«Åpne oppgaver i matematikk: En kvalitativ undersøkelse av elevenes arbeid med åpne oppgaver og matematiske kompetanser som kommer til syne.»

«Open-ended tasks in mathematics: A qualitative study of students' work with open-ended tasks and the mathematical competencies they display. »

OSLOMET-STORBYUNIVERSITET

Masteroppgave i skolerettet utdanningsvitenskap
med fordypning i matematikkdidaktikk

Erdal Kilicdogan

Skut 5910
Vår 2018
Kandidatnummer: 947

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning
Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier
Oslomet- storbyuniversitet

15.05.2018

FORORD

I forbindelse med skriving av denne oppgaven, er det noen personer som jeg vil takke. Uten dere ville det ikke vært enkelt å fullføre denne studien. Jeg vil takke veilederen min George Harry Hitching for de gode og konstruktive tilbakemeldingene underveis med denne oppgaven. Du har vært tilgjengelig når jeg trengte tilbakemeldinger eller råd. All hjelpen jeg fikk har hatt en stor betydning for dette arbeidet.

Å skrive en masteroppgave ved siden jobb er ikke enkelt. Det trengs en passende timeplan og fagkombinasjon. Derfor vil jeg takke avdelingslederen min, Mikael Skovlie, for all hjelp med tilrettelegging på arbeidsplassen slik at jeg kunne ha tid til å skrive denne oppgaven. I tillegg vil jeg takke Miriam Rygh Andersen for all tiden hun brukte for å lage en passende timeplan.

Jeg er realist, og skriving har ikke vært min sterkeste side. Jeg vil takke de tre snille og flinke kollegaene Mari Bjørnsdotter Vinjar, Marthe Pettersen og Kjersti Bartnæs Krallinger for deres korrekturlesning, og ikke minst for deres faglige tilbakemeldinger.

Jeg vil også takke informantene mine, og læreren deres for at de var villige til å delta i denne undersøkelsen. Min kollega Bård Andreas Skjeggestad vil jeg takke for språkhjelp med den engelske teksten.

Sist, men ikke minst, en stor takk til samboeren min og barna mine for deres forståelse og støtte i denne perioden.

Oslo, mai 2018

Erdal Kilicdogan

SAMMENDRAG

Elevarbeid med oppgaver i matematikk er en kjent del av læring og undervisning i matematikk. Denne studien tar for seg en undersøkelse av åpne oppgaver og matematisk kompetanser i KOM-prosjektet fra Danmark (Niss & Jensen, 2002). Målet med denne oppgaven er å se kompetansetyper som kommer til uttrykk i elevenes arbeid med åpne oppgaver. Forskningsspørsmålet som blir belyst er «*Hvilke kompetanser kommer til syne når elever arbeider med åpne oppgaver?*».

Denne studien benytter sosialkonstruktivisme som læringsteori, og har et kvalitativt forskningsdesign. Dataene ble samlet under observasjon av ni elever på første klasse i en videregåendeskole som tar 1P matematikk. Gruppene er delt etter elevenes faglige nivå hvor hver gruppe består av tre elever. Elevenes arbeid med oppgaver ble tatt opp med lydopptak og dataene er transkribert. Elementer av hver kompetansene ble brukt for å spore opp. Analysen av transkriberte data fra elevens arbeid er gjort på bakgrunn av beskrivelse av matematisk kompetanser som er i KOM-prosjektet. Oppgavene som er brukt i datainnsamlingen er åpne og er analysert med rammeverket som er utviklet av Yeo (2017). En oppgave kan være åpen eler lukket etter svar, mål, metode, kompleksitet og utvidelse.

Analysen viser at elevarbeid med åpne oppgaver kan gi mulighet til å ta i bruk flere kompetansetyper. Felles er det tankegangs-, resonnement-, problembehandlings- og kommunikasjonskompetansen som er synlige i alle grupper. Disse kompetansene kommer til uttrykk i forskjellige grad hos gruppene, og i noen tilfeller har elevenes faglige bakgrunn har ikke mye å si for kompetansetyper.

Et annet resultat er at åpneoppgaver som er åpen etter kompleksitet kan være utfordrende for elever å sette i gang arbeidet. En av oppgavene i denne studien viser seg å være for kompleks for elevene, og derfor var det behov for ytterlige avklaringer fra meg slik at oppgaven ble mindre kompleks for dem.

Studien viser at åpne oppgaver som en gruppe aktivitet kan gi muligheter for å oppnå helhetlige matematisk kompetanse, hvis de er valgt med den hensyn.

ABSTRACT

Students' work with mathematical tasks is a familiar part of learning and teaching in mathematics. This study involves an examination of open-ended tasks and the competencies from KOM-project in Denmark (Niss & Jensen, 2002). The aim of the study is to find out which competencies are visible in students´ work on open-ended tasks. The question addressed in this study is: *Which competencies do students display while they are solving open-ended tasks?*

This empirically based study has a qualitative design within a social constructivist frame. Participants are nine level 11^{th} students taking 1P-mathematics course, divided into three groups of three students on approximately same ability level. The students' work with the open-ended tasks is audio recorded and transcribed. The transcribed audio recordings are coded with the elements of mathematical competencies from KOM-project. The tasks which are used in this study are open-ended tasks and they are analyzed with a framework on tasks' openness, developed by Yeo (2017). According to this framework the openness of a task can be characterized with five tasks variables: goal, method, task complexity, answer and extension.

The analysis shows that open-ended tasks can create opportunities to use and achieve several mathematical competencies. Elements observed for all tasks include *thinking mathematically*, *reasoning mathematically*, *posing and solving mathematical problems* and *communicational competencies* in all three groups.

Another finding is that *complexity* seems to be an obstacle for students to engage with the tasks when it is too open to students. A lack of scaffolding resulted in one task in particular being too complex for the students. In this case clarifications were needed to facilitate task engagement.

The analysis indicates that open-ended tasks as a group activity may lead to increased mathematical competence if the tasks are chosen with this purpose.

1.INNLEDNING

Dette kapittelet skal gi en oversikt over oppgaven. Her skal jeg presentere bakgrunn for valg av tema, forskningsspørsmål, og til slutt skal jeg gi en kort beskrivelse av oppbygning av oppgaven.

1.1 FORSKNINGSSPØRSMÅLET

Solid kompetanse i matematikkfaget er nødvendig for å forstå og påvirke prosesser i samfunnet(Udir, 2013). Den kompetansen som er ønsket over er beskrevet slik i den samme kilden:

> Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er. Dette har òg språklege aspekt, som det å formidle, samtale om og resonnere omkring idear. I det meste av matematisk aktivitet nyttar ein hjelpemiddel og teknologi. Både det å kunne bruke og vurdere ulike hjelpemiddel og det å kjenne til avgrensinga deira er viktige delar av faget (Udir, 2013).

Definisjonen over for matematisk kompetanse er utgangspunktet for å generere forskningsspørsmålet for denne studien. Den kompetansen er nødvendig for at elevene skal være delaktig i opplæringen og samfunnet, og ikke minst for å ha et grunnlag for videre utdanning. Utdanningsdirektoratet påpeker at matematisk kompetanse kan oppnås ved å veksle mellom lekende, utforskende og kreative aktiviteter samt problemløsningsaktiviteter (ibid.).

Matematisk kompetanse som er beskrevet i fagets formål, består av delkompetanser som er utarbeidet i Danmark av Mogen Niss og Tomas Højgaard Jensen (2002). De deler matematisk kompetanse i åtte delkompetanser som til sammen er nødvendig for en helhetlig matematisk kompetanse. I formålet til matematikk faget påpekes det at den kompetansen kan oppnås blant annet ved å ha problemløsende og utforskende aktiviteter. På bakgrunn av dette vil problemstillingen for denne oppgaven være:

«Hvilke kompetanser kommer til syne hos elever når de arbeider med åpne oppgaver?»

Når en tar utgangspunkt i et vanlig matematikklasserom, er det variasjoner mellom elevenes faglignivå. I denne studien ønsker jeg å bruke elever på forskjellige faglig nivå som kan gjenspeile elevmassen i et vanlig klasserom. Derfor vil det være nødvendig å undersøke én delproblemstilling sammen med hoved problemstillingen min. Derfor vil jeg også prøve å finne svar på:

«Har elevenes faglige nivå noe å si for hvilke kompetanser som kommer til syne i arbeid med åpne oppgaver?»

Med elevenes faglige nivå menes det elevenes måloppnåelse på bakgrunn av den første skriftlig vurdering i tall og algebra. Både skriftligprøven og vurdering av elevenes måloppnåelse er bestem av læreren.

1.2 Bakgrunn for valg av tema

Hva er det å kunne matematikk? Holder det å kunne alt som er i lærebøker? Kan man kalle seg matematikkyndig når en kan gjøre alle oppgavene man får i matematikktimene? Eller er det å kunne matematikk mer enn å kunne løse alle oppgavene? Hva er formålet med matematikk i skolen? Formålet i faget matematikk har andre aspekter når det gjelder hva det er å kunne matematikk. I læreplanmål (Udir, 2013, s. 2) legges det vekt på noe helt annet enn å kunne alt som står i lærebøkene. Her brukes det begrepet matematisk kompetanse som peker på problemløsning, analysering og matematisering av et problem. I tillegg blir det påpekt viktigheten av språklig aspekter og samhandling.

Disse beskrivelsene i læreplanmål har vekket min interesse for hvordan jeg som lærer kan legge til rette for at elevene skal oppnå disse målene i faget. Gjennom min masterstudie ved Oslomet-storbyuniversitet ble jeg oppmerksom på åpne oppgaver i matematikk. Etter å ha lest litteratur om disse oppgavetypene ønsket jeg å se hvilke av de egenskapene som er beskrevet læreplanmål kan elevene tilegne seg ved bruk av denne oppgavetypen. Dette har vært min motivasjon for denne studien.

1.3 Kapitteloppbygning

Oppgaven består av seks kapitler. I første kapittel presenterer jeg problemstillingen min, og avgrenser den. I tillegg til det, beskriver jeg bakgrunn for valg av tema. Kapittel 2 består av teorien jeg skal bruke i analysedelen. Der presenterer jeg læringsperspektivet mitt prosjekt kan knyttes til. Problemstillingen tar for seg åpne oppgaver og kompetanser. Derfor presenterte jeg detaljert hva de kompetansene innebærer. Jeg bruker tre kjente rammeverket for en helhetlig kompetanse. Disse er Kilpatrick, Swafford, Findell, og National Research Council (U.S.).

Mathematics Learning Study Committee. (2001), Niss og Jensen (2002) og til slutt bruker jeg Brekke (2002). Grunnen til at jeg bruker disse tre kildene om det samme fenomenet, her er det matematisk kompetanse, er at jeg vil se hvilke av dem som kan gi svar på min problemstilling. Jeg begrunner også valg av rammeverket for matematisk kompetanse i dette kapittelet. Videre tar jeg for meg hva åpne oppgaver er. Åpne oppgaver er definert på forskjellige måter og kan være åpen på forskjellige måter. Jeg vil derfor bruke et rammeverk av Yeo (2017) for å vise på hvilken måte oppgavene mine er åpne. Deretter gir jeg en kort beskrivelse av hva slags oppgaver som er vanlige i matematikktimene. Et annet punkt jeg presenterer i dette kapittelet er hva en kan oppnå ved å bruke åpne oppgaver i læring av matematikk.

I kapittel 3 presenteres metoden jeg bruker, og begrunnelse av metodevalg. Jeg gir en kort beskrivelse av utvalget etter alder, kjønn og faglige nivå. Reliabilitet og validitet er to andre ting som også tas opp her. Analyseverktøyet tar også form i dette kapittelet, der jeg beskriver prosessen for analysen av dataene mine.

Kapittel 4 består av en detaljert analyse av både oppgavene jeg har brukt i denne studien, og elevenes arbeid med oppgavene. Her presenterer jeg funnene mine og avslutter dette kapittelet med en oppsummering av funnene.

I kapittel 5 drøfter jeg funnene mine opp mot teorien jeg har brukt. Dette gjøres systematisk etter delspørsmålene jeg har presentert i innledningskapittelet.

Kapittel 6 består av avslutning av oppgaven, der jeg samler inn alle trådene og presenterer den endelige konklusjonen min.

2. TEORI

I dette kapittelet skal jeg redegjøre for hvilken læringsteori min forskning er preget av, hvilke beskrivelser av matematisk kompetanse som finnes og hvorfor jeg velger det ene foran det andre. Til slutt skal jeg presentere litteratur som gjelder åpne oppgaver.

2.1 LÆRING SOM DELTAGELSE

En viktig del av læring, ifølge Vygotskys syn på læring er at den vekker en rekke interne utviklingsprosesser som kun kan fungere når barnet samhandler med mennesker i sitt miljø i samarbeid med sine jevnaldrende (Vygotsky, Cole, John-Steiner, Scribner, & Souberman, 1980, s. 90). Denne oppgaven har et mål om å belyse hvilke matematiske kompetanser kommer til syne hos elevene når de arbeider med åpne oppgaver. Når det gjelder læringsteoretisk perspektiv, kan studien knyttes til «læring som deltakelse» metaforen.

Ifølge Lerman (2000, s. 23) har forskning i matematikk utdanning har endret perspektiv fra individ til sosialt betinget. Han daterer begynnelsen av teoretiske rammeverk som tolker kunnskapens sosiale opprinnelse og bevissthet, til seint på 80-tallet. Han kaller dette paradigme skiftet *the Social turn* (ibid). Grunnen til at Lerman kaller dette skiftet *the Social turn,* er at fremveksten av teorier som ser mening, tenkning og resonnement som produkter av sosial aktivitet.

Metaforen «læring som deltagelse» er en utfordrer til metaforen «læring som tilegnelse», som lener seg på et radikalt konstruktivistisk syn på læring (Skott, Jess, & Hansen, 2015, s. 93). På den andre siden er metaforen for læring, «læring som deltagelse», som har sine teoretiske referanser fra den russiske psykologen L.S. Vygotsky (ibid. s. 99). Forfatteren påpeker videre at den grunnleggende idéen bak Vygotsky syn på læring er å forstå hvordan det å være menneske henger sammen med menneskehetens sosiale og kulturelle utvikling (ibid).

Læring av matematikk fra et deltakelsesperspektiv betyr « at blive i stand til i stadigt større omfang at individualisere handlemønstre, der kendetegner på forhånd eksisterende sociale, faglige fælleskaber» (Skott et al., 2015, s. 98). Dette peker på at individet, gjennom å være en del av felleskapet, utvikler handlingsmønstre etter gjentatte ganger.

Radikalt konstruktivistisk syn på læring ser ikke bort fra behovet for det sosiale når det gjelder læring og bygging av kunnskap. Det som dette synet blir utfordret på er at kunnskapen ikke er konstruert hos hvert enkelt individ, men er et resultat av å være i et felleskap. I dette felleskapet har kunnskapen blitt til. Gjennom å delta i aktiviteter i felleskapet, individualiserer individet handlingsmønstre og er først nå klar til å bruke denne kunnskapen alene i andre sammenhenger når den er individualisert (Skott et al., 2015, s. 93). Forfatterne påstår at det ikke handler om å lære begreper og konstruere kunnskapen alene, og deretter bruke det sammen med andre. De påpeker at denne rekkefølgen er omvendt. Kunnskapen går fra det sosiale til det individuelle (ibid. s. 93).

2.2 MATEMATISK KOMPETANSE

Kompetansebegrepet er et viktig begrep for min studie. Derfor ser jeg det som viktig å gi definisjoner på hva kompetanse er. Kompetanse er beskrevet på følgende måter i diverse kilder: «Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning (www.regjering.no, 2017).»

I læreplanverket for kunnskapsløftet beskrives kompetanse slik:

... evnen til å løse oppgaver og mestre komplekse utfordringer. Elevene viser kompetanse i konkrete situasjoner ved å bruke kunnskaper og ferdigheter til å løse oppgaver. Det kan handle om å mestre utfordringer på konkrete områder innenfor utdanning, yrke og samfunnsliv eller på det personlige plan» (Utdanningsdirektoratet, 2016).

Felles for disse definisjonene er at en må ha evne til å bruke kunnskapen en har til å løse oppgaver. Kunnskapen er det eleven har tilegnet seg i matematikkfaget og den konkrete situasjonen er å løse åpne oppgaver i denne studien. Å vise matematisk kompetanse gjennom å besvare oppgaver og begrunne løsningene brukes ofte i Norge (Nasjonale prøver) og internasjonalt (PISA, TIMMS).

Min problemstilling i denne oppgaven er å finne ut hvilke kompetanser kommer til syne i elevenes arbeid med åpne oppgaver. I dette kapittelet skal jeg henholdsvis legge frem åtte *delkompetanser*, som til sammen utgjør helhetlig matematisk kompetanse, av Niss og Jensen (2002), de fem komponentene av matematisk kompetanse av Brekke (2002) og *Mathematical Proficiency* av Kilpatrick et al. (2001).

2.2.1 ÅTTE DELKOMPETANSER AV NISS

Niss og Jensen (2002) beskriver matematisk kompetanse slik: «[...] *matematisk kompetence* består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematik- virksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå» (s.43).

Niss og Jensen (2002, s. 43) beskriver *en* matematisk kompetanse som en rimelig avgrenset komponent av helhetlig matematisk kompetanse. Alle kompetansene som er beskrevet her til sammen utgjør matematisk kompetanse. Når det gjelder definisjon av *en* matematisk kompetanse, gir forfatterne denne definisjonen: «[...] *en matematisk kompetence er indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer*» (ibid. s.43). Dette betyr at en bestemt matematisk utfordring kan kreve at en person en bestemt matematisk kompetanse.

Utdanningsdirektoratet beskriver matematisk kompetanse i formålet til matematikkfaget som følgende: «Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er. Dette har og språklege aspekt, som det å formidle, samtale om og resonnere omkring idear» (Udir, 2013, s. 2). I denne definisjon av utdanningsdirektoratet er problemløsning og modellering viktige komponenter av matematisk kompetanse. Dette kommer også til syne i arbeidet til Niss og Jensen med kompetanser i matematikk. I min studie vil jeg bruke disse kompetansene aktivt. Niss og Jensen (2002, s. 44) deler matematikkompetanser i to hoveddeler som hver består fire underdeler. Overordnet del i kompetansene er ifølge Niss «*å spørre og svare i og med matematikk*» og «*å kunne håndtere språk og redskaper i matematikk*».

Å spørre og svare i og med matematikk

1. Tankegangskompetanse
2. Problemløsningskompetanse
3. Modelleringskompetanse
4. Resonnementskompetanse

Å kunne håndtere språk og redskaper i matematikk

1. Representasjonskompetanse
2. Symbol-og formalismekompetanse

3. Kommunikasjonskompetanse
4. Hjelpemiddelskompetanse

Niss og Jensen (2002, s. 46) påpeker at selv om disse kompetansene er delt i to hovedgrupper, skal det ikke tenkes at hver av dem kan isoleres fra de andre kompetansene og samtidig ha hver sin identitet. Videre slår forfatterne fast at alle delkompetansene til sammen kan tenkes som dimensjoner av matematikkompetansen. Det betyr at en bør tenke på alle kompetansene for å ha en helhetlig matematikkompetanse. Dette er noe jeg kommer tilbake til i analysekapittelet.

Siden oppgaven min går på å finne hvilke kompetanser som kommer til uttrykk når elevene arbeider med åpne oppgaver, vil jeg kort beskrive hver kompetanse som er beskrevet i Kompetencer og matematiklæring av Niss og Jensen (2002) og gi karakteriske eksempler på hver av dem.

2.2.1.1 Å spørre og å svare i og med matematikk

Tankegangskompetance består av å være klar over hva slags spørsmål som er karakteriske for matematikk. Det er å vite hvilke spørsmål som kan stilles og samtidig være klar over hva slags svar en kan forvente. I tillegg er det å kjenne og håndtere matematiske begreper riktig, og å forstå hva som ligger i generalisering av matematiske resultater. Forfatterne beskriver denne kompetansen også som evnen til å skille mellom forskjellige matematiske påstander. Niss og Jensen (2002, s. 47) slår fast at det er kun spørsmålene og svarene som er i kjernen i den kompetansebeskrivelsen, ikke riktighet av svar eller framgangsmåter. Noen karakteriske spørsmål og svar kan være ”*Finnes det...?” , ”Kan det tenkes at ....” , ”Er påstanden tilstrekkelig...”*. Svar på disse spørsmålene kan være i formen *”Ja, fordi....” ”Nei, fordi....”*

Problembehandlingskompetanse består av å kunne formulere, analysere og presisere forskjellige slags matematiske problemer og deretter løse disse problemene. Løsning på problemene kan gjøres enten ved rutineferdigheter eller ved å undersøke problemet og finne en løsning for det (Niss & Jensen, 2002, s. 49). Disse problemene kan være åpne, lukkede, rene eller anvendte problemer. Kompetansen er aktuell både når det gjelder ferdig formulerte problemer, og ikke ferdig formulert (ibid. s.49). Begrepene som *åpen* og *lukket* skal defineres i neste delkapittel. Niss og Jensen (2002, s. 50) peker på at matematiske problem ikke er absolutt men relativ til den enkelte. En oppgave kan være en rutineoppgave for den ene eleven som kan sette i gang rutineferdigheter, mens for den andre kan det være et problem. For eksempel: En bonde har til sammen 100 sauer og høns. Han teller til sammen 320 bein. Hvor mange sauer og hvor mange høns? Denne oppgaven kan være en rutine oppgave for en elev som kan gjøre oppgaven til et likningssett med to ukjente. For en som ikke har sett slike eksempler og ikke har lært likninger med to ukjente eller likninger i det hele tatt, kan det regnes som et problem.

Modelleringskompetanse vil si at å kunne forvandle en gitt situasjon til matematisk språk og gjøre den til et problem. Dette innebærer å oversette en gitt situasjon til matematisk språk med nødvendige matematiske uttrykk og symboler. Deretter løse det problemet som er gjort om fra en gitt situasjon til å være matematisk. Den kompetansen består også av å kunne utføre aktiv modellbygning som betyr å bringe matematikk og dens anvendelser i spill i situasjoner utenfor matematikken. Denne kompetansen er tett forbundet med problemløsningskompetansen, ifølge Niss og Jensen på den måten hvor å løse problemet som oppstår som en del av modellering (ibid. s.52). Eksempler på dette kan være «Hvor dyrt er det å bruke mobiltelefon?», «Hvordan kan grunnplanet se ut i et hus med 120 m^2?».

Resonnementskompetansen består av i å kunne følge og bedømme et matematisk resonnement. Her er fokuset på å vite og å forstå hva et matematisk bevis er. I tillegg beskriver Niss og Jensen (ibid. s.54) en annen side av denne kompetansen som er å avgjøre hvor og når et matematisk resonnement utgjør et bevis eller ikke. Denne kompetansen innebærer også å kunne tenke ut og gjennomføre uformelle og formelle resonnementer og antakelser og gjøre dem om til gyldige matematiske beviser. *Resonnementskompetansen* omfatter også å bedømme holdbarheten av en matematisk påstand. Dette inneholder å overbevise seg selv og andre om holdbarheten av en påstand. Her skal det ikke bare tenkes om bare gitte påstander eller regler i matematikk, men det handler også om å rettferdiggjøre om et svar eller en løsning for en oppgave eller et problem er riktig og tilstrekkelig (ibid.).

