet for det danske undervisningsministeriet i 2002. Under redaksjonell ledelse av matematikkdidaktikerne Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen. Deres rapport skulle brukes til en utvikling av matematikkundervisningen på alle trinn i det danske undervisningssystemet. I den forbindelse skulle gruppen besvare spørsmålet «Hvilke matematiske kompetencer skal der være opbygget hos eleverne på de forskellige stadier af uddannelsessystemet?» (Niss & Højgaard, 2002, s. 15) For å besvare dette bygget de opp en normativ kompetansebeskrivelse av matematisk faglighet som jeg skal presentere.

Niss beskriver matematisk kompetanse slik: «matematisk kompetence består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge,» og en matematisk kompetanse slik: «en matematisk kompetence er indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer» (Niss & Højgaard, 2002, s. 43) Kompetansebegrepet er delt inn i to hovedformer som i sin tur har fire underområder.

De to gruppene er henholdsvis *å kunne spørre og svare i og med matematikk* (tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse, modelleringskompetanse og resonnementskompetanse) og *å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper* (representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse, kommunikasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse). (Niss & Højgaard, 2002, s. 45)

Den danske gruppen spesifiserer at alle de åtte kompetansene henger sammen og til dels kan overlappe hverandre og kan være vel så nært forbundet om de er i hver sin hovedgruppe som om de er i samme. Av hensyn til å forenkle oversikten har gruppa laget disse to visuelle framstillingene: (Niss & Højgaard, 2002, s. 45 og 46)



Figur 2 To fremstillinger av de åtte kompetansene

De to figurene forsøker både å sortere kategoriene og vise hva som hører til hvilket hovedområde, men også hvordan alle kategoriene er tett forbundet og bidrar direkte eller indirekte til besittelsen av de to overordnede kompetanseområdene.

Jeg skal i det følgende forklare innholdet i de to gruppene og åtte kompetansene slik de er beskrevet i den danske rapporten.

Å spørre og svare i og med matematikk skal ifølge rapporten forstås som å kunne stille den rette typen spørsmål og ha en forståelse av hva slags svar som er forventet. Man skal også kunne forstå, bedømme og frembringe argumenter samt kunne svare på slike spørsmål selv i og med matematikk.

Å håndtere matematikkens språk og redskaper går tilsvarende ut på å kjenne matematikkens forskjellige representasjonsformer, kjenne til og kunne bruke det formalistiske språket og derigjennom særlig spesifikke symboler. I tillegg kommer å kunne bruke forskjellige tekniske hjelpemidler og å kunne kommunisere i, med og om matematikk.

Å kunne spørre og svare i og med matematikk

De fire kompetansene som faller under denne overskriften er:

Tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse, modelleringskompetanse og resonnementskompetanse. (Niss & Højgaard, 2002, kapittel 4.2)

Tankegangskompetanse forklares som å kunne forstå matematisk tankegang. Kompetansen beskriver i hvilken grad man stiller spørsmål som er relevante. Det handler både om å forstå hva som ligger i generalisering og å kunne gjøre slike generaliseringer selv. Det handler om å gjenkjenne hvilke spørsmål som bør stilles, men også å kjenne til begrensningene slik at man ikke forstrekker seg i hva man søker svar på. Det er innenfor denne kompetansen man ser på beviser, definisjoner og formodninger eller påstander om matematiske tilfeller. Spørsmålene her vil ofte se på hvilke tilfeller som finnes og i hvilket omfang. Svarene vil gjerne inneholde ordet fordi og en avgrensning av forholdene det gjelder for.

Problembehandlingskompetanse er både å kunne oppdage, formulere, avgrense og presisere ulike matematiske problemer samt å kunne løse slike problemer. Disse to sidene ved kompetansen er ikke nødvendigvis likt utviklet hos en som har problembehandlingskompetanse. Man kan for eksempel gjerne være i stand til å formulere en problemstilling uten å kunne løse den. Avgrensningen mellom denne kompetansen og modelleringskompetanse kan være flytende, men problembehandlingskompetanse vil gjerne være mer av generell art. Skillet mellom denne kompetansen og tankegangskompetansen viser seg særlig i problembehandlingskompetansens fokus på resultatet. Spørsmålene man stiller når problembehandlingskompetansen skal benyttes vil gjerne føre til behov for en eller annen form for matematisk undersøkelse.

Modelleringskompetanse dreier seg både om å analysere grunnlaget for, og egenskaper hos, eksisterende modeller og å se på deres rekkevidde og holdbarhet. Dessuten handler det om å kunne utføre aktiv modellbygging i en gitt sammenheng. Dette vil si at man strukturerer et felt eller en situasjon. Problemstillinger, relasjoner og objekter utenfor matematikken oversettes til matematikk og den oppståtte modellen behandles for å løse mulige matematiske problemer og til slutt validere denne modellen. Enten man bruker kjente modeller eller utvikler modeller må det gjøres antagelser og avgrensninger samt innhenting av data for å kunne behandle modellene.

Resonnementskompetanse består både i å kunne følge en rekke argumenter og å vurdere hva som utgjør et matematisk bevis. Dette vil gjelde både for å kunne forklare eller gå god for gyldigheten til en påstand eller et bevis, men også å kunne støtte opp under forklaringen eller løsningen av forskjellige problemer eller oppgaver. Det kan både dreie seg om å avdekke mangler i en påstand eller beskrive hvorfor den står seg, men også å kunne føre et selvstendig bevis.

Å omgås språk og redskaper i matematikk

Under denne overskriften finner vi de fire kompetansene, representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse, kommunikasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse.

Representasjonskompetanse er både å forstå og kunne benytte forskjellige matematiske representasjonsformer. Det vil både gjelde symbolske så vel som konkrete representasjoner samt evnen til å velge blant og oversette mellom forskjellige representasjonsformer etter behov. Denne kompetansen henger nøye sammen med de siste tre kompetansene på forskjellige måter. Gjennom matematikkens mange symbolske representasjoner knytter vi bånd til symbol- og formalismekompetansen mens det å representere matematiske saksforhold henger nøye sammen med kommunikasjon og materielle representasjoner skaper forbindelser til hjelpemiddelkompetansen. Representasjonskompetansen kan vises i grunnleggende form gjennom for eksempel konkrete framstillinger av tall og mengder, mens den mer avansert kan handle om forskjellige representasjonsformer av funksjoner som grafer, funksjonsuttrykk, tabeller med mer.

Symbol- og formalismekompetansen har tre hoveddeler, nemlig å avkode, oversette og behandle symbolholdige uttrykk som for eksempel formler. Det handler om å kunne forstå hva de forskjellige symboler uttrykker, å kunne veksle mellom bruk av symboler og naturlig språk samt å kunne behandle slike uttrykk. På grunnleggende nivå kan det dreie seg om forståelse og riktig bruk av symboler for tall og de fire regneartene, mens det mer avansert kan være å for eksempel uttrykke konjugatsetningen både med symboler og vanlig språk. Videre vil det å behandle symbolene dreie seg om å håndtere og gjøre om for eksempel uttrykk av generell karakter.

Kommunikasjonskompetanse kan fort oppfattes som evnen til å formidle matematikk så vel muntlig som skriftlig til andre, men skal også forstås som kompetanse i å lese matematikk og forstå hva andre formidler gjennom forskjellige medier og tilnærminger. Dette er med andre ord kompetanse som både har en avsenderkomponent og en mottakerkomponent. I tillegg er det kompetanser som kan fremstå både muntlig, skriftlig og gjennom for eksempel bruk av konkreter. Evne til dialog og diskusjon er en vesentlig del av denne kompetansen.

Hjelpemiddelkompetansen er kanskje den som er mest rett frem å forklare all den tid det handler om evne til å bruke forskjellige hjelpemidler. Allikevel er også denne kompetansen sammensatt da det for det første kan være snakk om en lang rekke svært forskjellige hjelpemidler fra målebånd til digitale graftegnere, men også det å kunne velge både blant disse hjelpemidlene og vurdere når det er passende å bruke ett eller flere hjelpemidler. I moderne skole har det blitt et stadig større fokus på de digitale hjelpemidlene som er tilgjengelige (Spurkland, 2016) og (Myran, 2016), og eksamen har nå oppgaver som forutsetter bruk av noen av disse (Bjørnset et al., 2018). Allikevel er de digitale hjelpemidlene fortsatt på ingen måte enerådende.

Dekningsgrad, aksjonsradius og teknisk nivå

I tillegg til å dele inn kompetansene i åtte hovedområder skriver gruppa om at alle kompetansene kan ha tre dimensjoner som de kaller dekningsgrad, aksjonsradius og teknisk nivå. Disse dimensjonene er tenkt å supplere kompetanseområdene ved å si noe om kvaliteten eller nivået på den aktuelle kompetansen sett fra tre forskjellige perspektiver. Dekningsgraden handler om i hvilken grad de forskjellige aspektene i en kompetanse er dekket, hvor mange av disse som kan aktiveres i en gitt situasjon og i hvor stor grad personen kan gjøre dette selvstendig eller er avhengig av instruksjoner. Aksjonsradiusen defineres som i hvilke sammenhenger og situasjoner kompetansen kan aktiveres i og regnes som større jo flere emner den kan aktiveres innenfor. Her kan det både være tale om hvilke emner man har kompetanse innenfor, men også om det gjelder bestemte problemstillinger og utfordringer. Teknisk nivå går ut på å kunne anvende en gitt kompetanse på så avanserte begreper og emner som mulig. Eksempelet som er gitt er å for eksempel kunne regne riktig med to- og tresifrede tall sammenlignet med å kunne det også med desimaltall.

Til sist presiserer rapporten at dekningsgrad, aksjonsradius og teknisk nivå henger sammen på en slik måte at man med en metafor kan beskrive dem samlet som et volum, og at det altså er slik at en kompetanse består av produktet av de tre. Konsekvensen av det er at om den ene dimensjonen er ikke-eksisterende, eller 0, hos en elev, kan man heller ikke snakke om at det foreligger en kompetanse.

Disse tre dimensjonene vil bli vesentlige i analysearbeidet jeg gjør i denne oppgaven. Som vi ser av forklaringene kan det være store forskjeller på hva som ligger i en gitt kompetanse, og en vurdering av dekningsgrad, aksjonsradius og teknisk nivå vil dermed gi tydeligere beskrivelser av elevenes faktiske kompetanse. Jeg vil derfor bruke disse begrepene når jeg koder og analyserer materialet jeg har samlet inn. Jeg vill også gå inn på kompetansens duale natur og hvorvidt det er den undersøkende eller produktive karakteren som er mest fremtredende.

Oppsummering kompetanse

For å sammenfatte hva slags kompetanse jeg har vært på utkikk etter i min studie skal jeg forsøke å oppsummere og trekke ut det mest vesentlige fra de forskjellige tilnærmingene til kompetanse jeg har presentert i dette kapittelet. Kompetansebegrepet ble som nevnt det bærende begrepet for hva elevene skulle sitte igjen med da Kunnskapsløftet ble innført. Her handler kompetanse om å løse komplekse utfordringer og oppgaver samt at det skal være noe elevene kan anvende utover sin egen skoletid.

Utviklingen fra gammel til ny læreplan understreker punkter som helhetlig forståelse, evne til å anvende kunnskaper, kritisk tenking og evne til problemløsning på en så tydelig måte at matematikkundervisning må fokusere mer på relasjonell enn instrumentell forståelse. En tilnærming til matematikkfaget som et rent redskapsfag avhengig av rutiner, algoritmer og teknikker svarer ikke til fulle på det som legges til grunn for forståelsen av en fremtidsrettet kompetanse. Gjennom å jobbe med den relasjonelle forståelsen og helhetskompetansen kan det sies at eleven har en kompetanse som er egnet for fremtidens skole og samfunn. Det må dermed være en slik kompetanseforståelse jeg etterlyser i mitt arbeid med å beskrive elevenes kompetanse.

Fokuset som er på evne til å anvende og til problemløsning vil kunne ha konsekvenser for hvordan man bør legge opp undervisningen ettersom undervisning ser ut til å bli styrt mer av standardiserte tester og flervalgsoppgaver enn problemløsningsoppgaver. (Guskey 1994, Boesen 2014 i på like vilkår)(Bjørnset et al., 2020)

Dette henger sammen med kompetanseforståelsen i forarbeidene til den nye læreplanen hvor det blir lagt vekt på fagspesifikk kompetanse, å kunne lære, å kunne kommunisere og å kunne samhandle. Matematikk blir trukket fram som særlig viktig fagområde for utvikling av disse kompetansene. Begreper som problemløsning, kreativitet, resonnement, forståelse og resonnering trekkes fram som kjennetegn på den kompetansen man vil at skolen i årene framover skal utvikle.

Den rent fagspesifikke kompetansen i matematikk skal utvikles gjennom økt fokus på dybdelæring, tverrfaglighet og kjerneelementer i faget.

Jeg har også sett på hva matematiske teoretikere mener om hvordan kompetanse skal forstås, og særlig modellen til Niss' danske gruppe har mange fellestrekk med kjerneelementene i Fagfornyelsen.

Kjerneelementene er: utforsking og problemløsing, dette henger sammen med Problembehandlingskompetanse, og Niss' forståelse av problemløsing som noe som krever en matematisk undersøkelse. (Niss & Højgaard, 2002, s. 201). Modellering og anvendelse henger sammen med modelleringskompetanse. Resonnering og argumentasjon henger sammen med resonnementskompetanse. Representasjon og kommunikasjon henger sammen med representasjonskompetanse og kommunikasjonskompetanse, og abstraksjon og generalisering finner vi igjen i tankegangskompetanse og symbol- og formalismekompetanse. I tillegg hører hjelpemiddelkompetansen ikke minst sammen med digitale ferdigheter som grunnleggende ferdighet. Det er her som vi ser i både ordvalg og innhold en tett forbindelse mellom de to, men man kan ikke sette likhetstegn mellom dem. Fagfornyelsen presenterer ønsker eller mål for en kompetanse som skal oppnås, mens kompetansemodellen til Niss er en beskrivende modell for helheten og sammensetningen av aspekter ved matematisk kompetanse

Denne tette bindingen mellom kompetanseforståelsene i den danske modellen og i fagfornyelsen gjør den danske modellen velegnet til å beskrive elevenes kompetanse generelt. Det blir en litt annen beskrivelse og analyse enn hvis man går inn i en vurdering av om kompetansemålene er oppnådd, og fører dermed til at man kan finne oppgaver som dekker kompetanseområdene uten nødvendigvis å dekke alle delemner i faget.

Metode

For å bli i stand til å beskrive kompetansen hos høyt presterende elever i matematikk har jeg samlet inn data om hvordan fem elever løser oppgaver ved å intervjue dem. Metoden er oppgavebasert intervju («Task-based interview» jfr. Goldin (1997)). Elevene har blitt bedt om å gjøre oppgaver som jeg har laget, tilrettelagt eller valgt ut. Jeg har lydopptak av samtalene vi hadde mens de løste oppgavene og har tatt vare på notater de gjorde for hånd eller digitalt. I samtalene har elevene blitt bedt om å beskrive fremgangsmåter og tankemåter de valgte i arbeidet med oppgavene. Intervjuene ble gjort i to omganger, først som individuelle intervjuer, deretter to og to i samarbeid. Samlet har dette gitt meg utgangspunktet jeg har brukt for å analysere kompetansen deres.

Samfunnsvitenskapelig metode

Pedagogikken hører innunder de samfunnsvitenskapelige fagene. Selv om denne oppgaven spesifikt undersøker kompetanse i matematikk er det mer gjennom studiet av eleven, enn egentlig matematikken. Matematikkdidaktikk, og dermed denne oppgaven, befinner seg i skjæringsfeltet mellom samfunnsvitenskap og naturvitenskap, men fordi det er menneskers svar på matematikkoppgaver som blir studert i oppgaven er vi innenfor samfunnsvitenskapen med dens metoder og refleksjoner. (Johannessen, Tufte & Christoffersen, 2016)

Valg av metode

Det første vesentlige skillet i valg av metode står mellom valg av kvalitative eller kvantitative metoder. Det er forskningsspørsmålene som bør være styrende for dette valget.

For å beskrive kompetansen til høyt presterende elever har jeg stilt meg spørsmål som: hvordan tenker de og hvordan løser de oppgaver? «Når forskningsspørsmålet kan formuleres ved hjelp av det lille ordet *hvordan*, er det med stor sannsynlighet relevant å foreta kvalitative intervjuer» (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 135)

Jeg er med andre ord ute etter å samle inn det som kalles myke data. Harde data er lett kvantifiserbare opplysninger som for eksempel kan samles inn gjennom en spørreundersøkelse mens myke data dreier seg om mer diffuse sider ved virkeligheten som hva som ligger bak en persons valg eller handlinger. (Johannessen et al., 2016) De kvalitative metodene søker å gå i dybden, stille oppfølgingsspørsmål og trenge inn i hva subjektet har å melde.(Kvale & Brinkmann, 2015) De kvantitative metodene på sin side er godt egnet til å kategorisere og telle opp tydelige svar i et stort omfang.(Kvale & Brinkmann, 2015) Samtidig er omfanget av oppgaven jeg skal skrive av en slik størrelse at det er urealistisk å få gått i dybden med et stort antall elever. Dermed er det naturlig å se på en mindre gruppe slik det er vanlig i kvalitative studier.(Johannessen et al., 2016)

Kvalitativ metode

Når jeg har valgt kvalitativ metode for å finne ut noe om elever er observasjon og intervju to mye brukte metoder. Observasjon egner seg for å få detaljert innsyn i de handlingene man studerer. Intervjuet på sin side egner seg når man vil gi subjektet frihet til å uttrykke seg om det aktuelle emnet. (Johannessen et al., 2016) Ettersom jeg ønsket å styre hva elevene jeg studerer jobber med og i tillegg stille oppfølgende spørsmål om tankeprosess og valg av fremgangsmåte virket intervju som det mest egnede.

Oppgavebasert intervju gir muligheten til å bruke sider fra både observasjon og intervju (Goldin, 1997), men i mitt tilfelle har det mest karakter av et intervju som jeg vil vise og begrunne i det følgende.

Intervju

Niss beskriver matematisk kompetanse hos en elev er noe mer enn bare et resultat på en test knyttet til et pensum. (Niss & Højgaard, 2002, s. 40) Jeg har valgt intervjuet som form for å kartlegge og beskrive denne kompetansen hos elevene jeg studerer. Kvale og Brinkmann karakteriserer den som blir intervjuet som «subjektet, … en person som er delaktig i det kvalitative forskningsintervju gjennom å skape mening og forståelse om et bestemt emne.» (Kvale & Brinkmann, 2015)

Det er særlig det at jeg er ute etter å avdekke hvilke kompetanser elevene besitter som gjør at intervjuet er en velegnet metode til min datainnsamling. (Johannessen et al., 2016; Kvale & Brinkmann, 2015)

Jeg bruker Kvale og Brinkmanns beskrivelse av intervjuundersøkelsens syv stadier som punkter å planlegge for å finne svar på de spørsmålene jeg har stilt. I punktet om tematisering fremhever de hvordan man som jeg har gjort bør gå inn undersøkelsens hva- og hvorfor før man faller ned på valg av metode. Videre skriver de at man i planleggingsfasen skal ha blikk for hvilken kunnskap man ønsker å hente inn. I intervjufasen må man ha en intervjuguide med reflektert tilnærming til de spørsmålene man skal bruke og konteksten de brukes i.

I denne oppgaven skal jeg prøve å beskrive elevers kompetanse i matematikk. Dette skal jeg gjøre både ut fra et teoretisk perspektiv på hva matematisk kompetanse er, og basert på hvilken kompetanse samfunnet etterspør i læreplan og forarbeider til denne. Spørsmålene i intervjuet må derfor være knyttet til matematikkfaget og gi elevene en anledning til å vise den fagspesifikke kompetansen jeg er ute etter å undersøke. Det er nettopp dette perspektivet som gjør at jeg velger meg en intervjuform litt på siden av det tradisjonelle kvalitative forskningsintervjuet.

Oppgavebasert intervju

Oppgavebasert intervju ligger i skjæringsfeltet mellom observasjon og intervju. Goldin har som kapitteloverskrift «Observing mathematical problem solving through task-based interviews." (Goldin, 1997, s. 40) Ettersom observasjon gjerne er knyttet til detaljerte beskrivelser av atferd eller handlinger (Johannessen et al., 2016) mens jeg fordyper meg i innholdet i samtalen med elevene velger jeg videre å omtale dette som intervjuer heller enn observasjoner selv om det kan være overlapping mellom de to kategoriene litt avhengig av definisjon.

Nettopp det at jeg skal beskrive elevers kompetanse gjør oppgavebasert intervju til en aktuell metode fordi den ifølge Goldin (1997) både er egnet som forskningsinstrument og vurderingsverktøy.

Goldin (1997, s. 520) fremhever også at oppgavebaserte intervjuer gjør det mulig å fokusere oppmerksomheten på prosessene i matematiske oppgaver heller enn bare å finne mønster i riktige og gale svar i resultatene subjektene produserer.

For meg er målet at resultatet av denne oppgaven blir nyttig for meg selv, og gjerne andre, på praksisfeltet. Goldin fremhever i sin beskrivelse av det oppgavebaserte intervjuet det strukturerte intervjuet som spesielt attraktivt som middel til å forene forskning og undervisningspraksis. (Goldin, 1997)

I forberedelsene må jeg ta utgangspunkt i noen teoretiske hypoteser som styrer oppgavene jeg lager og spørsmålene jeg stiller. Her har ikke minst kapittelet mitt om Yeos rammeverk for åpne oppgaver vært relevant. Intervjuguiden må også ta høyde for både ventede og uventede avvik i besvarelsene elevene kommer med. Alt dette bidrar til at de oppgavebaserte intervjuene setter meg i stand til å trekke ut tolkninger av hva eleven faktisk kan basert på hva de gjør og tenker, og sier at de gjør og tenker når de jobber med oppgavene.

Når man lar elevene jobbe med oppgavene forutsetter metoden at eleven gis tid til å tenke over og svare på spørsmålene. Når eleven står fast eller det ikke kommer tydelig nok fram hvordan eleven tenker skal intervjueren komme med innspill eller oppfølgingsspørsmål. Disse innspillene bør også være av utforskende karakter og unngå å gi en tydelig retning. Tidsrammen, egen iver og ønsker om å få fram både hva elevene kunne og at oppgaven skulle ta den planlagte retningen har tidvis påvirket svarene litt mer enn ønskelig. Hvordan elevene oppfatter spørsmålene og hintene kan også ha sammenheng med hvilke sosiomatematiske normer som vanligvis gjelder i klasserommet og i hvilken grad de er inne i den matematiske diskursen. Det at de er høyt presterende og altså har gode resultater, er dog en grunn til å anta de stort sett behersker diskursen og samspiller med skolens forventninger. (Kleve, 2014)

Goldin fremhever at denne metoden som i sin natur er en rekke av casestudier ikke egentlig er reproduserbar, men fremhever viktigheten av at vi skiller mellom hva vi kan oppfatte og hva vi tolker eller utleder. Vi kan mene noe om tankeprosesser, problemløsningsmetoder og matematisk forståelse, men det er ikke observerbart som sådan. For å håndtere denne utfordringen mener Goldin at vi må være tydelige om hvilke teorier og modeller vi legger til grunn og være grundige i planleggingen av spørsmål vi stiller. Metoden stiller også strenge krav til begrunnelsene og kriteriene vi bruker når vi tolker det vi ser. Dette er fordi disse tolkningene vil kunne variere ganske mye med hvem det er som gjør dem selv med et felles teoretisk utgangspunkt. Det kan dermed virke som et paradoks når Goldin sier at intervjueren må være fleksibel i intervjusituasjonen, men som han presiserer betyr det ikke at man skal stille ad hoc spørsmål, men planlegge for ulike svar. Denne planleggingen må være tydelig uttrykt og gjennomtenkt i intervjudesignet. Dette vil både øke muligheten til å gjenskape situasjonene og sammenligne forskjellige svarsekvenser samtidig som det gir rom for å diskutere valgene som er gjort med tanke på hvilke svarmuligheter man har forberedt seg på og en basis for å diskutere den senere analysen. Bare det å ta høyde for at elevers respons på en oppgave kan være såpass forskjellige som å stille spørsmål, være stille eller bare svare jeg vet ikke kan stille intervjueren overfor tre svært forskjellige scenarier for videre oppfølging.

For å kunne tolke resultatene av et oppgavebasert intervju er vi avhengige av et teoretisk rammeverk som legger føringer for hvordan vi beskriver eller karakteriserer tolkningene vi gjør. Dette rammeverket vil også legge føringer for både språk, innhold og grad av velegnethet oppgavene vi bruker har. Derfor har jeg i delen hvor jeg presenterte kompetansemodellen til Niss tatt med eksempler på hvordan disse kompetansene kan arte seg og også gått grundigere inn i hvordan vi skal forstå variasjon i aksjonsradius, dekningsgrad og teknisk nivå.

Tolkningene vi gjør basert på det vi ser og hører i intervjuet vil henge nøye sammen med samspillet mellom elevenes interne representasjoner og de eksterne representasjonene de bruker eller konstruerer under intervjuet. For å få tak i dett samspillet må vi grundig analysere de matematiske strukturene i oppgavene vi bruker. Der eleven velger en teoretisk løsning kan vi spørre etter en praktisk løsning og vi kan stille spørsmål om alternative tilnærmingsmåter til den aktuelle oppgaven.

Det at intervjuet gjøres i en skolekontekst kan ofte føre til at elevene ser på det som en test, og mange vil ha som utgangspunkt at det er et riktig og et galt svar, og kanskje se for seg at intervjueren foretrekker at de bruker en spesifikk metode. Jeg forsøkte i samtale før intervjuene å tydeliggjøre at de stod fritt i valg av fremgangsmåte, men som jeg utdyper i gjennomgangen av oppgavene var det noen tilfeller av at jeg planla for spesifikke fremgangsmåter.

Konteksten og behovet for forberedte oppgaver bidrar også til at oppgavene blir løsrevet fra elevenes situasjon og interessesfære. Selv om oppgavene kan beskrive realistiske situasjoner opptrer de ikke naturlig som problemer eleven der og da har behov for å løse.

Goldin presenterer fem prinsipper han beskriver som vesentlige i designet av intervjuet for å gjøre det mest mulig vitenskapelig og for å gi oss muligheten til å maksimere hvilken informasjon vi kan få ut av det oppgavebaserte intervjuet.

De fem prinsippene er:

- Tilgjengelighet – Oppgavene skal bestå av emner og temaer som er egnet for elevgruppa med realistisk vanskelighetsgrad.
- Representasjonsstruktur – Oppgavene bør være mulig å representere med kjente symboler og kunne beskrives med gjenkjennelige praktiske eksempler. Oppgavene bør gi rom for en viss kompleksitet i valg av strategi.
- Fri problemløsning – Elevene bør stå fritt i tilnærming og veiledningen bør være avventende selv hvis dette går på bekostning av progresjonen intervjueren har ønsket.
- Eksplisitte kriterier – Intervjudesignet bør planlegge for riktige og gale svar så tydelig som mulig. Oppfølgingsspørsmål bør være strukturert for å gi elevene mulighet til selvkorreksjon.

Samspill med læringsmiljøet -Utstyr og hjelpemidler som gjør det mulig å lage de nødvendige representasjoner skal være klare og tilgjengelige.

Analyse

For å få en mest mulig vitenskapelig ramme på analysen av datamaterialet mitt har jeg valgt å bruke en modell utviklet av Kirsti Malterud for å analysere meningsinnhold. (Malterud (2011) i Johannessen et al., 2016) Dette er en av mange måter å gå fram for å analysere kvalitative data på en måte som bidrar til en systematikk og kvalitet i analysearbeidet. Hun deler analysen inn i fire faser:

1. Helhetsinntrykk og sammenfatting av meningsinnhold
2. Koder, kategorier og begreper
3. Kondensering
4. Sammenfatning

I den første fasen leser man gjennom hele materialet sitt og leter etter interessante og sentrale temaer. Underveis tar man notater om hvilke hovedtemaer som opptrer, siler ut irrelevant informasjon og skaffer et overblikk over hva som er de sentrale sidene ved materialet. Dette vil uunngåelig ha stor innvirkning på den endelige tolkningen, men det er viktig å allikevel være åpen for at tolkningene kan endre seg etter hvert.

I andre fase går man mer systematisk gjennom materialet. Her setter man merkelapper på vesentlige elementer i materialet. Det noteres hva i materialet som hører innenfor et tema for så å kategorisere og sette disse i forskjellige klasser. Koding og tolking er ikke det samme, men tolkingen vil allikevel avhenge av kodingen. Det er kategoriseringen man starter med for å tydeliggjøre for seg selv hva som er det vesentligste meningsinnholdet i materialet. Det settet med koder man starter med bør være fleksibelt. Underveis i arbeidet kan man finne nye sammenhenger eller behov for flere og mer spesifiserte kategorier og klasser enn de man startet med. Denne prosessen har fellestrekk med en hermeneutisk tilnærming til materialet. Den hermeneutiske sirkel legger opp til at man tar med seg forforståelsen sin inn i en fortolkning for så å få nye perspektiver som man tar med seg til ny fortolkning med nytt utgangspunkt og dette har likheter med denne andre fasens vekselvirkning mellom koding og fortolkning.

Når vi kommer til fase tre, kondensering, går intervjueren gjennom kodene vi har laget og funnet og sorterer det meningsbærende fra materialet og lager en mer fortettet tekst, gjerne illustrert med eksempler og sitater for å få fram essensen.

Den avsluttende fasen i selve analysen er sammenfatningen. Her skal det lages nye begreper og beskrivelser som identifiserer mønstre og sammenhenger som ikke var tydelige ved første gjennomlesing av materialet. Her kan det også hende at man finner avvik fra det man fant ved kondenseringen slik at man må gå tilbake og se på dette på nytt for å finne ut av hvor og hvorfor det ikke er samsvar.

Etter en slik systematisk gjennomgang av materialet man vil analysere er man klar til å rapportere funnene.

Oppgaver

I første intervjurunde intervjuet jeg fem elever på to forskjellige skoler.

Elevene jeg intervjuet på de to skolene jobbet med disse oppgavene:

1. Mikael har hunder, kyr, katter og kenguruer som kjæledyr. Han forteller at han har 24 dyr til sammen, og at $\frac{1}{8}$ av dem er hunder, $\frac{3}{4}$ av dem ikke er kyr, og $\frac{2}{3}$ av dem ikke er katter.

   Hvor mange kenguruer har Mikael?

2. Løs ligningssettet:

   $2x + y = 22$
   $y + x = 17$

3. Løs denne oppgaven:

   Tabellen skal vise karakterene til 20 elever.

   Hvor mange av elevene har fått karakterene 2, 3 og 4 når du får opplyst at

   - typetallet er 3
   - medianen er 3
   - og gjennomsnittet er 3,5

Karakter	Frekvens
1	0
2	
3	
4	
5	4
6	1

Antall elever som får

karakteren 2:

karakteren 3:

karakteren 4:

4. Et tall er en mindre enn det firedobbelte av et annet tall. Det dobbelte av det første tallet summert med det andre blir sju.
   Hva er de to tallene?

5. Løs denne ligningen: $(x + 3)(x - 3) = 0$

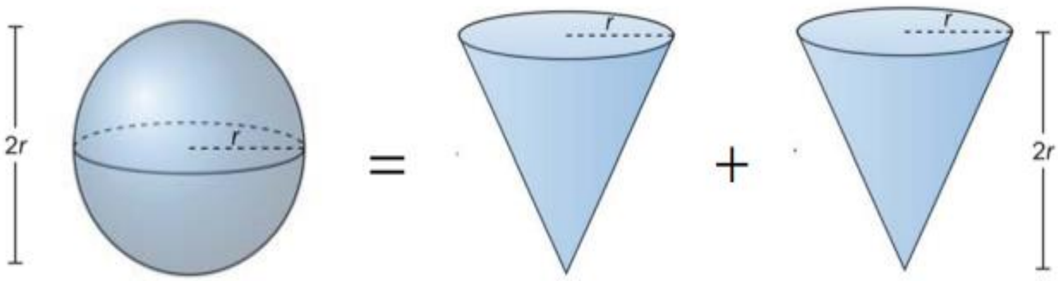
6. Utforsk tallrekka som begynner med 3, 9, 27, 81…

7. Løs denne oppgaven:

   En kule har diameter lik $2r$. To kjegler har begge høyde h lik $2r$.

   Bruk formlene nedenfor, og vis at volumet til kulen er like stort som volumet av de to kjeglene til sammen.

   $$V_{\text{Kule}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad V_{\text{Kjegle}} = \frac{\pi r^2 h}{3} \qquad V_{\text{Kjegle}} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$



8. Nils er 3 år, Mia er 5 år, Ragnhild er 37 år og jeg er 47 år. Når er neste gang alles alder er et primtall?

9. Denne oppgaven ble gitt i to litt forskjellige versjoner på de to skolene.

   a. Skole 1:

      Vi kaller katetene i trekantene for a og b, og hypotenusen for c, som på figuren.
      Hypotenusen c er samtidig sidekanten i det hvite kvadratet.
      På figuren under ser du et hvitt kvadrat inne i et større kvadrat. Hjørnene til det hvite kvadratet ligger på sidekantene i det store kvadratet slik at vi får dannet fire like store, rettvinklede trekanter.

   a) Hva er sidekanten i det store kvadratet, uttrykt ved a, b og c? Kall denne sidekanten for "s".

   b) Arealet A av et kvadrat er sidekanten kvadrert: $A = s^2$. Hva blir da arealet av det store kvadratet, uttrykt ved a, b og c?

   c) Hva er arealet av én av trekantene, uttrykt ved a, b og c?

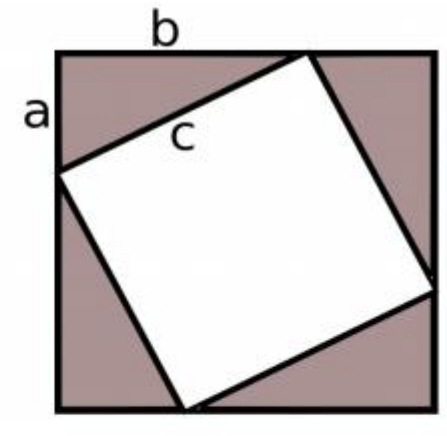
   d) Hva er arealet av det hvite, mindre kvadratet uttrykt ved a, b og c?

   e) Vi ser på figuren at det store kvadratet er satt sammen av fire trekanter og et mindre kvadrat. Ved å bruke dette kan du finne et nytt uttrykk for arealet av det store kvadratet, skriv ned hva dette blir.

   f) Du har nå to forskjellige uttrykk for arealet av det store kvadratet, og siden disse beskriver samme areal kan de settes lik hverandre. Gjør dette. Jobb med uttrykket til du sitter igjen med den vanlige pytagorasformelen.

   b. Skole 2:

      Vi kaller katetene i trekantene for a og b, og hypotenusen for c, som på figuren.
      Hypotenusen c er samtidig sidekanten i det hvite kvadratet.
      På figuren under ser du et hvitt kvadrat inne i et større kvadrat. Hjørnene til det hvite kvadratet ligger på sidekantene i det store kvadratet slik at vi får dannet fire like store, rettvinklede trekanter.
      Kan du bruke dette til å finne et bevis for Pytagoras?



Figur 3: Pytagorasbevis – Denne tegningen fulgte med både oppgave 9a og 9b

10. Hva er vinkelsummen i en n-kant?

I andre intervjurunde brukte jeg tre forskjellige oppgaver og elevene på de to skolene fikk de samme oppgavene.

1.

Innkjøpspris i dansk valuta	60,00000
Frakt og forsikring 1,5%	60,90000
Valutakurs	1,43000
Sum i lokal valuta	87,08700
Toll 8%	94,05396
Fortjeneste i %	25,00000
Sum	117,56745
Moms	29,39186
Totalpris	146,95931

Firmaet deres kjøper bordtennisracketer fra en dansk produsent.

Oppsettet viser en utsalgspris i norske kroner inkludert utgifter, avgifter og fortjeneste.

Dere har fått tilbud fra en detaljhandel som ønsker å kjøpe et større parti for 135 kr pr. stykk.

Vil dere gjøre en handel?

I denne oppgaven fikk elevene se opplysningene over i et regneark. De ble oppfordret til å gå gjennom tallene og utregningene og fikk et spørsmål om antall desimaler. Etter gjennomgangen diskuterte vi spørsmålet om de ville gjøre en handel og så ble de spurt om det var noe man kunne gjøre for at handelen skulle være bedre å gjennomføre.

2. Du skal se på sammenhengen mellom Celsius(°C) og Fahrenheit(°F) og forsøke å finne en måte å veksle mellom de to temperaturskalaene slik at du kan finne temperaturen i den ene hvis du kjenner temperaturen gitt i den andre.

   Du får vite at:
   Når temperaturen er $-50°C$ er det det samme som $-58°F$,
   $-30°C = -22°F, 32°F = 0°C \; og \; 50°F = 10°C$

Hint: Vi har to og to verdier som hører sammen. Hva kan vi gjøre med disse?

Elevene fikk først se oppgaven uten hintet, men fikk raskt hintet og deretter oppfølgingsspørsmål som ledet dem mot bruk av Geogebra og tegning av koordinater og grafer.

3. Følg beviset under. Er det et gyldig bevis? Hva er gjort for å komme fra linje til linje? Hva er grunnen til det overraskende sluttresultatet?

$$Vi \; antar \; at:$$

$$a \; og \; b \neq 0$$

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a-b)(a+b) = b(a-b)$$

$$\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = \frac{b(a-b)}{(a-b)}$$

$$a + b = b$$

$$b + b = b$$

$$2 = 1$$

Intervjurunde 1

I første runde ble alle oppgavene gitt individuelt.

1. Denne oppgaven er hentet fra Kengurukonkurransen 2019 (Matematikksenteret, 2019).
   Her får man testet problembehandlingskompetanse ved å se hvordan elevene angriper oppgaven, og noe representasjonskompetanse og symbol- og formalismekompetanse gjennom vekslingen mellom brøker og tallverdier. Kommunikasjonskompetansen er relevant både for forståelsen av hva som står i oppgaven, men også ved eventuelle oppklaringsspørsmål. I tillegg vil det i alle oppgavene bli vist en aller annen form for og grad av kommunikasjonskompetanse gjennom forklaringen av framgangsmåte og svar.
   Hintet jeg hadde forberedt her var å be elevene tenke på at alle brøkdelene til sammen skal utgjøre en hel, og at de kan se på hvor mange dyr hver brøkdel må utgjøre.

2. Denne oppgaven har jeg laget sammen med veileder. Hensikten med oppgaven er at den gir muligheten til både å vise fram teknisk ligningsløsning og evne til å raskt se sammenheng mellom verdier i algebraiske uttrykk altså et slags skille mellom instrumentell og relasjonell forståelse
   Dette vil være snakk om to forskjellige typer problembehandlingskompetanse om man går løs på teknisk ligningsløsning eller ser på hva som er forskjellen på de to uttrykkene ($x = 5$). Eventuelt kan det også være snakk om symbol- og formalismekompetanse hvis oppgavetypen er kjent. Her må det også undersøkes for kompetansens duale natur og hvorvidt det er den undersøkende eller produktive som kommer til uttrykk.
   Det å angripe oppgaven på en måte hvor man ser på forskjellen på uttrykkene vil også være en demonstrasjon av tankegangskompetanse gjennom å stille seg spørsmålet om hvordan man kan avgrense og forenkle oppgaven. Gjennom forståelse av uttrykkene og eventuell teknisk ligningsløsning får man også testet symbol- og formalismekompetanse og kommunikasjonskompetanse.
   Her var planen å spørre om de kunne sammenligne uttrykkene for å finne verdien av x hvis de løste det med addisjons- eller innsettingsmetoden, og å be dem løse ligningene med en av metodene hvis de resonnerte seg fram til x-verdien.

3. Oppgaven er hentet fra Unge Abel 2013/2014 (LAMIS, 2013) og hadde som hovedhensikt å gi en oppgave fra hovedområdet statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk i LK-06.
   Her blir problembehandlingskompetanse aktuelt gjennom hvordan de angriper opplysningene for å finne fram til de manglende verdiene som skal føres inn i skjemaet, og kommunikasjonskompetanse.

I denne oppgaven planla jeg å hjelpe elevene med å se på hva som skulle til for at typetallet, medianen og gjennomsnittet skulle bli det som var oppgitt i oppgaven.

4. Denne oppgaven har jeg laget selv med en tanke om å se på elevenes evne til å oversette fra tekst til mer ren matematikk.
   Dette vil da teste representasjonskompetanse og symbol- og formalisme ved å se på hvordan de matematisk formulere sammenhengen som er forklart i teksten. Det tester problembehandlingskompetansen gjennom hvordan de nøster opp i en sammenheng for å komme fram til et ukjent tall og kommunikasjonskompetanse.

   > Hvis elevene stod fast her planla jeg å hjelpe dem med å foreslå å kalle det første tallet for eksempel x og så se hvordan man kan skrive det dobbelte av en slik variabel med matematiske symboler.

5. Denne oppgaven har jeg også laget selv. Tanken her er lignende den i oppgave 2. Her kan oppgaven både løses rent teknisk hvis man har kjennskap til kvadratrøtter eller i det minste potenser, men også ved å resonnere seg fram til hvilken betingelse som kreves for at en av faktorene og dermed produktet skal bli 0.
   De to forskjellige måtene å angripe denne oppgaven på vil gi mulighet til å vise forskjellige former for kompetanse. Det er på den ene siden snakk om forskjellige varianter av problembehandlingskompetanse etter hvordan man angriper oppgaven, men også mulighet for å vise tankegangskompetanse gjennom å klargjøre argumentet at for å løse ligningen må den ene faktoren, $x + 3$ eller $x - 3$, ha verdi 0. I de tilfellene hvor elevene valgte å løse som ligning fikk de anledning til å demonstrere symbol- og formalismekompetanse. Kommunikasjonskompetansen er også her relevant både i forståelse av problemstilling og formidling av framgangsmåte og svar.
   I likhet med i oppgave 2 planla jeg her å be elevene om å løse oppgavene på den andre måten jeg hadde lagt opp til enn den de først valgte hvis de ikke selv foreslo begge. Hvis de ikke selv så poenget med at en faktor må være 0, stilte jeg dem spørsmålet om hva som skal til for at et produkt blir 0.

6. Oppgaven er inspirert av et eksempel hos Yeo (Joseph B. W. Yeo, 2015). Den ble gitt helt åpent på skole 1, mens den på skole 2 ble gitt med en tanke om å være utgangspunkt for å se på et bevis eller en forklaring for hvorfor $n^0 = 1$.
   De to måtene å gi oppgaven på gir litt forskjellige forventninger om hva slags kompetanse som kan komme til å bli vist.

Det å gjenkjenne, behandle og regne ut nye verdier i tallrekka vil kunne vise symbol- og formalismekompetanse, mens det å veksle mellom verdier i rekka som heltall, brøker eller potenser vil kunne vise representasjonskompetanse.
Hintene her ville være å be elevene se på hvilke andre måter de kunne uttrykke tallrekka på og å be dem se på tallene som kom før rekka de fikk presentert startet.
I det andre tilfellet var det mer styrt hva elevene skulle gjøre med oppgaven, og dermed hvilke kompetanser jeg ventet kunne bli vist. Det var rom for de samme kompetansene som i den første utgaven, men også tankegangskompetanse og resonnementskompetanse når de jobbet med å forklare at $n^0 = 1$.
Hint her var å lede dem videre inn mot reglene for multiplikasjon og divisjon av potenser med likt grunntall for å komme fram til en formulering av hvorfor $n^0 = 1$.

7. Denne oppgaven er hentet fra grunnskoleeksamen 2019. (Utdanningsdirektoratet, 2019) Her var målet å kombinere hovedområdene tall og algebra og geometri fra LK-06.
   I denne oppgaven er det til en viss grad anledning til å vise representasjonskompetanse ved å se at de faktiske volumene kan uttrykkes med formler og sammenlignes ved hjelp av disse. Den kompetansen man i størst grad kan regne med å se er symbol- og formalismekompetanse gjennom en teknisk bruk og manipulering av de aktuelle formlene.
   Hintet her var planlagt å være å regne sammen og forenkle formlene på hver side av likhetstegnet.
8. Denne oppgaven har jeg laget selv. Målet med oppgaven er å få elevene til å undersøke tallmønster og se etter hvilke, og hvor effektive, teknikker de har. Oppgaven har ikke noen løsning som gir mening og jeg ønsket å se hvordan elevene ville respondere på det og hvorvidt de ville slutte å lete etter løsninger når tallene ble høyere enn sannsynlig levetid for mennesker.
   I denne oppgaven ble det lagt opp til å vise tankegangskompetanse gjennom å undersøke hvilke muligheter som må undersøkes og ikke minst å se begrensningene i når man bør avslutte undersøkelsene. For det første av et sett tall når ett av dem viser seg å ikke være primtall, men også i når tallene blir så store at det ikke er sannsynlig at et menneske vil nå en så høy alder. Dette blir særlig aktuelt for å avslutte når man kommer fram til at man ikke kan finne et nytt sett med små nok primtall med de ønskede intervallene. Det å lage et system for å sjekke disse tallene og finne sett med primtall med ønskede innbyrdes differanser ga rom for å vise resonnementskompetanse. Problembehandlingskompetanse kunne også bli aktuelt gjennom å finne løsningen, eller mangel på løsning samt et godt system for å effektivt undersøke forskjellige verdier. Samtalen rundt valg av blant annet framgangsmåter blir aktuell for vurdering av kommunikasjonskompetansen.

Hint her var tenkt å være å starte med å finne eksempler på par av primtall som hadde den ønskede innbyrdes avstanden, altså to, eller kanskje mest effektivt, ti.

9. Denne oppgaven er hentet fra matematikk.org (Lein)
Målet med denne oppgaven er å få elevene til å bevise Pytagorassetningen. I sin opprinnelige form med deloppgaver gir oppgaven en rekke hint, eller nesten oppskrift for hvordan man skal komme seg fram til det aktuelle beviset. På skole 1 fikk elevene se alle deloppgavene som hjelp eller hint, men disse ble holdt igjen og gitt muntlig ved behov på skole 2.
Representasjonskompetansen og symbol- og formalismekompetansen er nødvendig for i det hele tatt å komme i gang med beviset. Geometriske former og sammenhenger skal uttrykkes algebraisk og deretter manipuleres og trekkes sammen for å komme fram til den etterspurte sammenhengen kjent fra Pytagoras' læresetning. Tankegangskompetansen blir aktuell for å gjøre generaliseringene og se på hvordan påstandene man setter opp kan være gyldige dom bevis. Resonnementskompetansen vil vise seg i hvordan man følger argumentene for sammenhengene og vurderer gyldigheten av de forskjellige uttrykkene man setter opp.
Problembehandlingskompetansen blir vesentlig for å finne ut at det er de forskjellige måtene å bruke opplysninger og sidelengder til å lage to forskjellige uttrykk for samme areal som er nøkkelen til å løse oppgaven. Denne oppgaven legger til rette for en grundig samtale om hver enkelt deloppgave og dermed mulighet for å se på kommunikasjonskompetansen i flere aspekter av oppgaven og steg i prosessen.
Til denne oppgaven hadde jeg klargjort hint knyttet til spesifikke formuleringer av sidekantene og det å se på arealet av det hvite kvadratet som det store kvadratet minus fire trekanter.

10. Denne oppgaven har jeg laget i samarbeid med min veileder. Her ville jeg igjen kombinere geometri og algebra samt se på elevenes evne Jeg la også merke til på skole 1 at begge elevene kjente reglen om vinkelsummen i en trekant, men var nysgjerrig på om elevene kunne begrunne eller forklare hvorfor det er slik.