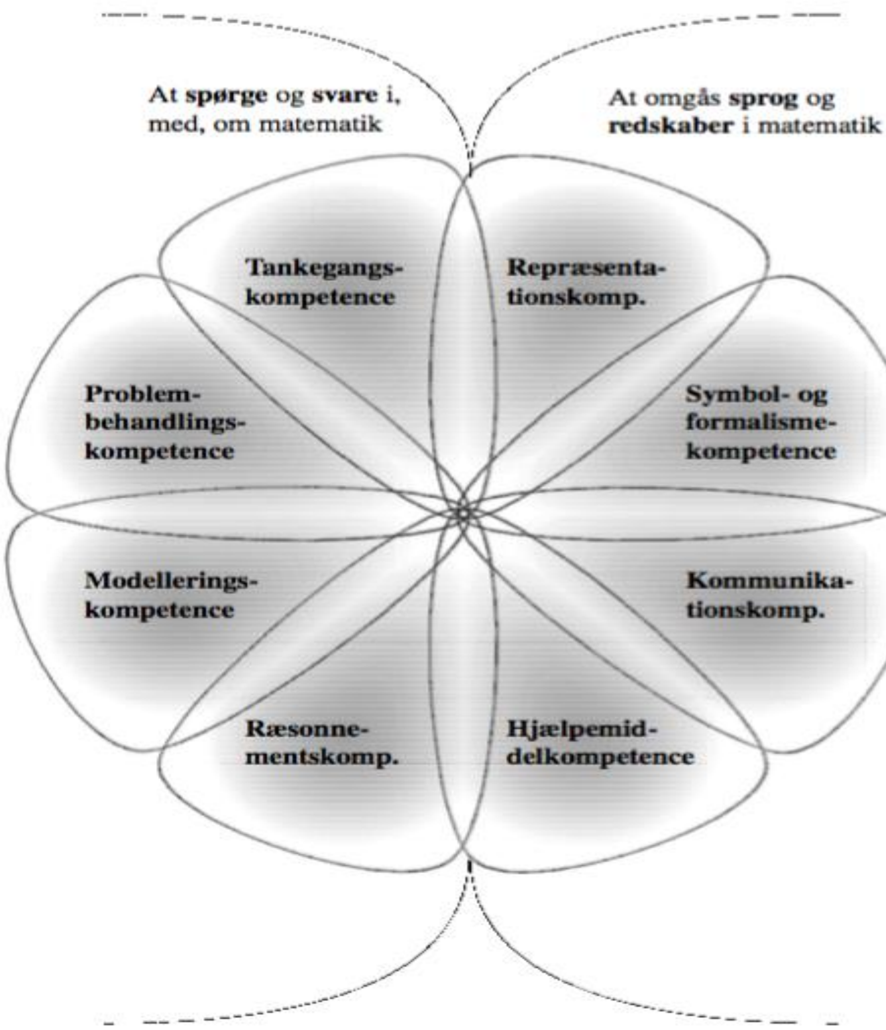
2.2.1.2 Å KUNNE HÅNDTERE MATEMATIKKENS SPRÅK OG REDSKAPER

Representasjonskompetanse er å kunne forstå og å bruke forskjellige slags representasjoner av matematiske objekter, fenomener, problemer eller situasjoner. Disse situasjonene kan være symbolske, algebraiske eller geometriske. Det er også å kunne forstå innbyrdes forbindelser mellom forskjellige representasjonsformer (Niss & Jensen, 2002, s. 56). Det handler også om å kunne veksle mellom forskjellige representasjonsformer, og se styrker og svakheter ved forskjellige former (ibids.56). For eksempel kan en funksjon beskrives gjennom en tabell, et algebraisk uttrykk, en graf eller retorisk. Å velge den mest hensiktsmessige formen ut ifra, hva en skal bruke representasjonen for, vil si noe om man sitter med den kompetansen.

Symbol- og formalismekompetanse består av å kunne avkode symbol-og formelspråk, og å kunne oversette frem og tilbake mellom symbolholdig matematisk språk og naturlig språk. Det er også å kunne behandle og bruke symbolholdige utsagn og utrykk som formler. I tillegg består denne kompetansen av å ha innsikt i de matematiske 'spillereglene' for formelle matematiske systemer (aksiomatiske teorier) (ibid. s.59). Et eksempel på denne kompetansen kan være at $A = \pi r^2$ beskriver formelen for areal av en sirkel med radius r. Et annet eksempel er om man kan bruke parenteser og de fire regneartene på en riktig måte. Det vil si at en ikke kan skrive $3 - -4$.

Kommunikasjonskompetanse er å kunne kommunisere i, med og om matematikk. På den ene siden består denne kompetansen i å kunne sette seg inn i og fortolke andres matematikkholdige skriftlige, muntlige eller visuelle utsagn og tekster, på den andre siden består det av å kunne uttrykke seg på forskjellige nivåer om matematiske situasjoner skriftlig, muntlig og visuelt overfor forskjellige kategorier av mottakere (Niss & Jensen, 2002, s. 61). Forfatterne hevder at hvilken som helst form for skriftlig eller muntlig aktivitet kan være et eksempel på uttrykk av kommunikasjonskompetanse. Denne kompetansen kan komme til uttrykk både i form av muntlige eller skriftlige aktiviteter hos avsender eller mottaker. Når en forklarer en løsning viser man denne kompetansen som avsendersiden, mens ved å fortolke matematiske utsagn fra en lærebok viser man kompetansen fra mottakersiden.

Hjelpemiddelkompetansen er å ha kjennskap til hvilke hjelpemidler som finnes og hvilke egenskaper de har til bruk i forskjellige matematiske aktiviteter, og å kunne se hvilke muligheter og begrensninger de har i forskjellige slags situasjoner. Eksempler på slike redskap kan være avhengige av hva slags stoff elevene arbeider med. Eksempel på slike hjelpemidler er Geogebra, Excel kalkulator, passer, linjal og vinkelmåler.



Figur 1: En visuell representasjon av de åtte del kompetansene (Niss & Jensen, 2002, s. 45)

2.2.1.3 Noen egenskaper ved kompetansene

Det er nevnt tidligere at kompetansene av Niss og Jensen (2002) bør tenkes forbundet, men samtidig har hver av dem har sin karakteristikk. Problemstillingen i denne oppgaven er å finne ut hvilke kompetansetyper som kommer til syne hos elever når de arbeider med åpne oppgaver. Forfatterne viser til noen bemerkninger angående kompetansenes egenskaper. I KOM-rapporten av Niss og Jensen (2002) viser de til fem bemerkninger. I denne oppgaven er det relevant med tre av disse bemerkningene. De siste to av dem skal jeg kort beskrive i slutten av dette delkapittelet. Disse bemerkningene kommer til å være en del av analysen min og er derfor relevante i teoridelen. Her skal jeg ta opp at:

1. Kompetansene er beslektet
2. Kompetansene har to sider (den produktive og den undersøkende siden)

3. Hver av kompetansene har tre dimensjoner (aksjonsradius, dekningsgrad, teknisk nivå).

Kompetansene er beslektet med hverandre både innenfor og utenfor sin hovedgruppe. Selv om to eller flere delkompetanser er tett forbundet, betyr det ikke at de legger vekt på samme sted. Et eksempel på dette er at *tankegangs-*, *resonnements-*, og *problembehandlingskompetansen* er tett forbundet med hverandre, men de legger vekt på forskjellige aspekter i faget. *Tankegangskompetansen* fokuserer på spørsmål matematikken er opptatt av, *problembehandlingskompetansen* fokuserer på strategier en kan bruke i problemløsningsfasen. Til slutt fokuserer *resonnementskompetansen* på rettferdiggjørelsen av en løsning på et problem, om løsningen er riktig og tilstrekkelig, eller om en påstand kan være riktig (Niss & Jensen, 2002, s. 63).

Andre bemerkning er at kompetanser har to sider. Den ene siden er den produktive og den andre er den undersøkende siden (ibid. s.64). Den produktive siden ved kompetansene mener forfatterne er at når en selv kan gjennomføre de prosessene hver kompetanse omfatter. Den undersøkende siden ved kompetansen handler om analyse, forståelse og kritisk bedømmelse av allerede utførte prosesser.

Den tredje og siste bemerkning forfatterne har og som jeg skal bruke i analysedelen av oppgaven er at kompetanser har tre dimensjoner. Dekningsgrad, aksjonsradius og teknisk nivå. *Dekningsgrad* av en kompetanse er et tegn på hvor mange aspekter ved denne kompetansen en person kan aktivere i forskjellige situasjoner, og i hvor høy grad dette skjer med selvstendighet. Niss og Jensen (ibid. s. 65) forklarer dette med et eksempel hvor han bruker *resonnementskompetanse.* En person som kan forstå andres beviser, men kan sjeldent eller aldri kan gjennomføre et bevis selvstendig, har mindre dekningsgrad av resonnementskompetanse enn en person som kan begge deler. Det å gjennomføre et bevis er et av flere andre aspekter av denne kompetansen. Sammen med andre aspekter av denne kompetansen, kan en bestemme personens dekningsgrad av kompetansen. Hver disse aspektene alene kan regnes som del av den produktive siden av denne kompetansen.

Den andre dimensjonen av kompetanser er *aksjonsradius*. Her påpeker forfatterne at en samling av sammenhenger og situasjoner, både teoretisk og anvendt, der personen kan aktivere kompetansen sin i, vil si noe om aksjonsradius av denne kompetansen (ibid s. 65). Dette vil bety at en person kan vise kompetansen i flere områder i faget. For eksempel har en person som kan aktivere resonnementskompetansen med suksess i en rekke matematiske emneområder som aritmetikk, sannsynlighet og geometri, en større aksjonsradius enn en som kan aktivere resonnementskompetanse kun i aritmetikk. I denne oppgaven har jeg brukt tre oppgaver som har tre forskjellige fagområder (temaer) som kan hjelpe meg til å bestemme elevenes *aksjonsradius* innenfor de ulike kompetansene.

Den siste dimensjonen som kompetansene har, er kompetansens *tekniske nivå*. Teknisk nivå av en kompetanse hos en person bestemmes av hvor konseptuelt og teknisk avanserte fakta og verktøyer personen kan aktivere for den gjeldende kompetansen (ibid s.65). En person som kan løse likninger av første grad, men ikke av likninger av andre grad, har lavere teknisk nivå av symbol-og formalismekompetansen enn en person som kan begge deler med suksess. Oppgavene i min studie har et utvidelsesaspekt der elevene kan bli bedt om å svare på nye spørsmål som kan gi dem muligheten til å vise om de har lavt eller høyt teknisk nivå av kompetansen de besitter.

Ifølge Niss og Jensen (2002, s. 64) matematisk intuisjon og matematisk kreativitet har trekk i hver av kompetansene. Forfatterne påstår at matematisk intuisjon kan en finne i tankegangs-, resonnements-, problembehandlings- og representasjonskompetansen. Når det gjelder kreativitet påstår forfatterne at kreativitet kan sees som oppsummering av den produktive siden av alle kompetansene. Det betyr at det å kunne generalisere, velge hensiktsmessige representasjonsformer, løse problemer, kommunisere disse løsningene med målgruppen, er et resultat av kreativitet.

Den siste egenskapen er at kompetansene er fagspesifikke det vil si det gjelder for matematikkfaget, men gir mening for hvert lærestoff og utdanningstrinn (Niss & Jensen, 2002, s. 66). Det vil si problembehandlingskompetansen er relevant for både barn på første trinn og elever på videregående. Det forventes andre dekningsgrad av denne kompetansen hos barn på første trinn enn for elever på videregående, men fortsatt relevant for begge trinn. En kan anvende disse kompetansene til andre fagfelt med andre formuleringer, men alle kompetansene her referer til matematikk som de er beskrevet over.

I denne studien skal jeg ta hensyn til de første tre egenskapene til kompetanser som er relevante for problemstillingen min.

2.2.2 FEM KOMPONENTER AV BREKKE (2002)

Brekke (2002, s. 4) beskriver hva vil det si *å kunne* matematikk ved hjelp av fem komponenter. Disse fem komponentene mener han utgjør det man kan kalle *matematisk kompetanse*. For å ha en helhetlig matematisk kompetanse kan disse komponentene være et godt utgangspunkt. Jeg vil videre beskrive disse komponentene med noen eksempler.

1. *Faktakunnskap* kan være definisjoner, konvensjoner, eller notasjoner i matematikk. Navn som er knyttet til begreper kan også sees som faktakunnskap (Brekke, 2002, s. 4). Eksempler på dette kan være at definisjon av *volum* av en gjenstand er det samme som plassen gjenstanden rommer, eller at et mål er definert som $1000\ m^2$. Brekke (ibid) påpeker at definisjoner eller konvensjoner er funnet tjenlig å lage i matematikken. Han gir eksempler på *notasjoner* fra tallsystemet vårt. At tallet 32 er samme som 3x10 addert med 2x1 er ikke naturgitt. Meningsinnholdet i tallet 32 er et resultat av enighet i matematikken. Tall, bokstaver og symboler i matematikk kan skrives på samme måte men det er ikke gitt at meningsinnholdet er annerledes. Når en lærer å regne med bokstaver $3a$ er ikke $3 \times 10\ +\ a \times 1$ lenger. I denne situasjonen er det *a+a+a=3a.*

2. *Ferdigheter* er prosedyrer som er etablert i flere steg hos elever (2002, s. 4). Å vite hvordan en skal gå fram for å løse et oppstilt multiplikasjonsstykke er et eksempel på en ferdighet ifølge Brekke (ibid.). Innen matematikk er det nødvendig å ha automatisert *prosedyrer* innen en rekke områder i faget. Dette kan gi mulighet til å fokusere på andre sider av arbeid med matematikk. Automatiserte prosedyrer kan gi elevene mulighet til å fokusere andre praktiske situasjoner under problemløsning (ibid.). Ferdigheter har tydelige avgrensninger og er ofte lite fleksible (Brekke, 2002, s. 5). Dette kan tyde på at bare å ha ferdigheter innen matematikk, i seg selv ikke er nok til å ha matematisk kompetanse. Det vil si at å kunne bruke bestemte algoritmer som elevene har lært tidligere må ikke nødvendigvis være et tegn på at de kan matematikk, når de ikke kan komme med løsninger i mer kompliserte og ikke gjenkjennelige oppgavetyper.

3. *Begrepsstrukturer* er en felles betegnelse for nettverk av ideer av matematiske begreper. Matematiske begreper utvikles ikke isolert, men eksisterer i nettverk av ideer (2002, s. 5). Forfatteren legger til at disse strukturene gjør matematikken meningsfylt og støtter opp under ferdighetene elevene har tilegnet seg. Brekke (ibid.) understrekker at en kan se eksistensen av disse strukturene blant annet når elevene oppdager at de har gjort feil.

Dette kan også komme frem når elever overfører eller tilpasser en prosedyre de har lært i en sammenheng, til en ny situasjon (ibid.). Et eksempel på dette er å finne en generell formel for figurtall. Telle antall brikker i de første figurene, og deretter lage en formel for *n-te* figur. En ny situasjon å bruke dette er når elevene skal lage funksjonsuttrykk av praktiske situasjoner.

4. *Generelle strategier* innebærer evnen til å velge passende ferdigheter for å løse et problem som oppstår fra en ukjent situasjon, i forskjellige kontekster. *Generelle strategier* har en viktig påvirkning når en skal utføre problemløsning i matematikk. Forfatteren gir eksempler fra USA der dette omtales som "*Higher Order Thinking Skills*" (ibid. s. 8). En forventes å kunne representere, abstrahere og generalisere, teste hypoteser og beviser, kontrollere, stille spørsmål, bruke matematisk språk (formelt og uformelt) som er passende for å løse et problem, tolke matematiske resultater i den konteksten der problemet har sitt utspring (ibid.).

   Denne komponenten inneholder flere av karakteristikkene som er beskrevet i delkompetansene hos Niss m.fl (2002). Blant annet *tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse og kommunikasjonskompetanse.*

5. *Holdninger:* Ifølge forfatteren (Brekke, 2002, s. 9)vil synet vårt på hva matematikk er, vil avhenge av hvordan læreren underviser og elevenes møte med lærestoffet. Hvis læreren ser matematikk som en disiplin av regler og fakta og deretter ser det som sin oppgave og formidle det til elevene, vil undervisningen hans preges av eksempel-regel-metode. Lærere som vil oppmuntre til en utvikling av begrepsmessige strukturer, vil inkludere mer praktisk arbeid og reflekterende diskusjoner, påstår (Brekke, 2002).

2.2.3 Taumodellen av Kilpatrick m.fl (2001)

I en rapport fra USA (Kilpatrick et al., 2001) har forskerne kommet fram til fem komponenter som de samlet kaller *Mathematical proficiency*. Denne rapporten peker på at de fem komponentene, eller som de kaller det i rapporten, *strands*, er nødvendige egenskaper for at enhver skal lære matematikk vellykket. I rapporten deres peker de på at disse komponentene er tett forbundet og er avhengig av hverandre. Komponentene illustreres som trådene i et tau (Kilpatrick et al., 2001, s. 5). Denne illustrasjonen forsterker komponentenes avhengighet og forbindelser. Disse komponentene må utvikles sammen, og det skal gjøres over tid. En kan ikke oppnå matematisk kompetanse ved å fokusere på bare en av dem eller to (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Forfatterne i denne rapporten skriver at det ikke finnes et begrep som kan fange opp ekspertise, kompetanse, kunnskap eller fasilitet i matematikk. De bruker et samlet begrep *Mathematical proficiency*. Jeg velger å bruke samme begreper som er brukt i et dokument utarbeidet av Matematikksenteret (2014, s. 11).

1.Forståelse (Conceptual understanding): Denne tråden i tauet referer til forståelse av matematiske ideer, begreper, fakta og ikke minst metoder. Når det gjelder fakta og metoder, vil elever som har utviklet *conceptual understanding* i matematikk, kunne mer enn isolerte fakta. De forstår hvorfor et begrep eller en ide er viktig, og i hvilken sammenheng det er nyttig i matematikk (Kilpatrick et al., 2001, s. 118). En viktig indikator av å inneha denne kompetansen er å være i stand til å representere matematiske situasjoner på ulike måter og å vite hvordan disse ulike måtene kan være nyttige (ibid. s. 119). For at elevene skal utvikle *conceptual understanding* i matematikk er det viktig å fokusere på framgangsmåter framfor bare løsninger (Matematikksenteret, 2014, s. 12). Når elevene tilegner seg forståelse innenfor et område i matematikk, er de i stand til å se forbindelser blant konsepter og prosedyrer innen det området. De kan gi argumenter for å forklare hvorfor noen fakta er en konsekvens av andre (Kilpatrick et al., 2001, s. 119). Denne komponenten har fellestrekk med *tankegang-* og *representasjonskompetansen* hos Niss (2002) med tanke på viktige ideer, konsepter og fakta i matematikk samt ulike måter å representere matematiske situasjoner.

2.Ferdigheter (Procedural Fluency) er kunnskapen om prosedyrer og kunnskapen om når og hvor man skal bruke disse prosedyrene på en passende måte, å ha ferdigheter til utføre dem fleksibelt, nøyaktig og effektivt (Kilpatrick et al., 2001, s. 121). Disse prosedyrene kan være papir-blyant, hoderegning, bruke digitale hjelpemidler (kalkulator, datamaskin, konkretiseringsmaterialer). Elevene bør være effektive når de utfører beregninger for å ikke sjekke det fra gangetabeller eller andre hjelpemidler. Effektivitet og nøyaktighet er viktig når det gjelder prosedyrer. Både effektivitet og nøyaktighet kan utvikles ved hjelp av øving som også hjelper elevene til å ha flyt i utregningene. Dette skal ikke forståes som at elevene skal øve på bestemte prosedyrer, men heller å forstå hva prosedyren er til (ibid. s. 121). Her er det en synlig forbindelse mellom komponentene forståelse og beregning. For at elevene skal ha flyt i beregningene, trenger de å ha et repertoar av beregningsverktøy (ibid s. 122). Når elevene har mangel på utregningsstrategier, vil de ha problemer med å forstå matematiske ideer eller problemløsning fordi kan fokusere på beregningene og dermed miste de viktige forbindelsene.

Jeg tolker denne komponenten som tilsvarende *symbol og formalismekompetanse* og *hjelpemiddelkompetanse* og *representasjonskompetanse* hos Niss.

3. Anvendelse (Strategic Competence) er en komponent som er beslektet med å være i stand til *å formulere, representere* og *løse* matematiske problemer. Forfatterne forbinder denne komponenten med problemløsning og problemformulering i litteraturen. Elever løser ofte problemer som er fullstendig definerte på skolen, mens utenfor skolen møter de situasjoner der det er vanskelig for dem å tolke hva som er problemet. Dette viser at elever skal ha erfaring og de trenger å øve på å formulere problemer like mye som å løse dem. Et variert innhold av ulike strategier i problemløsning og formulering av problemer, er det som kreves for å inneha denne komponenten i matematisk kompetanse. I tillegg til det, er det også viktig å vite når disse strategiene er nyttige for et spesifikt problem (Kilpatrick et al., 2001, s. 124). Rutineoppgaver er der elever vet hvilke metoder de skal bruke til løse oppgaven. Denne oppgavetypen krever å reprodusere og anvende en løsningsmetode, mens en ikke-rutineoppgave krever produktiv tenkning fordi elevene trenger å finne en metode for å forstå og løse denne oppgavetypen. Niss m.fl (2002) har beskrevet disse kjennetegnene under *problemløsning-* og *modelleringskompetanse.*

4.Resonnering(Adaptive reasoning) handler om å tenke logisk og forklare hvordan man tenker (Matematikksenteret, 2014, s. 16). Denne komponenten er beskrevet som kapasitet for logisk tenkning i relasjoner blant ideer og situasjoner en møter i matematikk. Denne komponenten er limet som holder sammen alt i matematikk, mener forfatterne. En bruker resonnering til å navigere gjennom fakta, prosedyrer, konsepter og løsningsmetoder, og til å se om alt stemmer med hverandre (Kilpatrick et al., 2001, s. 129). Når det gjelder *resonnering*, vil forfatterne legge til mer i begrepet. De vil i tillegg til begrunnelser og forklaringer, ta med intuitiv og induktiv resonnering. Intuitiv og induktiv resonnering som er basert på mønster, metaforer og analogi er også del av denne komponenten (ibid. s. 130). Elevene må bli bedt om å forklare og begrunne prosedyrene de har brukt slik de utvikler denne komponenten (Matematikksenteret, 2014, s. 16).

5.Engasjement(Productive Disposition) vil si at en ser hensikten med å lære matematikk, oppfatte matematikken som nyttig og verdifull, og å ha tro på at jevn innsats gir gode resultater (Kilpatrick et al., 2001, s. 130). En viktig egenskap ved engasjement er at den er driveren av de andre komponentene av matematisk kompetanse. *Engasjement* hos elevene påvirker de andre komponentene. Når elevene kan anvende det de har lært i matematikk i nye oppgavetyper, blir holdningene og selvtilliten deres mer positiv og dermed blir det mer meningsfylt å lære matematikk. For at elever skal utvikle forståelse, være i stand til å gjøre beregning, kunne anvende matematikkunnskapen sin i situasjoner de møter i, og tilegne seg resonneringsferdigheter, må de tro på at matematikk er forståelig og ikke er vilkårlig. De må også tro at den kan læres og brukes, og ikke minst at de har evne til å forstå det (Kilpatrick et al., 2001, s. 131).

2.2.4 VALG AV RAMMEVERKET FOR MATEMATISK KOMPETANSE

Inntil nå har jeg prøvd å vise hvilke beskrivelser av matematisk kompetanse som finnes i faglitteraturen. Her vil jeg prøve å begrunne hvilke av beskrivelsene jeg skal bruke i mitt forskningsprosjekt. Jeg har brukt Niss og Jensen (2002), Brekke (2002) og Kilpatrick et al. (2001). Det som er felles for alle tre er at ingen av dem karakteriser arbeidet som et forskningsprosjekt som har en metode og har teorier. De velger å kalle det en rapport og disse rapportene er bestilt fra utdanningsadministrasjon i de landene de er skrevet i, henholdsvis Danmark, Norge og USA. Niss og Jensen (2002, s.17) gir en beskrivelse av hvilken matematisk kompetanse elevene skal ha innen forskjellige utdanningstrinn fra barneskole til voksenopplæring. Dette kommer av at prosjektet deres angår befolkningens matematikkunnskaper. Kilpatrick et al. (2001 s. ix) tar utgangspunktet i førskole til 8.trinn i USA når de beskriver komponentene i matematikkompetanse. Brekke (2002) sine komponenter kommer til syne i forbindelse med et prosjekt for å utvikle en prøve- og etterutdanningspakke for lærere for intern vurdering og diagnostisk undervisning. Niss og Jensen (2002) deler matematisk kompetanse i to overordnede deler og deretter fire underdeler i hver av dem, mens Kilpatrick et al. (2001) og Brekke (2002) har fem komponenter som til sammen utgjør matematisk kompetanse. Noe som er felles hos Niss og Jensen, og Kilpatrick et al. er at begge beskriver komponentene i matematisk kompetanse tett bundet sammen og avhengig av hverandre. Begge mener at kompetansene ikke kan være isolert og utviklingen av disse skjer over tid. I noen tilfeller peker begge på at noen av komponentene kan være overlappende. Brekke (2002) har ikke nevnt noe om disse komponentene kan være avhengige eller tett forbundet med hverandre.