Det at elevene ble bedt om å se på grove skisser og akseptere dem som eksempler på konkrete geometriske ideer ga mulighet til å vise representasjonskompetanse. Delvis ved å akseptere dem som eksempler og delvis ved å kunne behandle dem korrekt til tross for at de åpenbart var upresise representasjoner. Også denne oppgaven fikk et sterkt samtaleelement som er vesentlig for vurderingen av kommunikasjonskompetansen.
Jeg planla å prøve å få elevene til å dele mangekantene opp i trekanter for å komme fram til vinkelsummene. Jeg var klar over at det kunne bli en utfordring hvis elevene problematiserte forskjellene på konvekse og konkave mangekanter, men dette ble ikke aktuelt.

Her var noen av hintene del av oppgaven som at jeg tegnet opp en skisse av en femkant for å starte samtalen rundt vinkelsummer. Dessuten planla jeg å bruke beviset med en tegning av en trekant med forlengede sider gjennom en linje parallell med trekantens grunnlinje med mindre elevene kom opp med egne eksempler.

Oppgave 1, 3, 4, 7 og 8 ble bare gitt på skole 1, en av dem dessuten bare til en elev. De ni første oppgavene samt noen som ikke ble brukt var med til første intervjurunde på skole 1. I utvalget av oppgaver til første intervjurunde ønsket jeg oppgaver som både kunne avdekke de fleste av de åtte kompetansene hos Niss, men forsøkte også å la dem dekke de fem hovedområdene i LK-06: Tall og algebra, Geometri, Måling, Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk og Funksjoner. (Kunnskapsdepartementet, 2006) Etter første intervjurunde på skole 1 så jeg både at det var forskjell i hvor mange oppgaver de to elevene rakk å gjøre, og at tidsrammen gjorde det utfordrende å komme gjennom alle hovedområdene på en tilfredsstillende måte. Elevene på skole 2 gjorde altså oppgave 5, 6, 9 og 10, i tillegg til at en av dem gjorde oppgave 2.

Intervjurunde 2

Da jeg gikk gjennom første intervjurunde så jeg at jeg hadde undersøkt lite eller ingen modelleringskompetanse og hjelpemiddelkompetanse hos elevene. Derfor bestemte jeg meg for å lage oppgaver som blant annet kunne teste dette. Ettersom det stilles krav til eksamen om bruk av regneark og graftegner(Utdanningsdirektoratet, 2019) valgte jeg oppgaver som kunne løses med disse hjelpemidlene. I oppgave 2 ledet jeg elevene ganske raskt mot bruk av Geogebra som metode uten at de hadde valgt denne selv. Hjelpemiddelkompetansen har en dimensjon som handler om reflektert bruk av hjelpemidler (Niss & Højgaard, 2002) og denne går jeg litt glipp av ved at jeg styrer valget deres av metode så vidt tydelig. I denne runden ble oppgavene gitt som samarbeid. To elever jobbet sammen med oppgavene.

11. Den første oppgaven er sterkt inspirert av en oppgave fra Alrø og Skovsmose (Alrø & Skovsmose, 2006). I den opprinnelige oppgaven setter elevene selv opp regnearket som mine elever fikk utdelt. Jeg fylte ut første del for dem selv fordi jeg ønsket å prioritere å bruke tid på det utforskende elementet i oppgaven hvor elevene skal forsøke å tilpasse et regnskap hvor ønsket salgspris ikke stemmer overens med tilbudet de har fått.
    Hjelpemiddelkompetansen og kommunikasjonskompetansen er de kompetansene som tydeligst er etterspurt i de to første oppgavene gjennom at elevene skal samtale om framgangsmåte og løsning samt at det er lagt sterkt opp til bruk av regneark i denne oppgaven. Denne oppgaven gir i tillegg mulighet til å vise problembehandlingskompetanse gjennom at de har en rekke gitte faktorer som ikke gir den ønskede salgsprisen og må diskutere hva de kan

og ikke kan endre for å løse dette. Ved at de blir bedt om å justere en modell for et regnskap får de behov for modelleringskompetanse både for å forstå utgangspunktet og for å sette opp en alternativ løsning. Det kan også bli snakk om bruk av representasjonskompetanse gjennom behov for å sette opp eller justere formler i regnearket. Det er lagt inn en liten feil i oppsettet for å se om elevene finner den. Det vil kunne være snakk om å bruke problembehandlingskompetanse eller resonnementskompetanse for å oppdage feilen. Feilen er med såpass små tall at det ikke vil ha avgjørende betydning om den blir oversett. Selv om jeg ikke ville at elevene skulle bruke mye tid på oppsettet av denne oppgaven har jeg laget et oppsett som ikke er veldig tydelig og med litt variasjon mellom å regne ut mellomposter som jeg så summerer eller direkte regne ut neste sum inkludert posten. Jeg ville at elevene skulle måtte bruke litt samtale og tankeprosesser for å forstå oppsettet, på denne måten kunne de få vist noe modelleringskompetanse.
I denne oppgaven planla jeg først å gi hint om at elevene kunne gå gjennom regnearket for å vurdere om det stemte og se hvorfor det så ut som det gjorde. Når de var klare for å lage sin justerte utgave hadde jeg planlagt et hint om at de kunne diskutere hvilke punkter som kunne, og eventuelt ikke kunne, endres.

12. Den andre oppgaven er hentet fra Abelkonkurransen 2017/2018 runde 1
    Hensikten med denne oppgaven er å kunne uttrykke en sammenheng mellom temperaturskalaene for Fahrenheit og Celsius og slik kunne ha en oversikt hvor man kan oversette mellom de to. I denne oppgaven er det aktuelt med modelleringskompetanse ved at man skal lage en modell for oversettelse mellom temperaturskalaer. Det å kunne uttrykke temperaturene som koordinater i et koordinatsystem og kunne uttrykke sammenhengen ved en graf gir anledning til å vise representasjonskompetanse. Når man har fått laget en graf kan denne uttrykkes algebraisk, og det å finne dette uttrykket kan gjøres enten ved symbol- og formalismekompetanse eller med hjelpemiddelkompetanse. Den siste kompetansen vil være gjennomgående aktuell i oppgaven hvis de tar imot innspillet om å jobbe med graftegner heller enn å tegne for hånd. Kommunikasjonskompetansen vil være nødvendig i samspillet og samtalen elevene bruker for å løse oppgaven.
    Hintene her er for det første det skriftlige i oppgaven om å se på to og to verdier som hører sammen, men eventuelt også at disse kan skrives som koordinater, at de kan bruke graftegner og ikke minst at graftegneren kan hjelpe dem med å finne uttrykket for grafen.

13. Den tredje oppgaven fant jeg på Wikipedia ("Ugyldige bevis," u.å.). Her var ideen å presentere et ugyldig bevis for å skape kognitiv dissonans hos elevene og se om de kunne følge resonnementet i beviset og eventuelt avsløre hvorfor beviset er ugyldig.

Utgangspunktet i denne oppgaven krever resonnementskompetanse for å gå gjennom linjene i «beviset» og undersøke både hva som har blitt gjort, og om det er gyldige operasjoner. De trenger tankegangskompetanse for å vurdere bevisførselen og stille spørsmål knyttet til operasjonene underveis. Problembehandlingskompetansen er aktuell på den måten at elevene skal forsøke å finne en eller flere spesifikke feil. Kommunikasjonskompetansen er sentral også her for å mest mulig effektivt undersøke gangen i «beviset» sammen.
Hintet jeg hadde gjort klart her var å sette inn tallverdier for variablene og regne gjennom leddene.

Teoretisk innramming av oppgavene

Både gjennom det jeg finner om hvilken kompetanse samfunnet etterspør hos elevene(Kunnskapsdepartementet, 2015-1016), Niss og Højgaards forståelse av kompetanse (Niss & Højgaard, 2002) og gjennom bruken av oppgavebasert intervju som metode (Goldin, 1997) blir det etterspurt åpenhet og problemløsing i oppgavetyper. Det er i forskjellige sammenhenger mange forskjellige forståelser av hva som menes med åpne og problemløsende oppgaver (Foster & Inglis, 2017) (Joseph B.W. Yeo & Yeap, 2010), men hos Alrø og Skovsmose finner vi ideer om temaer og problemstillinger som kan angripes og undersøkes fra forskjellige vinkler og gjennom en dialog mellom elever og lærer. (Alrø & Skovsmose, 2006) Dette henger nøye sammen med det som Richard Skemp kalte relasjonell forståelse. En overførbar kunnskap for flere situasjoner med vekt på forståelse av hvorfor som en motvekt til en instrumentell tilnærming med et mer ensidig fokus på hvordan. (Skemp, 1976)

For å konkretisere ytterligere hva som ligger i dette har jeg tatt utgangspunkt i et rammeverk for å karakterisere åpenhet i matematikkoppgaver utviklet av Joseph B. W. Yeo. Yeo innleder med å stille spørsmålet om hva som menes med et matematisk problem og presenterer to tilnærminger. Den ene at det er noe som utfordrer den som skal løse oppgaven og krever mye av vedkommende, den andre er at det ligger noe i måten man tilnærmer seg oppgaven. Det siste kan bety at det ikke er noe problem å løse oppgaven hvis for eksempel sammenhengen eller oppgavetypen er velkjent fra før. Det er også slik at forkunnskapene spiller inn slik at en oppgave som er problemløsning for en elev kan være algoritmisk for en annen. Det at det blir et problem å løse oppgaven er dermed heller ikke i seg selv nok til å kalle oppgaven problemløsende. Det må også handle om spesifikke sider ved oppgaven som gjør den problemløsende. Yeo skiller de problemløsende oppgavene fra det han kaller «procedural tasks» som jeg velger å oversette til algoritmiske oppgaver. Dette er oppgaver som kan løses ved at man kjenner en algoritme eller teknisk løsningsmetode som er egnet.

Det neste han tar for seg er hva som er målet med oppgaven. Man kan ha utforskende oppgaver som å utforske en tallrekke hvor prosessen er målet og dermed svært åpent, eller en oppgave fra det virkelige liv som å designe en lekeplass hvor målet er lukket selv om det kan være rom for undersøkelser på veien til målet. Når målet er så åpent som ved en oppgave om å utforske en tallrekke vil en del elever bli usikre på hva de skal gjøre ifølge en tidligere studie av Yeo. (Yeo 2008) Denne typen åpne mål kaller han derfor i tillegg udefinerte fordi det ikke er klart hva elevene skal utforske. Hvis man derimot justerer oppgaven til å be elevene finne så mange mønstre som mulig er målet definert, selv om det fortsatt er åpent i den forstand at det ikke er gitt hvor mange de skal finne enn si det er mulig å finne i den gitte oppgaven.

Yeo beskriver hvordan forskjellige oppgaver kan ha åpne eller lukkede svar. Mange typiske matematikkoppgaver, sier han, har bare ett eller flere klart definerte riktige svar. For eksempel har en kvadratisk likning ofte nøyaktig to løsninger, og bare begge disse er det riktige svaret. Utforskende oppgaver kan derimot ha mange svar, men også disse kan som regel sees på som riktige eller gale. Derimot kan åpne oppgaver som lekeplassoppgaven selv om den bare ber om ett svar ha uendelig mange mulige svar og det gir ikke i samme grad mening å snakke om riktige og gale svar. Inndelingen av svar er altså i lukkede svar hvor det er klart hva alle de riktige svarene er. Åpne svar, hvor det finnes ubegrenset antall svar, kan derimot deles inn igjen i to typer. Han skiller disse to typene ved å kalle dem definerte eller objektive svar og udefinerte eller subjektive svar.

Noen definerer ifølge Yeo åpne oppgaver som oppgaver hvor det er metoden som er åpen (Frobisher 1994 i Yeo 2010)(Joseph B.W. Yeo & Yeap, 2010), men han viser hvordan flere oppgaver kan ha flere ulike løsningsmetoder, men at det er

For å oppsummere deler altså Yeo inn oppgavene i fire kategorier:

- Algoritmiske oppgaver
- Problemløsningsoppgaver
- Utforskende oppgaver
- Oppgaver fra det virkelige liv

I tillegg kategoriser han dem ved hjelp av de fem dimensjonene

- Mål – som deles inn i
    - Åpent definert og udefinert
    - Lukket
- Metode som kan være:
    - Åpen definert og udefinert
    - Åpen oppgaveavhengig og -uavhengig
- Kompleksitet som kan være
    - Lukket
    - Åpen oppgaveavhengig og -uavhengig
- Svar som kan være
    - Lukket
    - Åpen definert og udefinert
- Rom for utvidelse som kan være
    - Lukket
    - Åpen oppgave avhengig
    - Åpent emne avhengig

Til slutt presiserer Yeo at det er et skille mellom oppgave og aktivitet i matematikken. Oppgaven er bare et middel for å sette i gang aktivitet som forhåpentligvis kan lede til læring av matematiske ideer og temaer når elevene jobber med oppgaven. Hensikten med rammeverket er dermed å beskrive forskjellige grader av åpenhet utfra definerte variabler slik at lærere kan lage egnede oppgaver for læring av forskjellige matematiske prosesser.

Utvalg

Elevene jeg har intervjuet går alle i niende klasse. De går på to forskjellige skoler i Oslo, en sentrumsnær som jeg kaller skole 1, og en på østsiden av Oslo litt lenger ut fra sentrum i en av drabantbyene som jeg kaller skole 2. De er alle blant de med best karakter i sine kull og alle fikk karakteren 6 sist det ble satt terminkarakter. De tre elevene fra skole 2 har alle deltatt på sin skoles opplegg for forsert løp og fullført ungdomsskolematematikken raskere enn normert tid. De to på skole 1 er gutter, mens de på skole 2 er to jenter og en gutt. Dette henger også sammen med et ønske om at elevene ikke skal være for like utover at de er høyt presterende. Elevene er rekruttert gjennom mine bekjentskaper, men uten at jeg har kjennskap til elevene fra før, jeg kjenner heller ikke matematikklærerne til fire av de fem elevene. Jeg bør derfor være i stand til å møte elevene ganske fordomsfritt og med et åpent sinn. Undervisningsmetoder eller lærerne elevene hadde til vanlig ble ikke snakket om i intervjuene så det bør ikke ha påvirket samtalene særlig at jeg hadde kjennskap til den ene læreren. Jeg har valgt å ikke samle inn noen ytterligere informasjon om elevene. Begrunnelsen for dette valget er at det er kompetanse hos høyt presterende elever jeg skal studere, og det vil føre for langt å trekke inn andre faktorer i denne oppgaven. Det er mange sider ved elevene og deres bakgrunn som kan ha påvirkning på den kompetansen de har i dag, men mitt fokus er på å beskrive den kompetansen de besitter utelukkende i lys av at de er høyt presterende elever.

De to elevene på skole 1 har jeg kalt A og B mens jeg har kalt de tre elevene på skole 2 for C, D og E.

Gjennomføring av intervjuene

Arbeidet med denne oppgaven har gått over tid. Dels har det vært en prosess å finne og utvikle oppgaver, komme fram til gode intervjuspørsmål og ideer til hva jeg faktisk vil prøve å finne ut. Dels ble det en prosess å skaffe aktuelle informanter. Informantene fra skole 1 fikk jeg tak i gjennom en studiekamerat, mens jeg måtte prøve forskjellige veier før jeg fikk tak i de tre elevene på skole 2. Det gikk en del tid mellom intervjuene på de to første skolene, noe som gjorde at jeg endret litt på utvalget av oppgaver til skole 2 basert på endrede vurderinger som jeg har gjort rede for dels i gjennomgangen av oppgavene, dels i analysen og i delkapittelet om undersøkelsens reliabilitet og validitet. I tillegg ble intervjurunde to plutselig utsatt da skolene ble stengt uka før jeg skulle gjennomføre intervjurunde to på skole 2. Etter at skolene åpnet igjen hadde jeg et ganske kort vindu for gjennomføring av intervjurunde 2. Det førte til at den ene eleven fra skole 2 ikke ble med på gruppeoppgavene da han var syk den dagen.

Jeg hadde informert elevene om at intervjuene ville vare ca. en klokketime. Dette hadde en sammensatt begrunnelse. Med ganske åpne oppgaver ønsket jeg å ha tid til å gå i dybden samtidig som jeg ikke ville presse elevene til å sitte og jobbe for lenge sammenhengende. Jeg ville ha en forutsigbar ramme for både dem og meg. Til slutt så jeg også at rammen for oppgaven min gjorde at jeg ikke burde samle inn et altfor stort materiale med tanke på å få analysert det tilfredsstillende. Den faktiske lengden på intervjuene endte nære planen da de individuelle intervjuene ble på mellom 48 og 60 minutter, mens begge de to gruppeintervjuene varte ca. 67 minutter.

Elevene fremstod gjennomført som positive til oppgavene de fikk og jobbet velvillig. De fleste intervjuene ble gjennomført før lunsj de angjeldende dagene. Unntaket var Bs individuelle intervju som var på slutten av skoledagen. Dette kan ha vært en medvirkende årsak til at han rakk færre oppgaver enn A. I de fire intervjuene som varte fram til lunsj, de to gruppeintervjuene samt de individuelle intervjuene til A og C, bør jeg ta høyde i gjennomgangen for at elevene kan ha begynt å bli sultne og dermed ukonsentrerte mot slutten av intervjuet.

Validitet og reliabilitet

Intervjuforskning er forbundet med en del utfordringer knyttet til objektivitet og etterprøvbarhet. (Kvale & Brinkmann, 2015) All den tid dataene som kommer fram i et intervju er utviklet i en samtale mellom personer og deretter er en tolkning av kommunikasjonen disse imellom vil det nødvendigvis være subjektivitet inne i bildet. Objektiviteten vil derfor avhenge av hvordan man angriper alle intervjuets faser og hvor et godt håndverksmessig forskningsintervju vil bidra til å produsere kunnskap som kan kontrolleres og verifiseres.

Hvor høy reliabilitet en datainnsamling har henger sammen med i hvor stor grad man kan gjenskape de samme resultatene. (Johannessen et al., 2016) Det at jeg har brukt semistrukturert oppgavebasert intervju gir både mulighet til å gjenskape disse gjennom at jeg har hatt forberedte oppgaver, spørsmål og oppfølgingsspørsmål, men også utfordringer på den måten at man må respondere på uventede spørsmål, innspill og problemstillinger. Det er ikke gitt at en selv vil reagere likt på disse fra gang til gang, og det er dermed stor sannsynlighet for at en annen som forsøkte å gjennomføre tilsvarende intervjuer ville kunne få andre spørsmål og ha andre responser.

Vurdering av metodevalg og metodebruk

Presentasjon, analyse og drøfting

Analysekategorier

I analysen av materialet forsøker jeg å finne hvilke av kompetansene hos Niss jeg finner i elevenes besvarelser. Når jeg har gått gjennom oppgavene og plassert disse kategoriene går jeg gjennom det jeg har sett hos hver enkelt elev for å vurdere dekningsgrad, aksjonsradius og teknisk nivå for kompetansene elevene har vist.

Analyse

Gjennomgang av oppgaver

Det ble gitt litt forskjellige oppgaver på de to skolene og til de fem elevene. Under har jeg samlet en oversikt over hvem som har gjort hva i en tabell i første runde:

Oppgave/Skole	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skole 1	A B	A B	A B	A B	A B	A	A	A B	A B	
Skole 2		D			C D E	C D E			C D E	C D E

I neste tabell forsøker jeg å koble hvilke av kompetansene hos Niss som i størst grad kan ventes å finnes i de forskjellige oppgavene jeg har gitt elevene i første intervjurunde:

Å kunne spørre og svare i og med matematikk	Tankegangskompetanse	2,5 – 6 – 8 – 9 – 10
	Problembehandlingskompetanse	1, 4 – 3 – 2,5 – 8 – 9 – 10
	Modelleringskompetanse	
	Resonnementskompetanse	6 – 8 – 9 – 10
Å omgås språk og redskaper i matematikk	Representasjonskompetanse	1, 4 – 6 – 7 – 9 – 10
	Symbol- og formalismekompetanse,	1, 4 – 2,5 – 6 – 7 – 9
	Kommunikasjonskompetanse	1, 4 – 3 – 2,5 – 6 – 8 – 9
	Hjelpemiddelkompetanse	

Som tabellen viser ble ikke hjelpemiddelkompetansen ansett som aktuell til disse oppgavene. Den kom jeg tilbake til i neste intervjurunde. Jeg ser heller ikke helt at jeg har anvendt modelleringskompetansen i noe særlig grad og vil gjerne ha innspill knyttet til den. Jeg har også en idé til en oppgave som tester hjelpemiddelkompetanse hvor jeg lurer på om modellering kan sies å komme inn i bildet.

Forskjellene i oppgaver på skole 1 hang sammen med at A jobbet fortere med oppgavene enn B. Det framstod som at A hadde bedre kontroll på emnene og oppgavene han jobbet med. B ga oftere uttrykk for at ideer og problemstillinger var nye for ham. I tillegg var intervjuet med A før lunsj, mens intervjuet med B var på slutten av skoledagen. Han kan dermed også ha vært litt mer sliten etter en dags arbeid.

Etter første intervjurunde på skole 1 satt jeg igjen med et inntrykk av at jeg hadde spredd meg utover for mange oppgaver. Sammen med veileder bestemte jeg meg for å kutte ned på antall oppgaver og heller jobbe for å åpne oppgavene slik at de skulle gi rom for mer dybde og å vise mer kompetanse. Planen i andre runde var at elevene skulle jobbe med de fire samme oppgavene. Med erfaringen jeg hadde gjort fra første runde klarte jeg å lage et omfang, og styre intervjuene slik at vi holdt oss innenfor tidsrammen jeg hadde satt på ca. en time for intervjuene,

Allikevel fikk jeg prøvd ut to av oppgavene med alle elevene, mens fire av de fem fikk prøvd oppgave 6. Oppgave 9 ble gitt i litt forskjellig form på de to skolene. På skole 1 var oppgaven gitt som deloppgaver skriftlig, mens instruksjonen i større grad var muntlig og mer åpen på skole 2.

På skole 2 jobbet D litt raskere enn de to andre. Han ga også uttrykk for at han syntes det var interessant å jobbe med oppgavene han fikk, derfor fikk han prøve seg på en oppgave som ikke de andre på han skole prøvde, men som både elev A og B hadde gjort.

I andre intervjurunde var det bare fire av elevene som gjorde oppgavene, men alle fire gjorde de samme tre oppgavene. I tabellen under har jeg på samme måte som i første intervjurunde forsøkt å vise hvilke kompetanser som var ventet å være mest aktuelle å observere i de forskjellige oppgavene.

Å kunne spørre og svare i og med matematikk	Tankegangskompetanse	13
	Problembehandlingskompetanse	11, 13
	Modelleringskompetanse	11, 12
	Resonnementskompetanse	13
Å omgås språk og redskaper i matematikk	Representasjonskompetanse	11, 12
	Symbol- og formalismekompetanse,	12, 13
	Kommunikasjonskompetanse	11, 12, 13
	Hjelpemiddelkompetanse	11, 12, 13

Analyse

I analysen av materialet mitt ville jeg i første fase (Malterud (2011) i Johannessen et al., 2016) gå gjennom besvarelsene i materialet og se på hvordan elevene besvarte disse og i hvilken grad de var avhengig av veiledning. I andre fase vil jeg forsøke å knytte fremgangsmåter og svar til de åtte kompetansene hos Niss (Niss & Højgaard, 2002) og sortere disse. I tredje fase prøver jeg å se sammenhengene mellom hvordan kompetansene framstår i de forskjellige oppgavene og hvilke kompetanser som for eksempel kommer til uttrykk i forskjellige oppgaver og sammenhenger. Dette vil gi meg rom for å se videre på dekningsgrad, aksjonsradius og teknisk nivå knyttet til de viste kompetansene illustrert med eksempler fra det innsamlede materialet. I fase fire vil jeg dermed kunne lage kompetanseprofiler basert på de fem elevene og se på fellestrekk og forskjeller i disse for å gi svar på spørsmålene jeg stilte meg i starten av dette arbeidet.