Det er mulig å finne direkte eller indirekte koblinger mellom Niss og Jensen, og Kilpatrick et al. sine kompetanser og delvis med Brekke sine komponenter. For eksempel *tankegangs-* og *representasjonskompetanse* hos Niss og Jensen har noen felles karakteristikker med komponenten *conceptual understanding* hos Kilpatrick et al. og delvis med *begrepsstrukturer* av Brekke. Dette fordi alle de overnevnte komponentene peker på viktigheten av matematiske ideer, og et valg av hensiktsmessige representasjonsformer som kan være nyttig for en bestemt situasjon. Når Kilpatrick et al. (2001) beskriver *anvendelse* ser en flere fellestrekk med *problemløsning*- og *modelleringskompetanse* hos Niss og Jensen (2002). Brekke (2002) og Kilpatrick et al. (2001) har en komponent som Niss og Jensen ikke har. Brekke kaller det «holdninger», mens Kilpatrick et al. (ibid.) bruker «engasjement». Alle disse tre beskrivelsene bygger mer eller mindre på felles karakteristikk av matematikkompetanse, men med forskjellige navn og fordelinger.

Når disse tre beskrivelsene av matematisk kompetanse har noe felles og noe annerledes, har jeg behov for å se hvilken karakter matematisk kompetanse har hos de tre forfatterne. Mitt valg av rammeverket er et resultat av problemstillingen min. Problemstillingen min tar for seg hvilke kompetanser hos elever som kommer til syne når de arbeider med åpne oppgaver. Denne problemstillingen krever å se elevene i arbeid, og handlingene vil vise kompetansene som kommer til uttrykk. Både den undersøkende (refleksjon, analyse og bedømmelse) og produktive siden av kompetansene er atferdsmessige i sin natur. Fokuset her er om personen er i stand til å utføre de relevante aktivitetene. Atferdsmessig karakter skal forståes som individets respons til gitte aktiviteter (Niss & Jensen, 2002, s. 64). Denne presiseringen av kompetansenes karakter, er etter min mening, det som skal være begrunnelse for rammeverket for min problemstilling. Et annet punkt som Niss og Jensen (2002) tar opp er at kompetansene har en atferdsmessige karakter. Dette punktet er ikke direkte synlig hos Brekke (2002) eller Kilpatrick et al. (2001).

Matematisk kompetanse som er beskrevet av Niss og Jensen er i grunn teoretisk bygget, det vil si at de ikke er funnet ut fra empiriske studier (Niss, Bruder, Planas, Turner, & Villa-Ochoa, 2016, s. 622). Forfatterne mener videre at det er empirisk mulig å oppdage eller identifisere noen eller alle kompetanser hos personer. Dette kan gjøres når personer er i en matematisk aktivitet. Aktiviteten i denne studien er elevenes arbeid med åpne oppgaver. Selv om det er mulig å identifisere delkompetanser, er det noen komplikasjoner som forskeren må ta hensyn til. Forskeren må være klar over to viktige punkter når han/hun vil forske på matematisk kompetanse empirisk. Det ene er at, som det er nevnt i Niss og Jensen (2002), kompetansene er tett bundet med hverandre. Dette kan gjøre at en kompetanse kan komme til syne sammen med mange andre, på grunn av at de overlapper hverandre som vist i figur 1. Det andre er at kognitive kompetanser som *resonnering* ikke er utviklet alene i isolasjon. En person som skal begrunne resonnementet sitt vil ofte bruke *kommunikasjonskompetanse* for å formidle, og kanskje bruke *representasjonskompetanse* og *formalisme- og symbolkompetanse* for å nå en konklusjon og presentere løsningen sin. Til konklusjon mener forfatterne at det er empirisk krevende å isolere en kompetanse fra de andre og forske på bare en kompetanse (Niss et al., 2016, s. 623). Derfor vil denne oppgaven fokusere mer på alle kompetansene under ett, heller enn bare en eller noen kompetanser alene. For å gi svar på problemstillingen min kommer jeg til slutt til å vise hvilke kompetanser det er snakk om, men jeg skal ikke skille dem fra hverandre hvis den ene er avhengig av den andre i bestemte situasjoner. Dette kan observeres i analyse kapittelet når jeg skal finne ut hvilke delkompetanser det er snakk om i elevenes arbeid med åpne oppgaver.

2.4 Hva er åpne oppgaver?

Problemstillingen min er å belyse hvilke kompetanser som kommer til syne når elever arbeider med åpne oppgaver. Derfor er det nødvendig å definere hva åpne oppgaver er. En åpen oppgave i matematikk kan beskrives med at oppgaven ikke er fullstendig beskrevet. Det vil si at oppgaven ikke har all nødvendig informasjon en trenger for å løse den. Oppgaver som beskriver nøyaktig hva elevene skal gjøre, både med mål og hva de skal gjøre, er lukkede oppgaver (Pehkonen, 1997, s. 8). Pehkonen mener at de vanlige skoleoppgavene er lukkede (ibid. s.8). Et eksempel på slike oppgaver kan være «Hva er differansen mellom 25 og 16?» Dette er et eksempel på en fullstendig beskrevet oppgave og elevene vet nøyaktig hvordan de kommer fram til svaret så lenge de har en prosedyre for hvordan denne oppgavetypen kan løses. Åpne oppgaver kan beskrives etter egenskaper som er i tabellen under (figur 2). Denne beskrivelsen tar for seg oppgavetyper ut fra hvordan oppgaven starter og hva målet med oppgaven er. Denne tabellen viser at så lenge oppgaven ikke er fullstendig beskrevet, både i starten med gitt informasjon og i målet hvor resultatet eller produktet skal presenteres, er det en åpen oppgave. Matrisen nede viser at en oppgave kan være åpen oppgave på flere måter.

goal situation / starting situation	CLOSED (i.e. exactly explained)	OPEN
CLOSED (i.e. exactly explained)	closed problems	open-ended problems real-life situations investigations problem fields problem variations
OPEN	real-life situations problem variations	real-life situations problem variations projects problem posing

Figur 2: Oppgavenes klassifisering iht. deres start og mål situasjon (Pehkonen, 1997, s. 9)

Åpne oppgaver kan ha flere riktige svar (Nohda, 2000, s. 40) og ha flere måter å løse oppgaven på (Sullivan, Mousley, & Jorgensen, 2009, s. 21). Løsning på oppgaver kan være prøve-feile, eller finne en mer systematisk algebraisk tilnærming, eller bruke grafer og andre representasjoner for å begrunne svaret sitt. Sullivan, Mousley, et al. (2009, s. 19) mener at bruk av åpne oppgaver kan støtte læring i matematikk. Ifølge forfatterne skjer dette på grunn av at arbeid med åpne oppgaver kan skape situasjoner som undersøkelse, problematisering, generalisering, kommunikasjon og forståelse av prosedyrer (ibid. s.19). Felles betegnelse for åpne oppgaver ifølge alle definisjonene er at de har flere løsninger og løsningsmetoder, ikke minst de leder til utforskning.

2.4.1 Et teoretisk rammeverk for åpne oppgaver

En oppgave kan ha flere riktige svar samtidig som den ikke er åpen. Antall svar for oppgaven alene er ikke nok for å bestemme om en oppgave er åpen eller lukket. Derfor tar jeg med et rammeverk som jeg skal bruke i analyse av hvorvidt oppgavene jeg bruker i studien min er åpne. Det rammeverket er utviklet av Yeo (2017). Ifølge Yeo (2017, s. 189) kan en oppgave være åpen i ulike aspekter, og i hvilket aspekt det er åpent kan påvirke de tankeprosessene som krever til å løse den. Han bruker fem variabler som viser på hvilken måte oppgaven er åpen eller lukket. Her skal jeg gi beskrivelse av disse variablene. Jeg bruker norske begreper som jeg har oversatt selv. Disse variablene er oppgavens: svar (answer), mål (goal), løsningsmetode (method), kompleksitet (complexity) og til slutt mulighet for utvidelse (extension).

Svar: Yeo (2017, s. 179) diskuterer definisjonen av åpne oppgaver når det gjelder svarene som en kan få. Her mener han at det ikke holder å kalle en oppgave åpen når de har flere svar. Han bruker en andregradsligning[1] der en skal finne røttene for ligningen. Det er to riktige svar. Dette kan ikke være en åpen oppgave selv om det er to riktige svar. Dette fordi de to riktige svarene sammen er riktig løsning for oppgaven. Det vil si at alle svarene kan bestemmes for denne oppgaven. En annen oppgavetype han diskuterer er «å bygge en lekeplass». Denne oppgavetypen er en åpen oppgave siden elevene kan komme med forskjellige design av lekeplasser og alle design er riktige og kan være forskjellige, men ikke alle mulige design. Det betyr at vi kan lage så mange design som mulig og alle kan være valide (ibid. s.179). Han konkluderer med at en oppgave der en ikke kan finne eller bestemme alle løsningene, er oppgaven en åpen oppgave når det gjelder svar. Hvis en kan bestemme alle løsningene i oppgaven har oppgaven et lukket svar.

Mål: Generelt kan man si at en oppgave har et åpent mål hvis oppgaven ikke peker på et bestemt produkt (Yeo, 2017, s. 181). Det vil si når formulering av oppgaven ikke bestemmer hva elevene skal finne, er den åpen. En oppgave der elevene blir bedt om å finne areal av en trekant er et eksempel på en oppgave med lukket mål siden elevene blir bedt om å finne et spesifikt produkt. Oppgaver som har vagere formuleringer som «undersøk» kan tenkes som «ill-defined» (ibid.), det vil si ikke presis formulert mål. Elevene her kan velge mål selv og undersøke oppgavene som de vil. En annen formulering som «finn så mange mønstre som mulig» har en «well-defined» (ibid.) mål, som leder elevene til å finne sammenhenger. Dette skal ikke bety at med andre formuleringer har elevene et lukket mål. Det er fortsatt mulig for elevene å velge de sammenhengene de vil undersøke eller de ser. Disse formuleringene kan sees som eksempler på oppgaver med åpent mål (ibid. s.181).

Metode: En oppgave er lukket etter metodekriteriet hvis det bare finnes en framgangsmåte som leder til svaret, eller hvis fremgangsmetoden inneholder kjente rutineprosedyrer (Yeo, 2017, s. 183). En kan tenke at alle oppgaver har en åpen metode siden alle kan løse en oppgave på forskjellige framgangsmåter. Yeo mener at det at det finnes forskjellige metoder for løsning av en oppgave ikke er nok for å kalle det en åpen oppgave etter metode kriteriet. Metoden elevene bruker for å komme fram til en løsning, bør inneholde elementer av problemløsning som leder til en oppdagelse. Det er også nødvendig å påpeke at åpenhet av metode er relativt.

[1] Solve the quadratic equation $x^2 + 2x - 3 = 0$

For den som ser og bruker en metode for løsning vil det være lukket, mens for den som ser flere metoder vil det være åpen.

Kompleksitet: Dette kriteriet handler om hvordan oppgaven er presentert til målgruppa. Spørsmålet som gjelder her er om oppgaven passer til elevenes faglige nivå og om oppgaven inneholder tilstrekkelig informasjon for at elevene kan finne løsninger (Yeo, 2017, s. 184). Forfatteren oppsummerer dette kriteriet med at en oppgave er lukket etter sin kompleksitet dersom oppgaven er lett nok og inneholder nok informasjon for at elevene kan løse den. Hvis det ikke er nok informasjon i oppgaven, er den åpen etter kompleksitet. Læreren kan gjøre oppgaven mindre kompleks, og dermed mindre åpen ved å legge til mer informasjon i oppgave teksten (ibid. s. 185). Yeo (2017, s. 184) mener at en oppgave som gis til grunnskoleelever fra et videregående fag, kan være kompleks for dem, mens det kan være en lett oppgave for videregående elever. Relativitet er relevant her også. Det vil si kompleksitet vil være personavhengig.

Utvidelse: Hensikten med å utvide en oppgave er å oppdage nye matematiske sammenhenger og mønstre, og ikke minst generalisere funnet hvis det er mulig mener Mason (sitert i Yeo, 2017 s.186). En oppgave kan utvides så enkelt som å stille spørsmålet «hva hvis nå?». På denne måten kan en lede elevene til å finne nye sammenhenger. Forfatteren påpeker at ikke alle oppgaver bør utvides hvis de skal lede til en ny oppgave. Kort oppsummert kan en si at en oppgave er åpen hvis den kan utvides, og denne utvidelsen leder til oppdagelse av nye mønstre og sammenhenger. Hvis det ikke gjør det, er den lukket (ibid. s.186). Det vil si at utvidelses aspekt er avhengig av hva en utvidelse vil legge til. Hvis det er slik at det blir en ny oppgave av samme type, bør det ikke utvides.

2.5 Oppgaver i matematikktimene og åpne oppgaver

Arbeid med oppgaver er i sentrum av matematikkopplæring på alle nivåer. Oppgavene som er brukt i matematikkundervisning ses som aktiviteter i klassen (Christiansen & Walther, 1986, s. 244). Ifølge Alrø og Skovsmose det er et kjent mønster i det tradisjonelle klasseværelse. Det er at læreren går gjennom et stoff fra læreboken og produserer en algoritme som følger læreboken tett, deretter arbeider elever individuelt eller i grupper med oppgaver fra læreboken som følger samme algoritmen. Læreren hjelper elevene, og læreren kontrollerer om elevene har gjort oppgaven riktig i overenstemmelse med fasiten. Som hjemmearbeid blir det flere oppgaver fra læreboka av samme type (Alrø & Skovsmose, 2005, s. 5). De mener videre at et slikt mønster i undervisningen skaper et bestemt kommunikasjonsmønster mellom lærer og elev. Dette kaller de for «*Gæt Hvad Læreren Tænker*». Denne utviklingen gjør at elevene svarer instrumentelt, og så lite som mulig. Forskjellige typer av oppgaver gir forskjellige muligheter for læring (Skott et al., 2015, s. 212).

Matematikkundervisning elever blir eksponert for, har stor betydning for livet deres når de blir voksne, mener Boaler (2012, s. 2). Hennes forskning viser at elever som har hatt en åpen tilnærmet matematikkundervisning (open-ended mathematics approach), gjorde det bedre i diverse tester, enn elever som har hatt lærebok-og fasitpreget undervisning. Det som menes med åpent tilnærmet matematikk her er at elevene har arbeidet med oppgaver som ikke går ut på at elevene reproduserer lærte algoritmer, men heller oppgaver der de selv må finne metoder.

Oppgavetyper som er brukt i undervisning har stor effekt på elevenes tenkning og engasjement som påvirker elevenes læring (Stein, Grover, & Henningsen, 1996, s. 462). Sullivan, Clarke, og Clarke (2012) slår fast at når elever arbeider med åpne oppgaver engasjerer de seg i arbeidet annerledes enn de som arbeider med lukkede oppgaver. Dette fordi åpne oppgaver stort sett ikke er fullstendig definert, og derfor blir ikke elevene bedt om å bruke en bestemt regel eller algoritme. De må bearbeide en strategi for å løse oppgaven og finne en passende måte å kommunisere sin løsning.

Oppgaver i matematikkopplæring er viktig for undervisning av matematikk, og elevenes læring er bestemt ved oppgavetypen og måten disse oppgavene brukes på (Sullivan, Clarke, & Clarke, 2009, s. 87). Oppgaver i matematikkbøkene kan kategoriseres på flere måter. Oppgavene kan være åpne eller lukket (Pehkonen, 1997, s. 8), sette høye eller lave kognitive krav (Stein & Smith, 1998, s. 10), invitere til et utforskende aktivitet i undersøkelseslandskap (Alrø & Skovsmose, 2005, s. 8).

En av de grunnene til at lærere ikke bruker åpne oppgaver ofte i undervisningen er på grunn av mangel på ressurser eller tid (Sullivan, m.fl, 2012). En måte å lage oppgaver som kan være åpne oppgaver, er å gjøre endringer i den opprinnelige oppgaven i en lærebok i matematikk som er en lukket oppgave ifølge Prestage og Perks (2001, s. 19). Disse endringene kan være å *fjerne noe av informasjonen*, *endre informasjonen* eller *tilføye informasjonen* etter hva en vil legge vekt på (ibid. s.20-22).

Ifølge Zaslavsky (2005, s. 302) har åpne oppgaver et aspekt av usikkerhet når det gjelder å finne en løsning. Han påstår det fordi åpne oppgaver og oppgaver som krever utforskning ofte vil kreve å finne et mønster, forbindelser eller relasjoner som ikke er kjent for eleven (ibid s.302). En slik usikkerhet kan gi mulighet for diskusjoner mellom lærende og lærer i en matematisk aktivitet. Usikkerhetsaspektet kan gi muligheter for at noen kognitive kompetanser som resonnering og tankegang kan observeres under arbeid med åpne oppgaver. I en ikke fullstendig definert oppgave kan elevene bruke prøve og feile-metoden som en metode med verdier de velger. Ifølge Cifarelli og Cai (2005, s. 322) strategier som går ut på å velge verdier som stemmer for løsninger kan stimulere utviklingen av mer sofistikerte relasjoner mellom verdiene og i oppgaven. I denne forskningen viser de eksempler på to elever der den ene forholder seg til verdiene i oppgaven, mens den andre eleven generaliserer mønstre eleven har funnet (ibid. 322). Flere metoder for å komme svar til en oppgave kan stimulere elevenes problembehandlingskompetanse.

Åpne oppgaver kan gi mulighet for arbeid på sitt eget nivå, siden det ikke er et riktig svar, og oppgaven ikke er begrenset når det gjelder produktet elevene skal komme fram til. Åpne oppgaver er mer tilgjengelige for faglig svakere elever enn lukkede oppgaver. Det er fordi de ikke trenger å være avhengig av en prosedyre de har blitt introdusert. De kan undersøke oppgaven på deres måte siden åpne oppgaver regnes som å ha flere løsningsmetoder (Sullivan, Mousley, et al., 2009, s. 20). Det bør understrekkes at oppgavens kompleksitet må være passelig for den elev gruppa det gjelder.

Når elever møter oppgavetyper som likner oppgaver i boka, bruker de resonnering som hviler på å huske bestemte prosedyrer og algoritmer (Boesen, Lithner, & Palm, 2010, s. 103). Når oppgaven blir annerledes enn det de har sett i lærebøkene, det vil si når de ikke har en bestemt prosedyre for løsningen, bruker elevene en mer komplisert resonnering (ibid.). Åpne oppgaver er ofte ulike enn oppgavene i lærebøker. Derfor kan de gi elevene mulighet til å bruke en mer komplisert resonnering. Dette kan gi mulighet for å ha en høyere grad av teknisk nivå og dekningsgrad av de forskjellige kompetansene hos elevene etter kompetansene beskrevet hos Niss og Jensen (2002).

Lærere bruker ofte oppgaver som er brukt tidligere som ofte har en løsningsprosedyre for å engasjere elevene sine i en matematisk diskurs. Slike oppgaver lener seg ikke på samtaletyper som leder til rike matematiske diskurser. Lærere kan lettere skape matematiske og produktive rike diskurser ved å velge oppgaver som har flere løsningsstrategier, har sammensatte matematiske ideer (Franke, Kazemi, & Battey, 2007, s. 234). Denne beskrivelsen passer til definisjon av åpne oppgaver som er presentert i teori kapittelet. Med slike oppgaver som sannsynligvis skaper rike matematiske diskurser, mener jeg at elevene kan ta i bruk flere kompetansetyper blant annet resonnements-, tankegangs-, og kommunikasjonskompetanse. På grunn av at kompetansene er tett forbundet, vil det resultere at andre kompetanser som blir overlappet ovennevnte kompetansene også vil tas i bruk.

3. METODE

Oppgaven min baserer seg på elevenes arbeid med åpne oppgaver og kompetanser som kommer til syne. Derfor er det viktig for meg å se og høre hvilke kompetanser som kommer til syne når elevene arbeider med slike oppgaver. I dette kapittelet skal jeg redegjøre for valg av metode for mitt forskningsarbeid. Opprinnelsen for ordet metode kommer fra det greske "*methodos"* som betyr å følge en bestemt vei mot et mål (Johannessen, Tufte, & Christoffersen, 2010, s. 29). En forskers mål med forskningsarbeidet er avgjørende for valg av metode og forskningsdesign (Cohen, Manion, & Morrison, 2013, s. 78). Innen samfunnsvitenskapelig forskning brukes det både kvalitative og kvantitative metoder. Kvalitative metoder legger vekt på fortolkning av tekster, mens kvantitative metoder legger vekt på opptelling av kategoriserte fenomener (Johannessen et al., 2010, s. 99). Det er mulig å bruke begge metodene i samme forskningsarbeid. Denne metoden kalles for «mixed methods» og er tredje metoden som er basert på en syntese av kvalitativ og kvantitativ forskning. Denne anerkjenner viktigheten av tradisjonelle forskningsmetoder (kvalitativ og kvantitativ), men tilbyr en ny forskningsmetode som ofte gir mer informative, balanserte, helhetlige og brukbare forskningsresultater (Johnson, Onwuegbuzie, & Turner, 2007, s. 129).

3.1 KVALITATIV METODE

Et av særtrekkene ved kvalitative metoder er at forskeren kan gå i dybden for å forstå fenomenet og at forskeren får mange opplysninger om få undersøkelsesenheter (Dalland, 2017, s. 53). Samfunnsvitenskapens studieobjekt er kompleks og kan formidle meningene og oppfatningene sine gjennom språk. Dette vil kreve et mangfold av framgangsmåter og metoder. Datainnsamling i kvalitative undersøkelser kan gjøres på forskjellige måter som observasjoner, intervju og gruppesamtaler. Dataene i form av lyd, bilde eller tekst må dokumenteres (Johannessen et al., 2010, s. 31-33).

3.1.1 OBSERVASJON

Begrepet *observasjon* brukes om det å iaktta, se, oppdage eller følge med. Forskerens ønske er å tilegne seg ny kunnskap ved observasjon. Man finner ofte detaljerte beskrivelser av mellommenneskelig samhandling og menneskers aktiviteter (Johannessen et al., 2010, s. 117). Mitt prosjekt fokuserer på åpne oppgaver og kompetanser. Dette i seg selv bestemmer hvilken metode jeg skal bruke. Jeg trenger å se hva elevene gjør, og hvordan de løser oppgavene, og deres begrunnelser og formidling samt deres diskusjoner seg i mellom når de arbeider med åpne oppgaver. Resultat av denne prosessen skal gi meg mulighet til å fastslå hvilke kompetanser som kommer til uttrykk. Man må observere et fenomen direkte, hvis intensjonen er å forstå kompleksiteten, mener Johannessen et al. (2010, s. 117). Videre påpeker forfatterne at det å være tilstede i en setting er den eneste måten å skaffe seg gyldig kunnskap. Ved å være tilstede kan en få med seg mye som foregår i settingen ved å se og lytte. Derfor mener forfatterne at observasjon egner seg godt når forskeren vil være tilstede der forskningen foregår. Dette gir økt oversikt over samhandlingen mellom forskningsobjektene (ibid.). Johannessen et al. (2010, s. 117) beskriver fire begreper som kan være nyttig for observasjon. Disse begrepene er *observatør*, *felt*, *setting* og *analyseenheten*.

3.1.2 Begreper

Denne delen vil gi en beskrivelse av begrepene som er en del av observasjon som metode. I tillegg skal det bestemmes hva de forskjellige begrepene er i forbindelse min studie.

Observatørrollen

Observasjon som metode gir muligheter for forskjellige feltroller. Disse feltrollene kommer av hva forskeren ønsker å finne ut i studien. Johannessen et al. (2010, s. 127) gir fire feltroller som forskeren kan ha.

Under skjult observasjon mener Johannessen et al. (2010, s. 127) at forskeren kan velge to roller, *deltakende observatør* og *ren observatør*. Når forskeren er deltagende observatør bruker hun/han en skjult observasjon der han/hun blir en del av miljøet hun/han studerer. Forskeren er med på alt som foregår i feltet og oppfører seg som en av de som studeres. Denne rollen skaper etiske dilemmaer når informantene ikke vet at de blir observert. Forskeren kan ha en annen rolle under skjult observasjon, *ren observatør*. Denne rollen innebærer at forskeren ikke deltar i feltet og informantene vet ikke at de blir observert.

Under åpen observasjon har forskeren andre mål og roller i feltet. Her gir Johannessen et al. (2010, s. 127) to eksempler på roller forskeren kan ha: *observerende deltaker* og *tilstedeværende observatør*. Rollen *observerende deltaker* innebærer at forskeren blir en del av det miljøet hun/han studerer, og deltar i samhandlingene mellom informantene (ibid.), men har fortsatt en tydelig forskerrolle. En annen rolle forskeren kan ha under åpen observasjon er *tilstedeværende observatør*. Denne rollen gir ifølge Johannessen et al. (2010, s. 128), forskeren enda tydeligere forsker status enn det er i *observerende deltaker*. Når forskeren er *tilstedeværende observatør,* deltar hun/han i mindre grad i den vanlige samhandlingen mellom informantene hun/han studerer. Forskeren er engasjert gjennom samtaler og intervjuer, men utenforstående.

Et annet begreper som bør beskrives i forbindelse metoden jeg velger, er *feltet*. Min problemstilling tar for seg elevenes arbeid med åpne oppgaver og kompetansene som kommer til syne under dette arbeidet. Elever befinner seg på en videregåendeskole og derfor blir mitt felt i denne studien den videregåendeskolen.

Setting er for observasjonen er hvor den konkret gjennomføres, ifølge Johannessen et al. (2010, s. 119). Observasjonen i denne studien foregår i et grupperom som tilhører klasserommet elevene vanligvis har undervisning. Med denne studien vil jeg gå i dybden i noen få grupper, for å ha en bedre oversikt over samhandling mellom gruppene.

Analyseenheter er de konkrete elementene som en studie bruker som utgangspunkt. Mine analyseenheter er tre grupper som hver består av tre elever. Disse enhetene består av elever på forskjellige faglige nivå på bakgrunn av lærerens vurdering.

I denne delen har jeg beskrevet begrepene som er relevante for et observasjonsstudium. Med dette viser jeg at jeg både har rollen *observerende deltaker* og *tilstedeværende observatør*. Jeg viser også at observasjonen min foregår åpent, hvor *feltet* er en videregåendeskole, og *settingen* er et grupperom. Til slutt viser jeg at analyseenhetene mine er tre grupper à tre elever med forskjellige faglige nivå. Johannessen et al. (2010, s. 128) mener at det er mulig for forskeren å bytte hvilken rolle hun/han har under forskningsarbeidet. Dette er mulig når observasjonen foregår åpent.

3.1.3 Min rolle i undersøkelsen

Min observasjon foregår åpent, og jeg deltar i liten grad i elevenes samtaler. Under datainnsamlingen er jeg tilstede og observerer stort sett hva elevene gjør under oppgaveløsing. Når jeg vil at elevene skal utdype det de har sagt eller diskutert, kommer jeg inn i samtalen som en deltaker i aktiviteten. Grunnen til at jeg ber elevene om å utdype eller forklare det de sier, er for å bestemme sikrere om elevene besitter den gjeldende kompetansen, og i hvilken grad de besitter med denne kompetansen. Det vil gi meg en mer objektiv data enn hvis jeg velger å tolke hva elevene mener. For dette bruker jeg en modell, for spørsmål som kan stilles, utviklet av Solem og Ulleberg (2013, s. 143). Deres modell er formet som et aksekors der horisontal akse er knyttet til lærerens hensikt (orienterende, påvirkende) og posisjon vedrørende spørsmål som blir stilt (læreren vet / ikke vet svaret). Denne inndelingen gir fire områder på aksekorset (ibid. figur 9.1, s. 142). Ifølge forfatterne stiller lærerne spørsmål for å *orientere seg* om elevenes kunnskap, deres tenkemåter, argumentasjoner og forklaringer for sin tenkemåte Læreren kan også stille spørsmål for å påvirke elevenes tanke måter (ibid. s 143). Jeg vil finne ut hvilke kompetanser som kommer til uttrykk under arbeid med åpne oppgaver. For å ikke påvirke elevenes tenkning, vil jeg i denne studien beholde meg på venstre siden av denne modellen. Det vil si på den *orienterende* siden.

Ifølge venstre siden av denne modellen er det vanlig å stille spørsmål som «Hva må vi gjøre nå?», «Hva kalles en slik trekant», «Kan du forklare hvordan du fant svaret?», «Hvordan har du begrunnet at dette blir riktig» (ibid. s.144-s.145). Disse formuleringer eller liknende formuleringer skal benyttes med hensyn på at jeg *orienterer* meg om eleven besitter med en kompetanse, og i hvilken grad hun/han besitter med den gjeldende kompetansen. Jeg vil forholde meg til spørsmål formuleringene som er beskrevet i denne modellen når det gjelder min *deltakende observatør rolle.*

3.1.4 BEGRUNNELSE FOR VALG AV METODE

Johannessen et al. (2010, s. 100) slår fast at metodevalg vil være avhengig av hva forskeren ønsker å forske på, hva problemstillingen er og den tiden forskeren har. Jeg skal fokusere på diskusjonen elevene skal ha under oppgaveløsningen slik at jeg kan se hvilke kompetanser som kommer til utrykk i arbeid med åpne oppgaver. Det som skal observeres har ikke kvantitative trekk. Jeg er nødt til å se hvilke karakteristiske trekk fra kompetansene som kommer til syne under dette arbeidet. Elevenes samhandling under arbeidet med åpne oppgaver danner grunnlag for dataene som skal gi svar på problemstillingen min.

Er observasjon den eneste metoden jeg kunne bruke for å få svar på problemstillingen min? PISA (Programme for International Student Assessment) og Nasjonale prøver i regning bruker delvis flervalgsoppgaver, delvis interaktive oppgaver for å bestemme elevenes nivå som gir en helhetlig vurdering av kompetansen. I Norge kan elever komme opp i eksamen skriftlig eller muntlig eller begge deler slik at de får vise kompetansen sin.

En annen mulighet for å svare på problemstillingen min kunne vært å bruke samme metode som det er i PISA og Nasjonale prøver. I en slik datainnsamling ville jeg hat behov for flere oppgaver slik at jeg kunne teste alle kompetansetyper. Oppgavene i dette tilfellet ville vært flervalgsoppgaver. Det er ofte slik at flervalgsoppgaver bare har ett riktig svar. Dette er mot den generelle definisjonen for åpne oppgaver fordi åpne oppgaver har flere riktige svar. Det er også fare for at jeg ikke kan observere kompetanser som tankegang, resonnement og kommunikasjon hvis jeg velger en skriftlig prøve eller en test med flervalgsoppgaver. I tillegg til det, ønsker jeg å finne svar på problemstillingen min i lys av læring som deltagelse og dette påvirker valget mitt angående metode.

Metoden PISA og Nasjonale prøver bruker, er for å bestemme elevenes helhetlige kompetanse i matematikk. I min forskning ønsker jeg å finne kompetansetyper som kan komme til uttrykk under arbeid med åpne oppgaver. Derfor vil fokuset mitt være å se hvilke kompetansetyper er mulige observere. Dette skal jeg gjøre uten å isolere en kompetansetype fra andre. Det vil si hvis en kompetanse kommer til uttrykk i sammenheng med en annen skal jeg ta med begge deler.

Samarbeid, alle prosesser til svar på oppgavene og elevenes respons er viktige indikatorer i mitt forskningsprosjekt, og derfor mener jeg at observasjon er den metoden som kan ivareta indikatorene jeg har nevnt over.

3.1.5 UTVALG

Både i kvantitative og kvalitative undersøkelser er det viktig å velge ut hvem som skal være i undersøkelsen (Johannessen et al., 2010, s. 103). Mitt utvalg av informanter består av ni elever som går i første klasse på videregående og tar matematikkurs 1P. Der det er fem gutter og fire jenter. Fire av disse elevene går på studieretning medier-og kommunikasjon og fem av dem går på studiespesialiserende retning. Alle disse elevene har samme lærer og samme klasserom når de har matematikkundervisning.

Jeg har introdusert meg for hele klassen og fortalt hva mitt prosjekt går ut på. Alle elevene i klassen med 25 elever fikk samtykkeskjema og de leverte dem etter endt matematikktime. Av 25 elever var det ti som ga samtykke om deltakelse. Blant dem valgte jeg tre grupper à tre elever. Den siste eleven som ikke ble med, var en ny elev i klassen hvor læreren ikke hadde nok grunnlag for å bestemme elevens faglige nivå. På bakgrunn av dette ble den siste eleven ikke med i undersøkelsen.

Fordelingen ble gjort på bakgrunn av elevenes karakter fra den siste prøven om tall og tallforståelse. Elevene ble plassert i grupper etter deres resultat fra den siste vurderingen. Dette valgte jeg å gjøre for å få svar på om hvilken betydning elevenes faglige nivå har når de arbeider med åpne oppgaver.

Gruppenes nummer har ikke noe med elevenes faglige nivå å gjøre. Her skal jeg gi en kort beskrivelse av sammensetting av gruppene. Gruppe 1 består av elever som har fått høyest måloppnåelse fra prøven og gruppe 2 har lavest. Gruppe 3 er den gruppen som fikk middels måloppnåelse.

3.1.6 Reliabilitet og validitet

Ifølge Johannessen et al. (2010, s. 229) er det lite hensiktsmessig å sette krav om reliabilitet i en kvalitativ undersøkelse på samme måte som man gjør i kvantitative undersøkelser. Han begrunner på tre måter: Den ene er at datainnsamlingsteknikker er annerledes enn det er i kvantitative undersøkelser. I kvalitative undersøkelser er det samtalen som styrer datainnsamlingen. I mitt prosjekt har jeg hatt samtaler under arbeidet med matematikkoppgaver med elevene i tre grupper. Innholdet i disse samtalene var ikke forhåndsbestemt og de oppsto som del av konteksten. Innholdet i samtalen i oppgaveløsingsprosess hadde utgangspunkt hva elevene fortalte og gjorde ut fra deres ståsted. Jeg hadde tre grupper der gruppene var nivådelt etter informasjon fra faglæreren. Deling i grupper etter deres matematikknivå var viktig for meg slik at jeg kunne si noe om oppgavens åpenhet har noe å si for elever på forskjellige nivåer. Dette kan ha noe å gjøre med innholdet i samtalen.

Det andre er ifølge forfatterne (Johannessen et al., 2010, s. 229) at observasjonene i kvalitative undersøkelser er klart verdiladde og kontekstavhengige. Dette gjør det vanskelig for en annen forsker å reprodusere forskningen. Observasjonene jeg har under arbeid med matematikkoppgaver er en kontekst som er vanlig for de fleste av matematikklasserom der elevene sitter i grupper og diskuterer oppgavene. Elevene jeg hadde i dette prosjektet var ikke vant til å arbeide med åpne oppgaver. Dette påvirket dem i starten av datainnsamlingen og jeg kunne ikke starte med oppgaven uten ekstra informasjon fordi oppgaven være åpen etter kompleksitet kriterier. Der kom min deltagende observatørrolle i spill.

Det tredje som gjør reliabilitet lite hensiktsmessig i kvalitative undersøkelser er at forskeren bruker seg selv som instrument (Johannessen et al., 2010, s. 229). Forfatterne mener videre at forskerens erfaringer og bakgrunn er unik og dermed blir ikke fortolkning av data gjort på samme måte. Jeg som forsker har en forforståelse om åpne oppgaver, og er interessert i disse oppgavene. Dette påvirker måten jeg deltar i oppgaveløsingen som kan påvirke hvilken type data som kan komme ut. Derfor vil reliabiliteten være avhengig av min forforståelse. Jeg mener at tolkning av datamaterialet skjer på bakgrunn av de forhåndsbestemte kriterier i teoridelen. Disse kriteriene i teoridelen skal jeg bruke for å bestemme hvilke kompetanser som kommer til uttrykk hos elevene ut i fra hva elevene forteller i oppgaveløsingen. Type kompetanse vil være avhengig av hva elevene har lært før, hvilke trinn de går i og hvilket matematikknivå de er på. Enhver forsker kan tolke kompetansen som gjelder ut i fra kriteriene.

Jeg skal nå drøfte troverdigheten av mitt prosjekt. Validitet eller troverdighet dreier seg om hvorvidt man måler det man tror man måler. I kvalitative undersøkelser dreier det seg om at framgangsmåter og metoder reflekterer formålet med studien, og gjenspeiler virkeligheten (Johannessen et al., 2010, s. 230). Mitt prosjekt har et kvalitativt design og derfor er det ikke hensiktsmessig å snakke om å måle noe kvantitativt. Jeg bruker observasjon som metode for å ha innsikt i elevenes arbeid med åpne oppgaver for å spore kompetanser som kommer til uttrykk. Framgangsmåten min er å ha elever i grupper á tre og gi dem åpne oppgaver som de skal diskutere og finne løsninger på. Diskusjonene tar jeg opp ved hjelp av lydopptak for å få med meg alt elevene diskuterer.

«Det at basere empirisk forskning på elevers, studerendes eller læreres omgang med matematikopgaver gør det relativt let at oppnå objektive resultater i positivistisk forstand og at beskrive, specificere og dokumentere en undersøgelse og at stå til regnskab for dens resultater, hvilket alt sammen gør opgaveløsningsbaseret empirisk forskning til en tiltrækkende mulighed (Niss, 2007, s. 15)»

Derfor valgte jeg metoden og framgangsmåten i datainnsamlingen basert på elevenes arbeid med åpne oppgaver, for å oppnå nødvendige data for å belyse problemstillingen min. Dermed mener jeg at datamaterialet samt metode for innsamling, vil være gyldig for denne studien.

Johannessen et al. (2010, s. 230) mener at en kan styrke påliteligheten av undersøkelsen ved å gi en detaljert beskrivelse av prosessen, konteksten og framgangsmåter. Neste del skal handle om gjennomføring av datainnsamlingen.

3.1.7 Gjennomføring

En uke etter at elevene levert samtykkeskjema for å delta i forskningsprosjektet, gjennomførte jeg datainnsamlingen med to av gruppene i en vanlig matematikktime. Hver av disse gruppene brukte gjennomsnittlige omtrent 40 minutter. Siden matematikktimen varte 90 minutter måtte jeg vente med den siste gruppen. Den siste gruppen gjennomførte oppgaveløsingen en uke etter de andre gruppene, på samme klokkeslett og sted.

Gruppene fikk oppgavene i forskjellig rekkefølge. Det er for å sikre at elevene ikke brukte lang tid i starten på samme oppgave. I tillegg ville jeg forsikre meg om at elevene var fokuserte når de arbeidet med oppgaver. Elevene fikk alle nødvendige hjelpemidler de trengte. Elevene arbeidet med oppgavene, og jeg satt ved siden av og observerte deres arbeid. Jeg ga stort sett elevene mulighet til å diskutere med hverandre uten å avbryte dem. Der det var naturlig for meg å komme med tilleggsspørsmål eller informasjon var jeg i diskusjonen med elevene.

3.1.8 Etiske Refleksjoner

Forskningsprosjekter må meldes til Norsk senter for forskningsdata AS (NSD). Jeg har meldt mitt prosjekt til NSD, og fikk tilbakemelding om at gjennomføring og behandling av dataene er forsvarlig i henhold til kriteriene deres.

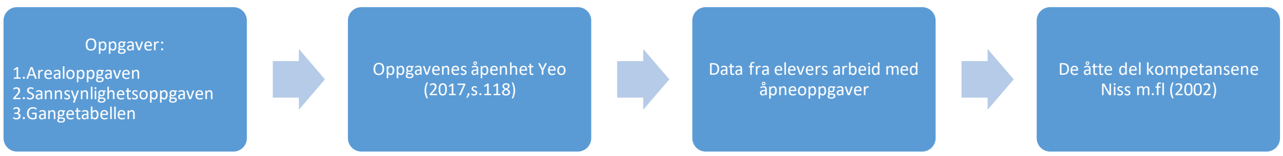
Det er nødvendig at forskningssubjektet samarbeider med vilje og gir samtykke. Dette kommer av subjektets rett til frihet og selvbestemmelse (Cohen, Manion, & Morrison, 2000, s. 50). Elevene som deltar i denne forskningen har fått skriftlig samtykkeskjema (Vedlegg 2). I dette dokumentet blir elevene informert om hva deres deltakelse betyr i forskningsarbeidet, og hva som er hensikten med forskningen. Elevene ble informert om at de kan trekke seg når som helst. I tillegg ble de informert om at deres deltakelse ikke har noen påvirkning på deres forhold til skolen. Dette punktet lagt til samtykkeskjemaet etter anbefaling fra NSD.

Anonymitet og konfidensialitet er to andre måter å beskytte informantene på mener Cohen et al. (2000, s. 61). Ifølge forfatterne betyr anonymitet at informasjonen som er skaffet fra informantene, ikke skal avsløre deres identitet (ibid.). Konfidensialitet betyr at dataene som er produsert skal ha begrenset tilgang (ibid. s.62). Elevene ble også informert i samtykkeskjemaet at dataene ikke skal være tilgjengelig for folk som kjenner dem, for eksempel læreren deres.

I både analysedelen og i transkriberingsdokumentet har elevene fått koder som ikke kan knyttes til dem, og det er ikke mulig å kjenne igjen informantenes identitet. På den måten sikrer jeg informantenes anonymitet. Dataene som er produsert av informantene er lagret i min egen datamaskin beskytte med passord som bare jeg har tilgang til. Dette er for å ivareta informantenes konfidensialitet. I slutten av dette prosjektet skal opptakene slettes.

3.2 Utvikling av analyseverktøyet

Teorien i denne studien har to hovedelementer. Den ene er matematisk kompetanse og den andre handler om åpne oppgaver. Problemstillingen min inneholder også de to elementene over. Det er naturlig for meg å bruke et verktøy som kan gi meg mulighet til å analysere dataene mine etter de to hovedelementene. Før jeg har bestemt meg for oppgavene jeg skulle bruke til datainnsamlingen, trenger jeg å gjøre rede for på hvilken måte er oppgavene mine åpne. Derfor ser jeg behovet for å analysere dem etter et rammeverk som kunne gi meg et svar på oppgavenes åpenhet. Dette rammeverket er utviklet av Yeo (2017). Han mener at det er viktig å klarere oppgavens natur og åpenhet slik at lærere og forskere forstår forskjellige oppgavetyper. Han mener også at det er viktig for forskere slik at de kan avgrense forskningen sin (ibid. s.176).



Figur 3: Prosessen for analyse

Etter at jeg har analysert oppgavenes åpenhet, satt jeg i gang arbeid med oppgaven sammen med elevene. For å finne svaret på forskningsspørsmålet, er elevenes omgang med oppgaver det viktigste steget.

Niss og Jensen mener at kompetanser er en atferdskarakter (2002, s. 64). Det betyr at kompetansene kan observeres når elevene er i en gitt aktivitet (ibid.). Gjennom observasjon kunne jeg bestemme hvilke kompetanser det er snakk om. Min rolle som delvis deltakende observatør gjorde det mulig for meg å stille spørsmål som «Hva mener du her», «Kan du forklare det» osv. Disse spørsmålene mener jeg sikret at jeg kunne bestemme kompetansetypen riktig, ikke med min fortolkning av hva elevene kan ha ment. Kompetansene kan brukes som et objekt for forskning. For dette må man ha veldig klare definisjoner for hver av kompetansene (Niss et al., 2016, s. 623). I teorikapittelet gir jeg definisjoner av hver kompetansene og i tillegg viser jeg karakteristikk for hver av delkompetansene slik at jeg kan bestemme hvilke delkompetanser som kommer til uttrykk.

Jeg bruker observasjon som metode og dataene er samlet i form av lydopptak. Etter å ha transkribert dataene brukte jeg karakteristikk for hver kompetanse ut i fra definisjonen i teorikapittelet. Transkriberte data ble analysert ved hjelp av disse karakteristikkene. En utfordring i analysen var at i samme sekvens kunne man se trekk fra flere kompetanser. Slike sekvenser med mange eller alle kompetanser er tatt i analysedelen.

Det var mulig å se samme type kompetanser flere steder i datamaterialet. Når jeg valgte sekvenser som jeg presenterer i analysedelen, valgte jeg sekvensene som hadde flest kompetansetyper. En sekvens kunne maks ha åtte kompetansetyper (Se kapittel 2.2).

Dett er antakeligvis ikke den eneste måten å analysere dataene mine. En annen måte kunne vært å spore karakteristikk av hver kompetanse i dataene. En slik tilnærming ville blitt utfordret på at kompetansene ikke kan tenkes i isolasjon, en kompetanse kan ikke være tilstede uten at en bestemt type kompetanse er tilstede. Min problemstilling fokuserer på mulige kompetansetyper under elevarbeid med åpne oppgaver. Derfor er jeg nødt til å se alle kompetansene under ett, og derfra se om det er noen sett av kompetanser som kommer til syne under dette arbeidet.

4.ANALYSE

I dette kapittelet skal jeg analysere dataene mine. Analysen skal bestå av tre deler, der første delen er analyse av oppgavene jeg har brukt i denne studien. Denne analysen skal ta for seg hvorvidt oppgavene i studien min er åpne. I den andre delen skal dataene som kommer av arbeid med åpne oppgaver analyseres. Disse dataene skal analyseres for å bestemme kompetansetypen som kommer til uttrykk. Den siste delen av dette kapittelet skal være en kort oppsummering av funnene.

4.1 ANALYSE AV OPPGAVENE

Som nevnt tidligere skal jeg finne svar på hvilke kompetanser som kommer til syne i elevenes arbeid med åpne oppgaver. Derfor er det naturlig for denne studien å analysere oppgavene jeg bruker i forbindelse med datainnsamlingen. Yeo (2017, s. 176) forsøker å lage et rammeverk for åpne oppgaver slik at lærere skal forstå forskjellige oppgavetyper og at forskere skal kunne definere hvor grensene går for forskningen når det gjelder åpne oppgaver. Jeg har brukt tre oppgaver i dette prosjektet, og jeg skal analysere dem med rammeverket til Yeo (ibid. s.188). Han mener at en oppgaves åpenhet kan klassifiseres med mange variabler: Svar, mål, metode, oppgavens kompleksitet og mulighet for utvidelse.

4.1.1OPPGAVE 1 AREALOPPGAVEN

Oppgave 1
Dere skal bygge en innhegning. Delene gjerdet skal settes sammen av selges i to typer, $A = 2\,m$ og $B = 3\,m$. Arealet til innhegningen skal være 36 m^2 . Hvor mange trenger dere av de to typene gjerde? Finn så mange løsninger dere rekker.

Hvis alle svarene til en oppgave er mulige å finne, er oppgaven lukket med tanke på svaret. Hvis det ikke er mulig å finne alle svarene er oppgaven åpen etter svarkriteriet (Yeo, 2017, s. 179). Innhegningen skal ha et areal på $36\,m^2$. Oppgaven har ikke definert hvilken figur innhegningen skal være. Elevene kan velge rektangel, kvadrat, trekant eller hva de vil. Hvis elevene velger en rektangulærfigur, kan de få kombinasjoner av lengde med bredde som er vist i tabellen. Alle disse kombinasjonene er mulige å vurdere om de er riktige eller ikke. Når det gjelder figurer som ikke er rektangulære, er det fortsatt mulig å finne figurer som kan gi samme areal. Et annet alternativ for innhegningen er hvis en skulle lage en rettvinklet trekant som har kateter $8\,m$ og $9\,m$, som ville gitt en hypotenus på ca. $12\,m$. Akkurat dette eksemplet kan diskuteres om det er en løsning eller ikke, siden tallene 8, 9, 12 ikke er et pytagoreisk trippel. En pytagoreisk trippel består av tre heltall $a,\ b,\ c$ slik at $a^2 + b^2 = c^2$. Siden dette er en praktisk oppgave kunne denne løsningen også være med. Derfor kan vi ikke si at vi kan finne alle mulige svar for denne oppgaven, og dermed er den åpen med tanke på svaret.

En oppgave kan også være åpen med tanke på målet med oppgaven. Hva elevene blir bedt om å gjøre er *målet* for oppgaven. Dette målet kan være åpent eller lukket avhengig av formuleringen i oppgaven (Yeo, 2017, s. 182). Oppgaver som inneholder formuleringer som «finn ut», «bestem», «lag en», har lukket mål, siden det er en presis bestilling på oppgaven. Yeo (2017, s. 181) slår fast at oppgaver med en formulering som starter med «utforsk» har åpne mål siden elevene kan utforske det de vil i oppgaven og bestemme selv hva målet skal være. «Arealoppgaven» har dermed et lukket mål der elevene blir bedt om å bygge en innhegning med areal $36\ m^2$. Jeg har bestemt for elevene hva de skal finne ut i oppgaven og dette gjør oppgaven lukket når det gjelder hensikten med oppgaven.