Individuell oppgave 1

Oppgave 1 og 4 var tenkt å teste ut i hvilken grad elevene kunne trekke ut opplysninger av en tekst for så å løse et matematisk problem. Det var ønskelig å se om de bare ville bruke logikk eller om de ville sette det opp som et regnestykke og eventuelt bruke matematiske symboler og operatorer.

Disse oppgavene ble gjort av elev A og B.

Elev A går løs på den første oppgaven ved å regne ut antall dyr av hvert slag ved hjelp av hvor stor del de er av 24. Når han har gjort det summerer han dem, får 17, og sier at da er det 7 igjen som må være antall kenguruer.

Elev B går gjennom oppgaven ved å regne ut hvor mange dyr hver brøk må representere. Han setter det opp i et uttrykk hvor han summerer disse heltallene og så skriver x for antall kenguruer. Han setter dette uttrykket lik 24 og løser ligningen rett fram ved å trekke fra alle heltallene på begge sider og komme til at det ukjente antallet er 7.

Elevene viser kommunikasjonskompetanse ved å vise at de med litt dialog kommer fram til hva det er spurt etter. Elev A viser problembehandlingskompetanse ved å raskt finne fram til hvilke tall som er representert og regne seg fram til riktig svar. Elev B viser noe av den samme kompetansen, men bruker også symbol- og formalismekompetanse ved å forsøke å sette opp problemet i en ligning.

Individuell oppgave 2

Oppgave 2 og 5 var tenkt å ha to dimensjoner. På den ene siden kan man bruke resonnementskompetanse eller problembehandlingskompetanse for å stille de riktige spørsmålene og umiddelbart se svarene med enkel hoderegning som jeg forklarte nærmere i presentasjonen av oppgavene. Samtidig kan oppgavene ganske greit løses med forståelse for teknisk likningsløsning som vil vise fram symbol- og formalismekompetanse. Det vil være to forskjellige varianter av problembehandlingskompetanse, og måten eleven velger å presentere løsningen sin vil også kunne si noe om kommunikasjonskompetansen.

Alle elevene som så på disse oppgavene kunne løse dem med teknisk ligningsløsning, mens de i varierende grad selv så de enklere løsningene som handlet om å se at differensen på uttrykkene var $x = 5$ i oppgave 2 eller at den ene faktoren måtte være 0 i oppgave 5.

Oppgave 2 ble gjort av elev A, B og D. Elev A nevner først at ligninger med to ukjente kan løses ved hjelp av grafer og koordinatsystem, men han kommer ikke helt på fremgangsmåten. På spørsmål om han foretrekker å tegne for hånd eller med graftegner svarer han at han aldri har brukt digital graftegner. Etter å ha strevd litt med å komme på fremgangsmåten angriper han oppgaven fra en ny vinkel. Han oppdager da sammenhengen mellom de to ligningssettene og ser at fordi forskjellen på dem er x og 5 må svaret være at $x = 5$ og så regner han raskt ut i hodet at $y = 12$.

Elev B så umiddelbart sammenhengen i uttrykkene og fant dermed at verdien av x var 5. Han var ikke kjent med metodene for å løse ligninger med to ukjente, men forklaringen hans var denne: «Hvis det er forskjellen mellom de to da er at man tar bort et x når man går over til det stykket der. Her. Og det vil også si at $x = 5$ antar jeg siden svaret går ned med 5.» Formuleringen er ikke av de mest stringente, men her bruker faktisk eleven addisjonsmetoden uten egentlig å være klar over det.

Elev D går raskt i gang med å bruke addisjonsmetoden. Han gir uttrykk for at han kjenner til at det finnes forskjellige framgangsmåter, men han velger addisjonsmetoden fordi han er mest komfortabel med den. Han løser oppgaven sikkert og rett fram med denne metoden. Når oppgaven er løst er han ikke like interessert i å se på alternative metoder. Han sier seg fornøyd med at metoden han valgte førte fram.

Alle tre elevene viser fram kommunikasjonskompetanse og symbol- og formalismekompetanse knyttet til disse oppgavene. De forstår hva oppgaven går ut på og behandler variabler og konstantledd på et tilfredsstillende nivå. Tankegangs- og problembehandlingskompetansen viser seg i at problemstillingen i oppgaven er forstått og at de klarer å løse oppgaven, men uten at de tre elevene tar nivået hvor de ser på avgrensinger av oppgavens gyldighet eller stiller spørsmål om hvorfor de velger en bestemt fremgangsmåte. Elev A og B aktiverer resonnementskompetansen sin når de finner svaret på oppgavene ved å helhetsvurdere uttrykket og hoderegne seg fram til svaret ved hjelp av en observasjon av forskjellene på de to uttrykkene.

Individuell oppgave 3

Oppgave 3 forutsatte kjennskap til veldig spesifikke begreper og hadde en ganske låst fremgangsmåte. Det var elev A og B som gjorde denne oppgaven og begge elevene måtte ha hint og veiledning, men fikk vist både problembehandlingskompetanse, regneferdigheter og kunnskaper om matematiske begreper. Elev A viste forståelse for begrepene median, typetall og gjennomsnitt ved å bruke dem riktig og forklare innholdet i dem. I tillegg til å vise fram kunnskap om spesifikke begreper fikk han her vist kommunikasjonskompetanse. I dialog med meg får han undersøkt tallene og resonnert rundt hvilke kombinasjoner som kan gi den nødvendige karakterfordelingen. Elev B viste at han kjente og forstod begrepene median og gjennomsnitt, men husket ikke hva typetall var. Ingen av de to elevene var kjent med begrepet aritmetisk middelverdi, men kjente innholdet i det som gjennomsnitt. Eleven viser at han får til det rent tekniske i oppgaven med utregninger selv om han gjør noen upresise beregninger iblant. Flere av dem klarer han å selvkorrigere ved å bli spurt om utregningen er riktig. Han trenger noen innspill underveis blant annet spør jeg ham om hva summen av karakterene skal være for at gjennomsnittet til slutt skal bli det samme som var oppgitt i oppgaven. Ved hjelp av et par hint av denne typen kommer han etter hvert fram til riktig svar på oppgaven. Det at elevene viser at de kan operere med verdiene for sentralmål både ved å se dem i tabell og regne seg fram til dem viser modelleringskompetanse og representasjonskompetanse.

Individuell oppgave 4

Oppgave 4 ser først ut til å forvirre elev A noe. Han bruker litt tid på å få tak i hva det er spurt etter, men gjennom samtale kommer han ganske raskt fram til en forståelse av problemet og finner ut at han vil sette det opp som ligning. Han jobber seg fram til to uttrykk for tallsammenhengene og etter litt arbeid kommer han fram til en løsning. Jeg spør om han kan sjekke at det er riktig og han setter inn løsningene sine i uttrykkene han har laget og regner seg fram til at det stemmer. Eleven setter altså prøve på svaret.

Elev B tenker med en gang at det er bruk av ligninger som bør være fremgangsmåten. Han forsøker å lage uttrykk for sammenhengen som er beskrevet, men strever litt med å få klarhet i hva teksten faktisk sier. Gjennom dialog får han satt opp en ligning med to ukjente og denne jobber han med å løse ved hjelp av innsettingsmetoden. Han er tydelig ikke vant med ligninger med to ukjente, men vi hadde snakket om innsettingsmetoden da han tidligere løste oppgave 2. Eleven sa: «Jeg antar at jeg her kan prøve å bruke den metoden du fortalte meg i stad, eller?» Han er ikke helt sikker på denne metoden som akkurat var ny for ham, men med litt veiledning får han brukt den til å løse oppgaven riktig.

Begge elevene viser kommunikasjonskompetanse ved at de gjennom samtale klarer å trekke ut essensen i hva oppgaven består i. Elev B trenger noe mer veiledning enn elev A. De får også vist symbol- og formalismekompetanse samt representasjonskompetanse når de uttrykker tallsammenhengen og løser oppgaven ved hjelp av ligninger. Begge løser oppgaven med noe veiledning og får dermed vist problembehandlingskompetanse.

Individuell oppgave 5

Elev A ser på oppgaven og gjør først et slags overslag hvor han kommer til at det må være sånn at $x^2 + 3^2 = 0$. Han avviser at det kan være riktig fordi: «ingenting i annen vil jo være minus». Når jeg spør om det kan være fordi det kanskje ikke blir $x^2 + 3^2$ begynner han å regne seg gjennom uttrykket og kommer riktig fram til at det må være $x^2 - 9 = 0$ og sier at det må bety at $x = 3$. jeg spør eleven om ligningen kan ha flere mulige løsninger og han svarer at det kan også være -3. På spørsmål gjenkjenner han dette som en annengradsligning. Jeg spør om hvorfor det er sånn at ikke et tall i annen kan bli et negativt tall. Svaret var:

«Fordi uansett når du ganger to tall så uansett om de er like eller hvis de har like fortegn så må det bli et positivt tall.»

Vi samtaler litt videre om hva som menes med det opprinnelige uttrykket og hvilke forutsetninger som skal til for at svaret på gangestykket skal bli 0. Han sier først at den ene faktoren blir 0 hvis x er positiv 3, og så at den andre blir 0 hvis x er negativ 3. På spørsmål om begge må bli 0 for at produktet skal bli 0 bekrefter han at det blir 0 hvis en av faktorene er 0.

I denne oppgaven får eleven vist en sammensatt kompetanse, både gjennom det han besvarer riktig, men også når han først gjør en regnefeil og siden når han korrigerer feilen sin. Han viser tankegangskompetanse ved å avvise uttrykket han kommer fram til basert på regneregler han kjenner, og resonnementskompetanse ved å følge disse reglene fram til et uholdbart resultat. Når han får oppfølgingsspørsmålet om det kan skyldes en regnefeil aktiverer han symbol- og formalismekompetansen for å regne seg fram til det riktige uttrykket. Dette uttrykket behandler han på nytt med resonnementskompetanse, kommer fram til at det er et gyldig uttrykk og bruker representasjonskompetansen til å gjenkjenne uttrykket som andregradsligning.

Elev B ser på oppgaven og sier:

«Ja vel. Ja, dette her har sikkert noe med negative tall å gjøre tror jeg.»

Han begrunner dette med at du ikke kan gange sammen to positive tall og få null. Når han resonnerer videre sier han at:

«Eller jo, jeg antar at du kan hvis den ene er 0,»

Jeg spør ham om hvordan den ene faktoren kan bli 0 og han svarer at det er hvis $x = 3$, og så at den andre kan blir det hvis $x = -3$. Videre spør jeg om han kan gange sammen de to parentesene, noe han gjør greit. Han snubler først i konstantleddet til sist, men retter det opp selv etter spørsmålet *«Pluss 9?»*.

Når han har trukket det sammen blir han litt forvirret av å ha et uttrykk med en ukjent på den ene siden av likhetstegnet og 0 på den andre. Han får flyttet over variabelen, men får fortsatt litt utfordringer fordi dette tydeligvis ikke er så kjent stoff for ham og han sitter igjen med $-9 = -x^2$. Vi kommer sammen fram til at det må være det samme som $9 = x^2$, og kan bruke hans forslag om å ta kvadratrot på begge sider.

Eleven viser noe tankegangskompetanse ved å stille spørsmål ved oppgaven og komme til at produktet av to positive tall ikke kan bli null. Det er noe huller i kompetansen ettersom han tolker det videre til at det da må være snakk om en negativ faktor, noe som er en upresis generalisering. Han viser symbol- og formalismekompetanse ved å kunne gange sammen parentesene og sortere leddene på hver sin side av likhetstegnet. Han viser også representasjonskompetanse ved å foreslå at han må finne kvadratroten for å finne ut hvilket tall som er opphøyd i annen.

Elev C ser på oppgaven og gjenkjenner uttrykket som konjugatsetningen. Hun oppgir å ikke kunne kvadratsetningene så godt, men regner sammen parentesene med et lite feilsteg som hun selv retter opp etter et oppklaringsspørsmål. Hun foreslår deretter å sette $x^2 = 9$ og sier at man tar kvadratroten og får $x = 3$. Jeg spør om det er alle løsningene, og hun sier at «Nei, fordi det er sånn kvadrat og da er det pluss minus er det ikke? Jo.» Etter dette spør jeg henne om hva som skal til for at et gangestykke skal bli 0, hun virker usikker på hva jeg mener, men etter at jeg har bedt om et eksempel kommer hun til at «alt som blir ganget med 0 blir 0.» Jeg spør henne om hva som skal til for at faktorene i oppgaven blir 0, og hun kommer da til at det er hvis $x = -3$ eller $x = 3$.

Eleven får vist god symbol- og formalismekompetanse og representasjonskompetanse gjennom ligningsløsningen. Hun viser noe resonnementskompetanse i forklaringen av at en faktor må være null for at produktet skal bli 0 og når hun retter opp sin egen regnefeil etter et oppfølgingsspørsmål.

Elev D gjenkjenner med en gang uttrykket som konjugatsetningen, og sier at den også kalles tredje kvadratsetning. Han ser da at verdien av uttrykket er $x^2 = 9$ og at man ved å trekke kvadratroten av begge sider kan få at $x = 3$. Jeg spør først om han da er ferdig, noe han bekrefter, men når jeg spør om det er flere mulige løsninger sier han raskt at:

«Jo. Unnskyld, herregud, jeg glemmer det alltid, pluss minus.»

Jeg spør ham om hvorfor det blir pluss minus. Han sier at han er usikker på grunnen og at det er noe han har lært, men at det pleier å bli sånn når det er

«en andregradsligning eller en ligning med x^2*».*

Når han resonnerer videre sier han at det kan gi litt mening fordi grafen blir en bue hvor hver x-verdi har to punkter på grafen. For å illustrere dette skisserer han en parabel. Vi snakker litt videre om hvorfor disse ligningene får to svar og han viser at han er kjent med at både $3^2 \ og \ (-3)^2 = 9$. Videre spør jeg om oppgaven kan løses på en annen måte, og hva som skal til for at svaret på et gangestykke blir 0. Han svarer at det blir 0 hvis man ganger noe med 0. Jeg følger opp med å spørre om hvordan den ene faktoren i oppgaven kan bli 0, og han svarer at et kan den hvis x har verdien 3 eller -3.

Eleven får vist god symbol- og formalismekompetanse og representasjonskompetanse gjennom ligningsløsningen. Han viser representasjonskompetanse ved å trekke fram hvordan ligningen også kan beskrives grafisk. Her viser han samtidig tankegangskompetanse ved å bruke den andre representasjonen som argument for at ligningen har to løsninger. Til slutt viser han også resonnementskompetanse ved å forklare at ligningen kan løses med de verdiene som gir en faktor lik 0.

Elev E ser på oppgaven og sier at dette er andre kvadratsetning. Jeg svarer at det tror jeg ikke, og hun retter seg selv. Hun foreslår at det kan være tredje kvadratsetning, men blir usikker et øyeblikk før hun ender på at det faktisk er tredje kvadratsetning. Vi snakker litt om kvadratsetningene. Hun viser at hun kjenner de to første kvadratsetningene uttrykt på generell form, og kommer etter hvert fram til at den tredje, som vi har et eksempel på, heter konjugatsetningen. Vi snakker litt om hvorfor den ikke er en kvadratsetning, og hun sier:

«Fordi du kan ikke skrive $a + b$ fordi du vil få to ulike tegn og det kan ikke settes i noe annen.»

På spørsmål om hvorfor det ikke kan stå i annen sier hun ganske riktig at det er på grunn av de forskjellige fortegnene. Vi blir videre enige om at når det ikke er to like tall som ganges med hverandre så snakker vi ikke om et kvadrat. Jeg spør om hun vet hva konjugatsetningen sier og hun forklarer hvordan man ganger sammen de to parentesene slik at man får $x^2 - 9 = 0$. Jeg spør henne hvordan $x^2 - 9$ kan bli 0, og hun svarer at det må være det som du kan trekke fra 9 og få 0, som hun sier er 3^2, altså 9. Jeg prøver å veilede henne inn mot å løse ligningen ved å se på hvordan en av faktorene kan bli 0, men hun må ha flere hint og spørsmål før hun kommer fram til denne måten å tenke på.

Eleven gjenkjenner her typen uttrykk selv om hun først blander det med et annet uttrykk. Hun viser representasjonskompetanse gjennom forklaringen av hvorfor konjugatsetningen ikke egentlig er en kvadratsetning og god symbol- og formalismekompetanse når hun ganger sammen parentesene og løser ligningen.

Individuell oppgave 6

Oppgave 6 er en veldig åpen oppgave. På skole 1 ble den gitt helt åpent. På skole 2 ble elevene ledet inn på et spor for å prøve å bevise eller forklare hvorfor $n^0 = 1$.

Elev A fikk se tallrekka 3, 9, 27, 81 og fikk beskjed om å utforske tallrekka med oppfølgingsspørsmålet *«Hva tenker du da?»*.

Eleven så med en gang at man måtte gange med tre for å få neste tall og regnet ut 243 og 729 i hodet. Han ser også raskt at tallet før rekka starter må være 1, og etter noen spørsmål kommer han fram til at tallene før der igjen må være $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\ og\ \frac{1}{27}$. På direkte spørsmål gjenkjenner han tallrekka som treerpotenser og kan uttrykke alle verdiene som potenser med både positive og negative tall samt null som eksponenter.

Eleven viser god symbol- og formalismekompetanse i behandlingen av tallrekka. Han viser representasjonskompetanse i vekslingen mellom heltall, brøker og potenser.

Elev C ser også raskt at tallrekka gir nye tall ved å gange med tre og regner seg fram til 243 i hodet. Hun gjenkjenner at de kan skrives som potenser, men først etter å ha fått et hint om hva man kaller tall som ganges med seg selv. I den videre samtalen viser hun at tallet før første tall i rekka er 1 og hun vet at det kan skrives som 3^0. Hun sier at hun har hørt en forklaring av hvorfor et tall opphøyd i nullte alltid er 1, men hun kommer ikke på forklaringen. Vi snakker videre og eleven viser at hun kjenner til regneregler for potenser med samme grunntall hvor man kan summere eksponentene når potensene ganges med hverandre, og subtrahere eksponentene når man deler potensene på hverandre. Vi snakker om det i mere generelle former og hun viser igjen at hun kjenner regelen når hun sier at:

«det er jo alltid at grunntallet står også eksponenten blir addert med hverandre.»

Forklaringen er mer muntlig enn i kravene til matematisk bevisførsel, men forklarer tydelig regelen hun har brukt. Hun følger tanken videre og vi får snakket oss fram til at fordi man tilsvarende trekker eksponentene fra hverandre ved deling vil det være sånn at når teller og nevner er like, og dermed verdien av brøken er en, så kan potensen skrives n^0. Videre forsøkte jeg å få eleven til å resonnere seg fram til at dette bare gjelder hvis $n \neq 0$. Dette var hun ikke helt med på, noe som ikke minst hadde sammenheng med at hun ikke var kjent med at det ikke er tillatt å dele på 0.

Eleven viser symbol- og formalismekompetanse og representasjonskompetanse i beregningene og omgangen med tallene som både heltall, brøker og potenser samt med regnereglene for potenser. Hun er innom resonnementskompetane når vi sammen kommer fram til forklaringen på at $n^0 = 1$.

Elev D gjenkjenner raskt tallrekka og gir uttrykk for dette. Han er upresis i formuleringen, men forklarer det slik at det er tydelig at han har gjenkjent det som treerpotenser ved at han henviser til både grunntall og eksponent, kan regne ut nye tall i rekka riktig og forklarer funksjonene både grunntall og eksponent har i en potens. Når vi så begynner å snakke om hva som kommer før i rekka ser han på samme måte med en gang at det er 3^0, som han også vet at har verdien 1. På spørsmål har han ikke noe forhold til hvorfor det er sånn. I samtalen videre viser han at han er kjent med reglene for både multiplikasjon og divisjon av potenser med samme grunntall. Han er også med på å uttrykke dette i generelle termer og uttrykker det som henholdsvis

«L: Så hvis vi da hadde hatt for eksempel n^p ganger n^q. Hvordan ville du ha skrevet det?» D: «Det er vel p + q da.» og *«n i p minus q»*.

Videre diskuterte vi implikasjonene av dette og kom dermed fram til at når telleren og nevneren var like ville vi ha n^0 som ville være lik 1. Jeg ba elev D om å se etter unntak fra denne regelen. Han kjente ikke til det, men etter en ny diskusjon viste det seg at han visste om regelen om å ikke dele på 0. Han var allikevel usikker på hva det betydde for eksempelet vi så på og foreslo at det ville bety at $n^0 = 1$ også når $n = 0$. Til slutt viste eleven hvordan tallrekka ville se ut i leddene før, og viste både hvordan eksponenten da ville være negativ og hvordan man regnet ut verdien av disse potensene.

Eleven behandler tallrekka raskt med god symbol- og formalismekompetanse. Han bruker representasjonskompetanse til å veksle mellom forskjellige måter å uttrykke tallene på og viser resonnementskompetanse når han kommer fram til forklaringen på at $n^0 = 1$. Jeg forsøker å aktivere tankegangskompetansen hans for å få ham til å stille spørsmål til forklaringene og finne begrunnelser, men han er ikke helt med på det.

Elev E så også umiddelbart mønsteret med å gange hvert ledd med tre for å finne neste tall uten hjelp. Hun viste at hun kunne regne ut de neste verdiene i hodet helt opp til 6561, og etter det ba jeg henne ikke om å regne ut flere. På spørsmål om hun ville vurdert å bruke kalkulator for å finne den siste verdien hun regnet ut svarte hun at: «Da ville jeg nok brukt kalkulator hvis det var mulig. Eller så ville jeg satt det opp sånn litt tydeligere bare inne i hodet. Det tar bare litt lenger tid.» Hun hadde en god teknikk hvor framgangsmåten var det samme som den multiplikasjonsalgoritmen som vanligvis undervises i norsk skole, men hvor alle utregninger og notater ble gjort mentalt. Eleven gjenkjente at disse tallene kunne skrives som potenser og kunne gjengi det som $3^1, 3^2, 3^3$ og så videre, men uten å kalle det treerpotenser selv. Hun virket allikevel som om det var et begrep hun kjente da hun ble presentert for det. Da hun ble bedt om å følge tallrekka andre veien uttrykte hun raskt at verdien før 3 måtte være $3^0 = 1$ og sa at: «D: Det er 1 for alt i nullte blir 1 I: Blir alt i nullte 1? D: Unntatt 0^0» Eleven foreslår at hun kan forklare for meg hvorfor det er sånn, og sier det følgende: «D: …hvis du setter 0^0 over 0^0 så blir det 0 fordi du ganger bare med 0 og da står du igjen med 0 over 0 som er 0.» Hun kjenner altså til unntaket og regnereglene for potenser, men konkluderer med en misoppfatning fordi hun ikke er klar over regelen om å dele på 0. For å grave litt videre i forståelsen hennes spør jeg om: «Er du enig i at hvis vi har et tall a ganger b som er lik c. Skriv opp det. $a * b = c$. Er det da sånn at $\frac{c}{b} = a$?». Hun bekrefter dette og vi ser sammen på hva som skjer hvis man deler på 0 og får 0 til svar som hun mener vi bør. Hun sier seg enig i at det da ikke kan bli 0, men kommer ikke til konklusjonen om at det derfor er umulig å dele på 0. Videre ser vi på tallene som kommer før 1 i tallrekka, hun ser med en gang at tallet før 3^0 må være 3^{-1}. men har en misoppfatning om hvilken verdi det har, nemlig -3. Jeg får henne da til å sette opp en brøk som skal bli 3^{-1}, nemlig $\frac{3^3}{3^4}$. Denne brøken sier hun seg enig i at er 3^{-1} og får forkortet til $\frac{1}{3}$. Hun klarer nå å bruke denne teknikken for å forkorte seg fram til verdiene for 3^{-2} og 3^{-3}, men må fortsatt ha en del veiledning for å komme fram til et generelt uttrykk for hvordan brøken skal se ut for n^{-p}.

Eleven viser symbol- og formalismekompetanse i arbeidet med å behandle treerpotensene. Hun viser representasjonskompetanse ved å behandle tallene som både heltall, brøker og potenser. Hun viser noe tankegangskompetanse ved at hun er med når jeg leder henne mot en forklaring på at $n^0 = 1$ og en generell formulering av brøken man får når man har en potens med negative eksponent, men hun bruker den ikke selv aktivt til å komme fram til disse generaliseringene.

Individuell oppgave 7

Oppgave 7 ga muligheter for å teste særlig symbol- og formalismekompetanse men også noe representasjonskompetanse. Det var bare elev A som gjorde denne oppgaven. Han satte opp formelen $\frac{4}{3}\pi r^3 = 2(\frac{r^2 h}{3})$, og gjorde om slik at uttrykkene ble identiske. Her fikk han vist symbol- og formalismekompetanse på høyt teknisk nivå. Han viste seg som sikker i forenkling og manipulering av algebrauttrykk. Selv om eleven her viste god kompetanse, ble det lite bredde i kompetansen som ble vist. Dette førte til at jeg ikke tok med oppgaven videre til intervjurunde 2.

Individuell oppgave 8

I oppgave 8 ville jeg invitere elevene særlig til å lete etter mønstre og se hvordan de reagerte på en oppgave som ikke lot seg løse. Jeg var også interessert i å se om de hadde en praktisk tilnærming og avgrenset letingen til en sannsynlig levetid. Både elev A og B jobbet med denne oppgaven. Elev A

Elev A forstod raskt hva det var spurt etter med de fire tallene som alle var primtall, 3, 5, 37 og 47. Han begynte å undersøke hvordan det ville bli etter henholdsvis 2, 4, 6, 8 og 10 år, og fant alle steder at det var minst ett av tallene som ikke var primtall. Etter dette forsøkte han å endre litt på fremgangsmåten. Han forsøkte nå å liste opp rekker med primtall under hverandre, men rotet litt med de innbyrdes intervallene mellom tallene og sjekket flere av de mulighetene han allerede hadde sjekket på nytt. Etter hvert fikk han allikevel sjekket og avvist såpass mange alternativer at vi nærmet oss sannsynlig levetid for eldstemann i oppgaven så jeg avbrøt eleven. Like før dette hadde han kommet på tanken at oppgaven muligens ikke kunne løses.

Eleven får vist problembehandlingskompetanse gjennom å lage tabell for å sjekke de forskjellige alternativene. Han viser lite tankegangskompetanse ved at han ikke i særlig grad spør seg om hvilke mønstre han kan se etter i tallene for å forenkle letingen. Best tankegangskompetanse viser han nok når han stopper opp og undrer om denne oppgaven faktisk kan løses. Gjennom samtalen og forståelsen av problemstillingen viser han kommunikasjonskompetanse.

Elev B misforstod først oppgaven, men etter en rask forklaring oppfattet han hva den gikk ut på, noe han uttrykte tydelig med følgende gode betraktning:

«B: Jeg antar at man må finne et likt tall som man kan plusse på alle fire sånn at det blir primtall.»

Dette er en tydelig beskrivelse av hva han faktisk er bedt om å finne ut og viser god kommunikasjonskompetanse

Videre beskriver elev B at differansen mellom de to største tallene er 10, og at differansen mellom de minste tallene er 2. Han gir uttrykk for at disse sammenhengen kan hjelpe ham å lete i tallrekker for å finne en kombinasjon av tall som tilfredsstiller kravet om at alle fire er primtall. Eleven har lite effektive strategier for å undersøke tallenes delelighet. Jeg veileder ham for å hjelpe ham til å lete mer effektivt, men han jobber fortsatt litt tungvint elv om han tar til seg tipsene om tall om slutter på 0 eller 5, eller har tverrsum delelig på 3. Utover kommunikasjonskompetansen fikk eleven vist lite kompetanse knyttet til denne oppgaven. Betraktningen om å finne et tall som kunne adderes med de fire andre er et eksempel på tankegangskompetanse, men den blir ikke ordentlig fulgt opp.

Det ble interessante samtaler, men jeg syntes ikke oppgaven lot elevene få vist nok kompetanse og valgte derfor å ikke ta den med til neste runde.

Individuell oppgave 9a

Oppgave 9 gir som tidligere beskrevet rom for en ganske god bredde i kompetanse. Her var instruksjonene litt forskjellige på de to skolene. På skole 1 fikk elevene se tegningen av kvadratene inni hverandre med spørsmålene listet opp skriftlig under.

Elev A gjenkjente umiddelbart figurene som kvadrater, men på spørsmål om å forklare at det var kvadrater viste han at han ikke var kjent med begrepet rombe. Allikevel klarer han å begrunne at figuren må være et kvadrat. Han vil først bruke Pytagoras som bevis ved å se på sidelengder i trekantene, men jeg ber ham vente med Pytagoras. Da klarer han å begrunne det via vinkelsummen i en trekant. Videre finner han greit et uttrykk for siden s, og bruker første kvadratsetning til å komme opp med arealet av kvadratet uttrykt ved a og b. Nå har eleven kommet godt i gang og i stedet for å gjøre bare deloppgave d regner han seg raskt gjennom d, e og f og ender opp med to uttrykk for arealet av det hvite kvadratet og slik ha bevist Pytagoras' setning. Han jobber raskt, presist og effektivt med å manipulere de algebraiske uttrykkene og der han snubler får han korrigert seg selv. Her legger han ikke egentlig så nøye merke til hva oppgavene faktisk spør om, men når han kommer i gang fullfører han resonnementene tydelig og sikkert.

Eleven viser altså både representasjonskompetanse og symbol- og formalismekompetanse ved å sette opp de forskjellige uttrykkene for sidekanter og arealer i geometriske figurer samt å manipulere dem slik at de viser den ønskede sammenhengen som i dette tilfellet er Pytagoras' læresetning. Han er også så vidt innom resonnementskompetanse gjennom å svare på oppgavene, men er ikke helt tydelig på at det er å føre et bevis. Resonnementskompetanse kunne her vært brukt til å støtte opp og underbygge bevisførselen, mens det kunne vært vist tankegangskompetanse ved å stille spørsmål og gjøre avgrensninger for de forskjellige påstandene. Eleven er i liten grad innom disse mulighetene.

Elev B gjenkjenner også figurene som kvadrater, men kan ikke umiddelbart forklare sikkert hvorfor de er det, og har heller ikke kjennskap til hva en rombe er. Han bruker litt mer tid og trenger noe mer veiledning, men kommer også frem til en forklaring på hvorfor figurene må være kvadrater basert på vinkelsummen i trekanter. Han klarer greit å sette opp uttrykkene for sidelengdene og de forskjellige kvadratene. Når han kommer til å sette dem sammen og forenkle blir han litt mer usikker. Teknisk klarer han å løse det etter litt veiledning og det fremstår som at det er kommunikasjonskompetansen som svikter ham mest da han rett og slett er usikker på hva han skal frem til. Symbol- og formalismekompetansen og resonnementskompetansen får han vist ved å behandle uttrykkene riktig etter algebraiske regneregler. Kombinasjonen av svikt i kommunikasjonskompetansen og problembehandlingskompetansen gjør at han setter opp uttrykket som

"B: $0 = a^2 + b^2 + c^2$*"*

og deretter blir forvirret over at det uttrykket ikke er som han hadde tenkt seg.

Det fremstod ikke som om noen av de to elevene var vant til å føre og forklare et bevis, men de forstod gangen i oppgaven og alle delelementene.

Individuell oppgave 9b

På skole 2 hadde jeg åpnet oppgaven mer og ga elevene bare tegningen som utgangspunkt, mens spørsmålene ble stilt underveis etter behov. Målet var som før å se om vi kunne bevise Pytagoras.

Elev C kjente til formelen for Pytagoras' setning og kunne forklare denne på en grunnleggende måte både med ord og symboler. Hun fremstod litt usikker da hun skulle lage uttrykk for det store kvadratet, men med litt veiledning kom hun fram til uttrykket. Hun fikk vist den tekniske delen av symbol- og formalismekompetansen hvor hun blant annet ganget sammen to parenteser presist uten å bruke første kvadratsetning som hun sa hun hadde vært litt borti, men ikke hadde som idé å bruke. Det var en mulighet til å vise problembehandlingskompetanse og resonnementskompetanse ved å komme fram til hvordan arealet av det store kvadratet minus de fire trekantene skulle bli lik arealet av det lille kvadratet, men dette trengte hun veiledning for å få til. Hun fikk vist kommunikasjonskompetanse i denne veiledningen ved å raskt vise hvordan hun kunne sette opp de forskjellige delene og da hun forstod hva det var spurt om fikk hun satt opp et uttrykk for de fire trekantene som skulle subtraheres. Underveis i det videre resonnementet oppstår det noe ny forvirring. Hun fremstår som usikker på en ganske enkel utregning - $\frac{4*a*b}{2} = 2ab$, det er enten spørsmålsstillingen eller hennes oppfatning av hva oppgaven er som gjør det, for utregningen får hun ellers godt til både før og etter. Dermed er hun til slutt framme ved uttrykket som er målet, men uttrykker ikke tydelig selv at dette er beviset eller setningen hun skulle fram til.

Ved siden av kommunikasjonskompetansen fikk altså eleven vist symbol- og formalismekompetanse gjennom behandlingen av algebraiske uttrykk og representasjonskompetanse ved å uttrykke sidelengder og arealsammenhenger algebraisk. Resonnementskompetansen fremstod med lav dekningsgrad da hun kunne følge veien fram til beviset med veiledning fra lærer og oppgaven, men ikke selv aktivt kom fram til det.

Elev D gir uttrykk for at han kjenner Pytagoras læresetning fra før, men at det er en stund siden han har brukt den. Han begynner litt annerledes enn elevene før ham har gjort og starter med å uttrykke det store kvadratet som det lille kvadratet pluss de fire firkantene. Dette setter han opp et algebraisk uttrykk for. Deretter spør jeg ham om å sette opp et uttrykk for hele det store kvadratet uten å bruke c. Han blander først litt fremgangsmåter, men får satt opp at sidelengden i kvadratet er $a + b$ og når han etter veiledningsspørsmål som «Er det sånn man finner arealet av en firkant?» har kommet fram til riktig fremgangsmåte ser han at han har fått første kvadratsetning som han både husker hvilket svar gir og kan forklare hvorfor det blir slik. Når han har de to uttrykkene for arealet av kvadratet klarer han uten hint å forenkle uttrykket og ender opp på den vanlige formelen for Pytagoras' setning.

Symbol- og formalismekompetansen viser seg gjennom behandlingen av algebraiske uttrykk og han får vist representasjonskompetanse ved å sette opp de forskjellige uttrykkene for lengder og arealer. Kommunikasjonskompetanse får han vist både ved å oppfatte oppgaven og ved å gjøre endringer i sin egen framgangsmåte når det blir stilt spørsmål ved valg han har tatt. Måten han setter opp og setter sammen uttrykkene viser også en viss resonnementskompetanse.

Elev E kjenner Pytagoras' læresetning og forklarer innholdet i den raskt for meg. Når hun blir bedt om å forklare det kommer hun med et talleksempel som viser denne sammenhengen. Hun setter på spørsmål med en gang opp lengden av sidene i det store kvadratet og regner ut arealet ved hjelp av første kvadratsetning som hun husker. På spørsmål om hun kan bruke dette til å finne arealet av det lille kvadratet ved a og b vil hun umiddelbart bruke Pytagoras ved å si at fordi det kvadratet er c^2 så må det også være lik $a^2 + b^2$. Jeg ber henne derfor om å vise at det må være sånn i stedet for å bruke Pytagoras som begrunnelse. Hun finner ut at hun må trekke arealet av de fire trekantene fra arealet av det store kvadratet og finner med en gang en formel for dette, $4 * ab/2$. Etter dette blir hun litt upresis når hun skal forenkle uttrykket som kan tyde på at det er litt uklart for henne hva hun skal gjøre det, for så fort hun har oppfattet det er det tekniske ikke noen hindring for henne. Hun trekker dermed sammen uttrykket og ender opp med det ønskede resultatet $a^2 + b^2$.

Eleven har altså fått vist kommunikasjonskompetanse ved å oppfatte oppgaven og ta imot instruksjoner der hun var i tvil. Hun har vist representasjonskompetanse og symbol- og formalismekompetanse ved å sette opp og regne gjennom uttrykkene. Dessuten har hun vist tegn til tankegangskompetanse ved å forsøke å formulere et bevis basert på en formodning og noe modelleringskompetanse ved å se at hun kan sette opp de forskjellige algebraiske uttrykkene for å sammenligne arealer.

Både elev D og E vil bruke Pytagoras som formodning og viser dermed tankegangskompetanse, men ser ikke ut til å ha reflektert over at det i denne spesifikke konteksten blir en sirkelargumentasjon, og vi diskuterer heller ikke dette videre.

Elevene ser ut til å ikke være så vant til å føre beviser og konkludere med at de har kommet fram til et bevis, men når jeg leser gjennom intervjuene ser jeg også at intervjusituasjonen kunne lagt bedre til rette for at de selv skal nå konklusjonen. Underveis i oppgavene har jeg gjerne stilt oppfølgingsspørsmål og latt dem tenke selv hvis de har vært upresise. Hver gang de har kommet fram til det andre uttrykket for arealet av det lille kvadratet har jeg konkludert med at de har funnet beviset, i stedet for å stille dem spørsmål som gir dem mulighet til å ende på denne konklusjonen selv.

Individuell oppgave 10

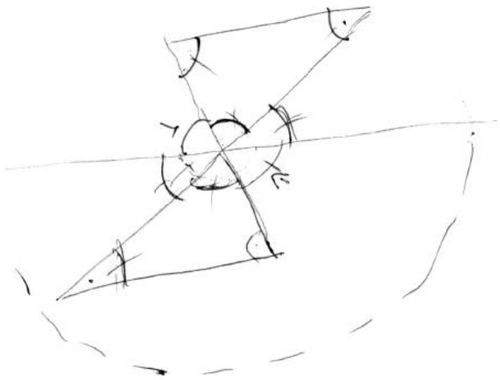
Oppgave 10 hadde potensial til å få elevene selv til å stille hvorfor- spørsmål og begrunne sammenhenger.

Elev C får se en grovt tegnet femkant og svarer at det er en pentagon. Jeg sier at en pentagon er en regulær femkant, og på spørsmål forklarer hun at en regulær femkant vil si at sidene er like lange. Sammen blir vi enige om at en regulær femkant også har like store vinkler.

På spørsmål om vinkelsummen svarer hun umiddelbart:

«C: den består jo av tre trekanter da. Gjør den ikke det?»

Jeg svarer med et spørsmål for å få henne til å forklare påstanden sin og hun deler femkanten i tre trekanter. Hun sier så at fordi vinkelsummen i en trekant er 180 grader kan man regne seg fram til vinkelsummen i femkanten ved å gange 180 med 3 som hun regner ut i hodet og helt riktig får til å bli 540. Videre snakker vi om vinkelsummen i firkanter og sekskanter. Hun husker fra før at vinkelsummen i firkanter er 360 grader, men bruker argumentet med å dele den også i trekanter, og tegner og deler sekskanten i trekanter for å finne ut hva vinkelsummen må være der. Jeg spør om hun ser noen sammenheng mellom vinkelsummen i mangekantene og om det går an å lage et generelt uttrykk for en n-kant. Hun foreslår at siden det er en n-kant kan det kanskje være $180 * (n + 2)$. Jeg ber henne teste den for trekant og hun ser da raskt at det ikke kan stemme. Deretter foreslår hun å trekke fra 2 i stedet og ender altså opp med $(n - 2) * 180$. Jeg bekrefter at det er riktig og spør om hun har sett formelen før, og det har hun ikke. Videre spør jeg om hvordan hun vet at vinkelsummen i en trekant er 180 grader. Hun svarer at hun har lært det og at dessuten har et kvadrat fire vinkler på 90 grader og er satt sammen av to trekanter. Jeg spør da om hun kan vite at det er sånn for alle firkanter, og peker på at argumentet hennes avhenger av påstanden om at vinkelsummen er 180 grader i trekanter. Hun er ikke kjent med noe bevis for denne påstanden så jeg kladder et eksempel på en trekant hvor jeg lager en linje parallell med en av sidekantene og forlenger de to andre sidene i trekanten:



Hun sier at jeg på en måte har speilet trekanten så jeg fullfører tegningen av en trekant også over den parallelle linja. På spørsmål svarer eleven at de to trekantene er like og har samme vinkelsum. Hun gjenkjenner de to toppvinklene, men kommer ikke i farten på begrepet. Samsvarende vinkler kommer hun heller ikke på, men bekrefter at hun er kjent med at de er like store. Med disse opplysningene resonnerer hun seg fram til at vinklene må være 180 grader til sammen, ettersom de til sammen dekker buen over den rette linja.

Elev C fikk vist problembehandlingskompetanse gjennom teknikken med å dele mangekantene i trekanter. Resonnementskompetansen, med lav dekningsgrad, ble også vist sammen med representasjonskompetanse og symbol- og formalismekompetanse da hun kom fram til uttrykket for vinkelsummen i en mangekant. Hun bruker tankegangskompetanse når hun forsøker å begrunne at vinkelsummen i en trekant må være 180 grader fordi et kvadrat består av to like trekanter. Hun får i siste del av samtalen vist enda mer kommunikasjonskompetanse ved bruk av fagbegreper og aktiverer resonnementskompetansen når hun fastslår at summen av de tre vinklene over den rette linja til sammen må være 180 grader.

Elev D svarer at figuren er en femkant og at vinkelsummen er «180 grader ganger tre altså 540». jeg spør hvorfor han mener den er 540 og han svarer at det er fordi en trekant har tre vinkler på 60 grader hver, altså 180 til sammen. Når jeg spør om alle trekanter har det svarer han «Nei, men vinkelsummen blir alltid 180 grader». Vi snakker videre om det og han vet også at vinkelsummen i en firkant er 360 grader og at det øker med 180 grader for hver ny kant i mangekanten, men har ikke noen forklaring på hvorfor det er sånn. Jeg ber ham om å tegne en firkant og da ser han at han kan dele den i to trekanter. Videre spør jeg om han da kan dele en femkant i tre trekanter, og han svarer at da må det være mulig, og etter å ha forsøkt får han det til. På spørsmål om han vet hva vinkelsummen i en n-kant blir svarer han at det er $180 * (n-2)$. Han begrunner det ved å bruke trekant som eksempel og si at man ser at mønsteret fortsetter på samme måte. Han regner på eget initiativ ut i hodet for firkant og femkant og på spørsmål for sjukant. Nå spør jeg om hvordan han vet at vinkelsummen i trekanter er 180 grader. Han sier at vinklene vil endre seg innbyrdes hvis man endrer størrelsen på en av dem, men har ikke noen forklaring på akkurat hvordan. Jeg tegner opp det samme eksempelet som jeg gjorde for elev C. Han oppgir å ha hørt om toppvinkler og samsvarende vinkler, men at han ikke har lært om det ordentlig. Han sier at figuren gir to like trekanter som er like store og har like vinkler. Jeg spør hva det betyr for de to toppvinklene, uten å bruke det begrepet, og han sier at de må være like fordi de er speilet. Jeg forteller ham da om at to av vinklene er samsvarende og han overfører dette til å si at de to andre må være det samme, og utleder fra dette at vinkelsummen må være 180 grader fordi de til sammen utgjør den rette linja.

Her ser det ut til at eleven kjenner formelen for vinkelsummen i en n-kant og bruker denne til å finne vinkelsummene i de aktuelle figurene. Dette blir en form for resonnementskompetanse når han tar utgangspunkt i formelen som formodning. Her var jeg ute etter tankegangskompetanse for å se om eleven kunne komme fram til formelen, men ettersom han allerede kjenner den og i liten grad ser ut til å ha reflektert over den blir det også vist lite tankegangskompetanse. Eleven får også aktivert resonnementskompetansen når han kommer fram til sammenhengen hos toppvinklene og de samsvarende vinklene samt at de til sammen må være 180 grader. Behandlingen av formler viser både symbol- og formalismekompetanse og representasjonskompetanse.

Elev E svarer med en gang at figuren hun får se er en femkant. På spørsmål om vinkelsummen svarer hun at vinkelsummen i hvert fall er 180 i en trekant, og 360 i en firkant og at det siste er fordi en trekant er halvparten av en firkant. Hun sier deretter at man må legge på en trekant til for å få vinkelsummen i en femkant og kommer til at det må være 540 grader. På spørsmål om en sekskant sier hun at hun da på samme måte må legge til enda en trekant. Når jeg spør hvordan det blir for en n-kant svarer hun

«E: En n-kant vil jo være antall trekanter ganger 180.»

Etter å ha svart på hvor mange trekanter det var i sekskanten og femkanten spør jeg henne hvor mange det blir i n-kanten og svarer kommer umiddelbart:

«E: I n-kanten vil det bli bli skal vi se $(n-2) * 180$*.»*

Jeg spør så om hvordan hun vet at vinkelsummen i en trekant er 180 grader og da svarer hun

«E: Det er bare noe vi har lært som man pugger.»

Jeg tegner opp det samme eksempelet som jeg har gjort for elev C og D. Elev E ser også på det som en speiling av trekanten. På spørsmål svarer hun at trekantene er like store, og er med på at de har samme form. Etter å ha tenkt seg om kommer hun opp med begrepet kongruens. Hun ser at linja som er parallell med den ene siden i trekanten representerer 180 grader og antar at det er en sammenheng med at trekantens vinkler til sammen dekker den buen. Hun ser at toppvinklene må være like store, men er ikke kjent med begrepet. Hun finner seks vinkler rundt linja som hun sier må være 360 grader til sammen, og ser at de består av tre par like vinkler. Dermed kommer vi sammen fram til at de tre forskjellige vinklene til sammen er 180 grader og må bare finne ut om de er like som de i trekanten. Jeg forklarer henne om at den ene vinkelen i trekanten har en samsvarende vinkel som er lik. Deretter finner hun den andre som er lik, og at størrelsen på de tre vinklene i trekanten derfor må utgjøre 180 grader til sammen.

Eleven aktiverer resonnementskompetansen både når hun kommer fram til at hun har to kongruente trekanter, når hun finner ut at toppvinklene er like og når hun bruker forklaringen av samsvarende vinkler til å finne den andre samsvarende vinkelen. Eleven får vist noe representasjonskompetanse og tankegangskompetanse når hun kommer fram til formelen for vinkelsummen i en n-kant. Hun viser også noe tankegangskompetanse ved å være med på beviset for vinkelsummen i en trekant, men med lav dekningsgrad da hun ikke peker det ut som bevis selv.

Gruppeoppgaver

Det var som nevnt i kapittelet om gjennomføring av intervjuene bare fire av de fem elevene som deltok på gruppeoppgavene. De fire elevene fikk gjort de samme tre oppgavene på de to skolene.