Et annet kriteriet for oppgavens åpenhet er, ifølge Yeo (2017, s. 182), metode for å løse oppgaven. Kort fortalt mener forfatteren at oppgavens metode er åpen hvis den har flere løsningsmetoder som inneholder problemløsingstrinn som setter i gang matematisk tenkning, ikke som inneholder algoritmiske løsninger. Arealoppgaven har først og fremst flere løsningsmetoder. Hvis innhegningen har en rektangulær form, kan elevene bruke prøve og feile, faktorisering. For det andre kan de skrive de to sidene av rektangulær form som $x \cdot y = 36$ og dermed gjøre det om til $y = \frac{36}{x}$, og tegne grafen til dette uttrykket. Elevene kan finne verdiene de kan bruke i oppgaven fra grafen. Hvis elevene velger andre former enn rektangulær må de ta i bruk andre formler for former det gjelder. For å finne et svar som har andre former kan de prøve å konstruere figurene som kan gi ønsket areal. Metodene er flere, og de inneholder problemløsingsstrategier for å komme til svaret. Problemstillingen i den oppgaven er å tilpasse figuren slik at arealet skal være $36\ m^2$. Dette skaper situasjoner der elevene må lage en plan og gjennomføre den. Så lenge elevene ikke har vært bort i slike oppgaver før, kommer de til å finne ut noen av metodene nevnt over. Dette gjør oppgaven åpen med tanke på metode.

Et av Yeos andre kriterier er oppgavens kompleksitet. Denne kompleksiteten kan også bidra til å gjøre oppgaven mer eller mindre åpen. Kompleksitet for en oppgave er avhengig av hvilke oppgaver en gir til hvilke grupper. Hvis oppgaven er for kompleks, blir den for åpen for elever og de kan ikke starte med oppgaven, ifølge Yeo (ibid.). Arealoppgaven inneholder nok informasjon slik at den ikke er for kompleks for elevene. Elevene vet hvor stort arealet skal være, og lengden på gjerdet de skal bruke. Denne informasjonen holder for elevene til å komme i gang med å lage rektangulære figurer. Det ville vært for komplekst hvis de ikke visste hvor stort arealet og gjerdet var. For eksempel: Hvor mange gjerdedeler skal du bruke på en parallellogramformet hage? Her får elevene hverken størrelse på arealet eller lengde på gjerdet de skal bruke. Dette gjør det for komplekst for elevene slik at de ikke kan starte med oppgaven uten hjelp. Elevene på dette nivå ut i fra læreplanen har forutsetninger til å finne areal og omkrets av et parallellogram, men det er mest mangel på informasjon kan gjøre oppgaven for kompleks for dem.

En oppgave kan være åpen eller lukket med tanke på om den kan utvides til nye oppgaver for å oppdage nye mønstre, og mer underliggende matematiske ideer. Hvis den leder til nye mønstre eller matematiske ideer, vil oppgaven være åpen med tanke på utvidelse, hvis ikke er den lukket med tanke på utvidelse og dette kan enkelt endres ved å stille spørsmålet «hva hvis ?» (Yeo, 2017, s. 186). Forfatteren mener at ikke alle oppgaver kan/bør utvides (ibid.). Dette er fordi utvidelsen kan føre til en helt ny oppgave som blir repetisjon av samme mønstre eller ideer. Arealoppgaven er etter min mening åpen når det gjelder utvidelse. Oppgaven kan utvides til for eksempel: Hva er det færrest antall gjerder du kan bruke for innhegningen? Dette spørsmålet leder elevene til å finne sammenhengen mellom areal og omkrets. De kan begynne å utforske hva den minste omkretsen må være når arealet skal være $36\ m^2$. En annen utvidelse for arealoppgaven er hvilken figur en kan velge for innhegningen. «Kan innhegningen være trekant, mangekant, eller parallellogram osv.» Alle grupper som deltok i prosjektet valgte en rektangulær figur.

4.1.2 Oppgave 2 Sannsynlighetsoppgaven

Oppgave 2

Dere ruller en grønn og en rød terning og legger sammen antall øyne dere får. Tabellen nedenfor viser alle mulige summer.

Grønn terning

Rød terning

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Oppgaven deres er å designe to forskjellige spill for to spillere. Det første spillet skal være rettferdig, mens det andre spillet skal være urettferdig for en av spillerne. Lag reglene for spillene deres og begrunn hvorfor det ene spillet er rettferdig og det andre ikke.

De samme kriteriene gjelder for denne oppgaven også. Jeg starter med å analysere denne oppgaven for svarene en kan få. Denne oppgaven mener jeg er en åpen oppgave med tanke på svarene. Det er 36 kombinasjoner av summen av øynene. Elevenes oppgave er å lage et rettferdig og et urettferdig spill når en kaster to terninger. Her forventes det at elevene skal bestemme hva det vil si at et spill er rettferdig eller ikke. Alle spillene elevene designer i denne oppgaven er svar på oppgaven. Så lenge sannsynligheten for å vinne spillet er lik for begge spillerne, er spillet rettferdig, hvis ikke er det urettferdig. Tabellen nedenfor viser noen eksempler på rettferdig og urettferdig spill.

<table>
<tr><th>Rettferdig spill</th><th>Urettferdig spill</th></tr>
<tr><td>Spill 1
1. Kast begge terningene
2. Se summen av øynene
3. Summen av øynene er et oddetall</td><td>Spill 3
1. Begge spillere kaster terningene
2. Spiller A vinner hvis summen av øynene er lavere enn 7.
3. Spiller B vinner hvis summen av øynene er høyere enn 6.</td></tr>
<tr><td>Spill 2
1. Spillerne velger å vinne på partall eller oddetall.
2. Spiller A velger partall, Spiller B velger oddetall.</td><td>Spill 4
1. Spillerne kaster terningene
2. Spiller A vinner hvis summen er et primtall
3. Spiller B vinner hvis summen er et kvadrattall</td></tr>
</table>

Figur 4: Eksempler på noen rettferdige og urettferdige spill (mine eksempler)

Her har jeg gitt noen eksempler jeg kan forvente av elevene. Yeo (2017, s. 179) påstår at i noen oppgaver er det ikke mulig å finne absolutt alle svarene. For eksempel kan elever komme med noen påstander der ingen kan bevise om det stemmer eller ikke. Det er ikke sikkert at vi kan finne alle mulige eksempler og vi kan ikke bestemme om alle eksempler er funnet heller. Derfor mener jeg at denne oppgaven er åpen når det gjelder svaret, etter Yeos kriterier.

Mål for oppgaven er å lage et spill som er urettferdig og et spill som er rettferdig. Elevene får i den oppgaven tydelig presentert hva som skal være produktet og hva de skal gjøre. De skal ha med seg et produkt som er på forhåndsbestemt hva det er. Det å bestemme reglene for spillene de lager er mål for oppgaven. Siden målet med oppgaven er bestemt, blir oppgaven lukket når det gjelder mål.

Løsningsmetoden for denne oppgaven inneholder ikke noen rutiner som algoritmer. I tillegg finnes det flere metoder der en kan komme fram til spillets rettferdighet eller urettferdighet. Elevene kan lage en tabell over summer der de kan systematisere verdiene slik at de kan bygge spillereglene på svarene. For eksempel det er mulig å systematisere tallene etter oddetall, eller partall. En annen metode er å dele tabellen som er i oppgaveteksten i to deler fra diagonalen slik at det er likt antall kombinasjoner på hver side og bygge reglene derfra. Disse to kriteriene viser at oppgavens metode er åpen.

Oppgaven er også lukket når det gjelder hvor kompleks den er. Det er fordi elevene får den nødvendige informasjonen i oppgaven. De får vite hvilke kombinasjoner de kan få med to terninger. Det er gitt at det er to spillere og ikke minst er det gitt at et av spillene skal være rettferdig og det andre urettferdig. Det som kan gjøre oppgaven kompleks for elevene er å se sammenhengen mellom rettferdighet og utregninger som viser om det er rettferdig eller urettferdig spill. Vanskelighetsgraden av oppgavene med tanke på temaet sannsynlighet er passende ut ifra kompetansemålene i faget for det trinnet. Kompetansemålene for sannsynlighet lyder slik: *lage døme simuleringar og gjøre greie for omgrepet sannsyn; berekne sannsyn ved å telje opp gunstige og moglege utfall (Udir, 2013, s. 11)*. Sannsynlighet oppgaven faller under disse kompetansene som viser at oppgaven ikke er kompleks eller upassende for denne gruppen. Det er fortsatt mulig at oppgaven er kompleks for noen elever på grunn av deres nivå. Denne oppgaven på bakgrunn av nødvendige informasjon vil være lukket når det gjelder kompleksitet for elevene.

Det finnes flere muligheter for å utvide denne oppgaven. Et eksempel er å undersøke om de spillene elevene har laget fortsatt ville vært rettferdig eller urettferdig dersom vi hadde brukt noen spesielle terninger. For eksempel om begge terningene hadde to seksere hver og ingen enere. Ville spillene fortsatt vært rettferdige eller urettferdige? Har det noe å si for frekvensen av kombinasjonene vi har fått? «Hva hvis nå?» er en måte en kan utvide en oppgave på slik at en gir elevene mulighet til å finne flere matematiske sammenhenger og mønstre.

4.1.3 Oppgave 3 Gangetabelloppgaven

Tabellen nedenfor inneholder mange spennende sammenhenger mellom tall. Studer tabellen og finn så mange sammenhenger mellom tallene som mulig (oppgaven er redigert, originalen er hentet fra Cifarelli og Cai (2005, s. 307).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Cifarelli og Cai (2005, s. 317) foreslår 19 sammenhenger i deres forskning med denne oppgaven. Dette viser at oppgaven har mange forskjellige sammenhenger som kan brukes som svar på oppgaven. Det er noen sammenhenger som ikke står oppført i originalen. Et eksempel på en slik sammenheng er for alle kvadrater med oddetall antall ruter. Gjennomsnittet av tallene rundt slike kvadrat er samme som tallet i midten av kvadratet. Vi kan ta et hvilket som helst 3×3 kvadrat, for eksempel de tre første tallene i første rad og kolonne. Summen er av tallene $1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 6 + 3 + 2 = 32$ og gjennomsnittet er fire, det vil si tallet i midten. Dette gjelder for alle kvadrater med oddetallruter rundt. Det er mulig at elever kommer med andre type svar som ikke er oppført i listen. Derfor vil oppgaven være åpen etter svarkriteriet.

Oppgaveformuleringen «Finn så mange sammenhenger som du kan» gjør at oppgaven har et mål. At oppgaven har et mål vil ikke nødvendigvis bety at den ikke er åpen. Elevene kan bestemme selv hvilke sammenhenger de finner eller undersøker i oppgaven. Noen elever kan velge å se sammenhengen mellom rader, mens noen kan undersøke sammenhengene i noen ruter. Her kan elevene velge selv hva de vil undersøke som gjør at målet i oppgaven blir åpen. Oppgavens mål og kompleksitet har en sammenheng med tanke på elevenes respons til oppgaven. Elevene kan oppleve vanskeligheter med å starte med oppgaven når de ikke vet hva det betyr å undersøke. Formuleringen jeg har i oppgaven hjelper elevene til å starte med oppgaven. Denne formuleringen gjør oppgaven mindre kompleks, som gjør oppgaven mindre åpen etter kompleksitetskriteriet.

Metode for løsning av denne oppgavetypen inneholder ingen rutinesteg. Stegene i oppgaveløsningen her inneholder flere problemløsningssteg. Før en kommer med en generell løsning, vil en lage hypoteser og prøve dem ut. For å se om hypotesene om sammenhengene de finner stemmer, må de finne et bevis på hypotesen. Elevene må se etter mønster og gjentakelse av mønstre og om det er mulig å generalisere sammenhengen for hele eller deler av oppgaven. Det er flere problemløsningssteg i metoden for oppgaven her. Dermed blir oppgaven åpen på metodekriteriet.

Det siste kriteriet for denne oppgaven er om den er åpen når det gjelder utvidelse. Denne oppgaven kan og bør utvides slik at en kan åpne for generalisering av mønstre. Det må gjøres fordi det legger opp til nye aspekter i matematikken, nemlig å komme fram til en generell formel. Utvidelsen kan skje ved å spørre om «Gjelder samme mønster om vi hadde en 13×13 tabell, eller hva med 100×100?» eller «Må vi skrive ned hele tabellen og finne om det stemmer, eller kan vi gjøre det på en annen måte?». Dette viser tydelig at denne oppgaven er åpen på utvidelseskriteriet. Tabellen nede viser en oppsummering av alle kriteriene for alle oppgavene.

		Oppgave 1 Arealoppgaven	**Oppgave 2 Sannsynlighetsoppgaven**	**Oppgave 3 Gangetabelloppgaven**
Mål	Åpen			✓
	Lukket	✓	✓	
Metode	Åpen	✓	✓	✓
	Lukket			
Kompleksitet	Åpen			✓
	Lukket	✓	✓	
Svar	Åpen	✓	✓	✓
	Lukket			
Utvidelse	Åpen	✓	✓	✓
	Lukket			

Figur 5: Tabellen viser oppgavenes åpenhet etter rammeverket fra Yeo (2017)

4.2 Analyse av gruppene

Denne delen av oppgaven skal jeg bruke til å analysere dataene jeg fikk fra de tre gruppene. Navn på gruppene og oppgaven blir skrevet som en kode. For eksempel Gruppe x, Oppgave y vises som Grx-Opp$y$. Der x og y stor for nummer for oppgaver og grupper.

4.3 Analyse av Gruppe 1

Denne gruppa består av tre elever fra studieretning medier og kommunikasjon. Det er tre gutter. Elevene får navnekoder som E1, E2 og E3 i transkribering. Deres oppgaverekkefølge var oppgave 3, oppgave 2 og oppgave 1. Elevene i denne gruppen har høyest måloppnåelse i forhold til andre grupper.

Gr1-Op1

Elevene starter med å lese oppgaven hver for seg og elev E2 sier at han har det og han begynner å tegne et rektangel. Han bruker ruteark der rektanglet inneholder 36 ruter. Deretter deler eleven sidelengdene i to-og tre ruter som skal representere type A og type B gjerde. Han foreslår at han kan bruke to type A og 12 type B gjerder. Før sekvensen nedenfor, foreslo E3 at et eksempel kunne vært en kvadratisk innhegning med sidelengder seks m. Dette mente han ville gitt han åtte B-er og ingen A-er. Følgende dialog foregår mellom elevene:

11	E3:	Vent da! Hvis du har 12 B-er den veien da har du 36 m. (E2 har skrevet 2A og 12 B for et forslag)
12	E2:	Fordi det er gjerde på begge sider. Det er ovenfra.
13	E1:	Ja, ja. Fordi du har et A gjerdet på begge sider av rektanglet og 6 B-er på hver andre sider.
14	E3:	Ja, ja, ok.
15	E2:	Fordi du må dele 12 på to for begge side. (Han viser på tegningen og teller antall gjerde på begge side av rektanglet)

I denne samtalesekvensen kan vi finne flere eksempler av forskjellige kompetansetyper. Når E2 tegner et rektangel som inneholder 36 ruter, viser han at han kan representere et areal på $36\ m^2$ som en geometrisk figur. Når han får motstand fra E3, kommer han med en forklaring på hvorfor det stemmer. Han forklarer at et rektangel har to og to like sider, og når han bruker 12 type B-gjerder, er det fordi han har seks stykker av type B på hver side og én type A på endene av rektanglet. Han bruker egenskaper til et rektangel for å bevise at hans forslag holder. Niss og Jensen (2002, s. 54) mener at rettferdiggjøring av egne svar faller under *resonnementskompetansen*. E2 viser at han i dette tilfelle aktiverer *resonnement-* og *representasjonskompetanse*. Når han legger fram forslaget sitt, bruker han bokstavene A og B som representerer type-A og type-B gjerder. Dette er en algebraisk visning av forslaget hans som viser at han tar i bruk *symbol- og formalismekompetansen*. Niss og Jensen (2002, s. 60) viser at å redegjøre en løsning av en oppgave kan være et eksempel på *kommunikasjonskompetansens uttrykkside*. Det er fordi han forklarer løsningen sin til resten av gruppa. Denne nyansen viser at E2 tar i bruk *kommunikasjonskompetansen* når han forklarer løsningsforslaget sitt som avsender, og de to andre elevene er på mottakersiden. Generelt forklarer Niss og Jensen (2002) at det kreves *kommunikasjonskompetanse* for å kunne ha diskusjoner om matematikkholdige emner med andre. I denne oppgaven skal elevene diskutere hvor mange gjerder type-A og type-B skal kjøpes for å tilfredsstille kravet om at arealet skal bli $36\ m^2$. Arbeidet med denne oppgaven fremkaller *modelleringskompetansen* hos elevene når de skal finne ut hvordan innhegningen kan se ut for det gitte arealet. De kommer med forskjellige lengder som gir det ønskede arealet. Elevene bruker disse målene til å lage en modell av innhegning for å foreslå antall gjerdetyper rundt den.

En bemerkning for kompetansene hos Niss og Jensen (2002) er at de ikke kan isoleres fra hverandre og at de er beslektet med hverandre. *Problembehandlingskompetansen* og *modelleringskompetanse* har en flytende grense (Niss & Jensen, 2002, s. 50). De framstiller et problem og løser det ved å finne antall gjerdetyper. Elevene fokuserer i hele oppgaveløsningen på å lage rektangulær figur som en modell for innhegningen som skal ha et areal på $36\ m^2$. Når de skal finne en løsning, må de undersøke egenskapene til rektanglet for gitt areal. Når de kommer med forslag på sidelengdene for rektanglet kan de sjekke det med figuren og se om det fungerer. Å finne hvilke sidelengder rektanglet skal ha er det å analysere figurens egenskaper. Dette er en karakteristikk for *problembehandlingskompetansen*. Selv om elevene viser trekk av *problembehandlingskompetansen*, betyr det ikke at de har denne kompetansen fullstendig, med andre ord lavere teknisk nivå. I starten av oppgaveløsingen foregikk denne samtalen som belyser elevenes teknisk nivå (Niss & Jensen, 2002, s. 66) av denne kompetansen :

5	E1:	Må gjerdet være firkantet eller kan det være rundt eller noe annet?
6	Jeg:	Godt spørsmål. Står det noe om det i oppgaven?
7	E1:	Nei det står ikke.
8	E3:	Det er mer å gjøre hvis det er runding. Da må du ha radius og pi.
9	E2:	Det er flere måter å lage det på ikke sant?

Når E3 spør om det går an å bruke andre figurer enn rektangulære, viser han trekk av *tankegangskompetanse*. Det er fordi han er klar over hvilke spørsmål som kan forventes å stille. En løsning på denne oppgaven der figuren er en sirkel ville krevd et annet teknisk nivå av *problembehandlingskompetansen*. Elevene går bort fra en sirkulær figur til en rektangulær. Dette viser, ut ifra datamaterialet, at elevenes tekniske nivå av *problembehandlingskompetanse* kan være høyere enn de viser, fordi de ikke prøvde å finne ut om det går an å lage en sirkulær innhegning. Denne vendingen i oppgaven kan ha skjedd på grunn av at jeg spurte om oppgaven var bestemt for bare en type figur. Det kan ha gjort oppgaven mindre kompleks for elevene.

Etter en stund med arbeidet i denne oppgaven utvidet jeg oppgaven for å aktivere *tankegangskompetansen* hos elevgruppa. Følgende sekvens foregår mellom meg og elevene:

43	Jeg:	Ok. Dere har funnet noen løsninger. Et nytt spørsmål til dere. Hva slags figur må jeg ha slik at jeg skal kjøpe færrest mulig deler? Fortsatt samme areal.
44	E2:	Et kvadrat?
45	Jeg:	Fordi?
46	E2:	Hvis det er et kvadrat blir det 14 deler.
47	E3:	Ja hvis du skal kjøpe fra hver typene.
48	Jeg:	Må du kjøpe fra hver type?
49	E3:	Nei. Ok, hvis man tar da et kvadrat med 6 ganger 6 og tar bare 3-er gjerde blir det åtte deler. Da trenger man ikke A. Fordi B er lengre.
50	E1:	Åtte 3-er og hvor mange 2-er?
51	E3:	Nei, vi trenger ikke 2-er gjerde.
52	E1:	Hvordan funker det da?
53	E3:	Det er fire sider i kvadratet hvis du velger 6 m gange 6 m. Da trenger du to av B lengdene på begge sider.
54	E2:	Ja det funker (han kommer med tegning)
55	E1:	Vi er enige om at åtte deler er færrest, med de andre blir det bare flere.
56	E2:	Ja.
57	E3:	Ja. Vi er enige om at 8 deler er færrest.

Denne sekvensen inneholder karakterer fra flere andre kompetanser, men fokuset her er *tankegangskompetansen*. Niss og Jensen (2002, s. 48) mener at kjernen i denne kompetansen er matematiske spørsmål og svar. Når jeg utvider (Yeo, 2017, s. 185) oppgaven til ” Hvilken figur kan jeg ha for å bruke færrest mulig gjerder?”, setter jeg i gang elevene til å tenke gjennom egenskapene til rektangler. De prøver å finne ut når omkretsen blir minst når arealet er gitt. De kommer fram til at hvis omkretsen er minst, da kan vi bruke færrest deler rundt innhegningen. Det er ikke bare spørsmålene som stilles, men også svarene som kan også vise trekkene i *tankegangskompetansen*. Elevene svarer at kvadrat skal gi oss minst omkrets. Niss og Jensen (ibid.) påpeker at det *å kjenne*, *forstå* og *håndtere* matematiske begrepers rekkevidde og begrensninger faller under denne kompetansen. Elevenes bruk av kunnskap om egenskapene til et kvadrat er et eksempel på det.

Vi kan se flere andre kompetanser i denne sekvensen også, blant annet *kommunikasjonskompetansen* når de deler løsningen sin med meg. *Resonnementskompetanse*n kommer til uttrykk når de skal rettferdiggjøre løsningen for færrest antall deler ut ifra egenskapene til et kvadrat. I tillegg tar elevene i bruk *problembehandlingskompetansen* når de skal finne svaret på antall deler. *Symbol- og formalismekompetansen* er tilstede når de skriver lengder for kvadratet og r*epresentasjonskompetansen* når de tegner et rektangel for gitte lengder.

Elevenes arbeid med denne oppgaven i denne gruppen har karakteristiske trekk for alle kompetansene som er beskrevet i Niss og Jensen (2002), bortsett fra *hjelpemiddelkompetanse*. Det er på grunn av at både tallverdiene og figurene de har valgt er lette å behandle. Den siste kompetansen kunne de tatt i bruk ved å beskrive arealet for rektanglet som en omvendt proporsjonal funksjon i form av $y = \frac{36}{x}$ og finne heltallige areal for x-og y-verdier ved hjelp av et passende dataprogram.

Et annet resultat fra denne analysen er dekningsgrad av kompetanser som kommer til syne. Dekningsgrad av kompetansen (Niss & Jensen, 2002, s. 66) hos elevene er avhengige av antall aspekter av elementer i kompetansen som kommer til syne. Når det gjelder resonnementskompetansen hos elevene, ser vi at elevene ikke har full dekningsgrad av kompetansen. Gjennom hele analysen ser vi at elevene viser kun at de kan bedømme og følge andre sine resonnement. Ifølge Niss og Jensen (2002, s. 54) har denne kompetansetypen andre aspekter enn det overnevnte. Blant annet er det å vite og å forstå hva et matematisk bevis er, et av andre aspekter av denne kompetansen. Her kunne det vært passende med et spørsmål om hvordan man kunne bevise at et kvadrat har kortest omkrets av rektangulære figurer for et gitt areal. Dette ville gitt elevene til å øke dekningsgrad av resonnementskompetanse.

Gr1-Opp2

Gruppa startet med å finne eksempler på urettferdig spill først. Oppgavens åpenhet på svarene ga elevene mulighet til å finne mange forskjellige løsninger. De fant åtte eksempler på urettferdige spill men de hadde ett eksempel på et rettferdig spill. Forslagene deres på urettferdige spill var varierte. De brukte disse elementene: spillerens alder, om å gjøre å få noen bestemte kombinasjoner, og at den ene spilleren bestemmer reglene etter kastet.