Gruppeoppgave 11

I den første gruppeoppgaven på skole 1 begynte elev A og B med å se gjennom oppsettet jeg hadde laget i regnearket. De viste kommunikasjonskompetanse gjennom å finne sammenhengen i regnearket ved å lese tekst og formler i celler, snakke sammen og forklare for hverandre og ved å stille spørsmål til meg. Elev A og B begynte med å gå gjennom oppsettet mitt punkt for punkt. Vi snakker om hvordan oppsettet ser ut og hva som er gjort i de forskjellige cellene. De forstår oppsettet greit og er med på både formler og utregninger som er gjort underveis. Det er noen begreper de ikke kjenner så godt, så det virker som de ikke har jobbet så mye med regnskap og valuta. Elev B er ikke sikker på hva valutakurs eller fortjeneste er og ingen av dem vet hva moms er selv om de har hørt om det før. Når de kommer til punktet hvor det er regnet ut pris for frakt og forsikring blir elev B usikker. Jeg har satt inn en utregning som gir totalprisen etter frakt og forsikring, mens han påpeker hva formelen skulle ha vært for å finne bare selve prisen for frakt og forsikring. Her får han hjelp av elev A som forklarer hva som er gjort og hvorfor slik at de blir enige om at det er riktig og de kan gå videre. Språket de bruker er uformelt, men effektivt. De bruker ikke nødvendigvis presise faguttrykk, men kommuniserer på en måte som gir dem en operasjonell forståelse og enighet. De håndterer formlene i cellene og finner en feil i oppsettet mitt som de får rettet opp før de går videre i gjennomgangen. I oppsettet er det brukt flere desimaler enn nødvendig. Vi snakker sammen om hvor mange desimaler det burde være, og de foreslår tre. Etter litt videre samtale viser det seg at de kjenner til at kroner deles inn i 100 øre, og de er med på at det dermed er to desimaler som gir mest mening i denne oppgaven. Når de skal endre antallet desimaler har de en effektiv måte å få merket alle radene slik at de får endret alle samtidig. Når de begynner på den neste delen av oppgaven som handler om hvorvidt de bør gjøre en handel hvor de kan selge racketen for 135 kr stykket blir de litt usikre. Elev B mener først at de vil tape penger til denne prisen, men etter at vi har snakket litt sammen kommer elev A fram til at fortjenesten jo er på 23 kr, og dermed mer enn differansen mellom tilbud og ønsket salgspris. De er nå med på at det kan gjøres justeringer for å gjøre handelen bedre for dem, men de viser forståelse for at elementer som moms og toll er utenfor deres kontroll å forsøke å endre. Vi snakker litt om at valutakursen kunne endre seg, og de får etter litt veiledning endret valutakursen til 1,2 og ser at det ville gjøre avtalen mye bedre for dem. Vi er enige om at det å vente på endring i valutakurs er usikkert og kan ta lang tid. Vi får snakket litt om å endre andre elementer som innkjøpspris og utsalgspris, og de redigerer sikkert regnearket fram og tilbake med forskjellige verdier i de ulike postene. Det fremstår som de er noe uvante med denne måten å angripe en oppgave på hvor man i stedet for å bare lage en fast beregning skal eksperimentere og utforske for å komme fram til ønskede resultat.

De viser god kommunikasjonskompetanse ved at de oppfatter forklaringene, kan hjelpe hverandre med de ukjente begrepene og klarer å bruke begrepene riktig i den videre gjennomgangen. Måten de setter inn, retter opp og bruker formler, cellereferanser og regnefunksjoner i regnearket viser god hjelpemiddelkompetanse. Elevene er innom problembehandlingskompetanse og modelleringskompetanse gjennom at de kommer opp med forslag til justeringer som bidrar til å komme fram til et for firmaet økonomisk gunstig resultat. De trenger ganske mye veiledning for å faktisk gjøre dette. Vi snakker dermed om kompetanser med ganske lav aksjonsradius all den tid de forstår og evner å gjøre det, men i liten grad kan ta initiativ til å gjøre det selv. De får vist modelleringskompetanse gjennom bruk av formlene i regnearket, men aksjonsradiusen er også her begrenset til å anvende det som er oppgitt heller enn å bruke egne formler og oppsett. Elev A viser god kompetanse i skjæringen mellom problembehandlingskompetanse og resonnementskompetanse når han oppdager feilen i oppsettet og retter den. Det kan sees på som problembehandlingskompetanse ved at han finner en presisjonssvikt og dermed får rettet resultatet, eller som resonnementskompetanse ved at han finner en gyldighetssvikt i gjennomgangen av oppsettet som har blitt presentert. Det tekniske nivået på hjelpemiddelkompetansen er god nok til å løse alle oppgavene de setter seg fore i arbeidet med denne oppgaven.

Elev C og E på skole 2 begynte med tilsvarende fremgangsmåte som A og B. De leste teksten, så på formlene, diskuterte utregningene og forklarte for hverandre samt stilte spørsmål til meg. På denne måten viste de kommunikasjonskompetanse ved å vise at de forstod oppsettet, fremgangsmåten og innholdet i regnearket. Jeg startet med å presentere oppgaven for elevene og spurte om de visste hva moms er. E svarte ja, og C svarte nei så jeg bad E forsøke å forklare det for C. Hun viser at hun kjenner til at det er noe som legges til prisen på en vare, at det vanligvis er en prosentsats, at denne varierer for forskjellige typer varer og at det er penger som betales til staten. Vi begynner å diskutere utgangspunktet i oppgaven og det viser seg at elevene ser for seg at de vil tape penger på å selge racketene til det oppgitte tilbudet fordi det er lavere enn utsalgsprisen som er beregnet i eksempelet. Vi tar derfor utgangspunkt i å se på om det er riktig at de taper penger med dette tilbudet. Elevene bestemmer seg for å gå gjennom eksempelet for å se hvordan det er satt opp og regnet ut. De liker ikke så godt mitt oppsett og lager en ny kolonne hvor de regner ut totalprisene etter hvert. Den opprinnelige kolonnen bruker de til å regne ut de forskjellige delprisene som frakt og forsikring, toll og moms. Jeg har vært litt lite helhetlig i måten jeg har satt opp eksempelet mitt på for at de skal måtte tenke litt. De følger stort sett greit oppsettet og gjør de nødvendige beregningene. Elev C blir usikker på utregningen som er brukt for å komme fram til innkjøpsprisen inkludert frakt og forsikring, men elev E forstår hvordan og hvorfor det er gjort og får forklart det for medeleven. Neste utfordring får de med valutakursen, de er uvant med at kursen er oppgitt for 1 krone i stedet for100, men forstår allikevel hvordan de skal regne videre. Elev B trekker fram at det vanligvis er valutaer som dollar og euro hvor kursen er oppgitt for bare en enhet. Neste punkt vi diskuterer kommer når jeg spør om antall desimaler som er brukt i regnearket. Elev B henviser til at det er vanlig med to desimaler i oppgaver på delprøve 2 på eksamen. I samtale kommer det fram at de mener svaret blir mer nøyaktig med flere desimaler, men at det kanskje ikke alltid er nødvendig. Vi snakker om myntenheter og de er kjent med at kroner delt opp i 100 øre, at ørene fortsatt brukes selv om vi ikke har dem i mynt lenger og endrer på bakgrunn av dette til to desimaler i svarene sine. Når de finner feilen i oppsettet mitt diskuterer de og stiller spørsmål for å komme fram til hva som er riktig, de argumenterer, ser på tallene og sammenligner hva som er gjort. De jobber seg gjennom det til de blir enige og retter tallene slik at summen blir riktig med frakt og forsikring. Hele tiden når de jobber og gjør utregninger holder de dialogen gående og ber hverandre om bekreftelser for å se at de er enige om fremgangsmåter og resultater, og på denne måten kommer de gjennom hele oppsettet.

Den neste deloppgaven knyttet til om de bør selge racketene til 135 gjør elevene veldig usikre. De trenger litt veiledning for å skille ut hvor mye fortjeneste de har beregnet seg slik at de kan vurdere lønnsomheten i det nye tilbudet. De har tydelig ikke helt oversikt over hva som er forskjellen mellom faktiske utgifter og fortjeneste, men kommer til slutt fram til at de fortsatt kan tjene penger selv om salgsprisen er lavere enn de hadde kalkulert med at var ønskelig. Videre ber jeg dem vurdere hvilke poster i oppsettet som faktisk kan endres og ikke. De kommer fram til at toll og moms er utenfor deres kontroll, men at for eksempel kurs kan endre seg. De argumenterer litt for at kurs er såpass usikkert at det vil være vanskelig å spekulere i. Elevene er inne på at det kan være mulig at prisen blir annerledes om de finner et annet sted å handle fra, men går ikke særlig videre med resonnementet. Jeg avslutter deretter oppgaven for å få tid til de to siste oppgavene jeg har forberedt.

Elevene fikk her vist god kommunikasjonskompetanse, de snakket godt sammen og var tydelige om hva de skulle gjøre. De behersket formler og funksjoner i regnearket og fikk dermed vist god hjelpemiddelkompetanse. De får vist god problembehandlings- og resonnementskompetanse når de finner og retter opp feilen som var gjort i oppsettet i regnearket. De viser god modelleringskompetanse i gjennomgangen av oppsettet som de også justerer slik at de selv synes det gir et mer oversiktlig oppsett. Ved den sikre bruken og gjennomgangen av formler får de også vist representasjonskompetanse.

De viser hjelpemiddelskompetanse med god aksjonsradius når de justerer oppsettet de har fått utdelt og lager en ny utgave som de mener gir en mer oversiktlig fremstilling.

Gruppeoppgave 12

Elev A og B leser oppgaven og begynner å undersøke tallene for å se om de finner en sammenheng. Elev B finner et forhold i et tallpar og lanserer det som en teori for sammenhengen. På oppfølgingsspørsmål om dette stemmer for de andre eksemplene, sjekker han, finner at det ikke stemmer, og avviser sin egen teori. Jeg gir dem hintet om to og to verdier som hører sammen. De foreslår at det kan være algebra eller ligninger og vi snakker litt om det før elev A kommer på at dette er noe han kjenner fra funksjoner. Han foreslår videre at de da kan tegne en graf. De bestemmer seg for at de skal kalle Celsiusgradene for x-verdier og Fahrenheitgradene for y-verdier. De begynner å skrive inn i algebrafeltet, men legger inn en og en verdi som linjer og finner skjæringspunktene mellom linjene. Jeg tenker at dette kan bli rotete og prøver å lede dem til å se sammenhengen mellom skjæringspunktene de finner og verdiene de legger inn for å få linjer. De er kjent med at punktene de finner kalles koordinater, men må ha litt hjelp for å komme til at de bare kan skrive inn koordinatene og dermed få punktene direkte. Når de har gjort dette ser elev A at punktene ikke ligger på linje. Jeg ber dem sjekke koordinatene sine med opplysningene i oppgaven og det viser seg at de har tastet feil på et av punktene. De retter opp dette og nå mener de at det kan tegnes en rett linje gjennom dem. De forsøker det, og tegner en linje gjennom de ytterste punktene som går gjennom alle fire punktene de har laget. De sier at dette betyr at det er en fast sammenheng mellom verdiene, og på spørsmål svarer de at dette må være en lineær funksjon. De forsøker å lese av konstantleddet, som de finner, og stigningstallet som de er nære å finne, ved å se på grafen. Etter et hint om å se i grafikkfeltet finner de funksjonsuttrykket, men de blir usikre av Geogebras standardinnstilling som viser det som $ax + by = c$. De er på sporet av hvordan de kunne regnet seg fram til å få det på en form de hadde vært mer vant med, men får det ikke helt i mål. Når de får hjelp med å endre uttrykket i innstillingene blir de mer fornøyde og gjenkjenner stigningstallet og konstantleddet selv om de ikke kom på de eksakte begrepene selv. Nå klarer de å lese av grafen for å finne sammenhengen mellom de to temperaturskalaene både manuelt og ved hjelp av funksjonene i Geogebra.

Elevene viser med en gang representasjonskompetanse og modelleringskompetanse ved å komme fram til at sammenhengen mellom temperaturskalaene kan fremstilles ved hjelp av en graf. De behersker hjelpemiddelet Geogebra tilfredsstillende til å få løst oppgaven, men det er noe svikt i representasjonskompetansen i at de velger en tungvint framgangsmåte for å fremstille verdiene i koordinatsystemet. Derimot er representasjonskompetanse bedre når de viser at de kjenner til hvordan funksjonens stigningstall og konstantledd påvirker utseendet på grafen. Symbol- og formalismekompetansen viser ikke det høyeste tekniske nivået når de blir usikre av en uvant framstilling av funksjonsuttrykket, men med et mer kjent format kommer de tilbake på sporet og får aktivert problembehandlingskompetansen og løst oppgaven.

Elev C og E kjente til begge temperaturskalaene fra før, men var ikke kjent med sammenhengen mellom dem. De begynte å se på noen av tallene, og presenterte en teori om at forskjellen på de to var åtte grader. Denne teorien avviste de raskt etter å ha undersøkt den for noen av eksemplene. Elevene kom selv opp med ideen om at dette kunne sees på ved hjelp av en graf:

«L: Hvis man har to og to verdier som hører sammen er det noe man kan gjøre med dem da? C: To og to verdier man kan sette det opp i en graf, jeg vet ikke om det, L: Ja, kan man ikke det C: Ja, en tabell eller en graf E: En tabell eller graf»

De bestemmer seg for å kalle Celsius-verdiene for x, og Fahrenheitverdiene for y. Først tegner de inn hver verdi for seg som linjer, men etter et tips tegner de dem inn som koordinater i stedet. Elevene viser at de både kan sette inn koordinatene ved å skrive inn verdiene i algebrafeltet og ved å plassere punktet direkte i koordinatsystemet med musepekeren. Når de har plassert punktene gir elev E uttrykk for at punktene ser ut til å ligge på en rett linje. De bruker Geogebras funksjon for linje gjennom to punkter og plasserer linja gjennom det ytterste punktene de har lagt inn. Dermed ser de at alle punktene ligger på samme rette linje. De forklarer at det betyr at det er en jevn sammenheng mellom verdiene og at denne sammenhengen er uttrykt ved en lineær funksjon. Elev B foreslår at de kan finne konstantleddet og stigningstallet til funksjonen. Med et hint finner de formelen i algebrafeltet, men blir litt usikre fordi Geogebra har som standardinnstilling å skrive formelen som $ax + by = c$. Jeg spør hva de hadde ventet og får dette til svar:

«I: for vanligvis i en lineær funksjon så er det jo funksjonen av x er lik stigningstallet. B: Ja, som er et eller annet sånn $5x\ +$ *. I: Ja, pluss konstantleddet. B: Eller minus E: Eller minus.»*

De får litt hjelp med å endre visningsmåte i Geogebra, og nå kan de forklare hva stigningstallet til funksjonen er. Med dette på plass klarer de å bruke grafen sin til å finne verdier i den ene temperaturskalaen når de kjenner verdier i den andre ved å lese av grafen manuelt og ved hjelp av funksjonene i Geogebra.

Elevene viser resonnementskompetanse når de først presenterer en løsning som de så kommer fram til at ikke kan være riktig. Når de videre får fremstilt sammenhengen grafisk viser de både modellerings- og representasjonskompetanse. Elevene viser god hjelpemiddelkompetanse ved at de kan plassere verdier i Geogebra på forskjellige måter og bruke funksjonene i programmet til å komme fram til et funksjonsuttrykk for linja. Symbol- og formalismekompetansen er stort sett god, men også disse elevene fikk en utfordring da funksjonsuttrykket kom på en uvant form. Representasjonskompetansen var derimot god da de med et mer vant funksjonsuttrykk kunne finne stigningstall og bruke grafen til å lese av korresponderende verdier i de to temperaturskalaene.

Gruppeoppgave 13

Elev A leser oppgaven høyt, og elev B responderer umiddelbart at noen har gjort noe galt. Vi blir enige om å gå gjennom uttrykket linje for linje for å avdekke hva som er gjort og om mulig finne feilen. De bytter på å beskrive prosessen og forklarer tydelig hvilke operasjoner som er gjort fra linje til linje. Da de kommer til $(a-b)(a+b)=b(a-b)$ ser elev A med en gang hva som er gjort og forklarer det med at de har brukt konjugatsetningen. Begge er enige om det er den som er brukt og at operasjonen er lovlig. Elev a forklarer at neste ledd er at de har delt på $(a-b)$ på begge sider og er også den som forklarer hvordan de har byttet ut a med b i uttrykket:

«A: fordi a og b har lik verdi.»

Elevene blir nå usikre. De har ikke funnet noen feil i uttrykket, men vil ikke akseptere at $2=1$. Jeg foreslår at det er flere muligheter, den ene at uttrykket er riktig, og A svarer:

«A: Eller at vi ikke fant feilen.»

Elev B foreslår at de kan sette inn tall i uttrykkene og regne gjennom for å se om det fortsatt stemmer. Etter litt diskusjon bestemmer de at elev A skal sette inn 4 som verdi for variablene, mens elev B skal sette inn 3. De to regner seg greit gjennom leddene. Da de kommer til linja hvor de skal dele på $(a-b)$ på begge sider blir elev A usikker. Han henviser til regnerekkefølgens krav om å løse opp parentesen før man deler. Her får han dessverre litt dårlige tilbakemeldinger fra intervjueren. Jeg tenker på det generelle uttrykket $(a-b)$ som i seg selv ikke kan forenkles og dermed helt fint kan deles på, men her er jo nettopp poenget at differansen mellom dem er 0, og dermed ikke kan brukes. Her kunne de kommet nærmere løsningen tidligere med litt bedre tilbakemeldinger. Allikevel oppdager det to elevene at her er det noe som ikke stemmer, og de får verdier som ikke er riktige etter denne operasjonen. Elev A oppdager at differansen mellom a og b er 0, og sier at:

«A: 0 delt på 0 det går vel ikke an?»

De kjenner ikke egentlig regelen om å dele på 0, men ser både av hva som skjer med verdiene og i samtale om den spesifikke oppgaven og sammenhengen mellom ganging og deling at det er operasjonen hvor det deles på 0 som er gal og som dermed gir det gale resultatet.

Elevene viser gjennomgående god symbol- og formalismekompetanse i gjennomgangen av uttrykket linje for linje. Det er resonnementskompetanse i gjennomgangen av linjene og vurdering av de forskjellige operasjonene. Elev A er innom tankegangskompetanse da han oppdager at det er delt på 0, men han kommer ikke helt i mål med argumentet for at det gjør uttrykket ugyldig. Han prøver seg også på noen spørsmål begrunnet med regnerekkefølgen, men heller ikke her holder argumentet hans helt. Til slutt finner de punktet hvor feilen oppstår og får dermed vist problembehandlingskompetanse som følge av den presise symbol- og formalismekompetansen.

Elev C og E er heller ikke med på at $2 = 1$ og går i gang med å gå gjennom oppsettet linje for linje. De bytter på å peke ut hvilke operasjoner som er gjort og bekrefter hverandres uttalelser. Sammen forteller de at konjugatsetningen er brukt til å faktorisere uttrykket de har foran seg. De følger også operasjonen med å forkorte ved å dele på $(a - b)$ på begge sider, men mot slutten av oppsettet blir elev C i tvil. Hun forstår ikke overgangen fra $a + b = b$ til $b + b = b$, og elev E deler undringen. Jeg ber dem se på hva de startet med, og da følger elev B resonnementet og dermed forstår også elev C det. De finner ingen feil i operasjonene som er gjort, men vil ikke godta at $2 = 1$. De diskuterer litt for å forsøke å finne noe som ikke stemmer, men kommer ikke opp med noen gode ideer. Jeg foreslår at de setter inn en tallverdi for a og b og forsøker å regne seg gjennom uttrykket. De er med på det og prøver med å sette inn 2. De regner seg greit gjennom helt til de kommer til forkortingen.

«C: Det er ja det er en del stryking der og og så er det 2-2 under den første og 2-2 under den andre. Så har de strøket den. E: Da står de igjen med 2=2+2. Oj. Over 1. C: Men det er jo over 1 på den andre og da. Det gir jo ikke. E: Ja, da har vi fått. C: At 4= det gir ikke mening. E: $4 = 2$ *der er det det dobbelte.»*

De oppfatter hvor det går galt, men de klarer ikke å identifisere den ulovlige regneoperasjonen. Vi snakker litt sammen om det, og ved hjelp av et eksempel er de enige i at det ikke gir mening å dele på 0, men de var ikke kjent med denne regelen fra før.

Elevene viser resonnementskompetanse og symbol -og formalismekompetanse når de følger framgangsmåten i det angivelige beviset. De kan forklare hvilke regneoperasjoner som er gjort fra linje til linje og forklare hvorfor de er riktige. De viser også resonnementskompetanse og problembehandlingskompetanse ved å gå gjennom med et konkret talleksempel. De finner dermed fram til hvor feilen skjer. Ettersom de ikke er kjent med at det ikke er lov å dele på 0 klarer de ikke å konkludere med hvorfor beviset er feil uten hjelp.

Elevenes kompetanse

Basert på det jeg har funnet i gjennomgangen av intervjuene og hvordan elevene har løst oppgavene de har fått, har jeg laget en kompetanseprofil for hver elev. I disse profilene sammenfatter jeg hvilke kompetanser elevene fikk vist og analyserer dem videre ved hjelp av begrepene aksjonsradius, dekningsgrad og teknisk nivå. Disse kompetanseprofilene danner så utgangspunktet for drøftingen av hva som kjennetegner elevenes kompetanse og i hvilken grad den kan sies å være fremtidsrettet.

Kompetanseprofiler

I gjennomgangen av oppgavene har jeg presentert hva elevene gjorde da de jobbet med de ulike oppgavene og sett på hvilke kompetanser de fikk vist gjennom dette arbeidet. I kompetanseprofilene går jeg videre til de neste nivåene i Malteruds analysemodell, kondensering og sammenfatning. Jeg vil nå gå nærmere inn på de ulike kompetansene, vurdere dekningsgrad, aksjonsradius og teknisk nivå samt se på kompetansenes duale karakter, altså i hvor stor grad den undersøkende eller produktive siden ved kompetansen har kommet til syne i elevenes arbeid.

Kompetanseprofil elev A

Elev A gjorde individuell oppgave 1-8 og 9a samt at han gjorde gruppeoppgave 11, 12 og 13 sammen med elev B.

Etter gjennomgangen av oppgavene kom jeg til at eleven hadde vist disse kompetansene:

Tankegangskompetanse: Eleven får ikke vist mye tankegangskompetanse gjennom oppgavene han har jobbet med. Han er innom det når han oppfatter oppgavens problemstilling i oppgave 2, når han avviser at et kvadrattall kan være negativt i oppgave 5 og når han trekker fram det å dele på 0 som ugyldig operasjon i oppgave 13. I oppgave 8 er tankegangskompetansen han får vist på lavt teknisk nivå når han ikke leter i mønstrene i primtallene, men bedre når han stiller spørsmålet om oppgaven kan løses. Denne kompetansen har lav aksjonsradius. Eleven er innom den i forskjellige oppgaver og emner, men i de fleste oppgaver får han ikke vist den. Dekningsgraden er heller ikke høy, eleven berører kompetansen, men følger ikke opp spørsmålene og undringene sine aktivt. Det er i svært liten grad den produktive delen av tankegangskompetansen som kommer fram i elevens oppgaver, og det må dermed sies at dette er en kompetanse vi får se lite av hos eleven.

Problembehandlingskompetanse: Eleven får vist problembehandlingskompetanse ved å komme fram til riktige løsninger på varierte oppgaver. Han viser denne kompetansen tydelig i både oppgave 1-4, 8 og 11. Det er et bra teknisk nivå på problembehandlingskompetansen og også aksjonsradiusen må sies å være god all den tid han aktiver den innenfor en rekke deloppgaver. Det er også ved flere tilfeller den produktive siden ved problembehandlingskompetansen som kommer fram i elevens arbeid. I noen tilfeller kan løsningene ha sammenheng med at oppgaveformen ligner på noe han har gjort før og dekningsgraden kan ikke sies å være like fremtredende som de andre aspektene, ikke minst fordi han må ha hint knyttet til flere oppgaver.

Modelleringskompetanse: I tillegg til å vise modelleringskompetanse om enn med mer undersøkende enn produktiv virksomhet i oppgave 11 og 12 som var best egnet for dette, er eleven innom denne kompetansen i oppgave 3 gjennom vekslingen mellom verdiene for sentralmål og bruken av dem som enkeltverdier og del av tabell for en gruppe. Han viser høyt teknisk nivå på denne kompetansen når han kommer opp med forslag til endringer i oppsettet ved løsningen av oppgave 11. Det er litt vanskelig å vurdere aksjonsradiusen all den tid det ikke var enkelt å anvende denne kompetansen i så mange oppgaver, men det må sees som positivt at han fikk gjort det i de oppgavene hvor det var ventet. Dekningsgraden kan ikke sies å ha vært veldig stor da situasjonene han har modellert ikke var av de mest krevende. I denne kompetansen kom den produktive siden ved kompetansen til syne i flere oppgaver.