12	Jeg:	[...] Hva vil det si at et spill er urettferdig?
13	E1:	Det er jo sannsynlighet. Det å kaste terningen det er da $\frac{1}{6}$ for å få et tall
14	E3:	Når det er to terninger er det $\frac{1}{36}$ sjanse for å få et tall.
15	E1:	Hvordan er det å gjøre det urettferdig? Hvis det er med alderen da. Det er om å komme nærmest alderen sin. Det blir urettferdig hvis den ene er veldig gammel. Fordi den må ha mye større tall for å komme nærmest alderen sin.
16	E2:	Ja, da blir det urettferdig for den som er gammel.
17	E3:	Ja. La oss si den ene er 7 år gammel og den andre er 14.
18	E1:	Da blir det enklere for 7 åringen å få totalsum nærmere 7 enn 14 åringen.

E1 lurer på hvordan det er å gjøre et spill urettferdig. Han stiller et spørsmål som er av matematisk art i forbindelse med tema sannsynlighet. Et urettferdig spill kan være et spill der den ene spilleren har lavere sannsynlighet enn den andre spilleren når de kaster to terninger hver. Han vet i tillegg hvilke svar han kan gi og ikke minst gir han et argument for at hans påstand holder når han rettferdiggjør sitt svar. Her finner vi trekk av både *tankegangs-* og *resonnementskompetansen*. Samtidig tar E2 inn E1 sitt forslag og gir tegn på at han forstår det. E2 viser at han forstår andre sine begrunnelser som er del av *resonnementskompetansen*. E3 gjør det samme som E2 og i tillegg kommer han med et konkret eksempel på E1 sin påstand. Gjennomgående for denne oppgaven er det *modelleringskompetansen* som blir brukt oftest. Elevene henter inn matematikk i en situasjon der matematikken ikke er åpenbart tilstede (Niss & Jensen, 2002, s. 52). Niss m.fl. bruker begrepet *aktiv modellbygning* som er en del av denne kompetansen (ibid.). De løser i tillegg det matematiske problemet som modellen deres skaper. Elevenes eksempel om å bruke alderen som mål for spillet er det problemet modelleringen har skapt for dem. For å løse problemet, kan de ikke bruke bare rutineferdigheter. Det krever å sjekke kombinasjonene de kan få når de kaster terningene og sjekke om det kan stemme at det er vanskeligere å komme nærmest mulig alderen. Dette vil aktivere en annen kompetansetype, *problembehandlingskompetansen*.

En oppgave som ville vært rutineoppgave i sannsynlighet er å finne sannsynligheten for summen av øynene åtte. Elever som kan og har arbeidet med slike oppgaver ville brukt rutineferdigheter for å komme til svaret. Denne oppgaven er ikke en standard sannsynlighetsoppgave for disse elevene. Derfor vil *problembehandlingskompetanse* aktiveres hos elevene for å gi svar på oppgaven. Elevene ser sammenhengen mellom tabellen og sannsynligheten for hvert spill de lager. Når de bestemmer at det er lavere sannsynlighet å komme fram til alderen sin når en er gammel, teller de antall kombinasjoner som kan gi dem sannsynligheten i forhold den andre spilleren. Sannsynligheten for en hendelse gis som brøk, prosent eller desimaltall. Elevene velger å uttrykke sannsynligheten som brøk. Dette er å bruke forskjellige representasjoner fra en tabell (som i dette tilfellet er utfallsrommet) til å beskrive det som brøk. Dette er et av de elementene i *representasjonskompetanse*.

Den neste sekvensen viser oss hvordan elevene tar i bruk *kommunikasjonskompetansen* og bytter rolle fra å være på *mottakersiden* til *uttrykksiden*.

20	E2:	La oss se om det er mulig å få flest kombinasjoner da.
21	Jeg:	Ja. Hvordan da?
22	E2:	Hvis en kombinasjon er tatt, kan den ikke brukes lenger, Da vil den første få en fordel siden den andre ikke kan bruke de tallene. Hvis han får dem er det min tur igjen.
23	E1:	Nå er det mer å få fordel og ikke rettferdig eller ikke. Hvis det hadde vært reelt, ville det ikke hatt noe å si. Men teknisk sett blir det fordel.
24	E2:	Jeg mente mer om summen.
25	E3:	Men det spørs hvilke tall du får. Hvis du tar summen sju, tar du bort sju kombinasjoner. Da er det færre kombinasjoner igjen.
26	E2:	Det blir vanskeligere å få de andre tallene.
27	E1:	La oss prøve da. Jeg kaster og fikk åtte. Din tur.
28	E3:	Jeg kaster elleve.
29	E1:	Jeg fikk ti.
30	E3:	Nå har vi brukt opp ti kombinasjoner. Nå er det færre kombinasjoner. Du har $\frac{1}{26}$ sannsynlighet å få en kombinasjon som ikke er tatt.
31	Jeg:	Nå kaster E3, sju. Hvem stiller dårlig nå?

32	E1:	Siden jeg startet spillet, vil jeg uansett få poeng siden alt er mulig. Men for E3 er det mulig å få det som ikke er tatt. Det er lavere sannsynlighet for han og få en ubrukt kombinasjon.
33	E2:	Det er ikke umulig for E3 å tape, men han starter med dårligere sjanse.

Når elevene diskuterer dette spillet som skal være urettferdig, spiller de et eksempel av spillet under opptaket og diskuterer om deres påstander holder. Elevene bytter blikket mellom terningene og tabellen de har fått og krysser ut de kombinasjonene de har fått. Elevene endrer uttrykket fra å bruke antall kombinasjoner til å si det samme med en brøkverdi i form av sannsynlighet. På den måten vil de vise at det er urettferdig for den andre spilleren siden første spiller allerede har tatt ut en kombinasjon. Mens dette skjer er E1 på *uttrykksiden* av *kommunikasjonskompetansen* mens E2 og E3 tolker og avkoder det E1 sier og dermed er de på mottakersiden. De holder på med en muntlig matematisk diskusjon og uttrykker seg på deres måter.

Gjennom min rolle som delvis deltakende observatør stiller jeg spørsmålet «Hvorfor det?» for å få et sikkert bilde av kompetansene elevene uttrykker under datainnsamlingen.

Gr1-Opp3

Denne oppgaven var der elevene brukte minst tid. Elevene var usikre på hva som menes med sammenhenger. Dette kan tyde på at oppgaven var for kompleks (Yeo, 2017) for denne elevgruppa. Jeg ga elevene litt hjelp underveis slik at de kunne begynne å undersøke oppgaven, og først se på noen sammenhenger mellom rader og kolonner. Jeg ba dem om å se sammenhenger mellom tallene i samme rad eller kolonne. Jeg spurte om de så noe spesielt med endring av tallene i kolonner og rader, og om det fantes noen mønstre. Dette gjorde jeg slik at oppgaven skulle bli mindre kompleks og dermed mindre åpen. De så fort at det var den lille gangetabellen. Cifarelli og Cai (2005, s. 307) har samlet 19 forskjellige sammenhenger mellom kolonner, rader. Denne gruppa fant seks av disse sammenhengene. Alle sammenhengene de fant handlet om sammenhenger mellom tallene i kolonner og rader. Deres umiddelbare respons var at diagonalen, fra venstre øverst til høyre nederst, i tabellen besto av kvadrattall, og andre diagonalen hadde et mønster der differansen mellom tallene i diagonalen avtok med to. Sekvensen nede inneholder flere kompetansetyper som jeg har lyst til å se på videre.

22 E2: Ja det er jo, her kan du se noe spennende. Først plusser du på 8 også plusser du med 6 også 4 også 2 og 1, 0 minus … Det deler seg på to det du plusser på liksom.

23 E3: Ja, ja ...

24 E2: Du starter med 10 og 8 ...

25 E1: Ja også 6, 4, 2 … Ja det er kult.

26 Jeg: Hva vil det si da?

27 E1: Ja også ... Fra øverst til høyre ned mot midten skrått går det ned fra 10 til 18 er det pluss 8, fra 18 til 24 pluss 6, fra 24 til 28 er det pluss 4 … og fra 28 til 30 pluss 2.

Det som er gjennomgående i denne sekvensen er at elevene aktivt bruker *kommunikasjonskompetansen* ved å bytte posisjonen sin fra å være på uttrykksiden til mottakersiden. Dette skjer når hver av dem deler sitt forslag med resten av gruppa, de gjør rede for sine forslag, mens de andre tar imot, avkoder og fortolker forslaget. Når forslaget blir tatt imot, faller de andre elevene under den *mottakendesiden* av *kommunikasjonskompetanse*. Når de redegjør for sitt forslag, følger de og bedømmer andres matematiske resonnement. Når E2 foreslår at differansen avtar med to for hver gang tallet går oppover i den andre diagonalen, kommer E1 og viser at det stemmer. Der bedømmer E1 og E2 sitt resonnement om denne utviklingen og dermed ser vi karakteristiske trekk ved *resonnementskompetanse.*

I den neste sekvensen er det igjen mange trekk av *kommunikasjons-* og *resonnementskompetanse*. En annen ting som er interessant for oss er et elevenes tekniske nivå av kompetansen er forskjellig. I denne sekvensen utvider jeg oppgaven til 20×20 og ber elevene om å finne de nye tallene i diagonalen fra nederst venstre til øverst høyre.

42 E3: Som jeg sa. Hvis vi prøver med 10, er det 10 -2 er 8, eller 10 +10-2 er 18, her på 6 er det 6 + 6-2, blir 10. Så man kan starte med x+x-2, blir tallet det man får.

43 E1: Ja som du spurte, neste tall etter 20 blir 38 og neste 54 og neste tall blir 68 og 80 hvis jeg ikke tar helt feil ...

44 E2: Jeg tror det ser feil ut ...

45 E1: Nei vent da, 19 ganger 2 er 38, 18 ganger 3 er 54, 17 ganger ....(E3 sier 4) da blir det ...

46 E3: Ja det er 68. 4 ganger 7 er 28 og pluss 40 er det 68.

47 E1: Ja da er det 16 ganger 5 er 80. og du får algoritmen hvis du fortsetter …

Utvidelsen (Yeo, 2017, s. 185) av oppgaven til 20x20 gir elevene mulighet til å bringe inn *modelleringskompetanse*. Elevene er i aktiv modellbyggingsfasen der de skal finne ut hvordan diagonalen skal fortsette etter samme mønster. Både E3 og E1 kommer med forslag, men på forskjellige nivå. E3 lager en formel som skal beskrive hvilke tall en kan få. Han foreslår at $x + x - 2$ kan gi oss tallene. Han ser ikke at formelen ikke holder for hele tabellen, men bare fra kolonne 1 til kolonne 2. På den andre siden kommer E1 med et forslag der han bruker tallene systematisk i mønsteret han fant, og kommer fram til hvordan diagonalen ville sett ut dersom vi hadde 20x20 tabell. E1 viser høyere teknisk nivå av *modelleringskompetanse* enn E3 siden han kunne se en mer holdbar modell for diagonalen. Her løser elevene oppgaven de fikk som kunne beskrives som et problem og de kom med løsninger for denne oppgaven, som viser elevenes bruk av *problembehandlingskompetanse*.

Den siste sekvensen jeg skal ta opp her viser at elevene bringer inn *tankegangskompetansen*. Elevenes fokus var å se sammenhenger mellom hele rader og kolonner. Jeg ledet dem mot å dele opp tabellen. Jeg spurte om de kunne finne flere sammenhenger dersom de hadde mindre deler av tabellen, ikke hele:

52	E1:	Med rad to blir det første tallet doblet til siden og plusset med halvparten til tallet under, (litt usikker) jo.. Fordi halvparten av to er en og plusset med to er 3 (tallet under).
53	E3:	Det er fordi det går 1 nedover (snakker om første kolonne).
54	E1:	Deretter plusse med to nedover og plusse med halvparten bortover. Med rad 3 først doble tallet og deretter plusse med $\frac{1}{3}$ av tallet ned over. (her mener eleven dobling med å legge til det første tallet raden starter med). Vil det gå for rad fire tro?
55	E3:	Den burde være med $\frac{1}{4}$.

Elevene E1 og E3 diskuterer hvilke sammenhenger det er mellom nabotallene på siden og under. Når E1 ser fra et tall i første kolonne til neste tall i samme rad, ser han at tallet dobler seg. Fra det nye tallet til tallet som er under ser han at tallet øker like mye som én brøkdel av rad nummer han startet med. Eleven stiller et forventet spørsmål om det kan stemme med rad fire. Her ser man at eleven er klar over hvilke spørsmål som kan stilles i forbindelse med den matematiske aktiviteten han er i og E3 kommer med et svar som er riktig svar for spørsmålet til E1. Begge elevene viser elementer av *tankegangskompetansen* der E1 er klar over hvilke spørsmål han kan stille for å se om mønstre stemmer, og E3 er også klar over på hvilke svar som forventes og svarer på spørsmålet (Niss & Jensen, 2002, s. 47). Det er også et tydelig trekk av resonnementskompetanse der elevene følger og bedømmer andres resonnement (Niss & Jensen, 2002, s. 54).

4.4 Analyse av Gruppe 2

Gruppen består av tre elever, to jenter og en gutt. De går på studiespesialiserende retning. De fikk oppgavene i en annen rekkefølge, men oppgavenummer på arket var det samme. Rekkefølgen deres var oppgave 1, oppgave 2 og oppgave 3. Navnekode for elevene blir E4, E5 og E6. Denne gruppa består av elever som har lavest måloppnåelse i forhold til andre gruppene, på bakgrunn av lærerens vurdering.

Gr2- Opp1

Etter at alle har lest oppgaven spør E4 om noen har forstått oppgaven og hva den spør etter. Gjennom hele oppgaveløsningen diskuterer elevene hvordan de skal finne arealet og hva slags figur de skal bruke, og om de skal bruke areal eller omkrets for å finne svar på oppgaven. Disse samtalene under oppgaveløsningen inneholder matematiske begreper som areal, omkrets, side, firkant, og de definerer disse begrepen, elevene sier sitt og hører hva hver av de andre sier. Alle disse peker på at elevene bruker *kommunikasjonskompetansen* der de fortolker hva medeleven sier, og de setter seg inn i andres matematikkholdige muntlig utsagn på bakgrunn av sekvensene jeg tar opp her (Niss & Jensen, 2002, s. 60).

Denne sekvensen i linjene 1-34 er den første oppgaven denne gruppa arbeidet med. De skulle finne antall type gjerder for innhegning. Hele sekvensen inneholder trekk fra kompetansetypene som er beskrevet i teoridelen.

1	E4:	Var det noen av dere som forstå oppgaven?
2	E5:	Jeg forstå hva den spurte etter.
3	E6:	Er ikke det noe vi skal finne og gange det opp?
4	E4:	Gange det opp? Hva mener du?
5	E5:	Jeg vet ikke. Du må finne hvor mange … (utydelig)
6	E4:	Kan jeg tegne det opp?
7	Jeg:	Ja det kan dere.
8	E4:	Ok her har vi en firkant. Alt inni er 36.
9	E5:	Ja alt inni her (peker på rektanglet han har tegnet).
10	E4:	Ok da må finne omkretsen da.
11	E6:	(Utydelig) men det skal bli arealet.

12	E4:	Skal det være gjerde inni her også?
13	E6:	Nei arealet er her inni …
14	E5:	Er ikke innhegning det som er rundt?
15	E6:	Ja, men arealet skal bli 36 kvadratmeter.
16	E5:	Å. Ja.
17	E4:	Ok hvis vi finner ut av .... Nei ... Jo.. Da må vi gange her (peker på lengde og bredde) for å få 36 da.
18	E5:	Ja. Fordi det er areal. Ok x da ...
19	E4:	Ja ja ok. Vi skal gjøre det ordentlig likning da. Jo Nei,
20	E6:	Jeg tror det blir lettere om vi gjør det til en likning.
21	E4:	Vi gjør det til en likning.
22	E5:	Blir det bare $x = 36$ eller?
23	E6:	Nei. x er ukjent. Det skal være hvor mange A og hvor mange B vi trenger for å få 36 kvadratmeter.
24	E4:	36 er lik ... Hva skal det være på andre siden? x ganger x er lik 36?
25	E5:	Nei er ikke det ... Du skal kalle dem A og B liksom. Hvor mange antall A og antall B som skal bli 36. Noe sånt.
26	E4:	Ok vi må først finne ut hva vi skal finne ut. Skal vi finne omkretsen eller?
27	E5:	Hvorfor trenger vi å vite hva omkretsen er?
28	E4:	Det skal være omkretsen skal ikke det?
29	E5:	Hvor mange av hver trenger dere … (leser oppgaven). Ja det blir på en måte omkretsen.
30	E4:	Det blir x ganger x er lik 36.
31	E5:	Da blir det x opphøyd i andre er lik 36.
32	E4:	Skal vi ta kvadratroten da?
33	E5:	Og kvadratroten av 36 er ...
34	E4	Kan vi bruke kalkulator?

Etter at de har lest oppgaven begynner E4 å tolke hva oppgaven spør etter og lurer på om han kan tegne opp figuren. Han beveger seg fra teksten i oppgaven til å gi et visuelt og geometrisk bilde av situasjon ved tegne opp figuren.

I tillegg til *kommunikasjonskompetansen*, inneholder hele prosessen trekk av *modelleringskompetanse*. Dette kan vi se når elevene prøver å finne ut hvilke sidelengder en figur med 36 m^2 areal ha. De tar en problemstilling med å lage innhegning som står utenfor matematikken, og henter deretter inn matematiske begreper og definisjoner for å gi et svar til denne problemstillingen. Dette betyr at elevene er inne i aktiv modellbygning siden av denne kompetansen (Niss & Jensen, 2002, s. 52). Når elevene går fra å undersøke sidelengdene til en figur med et bestemt areal til å løse det problemet som oppstår, beveger de seg fra *modelleringskompetansen* til *problembehandlingskompetansen*. Dette er også et eksempel på hvordan kompetanse er tett forbundet. For å finne ut hva sidelengdene i figuren skal være, bruker de matematisk symbolspråk aktivt. I linjene 23-34 ser vi at elevene bruker en andregradslikning (de har ikke brukt dette begrepet), og bringer inn matematiske spillereglene når de skal løse dette problemet. Til slutt kommer de fram til at de må ta kvadratroten av begge sidene for å finne hva det ukjente er. At kompetansene behandles under hver sin hovedkategori skal ikke bety at kompetanser fra to forskjellige grupper ikke kan være forbundet med hverandre (Niss & Jensen, 2002, s. 46). Når elevene stiller spørsmål om hva den ukjent siden skal være, tar elevene i bruk *problembehandlingskompetansen*, og for å kunne svare på spørsmålet er de nødt til å bruke riktige spilleregler i matematikk. Det viser at elevene tar i bruk *symbol- og formalismekompetanse*. Selv om å finne kvadratroten av 36 er ikke det vanskeligste for mange elever, ser E4 nytten av å bruke et hjelpemiddel som kan gi ham svaret på en utregning. Dermed viser eleven at han har kjennskap til eksistensen av relevant redskap til bruk for matematisk virksomhet (Niss & Jensen, 2002, s. 62)

Mellom linje 8 og 16 diskuterer elevene begrepene areal og omkrets. Denne diskusjonen inneholder elementer av *tankegangskompetansen* der de skal *forstå* og *håndtere* gitte matematiske *begrepers rekkevidde* og i tillegg skjelne mellom definisjoner i matematikk (Niss & Jensen, 2002, s. 47). De diskuterer hva areal og omkrets er, og hva de trenger å finne ut for å gi svar på spørsmålet. Mellom linjene 27 og 29 ser vi også andre trekk ved denne kompetansen der E4 spør om hvorfor de trenger å finne omkretsen hvor eleven viser hvilke spørsmål som kan stilles som har matematisk karakter.

Når E5 kommer med et forslag til hvordan likningen de skal bruke settes opp, følger både E6 og E4, E5 sitt resonnement og bedømmer det. E4 forklarer hvordan likningen skal se ut, og E6 forklarer hva den ukjente, x, står for. Samlet viser alle elevene trekk ved *resonnements-kompetanse* her.

Gruppa har fokusert bare på kvadratisk figur. Arealoppgaven har et lukket mål ifølge Yeos kriterier. I oppgaven står det ikke noe om at elevene skal bruke en bestemt figur. Dette kan gjøre oppgaven mer åpen med tanke på formulering. Jeg ville se om de kunne komme fram til andre løsninger der det ikke var en kvadratisk figur. Det viste seg at elevene måtte arbeide på et høyere teknisk nivå innenfor noen kompetansetyper. Elevene laget blant annet en likning med to ukjente og viste ikke hvordan de skulle løse den. Sekvensen under viser hvordan elevene måtte bevege seg mot et høyere teknisk nivå av *symbol- og formalismekompetansen.*

95	Jeg	Kan dere finne antall gjerder hvis det hadde vært et rektangel?
96	E5:	Rektangel er 2 og 2 sider er like.
97	E4:	Det blir samme poeng da. Du må fortsatt gange den med den (peker på sidene på rektanglet)
98	Jeg:	Ok.
99	E5:	Da blir det to forskjellig. Mens her er det like (peker på kvadratet). Det blir noe annet.
100	E4:	Blir svaret forskjellig?
101	E5:	Nei, eller, jo. Arealet er jo 36 da må de være like? Hvis det er samme areal da er det samme omkrets.
102	E4:	Det er sant. Ja. Begge kommer til å bli 36.
103	E5:	Nei det blir ikke likt.
104	Jeg:	Hvilke egenskaper har et rektangel? Og hva med et kvadrat?
105	E5:	De har jo to like sider. Mens kvadratet er samme.
106	E4:	Skal vi sette en likning?
107	E5:	Ja.
108	E4:	Da sier vi $a \cdot b = 36$
109	E5:	Side gange side er areal.
110	E4:	Hvordan skal vi løse den?
111	E6:	Hvorfor blir $a \cdot b = 36$
112	E5:	Fordi side ganger side er areal.
113	E6:	Er ikke A er 2 og B er 3?
114	E5:	Nei, nei. Det er ikke samme A og B. Ok vi kan bytte til x og y. Da blir det $x \cdot y = 36$. Det går ikke an å løse den da. Det er ikke noe med opphøyd i andre eller noe sånt.

I linjene 95-114 spør jeg elevene om de kunne finne et annet eksempel på et areal med $36\ m^2$ der innhegningen ikke er en kvadratisk figur. De kommer med en ny likning som skaper forvirring hos E6. Selv om a og A kan representere to forskjellig ting, ser hun dem som to notasjoner som beskriver samme. Hun følger med andres resonnement, men sliter med å bedømme det. Hun viser da mindre dekningsgrad av *resonnementskompetansen*. E5 ser hennes forvirring og kommer med et nytt forslag med å endre a og b til nye variabler som x og y. Fra en likning med en ukjent $x^2 = 36$ til en likning med to ukjente $x \cdot\ y = 36$ er et tegn på at elevene er på et høyere teknisk nivå av *symbol-og formalismekompetanse*. Siden de har laget en likning so kan gi dem svar på andre figurerer enn kvadrat, kan vi si at de arbeider på et høyere teknisk nivå innenfor problembehandling, men ikke når det gjelder å løse denne likningen. De formulerer et problem, men kan ikke løse det (Niss & Jensen, 2002, s. 50). Dette kan ses som at elevene har lavere dekningsgrad av problembehandlingskompetanse (Niss & Jensen, 2002, s. 65).

I tillegg er det også mulig å se spor av tankegangskompetansen. Dette fordi elevene etter mitt spørsmål begynne å tenke over egenskaper av geometriske figurer og diskuter hva det vil si for oppgaven med andre figurer.

Etter sekvensen over, med litt hjelp fra meg kom elevene fram til en annen løsning der figuren ikke var kvadratisk. Dette skjedde da jeg spurte dem hva $x \cdot\ y = 36$ betyr. Vi ble enige om at vi skal finne to lengder for figuren, som skal gi oss et areal på $36\ m^2$. Etter det kom elevene med et forslag der de måtte bruke 12 A og 2 B lengder. Til slutt viste det seg at elevene i denne gruppen fikk mulighet til å øke teknisk nivå av *symbol- og formalismekompetansen* sin ved å finne en metode for å løse en likning med to ukjente. Metoden de brukte var prøve og feile. Følgende sekvens viser samtalen mellom meg og elevene der jeg veileder dem mot å finne løsning på denne oppgaven:

117	Jeg:	Hvordan finner man arealet av et rektangel
118	E4:	Gange lengde med bredde.
119	Jeg	Ok. Hva skal lengde ganger bredde være?
120	E4:	Det er 36
121	E5:	Ja 36
122	Jeg:	Kan dere finne noen tall som kan gi oss 36 når dere ganger dem opp?
123	E5:	Seks ganger seks. (de ler)
124	Jeg:	Den har vi. Kan dere finne andre alternativer?
125	E4:	Tre ganger 12.