Resonnementskompetanse: Eleven viser resonnementskompetanse når han ser på de to uttrykkene i oppgave 2 og konkluderer med at $x = 5$ basert på forskjellen på dem. I oppgave 5 bruker han denne kompetansen til å avvise at oppgaven kan få et gyldig svar fordi:

«A: ingenting i annen vil jo være minus».

Resonnementet stemmer når vi ser bort fra komplekse tall, men det er en feil i utregningen. Eleven finner selv denne feilen når han blir bedt om å regne gjennom uttrykket og ser da at oppgaven har gyldig svar. I oppgave 9 får han også vist denne kompetansen når han kommer fram til det avsluttende uttrykket som er målet for beviset. Dog uten selv egentlig å være klar over at han har funnet beviset. I oppgave 11 får han vist resonnementskompetansen når han oppdager en feil i det utdelte oppsettet. Aksjonsradiusen til kompetansen kan ved første øyekast se ganske bra ut ettersom han har vist den i flere forskjellige oppgaver, men det kan innvendes at i tre av dem er det i forbindelse med forståelse av algebraiske uttrykk. Det mest produktive uttrykket for denne kompetansen er slutningen i oppgave 5 som riktignok er basert på en regnefeil. Det at flere av disse ideene kommer fra ham selv uten spesifikke hint vitner om en god dekningsgrad. Det er også godt teknisk nivå uten å være mye mer enn man kan vente å finne hos en ungdomsskoleelev.

Representasjonskompetanse: Eleven får vist denne kompetansen ved å uttrykke oppgave 4 som en ligning. Han gjenkjenner en annen ligning som andregradsligning og begynner å forklare denne med en skisse av en parabel. I oppgave 6 veksler han greit mellom å uttrykke tall som brøk, heltall og potens. Det ser også ut til at han viser denne kompetansen godt i oppgave 7 hvor han uten større problemer sammenligner volumer ved hjelp av algebraiske uttrykk. Det kan virke som dette er en type oppgave han har vært borti før. I oppgave 9a uttrykker han sidelengder med algebraiske uttrykk. I oppgave 11 fremstår kompetansen litt varierende. Det er bra at han trekker fram graf som mulig måte å uttrykke sammenhengen på, men usikkerheten knyttet til å plassere linjer i stedet for koordinater er mindre imponerende. Måten han har vist resonnementskompetanse kan også være et argument for at han har vist god representasjonskompetanse. Denne kompetansen går mye igjen og må sies å ha stor aksjonsradius. Dekningsgraden og det tekniske nivået er også høyt da det ikke er mangler i denne kompetansen som stopper ham i noen av oppgavene.

Symbol- og formalismekompetanse: Eleven viser gjennomgående denne kompetansen gjennom stødig behandling av ligninger og algebraiske uttrykk. Han behersker reglene for å gjøre om og forenkle disse uttrykkene som redskap for å løse oppgaver. Det tekniske nivået er gjennomgående høyt, og det samme kan sies om dekningsgraden da det ikke er begrensninger i denne kompetansen som gir ham utfordringer. Eleven viser god aksjonsradius gjennom å bruke denne kompetansen i en rekke forskjellige oppgaver.

Kommunikasjonskompetanse: Eleven viser kommunikasjonskompetanse gjennom å oppfatte problemstillinger, ved å kunne formidle hvordan han vil løse oppgaver og ved å samtale med elev B om løsningen av samarbeidsoppgaver. Kommunikasjonskompetansen har ikke høyt teknisk nivå eller dekningsgrad da det er sviktende presisjon og begrepsbruk. Gjennomgående er formuleringene mer egnet til forståelse hos noen som er kjent med de samme begrepene og problemstillingene enn til å formulere matematikk presist. Aksjonsradiusen er god i den forstand at kompetansen vises innenfor flere områder, men da med lav dekningsgrad og teknisk nivå.

Hjelpemiddelkompetanse: Denne kompetansen vises bare fram i oppgave 11 og 12 der den framprovoseres gjennom at oppgavene er spesielt tilrettelagt for bruk av hjelpemidler. Dekningsgraden er moderat, hjelpemidlene brukes riktig, men med begrensninger i omfang og ikke med det høyeste tekniske nivået. Hjelpemidlene blir brukt på få oppgaver, men all den tid det er de eneste hvor hjelpemidler er godt egnet må det sies at akjsonsradiusen er god.

Kompetanseprofil elev B

Elev B gjorde individuell oppgave 1-5 og 8-9. Eleven gjorde gruppeoppgave 11, 12 og 13 sammen med elev A

Tankegangskompetanse: Eleven viste tankegangskompetanse i to av oppgavene. Kompetansen var mer undersøkende enn produktiv og var ikke på et høyt nivå. Noe av kompetansen kom også til syne i oppgave 8 da eleven lette etter tallmønstre, men totalt var dette en kompetanse eleven fikk vist lite av. Få forekomster på enkle problemstillinger vil si at det ble vist lav dekningsgrad og aksjonsradius.

Problembehandlingskompetanse:

Ved å komme fram til problemstillingen og løse oppgave 2 får eleven vist denne kompetansen med en viss dekningsgrad og teknisk nivå. Det at han får løst oppgave 1 og 4 er eksempler på det samme, men med lavere dekningsgrad og i skjæringspunktet til symbol- og formalismekompetansen som jeg skal komme tilbake til. Han får også vist kompetansen med begrenset dekningsgrad i oppgave 5 hvor han finner fremgangsmåten, men må ha hjelp til å komme helt fram til løsningen. Bruken av grafen for å komme fram til svaret på oppgave 12 er også et eksempel på problembehandlingskompetanse. Aksjonsradiusen må sies å være god da han får vist kompetansen i flere forskjellige oppgaver, men både dekningsgrad og teknisk nivå er enklere.

Modelleringskompetanse: Denne kompetansen får eleven vist både i oppgave 3 hvor han tar utgangspunkt i en tabell og sorterer tallene for utregning. Han viser også kompetansen gjennom bruken og justeringen av formlene i oppgave 11 og når han får fremstilt sammenhengen mellom temperaturskalaene i oppgave 12 grafisk. Aksjonsradiusen er god da han får vist kompetansen de fleste steder hvor det er aktuelt, men verken teknisk nivå eller dekningsgrad er veldig fremtredende i elevens arbeid.

Resonnementskompetanse: Eleven viser resonnementskompetanse i oppgave 2 når han kommer fram til at verdien av en faktor må være null for å få riktig løsning. Dette bruker han til å løse oppgaven både med innsetting og hoderegning. Han henter også opp igjen innspill fra intervjuer i denne oppgaven til å løse oppgave 4. I oppgave 9a bruker han resonnementskompetansen til å gå gjennom leddene i oppgaven algebraisk og holder tråden i det matematisk resonnementet. Dette er nok et eksempel på at eleven viser kompetanse som overlapper med symbol- og formalismekompetanse. Til slutt følger eleven gangen i det påståtte beviset og regneoperasjonene i oppgave 13. Aksjonsradiusen til denne kompetansen er god da den blir vist i flere forskjellige oppgaver. Derimot er ikke dekningsgraden så stor da han stort sett kan følge resonnementer selv om han kommer med et eget resonnement i oppgave 2. Det tekniske nivået på kompetansen er i tråd med det man må kunne forvente på høyt nivå på ungdomsskolen. Det er stort sett den undersøkende delen av kompetansen vi får se.

Representasjonskompetanse: Representasjonskompetansen blir vist i flere oppgaver gjennom veksling mellom tall, algebraiske uttrykk, tabeller og sammenhenger mellom verdier og grafer. Kompetansen har slik sett god aksjonsradius, god dekningsgrad gjennom at det brukes på forskjellige aspekter ved kompetansen som når han argumenterer med at det er kvadratroten som skal opphøyes i annen i oppgave 5. Vi får her se godt teknisk nivå og eksempler på både undersøkende og produktiv del av kompetansen.

Symbol- og formalismekompetanse: Denne kompetansen kommer tydelig frem i flere oppgaver. Eleven setter opp og løser oppgave 1 og 4 som ligning, manipulerer og løser ligningssettet i oppgave 2 selv om han her får en utfordring når han har negative fortegn på begge sider av likhetstegnet. Både i oppgave 5 og 9a bruker han algebra presist. Han er også med på fremstillingen av funksjonsuttrykket i oppgave 12 selv om den første utgaven han ser av det er på en litt uvant form som får ham til å nøle. Denne kompetansen har god aksjonsradius gjennom å bli vist fram i flere oppgaver. Den har god dekningsgrad gjennom at han både kan lese, analysere og regne ved hjelp av denne kompetansen. Det tekniske nivået er også stort sett høyt for en ungdomsskoleelev med unntak for uttrykket med negative fortegn. Denne kompetansen blir også vist fra både sin undersøkende og produktive side.

Kommunikasjonskompetanse: Eleven fikk best vist kommunikasjonskompetansen da han i oppgave 4 brukte en fremgangsmåte han nettopp hadde blitt presentert for til å finne essensen i oppgaven. Dessuten uttrykte han problemstillingen i oppgave 8 om enn med et mer hverdagslig enn matematisk språk. Kompetansen ble også vist gjennom å oppdage og formulere problemstillingen i oppgave 1 og til å bruke innspill til å gjøre rettelser i oppgave 3. Aksjonsradiusen er god da kompetansen fremkommer i varierte oppgaver, men mangler litt på dekningsgrad da det mangler litt på presist matematisk språk og vansker med problemstillingen i oppgave 9. Det tekniske nivået kunne også blitt vist som høyere med mer bruk av matematiske begreper. Det er kompetansens utforskende karakter som kommer tydeligst frem.

Hjelpemiddelkompetanse: Hjelpemiddelkompetansen blir vist gjennom bruk av regneark i oppgave 11 og Geogebra i oppgave 12. Eleven viser god kompetanse når han bruker regnearket, men fremstår noe usikrere i bruken av graftegner. Det kan vanskelig sies å ha blitt vist stor aksjonsradius all den tid kompetansen bare fremkommer i to oppgaver, men det er heller ikke spesielt aktuelt i de andre oppgavene. Både dekningsgrad og teknisk grad varierer med hjelpemiddelet som er brukt. Denne kompetansen blir særlig vist fra det produktive aspektet.

Kompetanseprofil elev C

Elev C gjorde individuell oppgave 5, 6, 9 og 10. Eleven gjorde gruppeoppgave 11, 12 og 13 sammen med elev E

Tankegangskompetanse: Eleven får vist tankegangskompetanse når hun forklarer at vinkelsummen i en trekant er 180 grader og at dette kan forklares ved at et kvadrat som er 360 grader består av to trekanter. Dette er kompetanse på moderat teknisk nivå og aksjonsradiusen må sies å være lav da denne kompetansen ikke vises i andre oppgaver. Dekningsgraden er det lite jeg kan si om da jeg observerer for lite av denne kompetansen.

Problembehandlingskompetanse: Eleven får vist problembehandlingskompetanse når hun avdekker feilen i oppsettet i regnearket i oppgave 11 og får rettet opp denne. Dette er kompetanse på et godt teknisk nivå. I oppgave 9b har hun muligheten til å bruke problembehandlingskompetansen, men her må hun veiledes for å komme fram til hvordan hun skal sette opp uttrykket. Dermed er både dekningsgrad og aksjonsradius liten eller ikke vist for denne elevens problembehandlingskompetanse. Der hun viser den er den både produktiv og undersøkende.

Modelleringskompetanse: Modelleringskompetansen til eleven kommer fram i to av gruppeoppgavene. Først når det to elevene får justert oppsettet mitt og lager sitt eget oppsett som de mener illustrerer situasjonen bedre, så når de bestemmer seg for at de kan bruke funksjoner og grafer til å vise sammenhengen mellom temperaturskalaene i oppgave 12. Kompetansene er vist med godt teknisk nivå og både aksjonsradius og dekningsgrad er positive med tanke på at det er vist kompetanse i to oppgaver og i to ganske forskjellige situasjoner. Det er mest den undersøkende karakteren ved kompetansen som kommer fram selv om det er litt av den produktive i oppgave 11.

Resonnementskompetanse: Eleven får vist resonnementskompetanse i flere oppgaver. Først ved å komme til at en faktor må ha verdi 0 for å få produkt 0 i oppgave 5. Videre når hun retter sin egen feil etter oppfølgingsspørsmål i samme oppgave. I oppgave 6 viser hun en viss grad av kompetansen i forklaringen av at $n^0 = 1$, men med lav dekningsgrad ettersom hun følger beviset, men ikke helt utleder det selv. I oppgave 10 får hun vist kompetansen med godt teknisk nivå når hun med utgangspunkt i en formel regner ut vinkelsummen i en femkant. Videre viser hun kompetansen både ved å finne og rette feilen i oppgave 11 og ved å avvise et galt løsningsforslag i oppgave 12. Hun viser god resonnementskompetanse ved gjennomgangen av argumentene og operasjonene i oppgave 12, men kommer ikke helt i mål med det på grunn av manglende kjennskap til at man ikke kan dele på 0. Kompetansen er vist med god aksjonsradius, dekningsgrad og teknisk nivå og med elementer av både undersøkende og produktiv karakter.

Representasjonskompetanse: Representasjonskompetansen til eleven viser seg gjennom vekslingen mellom heltall, brøker og potenser i oppgave 6 og bruk av algebraiske uttrykk for sidelengder og arealer i oppgave 9b. Hun kommer også opp med et uttrykk for vinkelsum i oppgave 10. Bruken av graf for å løse oppgave 12 er et eksempel på representasjonskompetanse av produktiv karakter. Aksjonsradiusen er god ved at kompetansen blir vist i flere forskjellige oppgaver. Dekningsgraden er også god da det er flere av representasjonene som kommer på eget initiativ. Det blir vist kompetanse av både undersøkende og produktiv karakter.

Symbol- og formalismekompetanse: I en rekke forskjellige oppgaver får eleven vist symbol- og formalismekompetanse og det er dermed vist god aksjonsradius. Det er særlig gjennom bruk og utregning av algebraiske uttrykk og oppgaver i oppgave 5, 6, 9b og 10. Litt utfordring da hun møtte på en uvant formulering av funksjonsuttrykket i oppgave 12, men høyt teknisk nivå i gjenkjennelsen av at konjugatsetningen var brukt til faktorisering i oppgave 13. Dekningsgraden er også god da det er mye selvstendig bruk av kompetansen, og det er eksempler på kompetanse med både undersøkende og produktiv karakter.

Kommunikasjonskompetanse: Gjennom forståelse av oppgaver og begreper og god samtale på gruppeoppgavene får eleven vist kommunikasjonskompetanse med god aksjonsradius. Både oppsett og forklaring i oppgave 9b og bruk av forståelse og fagbegreper i oppgave 10 er av bra teknisk nivå. Ellers er det gjennom hverdagsspråk og muntlig tone litt å utsette på dekningsgrad og teknisk nivå og det er mest den undersøkende karakteren ved kompetansen som blir vist.

Hjelpemiddelkompetanse: Denne kompetansen blir vist ved bruk av formler og funksjoner i regneark og ved å vise nødvendig kjennskap til funksjoner i Geogebra. Aksjonsradiusen er god da hun bruker hjelpemidlene slik det er lagt opp til, men teknisk nivå og dekningsgrad har noen mangler i bruken av Geogebra. Her er det kompetanse av både undersøkende og produktiv karakter som blir vist.

Kompetanseprofil elev D

Elev D gjorde individuell oppgave 2, 5, 6, 9 og 10. Elev D fikk ikke vært med på gruppeoppgavene. Han har dermed i mindre grad enn de andre hatt mulighet til å vise kommunikasjonskompetanse, modelleringskompetanse og hjelpemiddelkompetanse. Jeg velger allikevel å kommentere hjelpemiddelkompetansen hans med tanke på at han hadde anledning til å velge å bruke hjelpemidler eller i det minste spørre etter hjelpemidler i de oppgavene han gjorde.

Tankegangskompetanse: Eleven viser kompetansen gjennom å oppfatte oppgavens problemstilling i oppgave 2 og ved å skissere en parabel som forklaring på at andregradsligningen har to løsninger. Han er inne på kompetansen i oppgave 6, men får ikke helt fram betydningen av at man ikke kan dele på 0. Han begynner også på et resonnement i oppgave 9b hvor han vil bruke Pytagoras læresetning som formodning. Kompetansen har en viss aksjonsradius, men ikke stor dekningsgrad eller høyt teknisk nivå. Det er også stort sett den undersøkende karakteren som kommer frem.

Problembehandlingskompetanse: Eleven oppfatter og løser oppgave 2. Både bruken av begreper og hurtigheten i løsningen av oppgave 5 antyder at eleven har sett tilsvarende oppgaver tidligere. Dette kan dermed som Yeo (Joseph B. W. Yeo, 2015, s. 177) beskriver være en algoritmisk løsning av en oppgave som fremstår mer som et problem for andre elever. Det tekniske nivået er her godt i løsningen av oppgave 5, men dekningsgraden er ikke stor da det er få aspekter ved kompetansen som blir vist og det er såpass få oppgaver hvor jeg ser denne kompetansen at heller ikke aksjonsradiusen kan sies å være mer enn moderat.

Modelleringskompetanse: Denne kompetansen ser jeg ikke hos eleven. Dette har i stor grad sammenheng med at han ikke fikk vært med på gruppeoppgavene hvor det var best mulighet til dette.

Resonnementskompetanse: Eleven viser kompetansen i oppgave 5 når han kommer fram til at ligningen har løsninger når en faktor blir 0. I oppgave 6 viser han det når han kommer fram til forklaringen på at $n^0 = 1$ uttrykt med algebra og forklart som at lik teller og nevner er lik 1. Det blir også vist resonnementskompetanse i måten han setter opp og setter sammen uttrykkene i oppgave 9b. Til slutt finner jeg kompetansen i oppgave 10 når han etter oppfordring ser at de samsvarende vinklene og toppvinklene er like og at summen av dem må være 180 grader. Kompetansen har god aksjonsradius da den kommer fram i flere oppgaver. Det tekniske nivået er gjennomgående godt og det er god dekningsgrad da eleven veksler mellom å følge opp hint og bruke kompetansen gjennom egne initiativ. Vi får se både undersøkende og produktiv karakter.

Representasjonskompetanse: Eleven viser representasjonskompetanse ved å skissere ligningens graf i oppgave 5. Han viser også kompetansen når han veksler mellom heltall, brøk og potens i oppgave 6. Til slutt behandler han sidelengder og arealer algebraisk i oppgave 9b. Denne kompetansen vises med god aksjonsradius. Det tekniske nivået er godt ikke minst i oppgave 6, og eleven tar nok egne initiativ til at også dekningsgraden er god. Det er mer undersøkende enn produktiv karakter, men eksempler på begge.

Symbol- og formalismekompetanse: Denne kompetansen vises på høyt teknisk nivå ved å manipulere og løse ligningssettet i oppgave 2 samt bruk av algebra og ligningsløsing i oppgave 5. Det samme ser vi i behandling av tallrekka i oppgave 6 og behandling av algebraiske uttrykk i oppgave 9b. Til sist vises kompetansen til å regne ut verdier ved hjelp av algebraiske uttrykk i oppgave 10. Det at kompetansen kommer fram i så mange oppgaver og med litt forskjellige aspekter betyr at dekningsgrad, men særlig aksjonsradius er høy.

Kommunikasjonskompetanse: Eleven viser denne kompetansen ved å vise forståelse for problemstillingen i oppgave 2. I oppgave 9b oppfatter han oppgaven og justerer fremgangsmåten gjennom dialog. Eleven bruker til en viss grad fagbegreper, men språket er muntlig og kommunikasjonskompetansen fremstår med moderat teknisk nivå. Dekningsgraden er heller ikke veldig høy og det er mer den undersøkende enn den produktive karakteren ved kompetansen som kommer frem.

Hjelpemiddelkompetanse: Eleven fikk liten anledning til å vise hjelpemiddelkompetansen utover å vurdere at det ikke var spesiell bruk for hjelpemidler i oppgavene han gjorde. Det er i seg selv en kompetanse, men her må jeg si at denne kompetansen i all hovedsak ikke er vist.

Kompetanseprofil elev E

Elev E gjorde individuell oppgave 5, 6, 9, 10. Eleven gjorde gruppeoppgave 1, 2 og 3 sammen med elev C

Tankegangskompetanse: Eleven viste noe tankegangskompetanse i oppgave 6, dette bestod mer at hun forstod beviset enn at hun kunne fremføre det selv. I oppgave 9b var hun også innom kompetansen da hun ville bruke Pytagoras som formodning for å komme til beviset. I oppgave 10 gjør hun tilsvarende som i oppgave 6 og følger ideen i et bevis. Eleven har en viss aksjonsradius, men manglende selvstendighet tilsier at det er lav dekningsgrad. Det tekniske nivået er moderat og det er nesten utelukkende den undersøkende karakteren ved kompetansen som vises.

Problembehandlingskompetanse: Denne kompetansen får eleven vist i gruppeoppgavene. Først når hun sammen med elev C finner og retter opp feil i oppsettet i oppgave 11, deretter når de kommer fram til å bruke et spesifikt talleksempel i oppgave 13. Med så få eksempler er aksjonsradiusen til denne kompetansen lav, det er en viss dekningsgrad og teknisk nivå og særlig i oppgave 11 får hun fram den produktive karakteren ved kompetansen.

Modelleringskompetanse: Modelleringskompetansen blir også vist i gruppeoppgavene. Elevene justerer mitt oppsett i oppgave 11 og retter det og lager sitt eget. Eleven kommer også sammen med sin medlev fram til at bruk av graf kan være nyttig for å løse oppgave 12. Det er aksjonsradius på moderat nivå. Det er ikke vist kompetanse i mange oppgaver, men i de best egnede. Dekningsgraden er dermed bra ettersom det blir tatt eget initiativ og vist gjennom forskjellige oppgaveaspekter. Teknisk nivå er moderat. Det er eksempel på både undersøkende og produktiv karakter av kompetansen.

Resonnementskompetanse: Eleven viser denne kompetansen i oppgave 10 når hun kommer opp med en formel. Hun kommer fram til at hun har kongruente trekanter, like toppvinkler og finner to samsvarende vinkler etter å ha mottatt en kort forklaring. Hun avviser også et galt løsningsforslag i oppgave 12. Resonnementskompetansen er god når hun følger alle argumentene i oppgave 13. Det er et lite svakhetstegn at hun ikke kjenner til at man ikke kan dele på 0, og det stopper henne fra å finne løsningen. Her er det altså resonnementskompetanse med en viss aksjonsradius, men hvor teknisk nivå og dekningsgrad ikke kan sies å være høye. Det er i hovedsak den utforskende karakteren ved kompetansen som vises.

Representasjonskompetanse: Representasjonskompetansen vises gjennom forklaring av hvorfor konjugatsetningen ikke er en kvadratsetning. Den vises også når hun veksler mellom heltall, brøk og potens i oppgave 6. I 9b vises den når hun setter opp og regner gjennom uttrykkene og i oppgave 10 når hun kommer opp med en formel. Bruk og gjennomgang av formler i oppgave 11 og bruken av graf til å løse oppgave 12 er også eksempler. Her ser vi at både aksjonsradius og dekningsgrad er god hun viser flere aspekter ved kompetansen og viser det i forskjellige sammenhenger. Det tekniske nivået er også godt. Her har kompetansen både undersøkende og produktiv karakter.

Symbol- og formalismekompetanse: Denne kompetansen vises i oppgave 5 ved bruk av algebra og ligningsløsning. Den vises også gjennom behandling av potenser og tall i oppgave 6. I 9b er kompetansen tydelig når hun setter opp og regner gjennom uttrykkene. Det er høyt teknisk nivå i oppgave 13 når de raskt ser at konjugatsetningen er brukt til å faktorisere. Det er også en sikker gjennomgang av leddene i beviset. Denne kompetansen har tydelig stor aksjonsradius og viser høyt tekmnisk nivå der det er nødvendig. Det er bra dekningsgrad på denne kompetansen og kompetansen har både produktiv og undersøkende karakter.