Veien til løsningen til dette problemet, gjennom min rolle som deltakende observatør, var å bygge stillaser for elevene. Med dette fikk elevene mulighet til å øke teknisk nivå (Niss & Jensen, 2002, s. 66) av *symbol-og formalismekompetansen.*

Gr2-Opp2

Selv om oppgaven spør om å lage et rettferdig og et urettferdig spill, finner gruppa fire løsninger der to av dem er rettferdige og to er urettferdige. Som i den første oppgaven er det gjennomgående elementer av *kommunikasjonskompetanse, resonnementskompetanse* og dels *tankegangskompetanse* i denne oppgaven. Elevenes første reaksjon på oppgaven var at de ikke kunne sannsynlighet, og det var vanskelig. De leste oppgaven og fokuserte på noen få utfall av alle kombinasjonene. De valgte derfor åpenbare løsninger som den ene kaster en terning mens den andre kaster med to slik at den ene får en fordel om å komme fram til ønsket tall raskere. De stilte flere spørsmål angående rettferdighet og urettferdighet i forbindelse med matematikk. Blant andre var et spørsmål slik:" Hvordan lage det urettferdig?". Denne spørsmålstypen vil falle under *tankegangskompetansen* (Niss & Jensen, 2002, s. 48) fordi det har med matematikkens art å gjøre i forbindelse med sannsynlighetstemaet hvor de må undersøke om antall ønskede kombinasjoner kan gjøre spille urettferdig. Siden det kreves en matematisk undersøkelse for å finne svar på dette spørsmålet, kan en slå fast at elevene tar i bruk *problembehandlingskompetansen.* De har laget et problem, *å oppstille (Niss & Jensen, 2002, s. 49),* og de løser det problemet til slutt ved sammenligne sannsynlighetene for hver spiller. Dette kan observeres i sekvensene jeg tar opp under.

Når det gjelder kommunikasjons- og resonnementskompetanse, var overlapping mellom kompetansen synlig. Hver gang en av elevene i gruppa hadde en løsning, stoppet resten av gruppa og de stilte enten spørsmålet «Hvorfor?», eller de bekreftet medelevenes påstand ved å si «Ja, det er sant ...». Dette peker på at elevene *følger med og bedømmer* andres *matematiske resonnement (Niss & Jensen, 2002, s. 54).* Dette opprettholdes ved en matematikkholdig muntlig aktivitet der elevene veksler mellom å være *mottaker* og *avsender* samtidig som de *setter seg inn* og *fortolker andres resonnement (Niss & Jensen, 2002, s. 60-61).* Alle disse elementene om kompetanser jeg har nevnt over kan vi se i følgende sekvens der elevene nærmer seg slutten av oppgaven.

65	E4:	En til, hvis den ene får 2,3,4 og den andre skal få resten. Nei det går ikke, fordi du har større sannsynlighet for å få 7 enn å få 6.
66	E6:	Ja det er ok. Da er det urettferdig for den ene som skal få 2, 3, 4.
67	E4:	Hva med en du får 2,3,4,5, 10, 11, 12 og den andre kan få de andre.
68	E5:	Men det er ikke urettferdig for den første fordi det er flere tall å velge mellom?

69	E4:	Men det blir jo urettferdig, fordi det er mye vanskeligere å få 11, 12 enn å få for eksempel 6 og 7.
70	E5:	Det er ikke noe om hvor mange verdier du kan velge mellom, det er om kombinasjoner.
71	Jeg	Hva mener du med at det vanskeligere?
72	E4:	Fordi for å få 12 er det bare en måte å få det på, mens 6,7 kan du få på mange flere måter
73	E5:	Da er det urettferdig for den som skal få 2,3,4,5,10,11,12.
74	E4:	Vent da er det likt antall? (han er usikker og begynner å telle i tabellen)
75	E5	Det er ikke noe med det å gjøre. Det ser ut som den som skal få fra 2 til 5 og 10 til 12 har flere tall verdier å velge mellom, mens den andre har større sannsynlighet siden det er lettere å få 6,7,8,9.
76	E4:	Ja, ja. Men jeg tenker det skal se ut som det er rettferdig men resultatet blir urettferdig for den ene hvis det er likt antall verdier de kan få.

Niss og Jensen (2002, s. 113) mener at noe fagstoff vil egne seg bedre til å utvikle en spesiell kompetansetype enn annet. Formuleringen i denne oppgaven kan alene være nok til å lage en modell. En kan se denne oppgaven fra en annen vinkel. Vi kan spørre om det samme ved å si «Hvordan ser et rettferdig spill ut når to spillere kaster to terninger?». Det elevene gjør her, er å finne forslag for regler for disse spillene med rettferdighet og urettferdighet i bakhode. Det vil sette i gang *aktiv modellbygging* siden av *modelleringskompetansen* (Niss & Jensen, 2002, s. 52).

I linjene 74-76 vil E4 gå et steg videre og vil analysere modellens holdbarhet (Niss & Jensen, 2002, s. 52) med hensyn på urettferdighet. De har funnet noen løsninger, men E4 har lyst til å gjøre spillet urettferdig, mens den ser ut som den er rettferdig. Dette vil han sjekke ved å bestemme at summen av øynene hver spiller kan få er likt antall, men antall kombinasjoner er ulike. Dette viser at E4 har større dekningsgrad av *modelleringskompetansen* i forhold til resten av gruppa, siden de bare er fornøyde med å ha funnet et svar på oppgaven.

Hver gang jeg tar ordet i forbindelse med det elevene diskuterer, stiller jeg spørsmålet «Hva mener du?» for å få elevene til å redegjøre for sitt forslag slik at jeg er sikker på at elevenes resonnement er ikke tilfeldig, men gjennomtenkt.

Alle forslagene elevene kommer med har med *å oppstille, å formulere* et problem å gjøre. Når elevene har et forslag, stiller de spørsmålet om deres forslag for spillet gjør det rettferdig. For å svare på det spørsmålet bruker de hovedregelen i sannsynlighetsregning der de finner forholdet mellom ønsket utfall og mulige utfall. Det kan se ut som at elevene bruker rutineoperasjoner, som å telle, men de har fortsatt aktivert *problembehandlingskompetansen* når de formulerer spørsmål som «Blir det rettferdig eller ikke hvis vi (...)?». Denne formuleringen kan være et tegn på at de lager problemer for seg selv som de ønsker å svare. Dermed kommer *problembehandlingskompetanse* (Niss & Jensen, 2002, s. 49) til uttrykk når elevene er i dette stadiet.

Gr2-Opp3

Oppgaven var uvant for elevene når det gjaldt både formulering og hensikten. Elevene skjønte først ikke hva oppgaven var ute etter og hva som mentes med sammenhenger. De brukte minst tid på denne oppgaven, og det var lange tause pauser under arbeidet. Det var åpenbart for alle at denne tabellen illustrerte gangetabellen, og elevene var bare interessert i de første kolonnene og de første verdiene i hver rad. De fant fire av 19 sammenhenger som er beskrevet i Cifarelli og Cai (2005, s. 307). De fant ut at tabellen viser gangetabellen, tallene i hver rad var i en aritmetisk utvikling, diagonalen fra øverst venstre til nederst høyre består av kvadrattallene og tallene var symmetriske om diagonalen. I tillegg til de fire sammenhengene, fant de en annen sammenheng som ikke er beskrevet i Cifarelli og Cai (ibid.). Det var at femte tall i hver rad er halvparten av siste tallet i samme rad. Dette er et resultat av at denne oppgaven var åpen når det gjaldt svar.

1	E4:	Sammenhenger
2	E6:	Gange.
3	E5:	Dele, addere, subtrahere, primtall ...
4	Jeg:	Kan dere si noe konkret om sammenhenger på bestemte rad og kolonner eller steder i tabellen?
5	E4:	Her står det hele 3 gangen, her står det 4 gangen osv.
6	E5:	2 pluss 4 er 6. 3 pluss 6 er 9. 7 pluss 14 er 21. Er ikke det?
7	E4:	Ja, men 10 +15 er ikke 25.
8	E5:	Jeg mente hvis du adderer de to første, får du det tredje.
9	E4:	Det er i hvert fall alle gangene er her. 10 gangeren, 9 gangeren.
10	E5:	Ja.
11	E4:	Hvis vi tar 9 ganger 4 blir 36. 9 ganger 8 blir 72.
12	E5:	Det er gangetabellen. 3 ganger 3 er 9.

13	Jeg:	Finner dere også noe annet spesielt med tabellen. For eksempel du sa når du plusser de to første, så får du den tredje. Det er en sammenheng i første tre kolonner. Kan dere finne noe annet?
14	E5:	Du sa noe med gange.
15	E4:	Det er gangetabellen. 3 ganger 3 er 9.
16	E5:	Tall i midten hvis du ganger det med to, får du det siste tallet.
17	E4:	Hæ?
18	E5:	Hvis du ganger 5 med 2 får du 10, 10 ganger 2 er 20, 2 ganger 20 er 40 osv.

I de første 18 linjene i denne sekvensen har elevene vist elementer av *resonnementskompetansen*. Mellom linje 6 og 8 kommer E5 med forslaget om summen av de to første tallene blir til det tredje tallet i samme rad, og hun rettferdiggjør sin løsning ved å gi eksempler på hvordan det fungerer. E4 *følger med* og *bedømmer hennes forslag (Niss & Jensen, 2002, s. 54)*. Han oppfatter det som at dette gjelder for alle etterfølgende tall, og kommer med et mot eksempel som ikke stemmer med E5 sitt forslag. Han forstår den logiske betydningen av et *mot eksempel* (ibid. s.54). Deretter presiserer E5 sitt forslag og sier at det bare gjelder for de to første tallene i alle rader. I tillegg til *å sette seg inn* og *fortolke* andres muntlige utsagn (Niss & Jensen, 2002, s. 60), viser elevene at de kan avkode en matematisk fremstilling (ibid. s.61). De ser imidlertid at tabellen er en fremstilling av gangetabellen. Elevene viser også elementer av *kommunikasjonskompetansen* i denne sekvensen.

Denne oppgaven handlet om sammenhenger en kan finne i en gitt tabell. Når elevene så etter noen sammenhenger, kom det fram flere spørsmål som dreide seg om matematiske begreper som partall, oddetall, kvadrattall, primtall, symmetri og diagonal. *Tankegangskompetansen* har, i tillegg til forventede spørsmål og svar som har en matematisk art, et annet aspekt. Det er *å kjenne*, *å forstå* og *å håndtere* matematiske begreper (Niss & Jensen, 2002, s. 47).

28	E4:	Alle oddetallene? Sånn 1, 4, 9, 16 . ..
29	Jeg:	Hva kalte du de tallene?
30	E4:	Oddetall? Nei det er … noe det heter. Jeg husker ikke.
31	E6:	Kvadrattall.
32	E5:	Ja.
33	E4:	Jaa.
34	Jeg:	Hvor er kvadrattallene?
35	E4:	Det er i diagonalen.

36	Pause	15 sek.
37	E5:	Jeg vet ikke om det er flere.
38	E4:	Det er sikkert sykt mange.
39	E5:	Jeg ser ikke flere.
40	E6:	Kult! Tallene liner opp med hverandre. $10 - 10, 18 - 18, 24 - 24, \ 28 - 28, \ 30 - 30$.

Selv om bruk av begrepene ikke er helt riktig i starten, prøver de å huske hva begrepene betyr. E4 har ikke spurt hva tallene 1, 4, 9, 16 ... betyr, men hans respons på at han kjenner igjen tallene viser at han uttrykker *tankegangskompetansen*. E6 har svaret på det og sier at de er kvadrattallene. E4 viser at han skjelner mellom forskjellige matematiske definisjoner (Niss & Jensen, 2002, s. 47)

Til slutt kan en påstå at elevene har uttrykt elementer av *problembehandlingskompetansen* ved å finne løsninger på en oppgave som kan regnes som et problem for dem. Løsningen på dette problemet innebærer ikke noen rutineoperasjoner. De har analysert oppgaven og brukt forskjellige regnearter etter matematiske spilleregler for å sjekke om deres svar stemmer med tabellen. På bakgrunn av at kompetansene kan ikke sees isolert fra hverandre, kan en argumentere for at elevene har tatt i bruk *symbol-formalismekompetansen* (Niss & Jensen, 2002, s. 58). Elementer av denne kompetansen er ikke synlig i elevenes fysiske handlinger. Det skjer heller på det mentale plan. Grunnen til at man kan si dette er at svarene elevene kommer med uten å ha vist fysiske bevis for, og som er riktige må ha hatt en kognitiv prosess for å oppnå det. For eksempel å finne ut at det dobbelte av midterste tall er samme som det siste tallet i samme rad (linje 16), kommer ikke uten noen kognitive prosesser selv om det ikke er fysisk mulig å observere.

4.5 Analyse av Gruppe 3

Det var to jenter og en gutt i denne gruppa. De arbeidet først med arealoppgaven, deretter sannsynlighetsoppgaven og til slutt gangetabelloppgaven. De brukte mest tid på oppgave 1 og minst i oppgave 3. Denne gruppa har middels måloppnåelse i forhold til andre grupper.

Gr3-Opp1

Den første oppgaven gruppa arbeidet med var den oppgaven de brukte mest tid på både i denne gruppa og sammenlignet med de andre gruppene i dette studiet. En av de grunnene til at de brukte mest tid var at to av deltakere i gruppa hadde kommet med en løsning som den tredje deltakeren ikke kunne akseptere. De to deltakere var fornøyde ved å ha kommet fram til svaret ved å bruke lengdene på gjerdet uten å tenke gjennom hva oppgaven var etter, mens den andre deltakeren var uenig med deres svar. Hele oppgave løsningen var preget av dette. Elevene gikk fram og tilbake mellom oppgave teksten og tegnet figurene de mente var riktig, for å overbevise hverandre. De hadde en matematikkholdig diskusjon der de ofte vekslet mellom å være *avsender* og *mottaker* (Niss & Jensen, 2002, s. 60). *Kommunikasjonskompetanse* var den kompetansen som kom til uttrykk under hele oppgaveløsningen. Den matematiske samtalen var tilstede når løsningene skulle presenteres og rettferdiggjøres. Sekvensen jeg tar opp under kan vise det jeg har forklart ovenfor, samt noen andre kompetanser. De første tre linjene består av at elevene spurte hverandre om de hadde forstått oppgaven.

4	E7:	Det skal være til sammen 36 kvadratmeter
5	E8:	[...] skal være 36 kvadratmeter
6	E7:	Så $A\ = 2\ m$ og $B = 3\ m$. Så det betyr at ene siden er 2 m og andre er 3 m.
7	E9:	Nei, nei. Det er type gjerde som er 2 m og 3 m. Så skal vi se på arealet
8	E7:	Så skal vi finne hvor mange av hver vi skal kjøpe. Har vi forslag?
9	E9:	Nei! (ler)
10	E8:	Jeg kommer ikke til å få det. Fordi jeg har lært å gange to sider.
11	E9:	Ja når du skal finne arealet.
12	E7:	Kanskje du kan gange 3 ganger 3 ganger 2 ganger 2. Vent da.
13	E9:	Hvis vi tar 6 ganger 6 er lik 36 da har vi arealet.
14	E7:	Jo vi kan ta 3x3 lik 9, 9 ganger 2 lik 18 og 18 ganger 2 lik 36.
15	E9:	Det blir ikke riktig. Tenker du på som 2 m gjerde 2 m gjerde 3 m gjerde 3 m gjerdet?
16	E7:	Ja.
17	E8:	Det blir riktig tegning messig hvis du har to ganger 3 her, og to ganger 3 her, nei da. Tulla.
18	E9:	Det er $3 + 3$ på den siden og $2 + 2 + 2$ på den andre siden.
19	E8:	Men det blir samme som her. To ganger 3 m her og to ganger 3 m her. Vi trenger 2 av $2m$. Det er på en måte løsning. $2 \times 2 \times 3 \times 3$.
20	E9:	Nei det blir ikke riktig.
21	E7:	Hvorfor blir det ikke riktig? Her står det hvor mange vi trenger.

22	E9:	Ok. Hva representerer $2 \times 2 \times 3 \times 3$ representerer det antall meter eller antall gjerde.
23	E8:	Det blir jo meter.
24	E7:	Det finnes jo to typer og vi trenger to av hver.
25	E9:	To av hver blir ikke riktig.
26	E7:	Jo hvis du ganger det blir det 36.
27	E8:	Ja det blir 36.
28	E9:	Jeg skjønner ikke hvorfor dere skriver $2 \times 2 \times 3 \times 3$. Fordi det betyr at du har to 3-er gjerde og to 2-er gjerde. Og det er ikke riktig.
29	Jeg:	Hva tenker du? Kan du tegne en figur?
30	E9:	Ja. Hvis den ene siden er 6 m, og andre siden er også 6 m blir arealet 36 kvadratmeter. Da kan jeg dele denne siden på 2 3-er gjerde og samme på alle sidene.
31	E8:	Det er jo nettopp det da.
32	E9:	Nei det er ikke det du viser. Når du skriver $2 \times 2 \times 3 \times 3$. Det er lettere å tegne det.
33	E7:	Det er flere løsninger.

Løsningen for oppgaven i linjene 4-33 er en kvadratisk innhegning der side lengdene er 6 m. Det som gjøre denne sekvensen spesiell, er at E7 og E8 prøver å overbevise E9. I linje 14 foreslår E7 at de kan gange tallene $2 \times 2 \times 3 \times 3$ og få tallet 36. Han viser at han ikke forstår hva hans løsning betyr. Han er fornøyd med å komme fram tallet 36. Det er først her E9 protesterer, og sier at dette kan ikke være svar på oppgaven og hun vil at de skal begrunne hva det de har skrevet betyr. Spørsmålene hun stiller i linje 22 to stiller E9 et spørsmål der hun vil få fram hva andre har tenkt når de skrev gangestykket. Her viser E9 at hun er i en tankegangsprosess der hun er klar over hvilke spørsmål hun kan stille i denne situasjonen(Niss & Jensen, 2002, s. 47). De andre elevene er sikre på at deres svar stemmer. Dette gjør de ved å rettferdiggjøre svaret sitt. Elevene i denne sekvensen uttrykker *tankegangs*- og *resonnementskompetansen* i forskjellig dekningsgrad.

Denne diskusjonen ga en god mulighet for å trekke inn *representasjonskompetanse*. E7 og E8 var ikke klar over at deres forslag ikke holdt, men E9 var sikker på at det ikke kunne stemme. Derfor foreslår hun at det er lettere å vise hva deres forslag betyr med en figur. Her veksler elevene mellom forskjellige representasjonsformer. De veksler fra å vise arealet som et gangestykke av to dimensjoner, til å vise hvordan det ser ut geometrisk. Når figuren ble presentert, viste det seg at en slik figur ikke ville gitt et areal på $36\ m^2$. Arealet til figuren ble

$6\ m^2$ og dermed oppdaget elevene at det ikke stemte med deres mål. E9 viser dem hvordan en figur med $36\ m^2$ ville sett ut med tegningen sin.

Det å regne ut areal av et rektangel kan ikke regnes som et problem for denne gruppen siden de kunne det fra før. Gjennom arbeid med oppgaven viser det seg at å finne en figur med et bestemt areal var et problem for denne gruppa. Elevene kunne ikke sette i gang noen rutineoperasjoner for å foreslå noen løsninger for denne oppgaven. De løste det problemet ved å foreslå noen sidelengder der de sjekket om det kunne stemme med arealet. Den første løsningen de kom på var det samme eksemplet som de andre gruppene hadde hvor figuren var et kvadrat. Selv da de hadde funnet lengder av kvadratet, var det ikke åpenbart for dem at de skulle bruke omkretsen for å finne antall type gjerde. Siden de ikke kunne se hva de skulle gjøre med lengdene de fant for kvadratet, måtte de lese oppgaven på nytt. Denne handlingen ga elevene muligheten til å øve på andre aspekter av *kommunikasjonskompetansen*. Det vil si å øke dekningsgraden av denne kompetansen med tanke på fortolking og avkoding av tekster (Niss & Jensen, 2002, s. 60). Handlingene elevene viser, er å presisere et matematiskproblem, og løse det problemet. Alle disse handlingene viser trekk av *problembehandlingskompetansen*.

Eksempler på hvordan innhegningen kan se ut er et resultat av *aktiv modellbygging* (Niss & Jensen, 2002, s. 52). Elevene kom med til sammen med tre forskjellige eksempler for innhegningen og antall gjerdetyper. Prosessen der elevene fant løsninger besto av at de først bestemte hvilken figur de skulle bruke, i dette tilfellet var det kvadrat, og hvilke mål de kunne ha slik at arealet stemte med det gitte, og til slutt finne hvor mange gjerdetyper av hver de skulle bruke. De har funnet ut hvilken del av matematikken de skal bruke for å løse det problemet, de har løst det problemet som har oppstått for modellen deres, og til slutt har de kommunisert med meg i form av skriftlig besvarelse. Denne besvarelsen med forslag for antall gjerdetyper de kunne bruke for hver figur, krevde at elevene måtte oversette fra naturlig språk til symbolspråk. De har brukt matematiske operasjoner som viser deres resultater. Dermed viser de at de har tatt i bruk *symbol-og formalismekompetanse* (Niss & Jensen, 2002, s. 59).

Denne oppgaven er åpen etter utvidelsesaspektet (Yeo, 2017, s. 185). Gjennom min rolle som deltakende observatør, stiller jeg spørsmålet om det finnes andre figurer enn rektangulære figurer. Følgende samtale finner sted:

91 Jeg Kan man bruker andre figurer enn rektangel?
92 E8: Vi kunne ha brukt kvadrat.
93 E7: Det er jo det vi har gjort.
94 E3: Jeg tror han søker mer om vi kunne lage sirkel eller noe annet.
95 E8: Sirkel? Da måtte det være radius, diameter og pi.
96 E9: Ja. Det er lettere med rektangel.

Svaret på spørsmålet mitt viser at elevene er klar over hvilke svar som forventes. Dette er tegn på at de viser trekk av *tankegangskompetansen*. Selv om de kommer med et forslag på andre figurer, går de ikke videre med å løse oppgaven med tanke på sirkel. På samme måte som det er i gruppe 1, kan en ikke bestemme teknisk nivå av *problembehandlingskompetansen* hos elevene i dette tilfellet, men på bare bakgrunn av dataene når elevene ikke prøver å finne løsninger for en sirkulær innhegning, kan en si at de har lavere teknisk nivå enn en som kunne ha gjort det. Det er fordi de ikke kommer med noen forslag til løsning.

Elevene har tatt i bruk alle kompetanser bortsett fra hjelpemiddelkompetansen i denne oppgaven. Grunne til det kan være at enten det ikke er opplagt for å bruke hjelpemidler, eller elevene ikke besitter med denne kompetansen.

Gr3-Opp2

Elevene har lest oppgaven, og deres første reaksjon var at det ikke ga noe mening. De skjønte ikke hva oppgaven spurte etter og heller visste ikke hvordan de skulle finne en løsning for oppgaven. Selv om oppgaven, ut fra rammeverket til Yeo (2017, s. 184), var lukket etter kompleksitet kriteriet, hadde elevene fortsatt vanskeligheter med å forstå oppgaven. Jeg forklarte oppgaven til elevene slik at det ble tydeligere hva oppgaven var ute etter. Det gjorde jeg ved å si at de kunne undersøke tallene i tabellen og tallene de kan få på terninger. Jeg ga ikke mer informasjon slik at oppgaven ikke skulle bli lukket.