Kommunikasjonskompetanse: Kompetansen vises i oppgave 9b ved å ta imot instruksjoner der hun var i tvil. Den kommer også frem i oppgave 10 der hun bruker flere fagbegrep med god presisjon. Gjennom arbeidet med gruppeoppgavene kommuniserte eleven godt, men noe muntlig og dermed på lavt teknisk nivå. Dekningsgraden var ikke stor og det var mest den undersøkende karakteren ved kompetansen som ble vist.

Hjelpemiddelkompetanse: Denne kompetansen vises med bra teknisk nivå i oppgave 11 gjennom bruk av regneark og formler. Den vises også gjennom å lage et justert oppsett for utregningen. Videre vises kompetansen ved bruk av Geogebra i oppgave 12, her viser eleven stort sett nødvendig kjennskap til funksjoner. Aksjonsradiusen er av et visst nivå når kompetansen vises i de oppgavene som var tiltenkt det. Dekningsgraden er ikke stor da det er noen utfordringer i bruken av Geogebra. Den produktive karakteren kommer mest fram i oppgave 11.

Sammenfatning i tabeller

Jeg bruker nå fjerde ledd i Malteruds modell(Johannessen et al., 2016) og sammenfatter kompetanseprofilene i åtte tabeller, en for hver av de åtte kompetansene jeg har undersøkt:

Tankegangskompetanse			
Elev	Dekningsgrad	Aksjonsradius	Teknisk nivå
A	Moderat	Lav	Lav
B	Moderat	Lav	Lav
C	Ikke vist	Lav	Moderat
D	Moderat	Moderat	Moderat
E	Lav	Moderat	Moderat

Problembehandlingskompetanse			
Elev	Dekningsgrad	Aksjonsradius	Teknisk nivå
A	Moderat	God	God
B	Moderat	God	Moderat
C	Lav	Lav	God
D	Moderat	Moderat	God
E	Moderat	Lav	Moderat

Modelleringskompetanse			
Elev	Dekningsgrad	Aksjonsradius	Teknisk nivå
A	Moderat	Moderat	God
B	Moderat	God	Moderat
C	God	God	God

D	Ikke vist	Ikke vist	Ikke vist
E	God	Moderat	Moderat

Resonnementskompetanse			
Elev	Dekningsgrad	Aksjonsradius	Teknisk nivå
A	God	Moderat	God
B	Moderat	God	God
C	God	God	God
D	God	God	God
E	Moderat	Moderat	Moderat

Representasjonskompetanse			
Elev	Dekningsgrad	Aksjonsradius	Teknisk nivå
A	God	God	God
B	God	God	God
C	God	God	God
D	God	God	God
E	God	God	God

Symbol- og formalismekompetanse			
Elev	Dekningsgrad	Aksjonsradius	Teknisk nivå
A	God	God	God
B	God	God	God
C	God	God	God
D	God	God	God
E	God	God	God

Kommunikasjonskompetanse			
Elev	Dekningsgrad	Aksjonsradius	Teknisk nivå
A	Moderat	God	Moderat
B	Moderat	God	Moderat
C	Moderat	God	Moderat
D	Ikke vist	Ikke vist	Ikke vist
E	Moderat	God	Lav

Hjelpemiddelkompetanse			
Elev	Dekningsgrad	Aksjonsradius	Teknisk nivå
A	Moderat	God	Moderat
B	Moderat	Moderat	Moderat
C	Moderat	God	God
D	Moderat	God	Moderat
E	Moderat	Moderat	God

Drøfting

Det er en risiko ved et studiedesign som dette at man overtolker det elevene sier og gjør i lys av forhåndskunnskapen om at de er høyt presterende elever og ønsket om hva de skal få vist fram i oppgaver som er forsøkt holdt åpne. Erfaringen min som lærer kan gjøre at jeg leser vist kompetanse i situasjoner som ikke nødvendigvis vil bli oppfattet på samme måte av en med en annen erfaring. Dette er en reliabilitetsutfordring, som blir enda sterkere av at intervjuguiden ikke er strukturert strammere, gjennom vansken som ligger i å gjennomføre studien på nytt med samme resultat. Det er også en validitetsutfordring på den måten at en overtolkning av noe man ønsker å se, ikke nødvendigvis er en reell beskrivelse av verken elevens kompetanse eller den aktuelle situasjonen. Når studien i tillegg er kvalitativ og med et lite antall informanter blir det meget risikabelt å antyde at funnene er egnet til å si noe mer generelt.

Et av områdene hvor elevene viser at de har høy kompetanse er at de korrigerer seg raskt og er raskt med på nye resonnementer og ideer. Eksempel: Elev B begynner å bruke innsettingsmetoden rett etter å ha blitt introdusert for den, elev D justerer misoppfatningene sine ved å få hjelp til å sette opp moteksempler. De oppfatter altså matematiske argumenter som gyldige og bruker dem umiddelbart for å forstå eksempler eller løse oppgaver videre. Dette viser at de er høyt presterende, lærevillige og raske til å ta til seg kunnskaper og ferdigheter, men kan ikke nødvendigvis knyttes direkte til en kompetanse.

Av tabellene ser vi at elevene viste mest kompetanse innenfor området å håndtere matematikkens språk og redskaper, mens de viste mer varierende kompetanse under punktene om å kunne spørre og svare i og med matematikk. Det var særlig områdene representasjonskompetanse og symbol- og formalismekompetanse som pekte seg ut hos de fem elevene. Her viste de gjennomgående god kompetanse målt etter de tre nivåene og klarte både å vise kompetansenes produktive og undersøkende karakter. Det var også tydelig at der de andre kompetansene overlappet symbol- og formalismekompetansen kom også disse mest til sin rett. Dette kan meget vel henge sammen med hva som kreves av elevene til eksamen. Dette er elever som lykkes i skolesystemet noe som ganske sikkert vil si at de mestrer nettopp det de blir testet i.

Elevene viser jevnt over kommunikasjonskompetanse både i at de oppfatter oppgavene, at de kan kommunisere svarene sine og at de kan kommunisere med hverandre om innhold og framgangsmåter i oppgavene. Dekningsgraden er ikke den høyeste all den tid de når de selv kommuniserer sammenhenger i liten grad er presise eller bruker fagbegreper. Den uformelle rammen på oppgavene og intervjuerens formuleringer og spørsmål kan bidra til at de velger mer et hverdagsspråk enn de kanskje ville gjort på en eksamen. Det at det er så gjennomgående at de uttrykker seg så vidt lite faglig tolker jeg som at denne kompetansen ikke har høy dekningsgrad hos disse elevene.

Når elev D i oppgave 5 bruker den grafiske representasjonen av ligningen som argument for at ligningen har to løsninger viser han nettopp den aksjonsradiusen og dekningsgraden som etterspørres i en fremtidsrettet kompetanse. Han tar initiativ, er kreativ, viser god intuisjon og resonnerer for å løse et problem. Dette er et av de beste eksemplene i intervjuene på hvordan en av elevene klarer å aktivere flere kompetanser samtidig. Elevens besvarelse er allikevel ikke uten forbedringspotensial. Kommunikasjonsaspektet og formalismeaspektet ved kompetansen har ikke den presisjonen, og dermed dekningsgraden som man ville kreve for å godta dette som et argument i for eksempel et bevis.

Det at elevene viste mindre kompetanse innenfor områdene å spørre og svare i og med matematikk er et argument mot at kompetansen deres er fremtidsrettet. Kjerneelementene legger nå mye vekt på nettopp argumentasjon, problemløsning anvendelse og forståelse. Det disse elevene særlig viser kompetanse i ligger til dels mer snevert innenfor det som nå kalles matematiske kunnskapsområder. Rett nok viste alle gjennomgående en del resonnementskompetanse så der er de mer på sporet av den fremtidsrettede kompetansen som er etterspurt i Fagfornyelsen. Gjennomgående var det svært sjelden elevene som stilte hvorfor-spørsmålene. Det var jeg som spurte dem om de visste hvorfor, og oftest kjente de ikke eller husket de ikke forklaringer på regler de kunne, som for eksempel at vinkelsummen i trekanter er 180 grader, eller at $n^0 = 1$. Aksjonsradiusen til disse kompetansene må dermed sies å være lav. Elevene kan aktivisere resonnementskompetansen som skal til for å følge et bevis, men de bruker hverken denne kompetansen eller tankegangskompetansen til å stille de relevante spørsmålene aktivt selv. Jeg synes det er betegnende at elevene gjennomgående har lite forhold til regelen om at man ikke kan dele på 0. Dette er en problemstilling man fort kan komme borti når man eksperimenterer litt, men elevene gir lite uttrykk for å ha vært borti det og like lite for å ha reflektert over det. I oppgave 9b vil både elev D og E bruke Pytagoras formel som de kjenner som formodning for å bevise sammenhengen mellom arealene på figuren. De reflekterer ikke over at dette er en sirkelargumentasjon, og som intervjuer graver jeg heller ikke i det. Her burde jeg kanskje gått videre med oppfølgingsspørsmål. Dette er ett av ganske få steder hvor elevene faktisk forøker å formulere et bevis, og tankegangen deres rundt dette valget kunne antagelig sagt mer om dekningsgraden for så vel tankegangskompetansen som resonnementskompetansen deres.

Det at de ser ut til å si seg fornøyd med å lære metodene kan ha å gjøre med at det rett og slett er en suksessoppskrift i skolen hvor det ikke minst i matte ofte måles i poeng for riktige svar på så vel nasjonale prøver som eksamener. Denne siste påstanden skal man være forsiktig med ettersom det både i vurderingsveiledninger og praksis har vært en dreining mot mer og mer helhetsvurdering, men fortsatt oppgis det høyest mulig oppnåelige poeng for både oppgaver, delprøver og hele settet på eksamen.

Elevene aktiverer i liten grad hjelpemiddelkompetansen med mindre oppgavene spesifikt legger opp til det. De stoler på sine egne utregninger og resonnementer så langt mulig og bruker bare hjelpemidler hvis det faktisk er nødvendig. Dette kan bety at det sterkere fokuset på digitale ferdigheter i mattefaget har hatt mindre effekt enn det at det har blitt et formelt krav å bruke digitale hjelpemidler på eksamen. Rapporten «På like vilkår»(Bjørnset et al., 2020) forteller blant annet om hvordan hjelpemiddelbruken noen år førte til at elever kom med ferdiglagde oppsett for beregning av lån som de så bare fylte ut med de aktuelle tallene på eksamen. Dette viser noe av den pragmatiske holdningen elever kan ha som gjør at de utvikler den kompetansen som faktisk er nødvendig der og da for å nå sine mål med eksamen. Dette kan også bety at det kan være nødvendig å gå samme veien for å videreutvikle de andre kompetansene som elevene ser ut til å nøle med å bruke. Et sterkere fokus på begrunnelser og bevis i oppgaver på nasjonale prøver og eksamen kan være det som skal til for at elevene skal prioritere å utvikle disse kompetansene.

For å arbeide med avvikene mellom etterspurt og vist kompetanse som elever som disse er det vesentlig å legge opp undervisning i tråd med kjerneelementene og med fokus på dybdelæring. Vi ser at oppgaver til eksamen eller det elevene møter i læreverk ofte ikke er nok til å aktivere en høy dekningsgrad og aksjonsradius i disse kompetansene selv hos elever som faktisk når læringsmålene i faget og presterer høyt.

Oppsummering

Elevene i min studie har vist en rekke eksempler på god kompetanse

Avslutning

Hovedfunn

Min problemstilling har vært: *Hva kjennetegner den matematiske kompetansen til høyt presterende elever i matematikk og på hvilken måte er denne kompetansen i samsvar med kjerneelementene i Fagfornyelsen?*

Jeg mener å ha vist at det som kjennetegner kompetansen hos elevene jeg har undersøkt er en sterk evne til å ta til seg og bruke det som kreves av dem for nettopp å være høyt presterende i skolen gjennom testsituasjoner og særlig eksamen. Jeg mener at de ikke har den sammensatte kompetansen som er etterspurt med den nye læreplanen med sine kjerneelementer, men at det gjennom en annen eksamensform og fornying av undervisningsprinsipper vil være høyst gjennomførbart for denne typen elever å fortsatt være høyt presterende. Dette er fordi disse elevene viser en evne til å tilpasse seg og ta til seg nettopp det som er etterspurt og de evner å gjøre dette både raskt og sikkert. Eleven tilpasser seg og mestrer det de blir bedt om å mestre. For å sikre en slik utvikling må man særlig se på utvikling av selvstendighet, evne til å stille de gode hvorfor-spørsmålene og slik stimulere nettopp de produktive karakterene ved kompetansen til elevene.

Studiens bidrag

Med denne studien har jeg forsøkt å gi en god analyse av fem høyt presterende elevers kompetanse. Jeg har sett på hva som kjennetegner denne kompetansen og sagt noe om hva jeg tror vil være nødvendig for å være høyt presterende også innenfor den nye læreplanen som er innført.

Veien videre

Med denne studien har jeg begynt å skrape i overflaten på hva som kjennetegner kompetansen til høyt presterende elever og hva som kreves for å være høyt presterende også i fremtiden. Min studie er kvalitativ og med et svært lite utvalg elever og kan derfor ikke brukes til å generalisere om funnene jeg mener å ha gjort. Videre kvantitative undersøkelser vil være påkrevd før man eventuelt skal begynne å ta de fulle konsekvensene av mine ideer. Videre arbeid vil kunne dreie seg om å se på mer spesifikt hvilke kompetanser man særlig må prioritere for å få en ny helhetlig matematisk kompetanse slik Kunnskapsløftet legger opp til. Det vil dessuten være aktuelt å jobbe med å konkretisere hvilke følger dette i så fall vil få for eksamen og undervisning i årene som kommer.

Litteraturliste

Alrø, Helle & Skovsmose, Ole. (2006). Undersøgende samarbejde i matematikundervisningen - udvikling af IC-Modellen. I O. Skovsmose, & M. Blomhøj (Red.), *Kunne det tænkes? - om matematiklæring.* (s. 110-126). København: Malling Beck.

Andresen, Silje, Fossum, Aina, Rogstad, Jon & Smestad, Bjørn. (2017). *På prøve*. FAFO.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: toward a unifying theory of behavioral change. *Psychol Rev, 84*(2), 191-215. doi:10.1037//0033-295x.84.2.191

Bjørnset, Mathilde, Fossum, Aina, Rogstad, Jon & Smestad, Bjørn. (2020). *På like vikår? Evaluering av matematikkeksamen på 10. trinn 2017-2019.*: FAFO.

Bjørnset, Mathilde, Fossum, Aina, Smestad, Bjørn & Talberg, Niri. (2018). *Digitale skillelinjer Evaluering av matematikkeksamen på 10. trinn våren 2018*. FAFO. Hentet fra https://www.fafo.no/index.php/zoo-publikasjoner/fafo-rapporter/item/digitale-skillelinjer

Brevik, Lisbeth M. & Gunnulfsen, Ann Elisabeth. (2016). Differensiert undervisning for høytpresterende elever med stort læringspotensial. *Acta Didactica Norge, 10*(2), 212-234. doi:10.5617/adno.2554

Børte, K., Lillejord, S. & Johansson, L. (2016). *Evnerike elever og elever med stort læringspotensial: En forskningsoppsummering*. Oslo. Hentet fra https://www.forskningsradet.no/siteassets/publikasjoner/1254019980213.pdf

Foster, C. & Inglis, M. (2017). Teachers' appraisals of adjectives relating to mathematics tasks. *Educational Studies in Mathematics, 95*(3), 283-301. doi:10.1007/s10649-017-9750-y

Gates, Peter (Red.). (2001). *Issues in mathematics teaching*. Llondon: Routledge.

Goldin, Gerald A. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9*, 40-177. doi:10.2307/749946

Idsøe, Ella Cosmovici. (2014). *Elever med akademisk talent i skolen*: Cappelen Damm.

Johannessen, Asbjørn , Tufte, Per Arne & Christoffersen, Line (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utgave. utg.). Oslo: Abstrakt forlag.

Kleve, Bodil. (2014). Identitet, forståelse og literacy i matematikkfaget. I B. Kleve, S. Penne, & H. Skaar (Red.), *Literacy og fagdidaktikk i skole og lærerutdanning* (s. 84-105). Oslo: Novus forlag.

Kunnskapsdepartementet. (2006). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Kunnskapsdepartementet. (2013). *På rett vei*. Oslo: Kunnskapsdepartementet. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld-st-20-20122013/id717308/

Kunnskapsdepartementet. (2015-1016). *Fag – Fordypning – Forståelse — En fornyelse av Kunnskapsløftet*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/sec1

Kunnskapsdepartementet. (2015-2016). *Fag – Fordypning – Forståelse — En fornyelse av Kunnskapsløftet*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/sec1

Kvale, Steinar & Brinkmann, Svend. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.).

LAMIS. (2013). *UngeAbel*. Hentet fra https://www.lamis.no/files/2017/11/oppgaver_2013-2014-til_hjemmeside.pdf

Lein, Johanne. *Geometrisk bevis av Pytagoras*. Hentet fra https://www.matematikk.org/binfil/download2.php?tid=188033&h=bac7ca6bd1427a55a2b8a25bcdcfc457

Matematikksenteret. (2019). *Kengurukonkurransen 2019 Cadet*. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Kenguru/Cadet%202019%20bokm%C3%A5l.pdf

Myran, Iris Hansson. (2016). Håndskrift i en digital verden. *Bedre skole*,(2/2016), 24-27. Hentet fra https://cld.bz/GJ2b7Te

Niss, M. & Højgaard, Tomas. (2002). Kompetencer og matematiklæring, Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Utddannelsesstyrelsens temahæfteserie. *Undervisningsministeriet (Ministry of Education), 18*, 1-334.

NOU 2014:7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-7/id766593/

NOU 2015:8. (2015). *Fremtidens skole — Fornyelse av fag og kompetanser*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/

NOU 2016:14. (2016). *Mer å hente*. Oslo: Kunnskapsdepartementet. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2016-14/id2511246/

Opplæringslova, Forskrift til. (2006). *Forskrift til Opplæringslova*. Hentet fra https://lovdata.no/forskrift/2006-06-23-724

Røsseland, Mona. (2005). Hva er matematisk kompetanse? *Tangenten*,(1), 12-17.

Skemp, Richard R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. Hentet fra https://www.nlcsmaths.com/uploads/2/6/3/6/26365454/skemp.pdf

Skogen, Kjell & Idsøe, Ella Cosmovici. (2011). *Våre evnerike barn En utfordring for skolen*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Spurkland, Simen og Blikstad-Balas, Marte. (2016). Digitalisering av skolen: de største utfordringene. *Bedre skole*,(2016/2), 29-33. doi:https://cld.bz/GJ2b7Te

Ugyldige bevis. (u.å.). I *Wikipedia*. Hentet 2.6.2020 fra https://no.wikipedia.org/wiki/Ugyldige_bevis

Utdanningsdirektoratet. (2016). *Å forstå kompetanse*. Hentet 24.05.2020 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/forsta-kompetanse/

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Eksamen MAT0010 Matematikk*. Hentet fra https://matematikk.net/matteprat/download/file.php?id=2406

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Grunnskolekarakterer*. Hentet 08092020 fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/statistikk/statistikk-grunnskole/grunnskolekarakterer/

Yeo, Joseph B. W. (2015). Development of a Framework to Characterise the Openness of Mathematical Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 175-191. doi:10.1007/s10763-015-9675-9

Yeo, Joseph B.W. & Yeap, Ban Har. (2010). Characterising the cognitive processes in mathematical investigation.

Vedlegg 1 NSD sin vurdering

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Kompetanse hos høytpresterende elever i matematikk.

Referansenummer

238439

Registrert

11.10.2019 av Erik Sexe Andersen [redacted]

Behandlingsansvarlig institusjon

OsloMet - storbyuniversitetet / Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier / Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

George Harry Hitching, [redacted]

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Erik Sexe Andersen, [redacted]

Prosjektperiode

15.08.2019 - 20.11.2020

Status

11.08.2020 - Vurdert

Vurdering (3)

11.08.2020 - Vurdert

NSD har vurdert endringen registrert 10.08.2020. Vi har nå registrert 20.11.2020 som ny sluttdato for forskningsperioden. NSD vil følge opp ved ny planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet. Lykke til videre med prosjektet! Kontaktperson hos NSD: Kajsa Amundsen [redacted]

22.06.2020 - Vurdert

NSD har vurdert endringen registrert 22.06.2020. Vi har nå registrert 10.08.2020 som ny sluttdato for forskningsperioden. NSD vil følge opp ved ny planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet. Lykke til videre med prosjektet! Kontaktperson hos NSD: Kajsa Amundsen [redacted]

15.11.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 15.11.2019 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte. MELD VESENTLIGE ENDRINGER Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres. TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.06.2020. LOVLIG GRUNNLAG Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a. PERSONVERNPRINSIPPER NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om: - lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet - lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet DE REGISTRERTES RETTIGHETER Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13/14), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). Tredjepersoner har i tillegg rett til protest (art. 21). NSD vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13/14. Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned. FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon. OPPFØLGING AV PROSJEKTET NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet. Lykke til med prosjektet! Kontaktperson hos NSD: Kajsa Amundsen [redacted]

Vedlegg 2 – samtykkeerklæring

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Kompetanse hos høytpresterende elever i matematikk"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å beskrive kompetansen til høytpresterende elever i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Forskningsprosjektet er en masteroppgave ved OsloMet hvor jeg skal prøve å finne ut hva slags kompetanse høytpresterende elever i matematikk har og beskrive den. Jeg vil forsøke å se på likheter og forskjeller mellom elever og hvilke kompetanser dere viser både individuelt og i gruppe. Opplysningene jeg samler inn vil bli slettet ved prosjektets slutt.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

OsloMet er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Jeg har kontaktet lærere for å finne fem elever som er vurdert som høytpresterende og du er en av de som mattelæreren din har foreslått.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du takker ja til å delta i prosjektet vil vi ha en kort samtale om ditt forhold til matematikkfaget. Deretter vil vi ha to økter med oppgavebasert intervju. Ett individuelt og ett sammen med en eller to andre elever. Det foregår slik at du får noen oppgaver du skal jobbe med å løse samtidig som du beskriver tankeprosessen og metodene dine. Du vil ha tilgang til skrivesaker, papir, pc og nettbrett for å løse oppgavene. Jeg kommer til å stille oppfølgingsspørsmål underveis i arbeidet ditt. For å la samtalen gli så fritt som mulig og samtidig gjøre det enkelt for meg å analysere det vi har snakket om, gjør jeg lydopptak av samtalen og beholder det du har skrevet enten det er fysisk eller digitalt.

Intervjuene vil antagelig vare i inntil ca. en time pr. gang. Hvis dine foresatte ønsker det kan de få se eksempeloppgaver og intervjuguide på forhånd samt oppgaver og spørsmål etter intervjuet.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Lydopptakene vil bli transkribert og så slettet. Det er bare veileder George Harry Hitching og jeg som vil ha tilgang til opplysningene.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes 16. november 2020. Du vil være anonymisert med psevdonym i oppgaven jeg skriver. Personopplysninger som navn, kjønn, skole og lydopptakene av stemmen din vil bli slettet.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg,
- å få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Oslo Met har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Oslo Met ved George Harry Hitching – epost (gehahi@oslomet.no) eller telefon: 67 23 74 34
- Vårt personvernombud: Ingrid Jacobsen – på epost (ingrid.jacobsen@oslomet.no) eller telefon: 67 23 55 34
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

George Harry Hitching
Prosjektansvarlig
(Veileder)

Erik Sexe Andersen
Student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «kompetanse hos høytpresterende elver i matematikk», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn kan:

- ☐ delta i oppgavebasert intervju.

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 15. juni

----

(Signert av foresatt, dato)