Det elevene kom på umiddelbart var, at hver av spillerne kunne kaste på tur, og da er det rettferdig spill. De hadde ikke bestemt hvordan spillet skulle avsluttes. De hoppet over spørsmålet «Når vinner en spillet?». Meste parten av introduksjon var preget av å tolke tabellen med alle mulige utfall for terningkastene. Siden elever her prøver å *avkode og fortolke* tabellen for mulige utfall når vi kaster to terninger, tar de i bruk noen karakteristikker av *representasjonskompetansen (Niss & Jensen, 2002, s. 56).*

20	E9:	Begge må ha to terninger. Hvordan blir det urettferdig? Terningene er helt tilfeldige.
21	E8:	Det er det ...
22	Jeg:	Alle tallene du kan få er her.
23	E9:	Det er større sjanse å få sju.
24	E8:	Men kanskje at ... Vent da. Kanskje det er for eksempel du ikke får disse tallene her. Første gang, så står du over en runde.
25	E9:	Hva er det med rettferdig å gjøre?
26	E7:	ikke sant.
27	E8:	Å ja ...
28	E9:	Vi skal gjøre......
29	E8:	Å ja så det må være rettferdig.
30	Jeg:	Hva betyr det at et spill er rettferdig?
31	E9:	At begge har like sannsynlighet.
32	E7:	At det er like stor sjanse får begge til å vinne.
33	Jeg:	Ut fra disse kombinasjonene, summene dere kan få.
34	E7:	Hvorfor står det samme tall to ganger, like tall flere ganger? For eksempel ti, ti
35	Jeg:	Hvorfor tror du det står samme tall flere ganger, for eksempel 10?
36	E9:	Fordi det er flere som kan ha samme muligheter
37	E8:	Ja
38	E9:	Eller $6 + 4$ blir 10, og $5 + 5$ blir 10.
39	E7:	Å ja, ja.
40	E8:	Ja. Det er flere kombinasjoner
41	E9:	7 …
42	E8:	$4 + 3$
43	E9:	Ja men sju har flest mulig. Det er flest mulig å få sju …
44	E7:	Å ja, ja, ok.

I sekvensen i linjene 1-19 leste elevene oppgaven og diskuterte hva de hadde forstått av oppgaven. Som det var i andre grupper og andre oppgaver, var elementer av *kommunikasjonskompetansen (Niss & Jensen, 2002, s. 60)* tilstede gjennom arbeid med oppgaven. De setter seg inn i hverandres matematikkholdige utsagn, og fortolker dem. Et eksempel på det, er der E7 lurer på hvorfor det er samme tall flere ganger i tabellen. Deretter kommer resten av gruppa med svar. Spørsmålet som E7 stiller har også andre karakteristikker enn bare karakteristikk for *kommunikasjonskompetansen*. E7 viser med dette at han tar i bruk *tankegangskompetansen* når han stiller et forventet spørsmål innenfor dette emnet. Han stilte det spørsmålet til meg, og jeg ville ikke gi svaret, heller stille spørsmålet tilbake slik at elevene kunne fortsette diskusjonen mellom seg fordi jeg ikke ville påvirke elevene. I linjene 34-39 foregår denne dialogen. Dermed viser også E8 og E9 at de tar i bruk *tankegangskompetansen*, ved at de gir et svar som er et forventet svar på spørsmålet fra E7. Et annet eksempel hvor elevene viser karakteristikker for *tankegangskompetansen*, er der E8 kommer med sitt forslag for et spill. Hennes forslag blir tatt i mot av E9 med et spørsmål. E9 viser at hun er klar over hvilke spørsmål som er karakteristisk for matematikk, i dette tilfelle er tema sannsynlighet.

73	E8:	Urettferdig da? Er det om å få et spesielt tall?
74	E9:	Det er om å få et to forskjellige tall med forskjellig sjanser. For eksempel det ene er to og den andre er sju.
75	E7:	Det er fortsatt rettferdig
76	E9:	Nei. Hvis jeg sier ene du må få to og ...
77	E7:	Men det er like sannsynlig for meg å få to og for deg å få to.
78	E9:	Nei du skal få to og jeg skal få sju.
79	E7:	Ja da er det urettferdig. Det ville vært rettferdig hvis begge skulle få to.
80	E9:	Sju er høyere sannsynlig det er seks muligheter.
81	E7:	Hvis den ene får to og den andre får sju da er det urettferdig.
82	E8:	Ok så om å få et tall med flere kombinasjoner?

Sekvensen over har karakteristikker fra flere forskjellige kompetanser. Den første kompetansen er resonneringskompetansen der elevene *følger* og *bedømmer* hverandre sine argumenter (Niss & Jensen, 2002, s. 54). E9 sitt forslag for et urettferdig spill misforståes av E7. Han protesterer og sier at hvis begge skal få samme tall, vil det ikke bli urettferdig. Han viser at han følger E9 sitt argument. E9 kommer med en forklaring på hvorfor hun mener at spillet blir urettferdig ved å gi eksempel. Eksemplet hennes dreier seg om at det er flere kombinasjoner som kan gi en sum på sju enn to. Dermed er det høyere sannsynlighet for spilleren som skal få sum sju, til å vinne spillet. Diskusjonen avsluttes med at resultatet for dette forslaget blir et urettferdig spill. Denne sekvensen viser at alle elevene i gruppa uttrykker en karakteristikk av *resonnementskompetanse*, og det er å følge og bedømme andres argumenter.

Problembehandlingskompetansen dreier seg om å oppstille, formulere matematiske problemer og løse dem. Sekvensen starter med at E8 stiller et spørsmål om det å få et spesielt tall, ville gjort spillet urettferdig. Hun formulerer et problem der det ikke er et kjent mønster eller rutineoperasjoner som leder til svaret. E9 foreslår løsningen på det problemet. Gruppa løser problemet som er en del av oppgaven, og viser at de tar i bruk *problembehandlings-kompetansen*. Niss og Jensen (2002, s. 54) mener at *problembehandlingskompetanse* sammen med *modelleringskompetanse* er «juridiske» sider av *resonnementskompetanse*. Det vil si at en tar i bruk overnevnte kompetansene når en skal rettferdiggjøre løsningen. Dette kan sees som et resultat av at kompetansene er tett forbundet, og kan ikke sees som isolert fra hverandre.

Det å lage et forslag til et spill, kan sees som å lage en modell. Elevene i gruppa foreslår modeller, og disse modellene har de selv bygget. Den fasen der elevene finner ut et forslag til urettferdig spill i sekvensen over, inneholder flere elementer av *modelleringskompetanse*. Først og fremst er elevene i en aktiv modellbyggingsfase. Det vil si at elevene bringer inn matematikk fra en situasjon der matematikken ikke er tilstede i utgangspunktet. Når de diskuterer begrepet «urettferdig», finner de ut hva vil det si at en situasjon er urettferdig i matematikk. De gjennomfører en «matematisering» (Niss & Jensen, 2002, s. 52) av situasjonen. Dette gjør de ved å se på antall mulige utfall for begge spillerne der den ene får lavere sannsynlighet for å oppnå utfallet. De gjennomførte en liknende prosess for å lage et spill som er rettferdig.

Elevene har hverken uttrykt *hjelpemiddelkompetanse* eller *symbol-og formalismekompetanse* på en synlig måte. Grunnen til dette kan være at de ikke trengte å gjøre noen fysiske beregninger. Dette skal ikke bety at elevene ikke har gjennomført noen beregninger i det mentale planet (Niss & Jensen, 2002, s. 64). Når de bestemmer at den ene spilleren har høyere sannsynlighet for å oppnå det ønskede utfall, har de brukt formelen for sannsynligheten for en hendelse som er en del av en uniformsannsynlighetsmodell:

$$Sannsynlighet\ av\ en\ hendelse\ = \frac{Gunstige\ utfall}{Mulige\ utfall}$$

Så det er mulig å si at elevene allikevel har tatt i bruk *symbol-og formalismekompetanse* på det mentale planet.

Gr3-Opp3

Gangetabelloppgaven hos denne gruppa ble ikke tatt i mot annerledes enn andre grupper. I likhet med andre grupper, brukte denne gruppa også minst tid på denne oppgaven. Yeos (2017, s. 185) kriterier om kompleksitet var mulig å observere her. Oppgaven virket for kompleks for denne gruppa også. Selv om oppgaven var vanskelig å begynne med, var det mulig å observere flere kompetansetyper hos elevene. Oppgaven var vanskelig å starte med, og elevene var usikre på hva som menes med sammenhenger. Det mest åpenbare for gruppa var at disse tallene var arrangert etter den lille gangetabellen. En side av *representasjonskompetanse* er at en kan fortolke og avkode matematiske fenomener og situasjoner (Niss & Jensen, 2002, s. 56). De oversetter framstillingen av tallene i en tabell, og tolker det som den lille gangetabellen som er arrangert etter multiplikasjon av to tall. *Kommunikasjonskompetansen* var den kompetansen som kom til syne gjennom arbeidet med denne oppgaven. Elevene holdt den matematikkholdige samtalen der de byttet roller mellom å være *mottaker* og *avsender (Niss & Jensen, 2002, s. 61)*.

8	E8:	Her plusser du på. Her så legger du to. (i andre kolonne)
9	E7:	Her er det gange tabellen du ganger med 2 og ganger med 3.
10	E9:	6×6 er 36
11	Jeg:	Det du sier er en sammenheng kan du gjenta det?
12	E8:	Du plusser to for hvert tall du går bort på andre rad og tre på tre.
13	E9:	Du legger til et tall fler på hver rad nedover.
14	Jeg:	Ja, finnes det flere sammenhenger?
15	E9:	Det er samme tall vannrett og loddrett. Kan det være en sammenheng. Det er i hele tabellen
16	Jeg:	Er alle med? Du sa vannrett og loddrett er samme tall. I første kolonne og første rad. Betyr det hvilken som helst kolonne og rad har samme tall?
17	E7:	Nei. Det er øverste og det på venstre. Nederste og høyre.
18	Jeg:	Er det flere rader og kolonner som er like?
19	E9:	Ja. Hele veien.
20	E7:	Nei.
21	E9:	Jo. 81, 72, 63 ... 63, 72, 81 Det samme gange rekke i ... 64, 56, 48, ... 48, 56, 64 ... Det er samme rekke i ...
22	E8:	Tabellen.

Etter at elevene ble enige om at denne framstillingen består av tallene som er ganget med hverandre i rad og kolonner, begynner de å lete etter sammenhenger som oppgaven spør om. I sekvensen over har de kommet med forslaget om at hver rad består av en aritmetisk rekke. Til slutt generaliserer de til radene nedover og konkluderer med at det legges til en fler enn forrige rad når en går nedover. For å vise at dette stemmer med hele tabellen, bruker elevene tallene som er i radene nedover som eksempler. Dette kan sees som å rettferdiggjøre svaret sitt, og dermed et tegn på *resonnementskompetanse* (Niss & Jensen, 2002, s. 54).

Det å finne ut at denne framstillingen er den lille gangetabellen, kan virke som en lett oppgave for denne aldersgruppen. Derfor kan man ikke regne dette som et problem. Å finne sammenheng mellom tallene i samme rad, samme kolonne og mellom rad og kolonner kan regnes som et problem, siden det ikke finnes en rutineoperasjon for å finne sammenhenger. Dette kan være på grunn av at oppgaven var åpen etter kompleksitets kriterium. Selv om elevene ikke stiller spørsmål til hverandre under datainnsamlingen, kan det ikke utelukkes at de har formulert noen oppgaver i hodet sitt. Et eksempel på det, kan vi se i linjene 11-12 forklarer E8 at hver rad består av en aritmetisk rekke. Eleven stiller ikke spørsmål som «hvordan fortsetter rekken i hver rad?», eller «finnes det et mønster?». Svarene som elevene kommer fram til slutt er, jo svar på nettopp disse spørsmålene. Dermed kan man si at elevene i denne sekvensen har vist elementer av *tankegangskompetansen* og *problembehandlingskompetansen*. Ifølge Niss og Jensen (2002, s. 64) kan dette tolkes som den undersøkende siden av denne kompetansen som faller under forståelse, analyse og kritisk bedømmelse av allerede utførte prosesser. Denne prosessen er en kognitiv prosess som ikke kan observeres direkte, men et produkt av denne prosessen er der elevene kommer med forslaget om aritmetisk utvikling av hver rad.

4.6 OPPSUMMERING AV ANALYSE

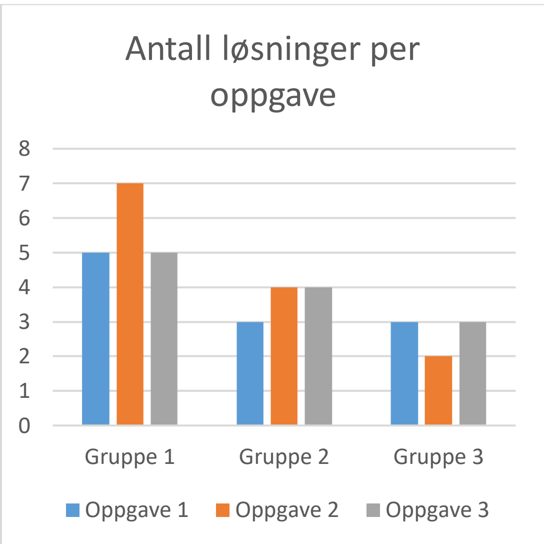
Oversikt over hvilke kompetanser som kom til uttrykk hos elever i forskjellige grupper og oppgaver kan finnes i tabellen. I tillegg til det er det lagt til «tidsbruk per oppgave», og «antall løsninger per oppgave» diagrammer for hver gruppe. Disse tabellene og diagrammer er for å oppsummere analysene visuelt.

	Gruppe 1			Gruppe 2			Gruppe 3		
Kompetanser	Oppgave 1	Oppgave 2	Oppgave 3	Oppgave 1	Oppgave 2	Oppgave 3	Oppgave 1	Oppgave 2	Oppgave 3
Tankegangskompetanse	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Problembehandlingskompetanse	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Modelleringskompetanse	✓	✓	✓	✓	✓	–	✓	✓	–
Resonnementkompetanse	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Representasjonskompetanse	✓	✓	–	✓	–	–	✓	✓	✓
Symbol-og formalismekompetanse	✓	✓	✓	✓	–	✓	✓	–	✓
Kommunikasjonskompetanse	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Hjelpemiddelkompetanse	–	–	–	✓	–	–	–	–	–
Tidsbruk	19:35	18:00	09:36	17:05	15:03	06:10	23:50	10:25	08:22

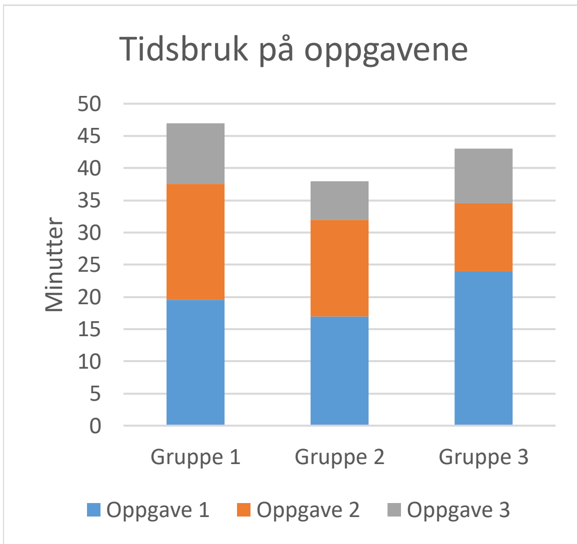
Figur 6: Oppsummering av kompetansetyper for hver gruppe og oppgave.

Tabellen over viser at elevene viser trekk av alle kompetansetyper bortsett fra hjelpemiddelkompetansen i alle grupper med alle oppgaver. *Kommunikasjon-, resonnement-, tankegangs- og problembehandlingskompetansen* er kompetansetyper som er synlig i alle grupper i alle oppgaver. Dette resultatet synes jeg er interessant. Grunnen til det skal jeg ta opp i drøftingskapittelet i 5.4.

Jeg vil også se om det er forskjeller mellom antall løsninger elevene finner for hver oppgave. Figur 7 viser antall løsninger som elevene har funnet. Det er en betydelig forskjell mellom gruppene. Det er gruppe 3 som har produsert færrest løsninger sammenlagt. Den siste figuren viser tidsbruk per oppgave hos gruppene. Elevene brukte relativt lengre tid på arealoppgaven, og minst tid på gangetabelloppgaven. En øyeblikkelig forklaring på dette kan være at konteksten og formuleringen på gangetabelloppgaven var ukjent for gruppene. Dette kunne jeg så på grunn av at elevene ikke viste hva de skulle gjøre, og hva betyr å finne sammenhenger. For at rekkefølgen ikke skulle bestemme tidsbruk per oppgave, fikk alle grupper oppgavene i forskjellige rekkefølger. Det var også nødvendig fordi elevene var på forskjellige faglig nivå.



Figur 7: Antall løsninger per oppgave i hver gruppe



Figur 8: Antall minutter som er brukt per oppgave.

5. DRØFTING AV FUNNENE

I dette kapittelet skal funnene i analysen drøftes og diskuteres. Dette skal gjøres i fire deler. I første del skal jeg diskutere hva oppgavens innhold har å si for kompetansetyper, i andre del skal jeg vise hvordan oppgavens åpenhet har påvirket funnene, og tredje del skal handle om hvordan elevenes faglige nivå har påvirket funnene. Til slutt skal det diskuteres felles kompetanser som kom til uttrykk i alle dataene.

5.1 OPPGAVENS KONTEKST

De tre oppgavene jeg har brukt i denne studien har forskjellige karakteristikker. Arealoppgaven og sannsynlighetsoppgaven kan regnes som oppgaver med et spesifikt innhold (content-spesific) (Sullivan, Warren, & White, 2000, s. 5). Dette betyr at disse to oppgavene kan kobles til et tema som er en del av læreplanen, eller er under et tema i læreboka (Sullivan et al., 2012, s. 58). Elevene i denne studien har gjennom skolegangen har hatt mulighet til å samle nødvendig kunnskap til å finne løsninger for oppgaver som handler om areal- og sannsynlighetsregning. Elevenes tidligere kunnskap om temaene i disse oppgavene var en mulig indikator for at oppgaveløsing gikk lettere i forhold til gangetabelloppgaven.

Gangetabelloppgaven hadde annerledes egenskaper enn de to andre oppgavene. Fra analysen av oppgavene i kapittel 4.1, kan vi se at denne oppgaven er åpen etter alle kriterier av Yeo (Yeo, 2017). Et resultat av dette viser analysene også at elevene ikke var komfortable med den oppgaven og trengte mest støtte under arbeid med denne oppgaven. Å være komfortable i denne sammenhengen er at de var usikre på hva som forventes av dem å gjøre. En spesiell karakter ved denne oppgaven er at den ga mer mulighet for generalisering og behov for bevisføring ved hjelp av algebra. Denne egenskapen ved gangetabelloppgaven kan sette oppgaven under hovedområdet algebra i læreplanen. Selv om oppgaven kan kobles til algebra, var det ikke åpenbart for elevene at de skulle bruke algebra for å generalisere eller bevise funnene sine ved hjelp av algebra.

Forskjellene som er beskrevet over er med på å gi resultatene som er kommet ut i analyse av gruppene. Areal- og sannsynlighetsoppgaven har lukket mål og lukket kompleksitet, mens gangetabelloppgaven er åpen både etter mål og kompleksitet. Dette kan være grunnen til at ga færrest svar i forhold til andre oppgaver, og trengte mer støtte fra meg for å kunne sette i gang arbeid med oppgaven.

5.2 ÅPNE OPPGAVER OG KOMPETANSER

Alle oppgavene som er brukt i denne studien er åpne når det gjelder svar og metode etter Yeos (2017) kriterier. Når en skal se koblingen mellom oppgavens åpenhet etter svaret og metode i funnene fra analysen, ser man at det er mange kompetanser kommer til uttrykk i samme situasjon sammenlignet med (se figur 6 s.70, figur 5 s. 42). Oppgavene har ikke kjente løsningsmetoder. Zaslavsky (2005, s. 302) påpeker at åpne oppgaver blant annet har et usikkerhets aspekt der lærende ikke har en kjent prosedyre for løsning av oppgaven. Derfor blir de oppfordret til å undersøke sammenhenger og mønstre i oppgavene. Usikkerheten som oppstod i situasjoner der elevene fikk ulike svar i arbeidet med åpne oppgaver (se for eksempel kapittel 4.5), gjorde at elevene begynte å redegjøre for svaret de fikk. Elevene følte selv at de måtte gi begrunnelser fordi det ikke var sikkert de andre i gruppa hadde samme løsning eller svar. Elevene har ikke blitt bedt om å rettferdiggjøre svaret sitt, oppgavens åpenhet etter svaret skaper en situasjon der det blir nødvendig å rettferdiggjøre svaret sitt fordi elevene har et felles. Denne nødvendigheten gir elevene mulighet til å ta i bruk flere kompetansetyper.

Rettferdiggjøring av sitt eget svar i matematikk kan ikke gjøres uten nødvendige matematiske begreper for å begrunne sitt svar. Elevene må kunne begrunne svaret sitt enten muntlig eller skriftlig i form av algebraiske uttrykk eller regnestykker. Når en bare fokuserer på svarkriteriet av oppgavenes åpenhet etter Yeos (2017) rammeverk, ser vi at det utløser en kjedereaksjon av kompetansetyper som kommer til uttrykk. Dette kan observeres i Gr2-Opp1 der elevene diskuterer forskjellige former og tilsvarende sidelengder, løsning av problemet på å finne sidelengder, rettferdiggjøre løsningen og kommunisere det med resten av gruppa (sekvensen i s.53). Det er ikke bare på grunn av oppgavens åpenhet, men også på grunn av at kompetansene er tett forbundet og ikke er isolert fra hverandre (Niss & Jensen, 2002). Det vil si at elevene må ta i bruk flere kompetansetyper når de skal svare på oppgaven som *resonnements-* og *kommunikasjonskompetansen*.

Det er på sin plass å stille spørsmålet om en kunne aktivere den kjedereaksjon av kompetanser som kommer til uttrykk med lukkede oppgaver. Svaret på det spørsmålet er at slike lukkede oppgaver har en tendens til å til å bruke kjente algoritmer som de har lært tidligere (Alrø & Skovsmose, 2005, s. 5). Med andre ord en reproduksjon av algoritmer. Når elever blir eksponert for den type oppgaver som er beskrevet over, vil det resultere at de tilegner seg noen få kompetanser. Både Niss og Jensen (2002), Kilpatrick et al. (2001) og Brekke (2002) påpeker for at personer skal lykkes i matematikk, må alle kompetanser eller komponenter av matematisk kompetanse være på plass. En oppgave som er lukket etter svar og metode kriteriene har ofte et svar, og har en løsningsmetode som er en kjent prosedyre. Dette kan forhindre elevenes tankegang og resonnement når elevene oppdager at svaret deres stemmer. Det kan være på grunn av at elevene ikke trenger å finne ut nye ideer, eller matematiske sammenhenger i slike oppgaver. Funnene i analysen viser at selv om elevene kom med svar som var riktige, måtte de forsvare svaret sitt fordi andre i gruppa også hadde et svar. Selv om svarene i noen tilfeller var like, var framgangsmåten annerledes. Et eksempel på dette er fra gruppe 1, der den ene eleven bruker ruteark i skriveboka for å lage rektangler med 36 ruter. Han brukte disse figurene for å sjekke andre sine svar. Etter min mening og hva analysene viser kan en si at en lukket oppgave ville ikke gitt mulighet til å vise alle disse kompetansene som er synlig under arbeid med åpne oppgaver.

Denne studien fokuserer på hvilke kompetanser som kommer til uttrykk når elevene arbeider med åpne oppgaver. Når en ser tilbake til funnene, har gangetabelloppgaven annerledes resultater enn de to andre oppgavene. Både tidsbruk og kompetanser som kom til uttrykk hadde færre resultater enn i forhold til de to andre oppgavene. Den oppgaven var åpen på alle Yeo's (2017) kriterier for åpne oppgaver. I tillegg til det hadde oppgaven ikke et tema elevene kunne relatere de tidligere kunnskapene sine til, som det var i areal- og sannsynlighetsoppgaven. De to sist nevnte oppgavene fokuserer på bestemte aspekter av matematikk og defineres som innholds spesifikke (content specific), (Sullivan et al., 2000, s. 4)). Ifølge forfatterne vil oppgaver som har et bestemt emne, ha flere fordeler for elevenes læring. Dette kan gi en fordel for at elevenes fokus ledes til bestemte matematiske emner.

Gangetabelloppgaven hadde et mer generelt fokus, å se sammenhenger mellom tallene og hvordan tabellen er bygd opp. En forklaring på at elevene ikke hadde liknende resultater i den siste oppgaven, var at de ikke kunne koble oppgaven til et bestemt tema (Sullivan et al., 2000, s. 4). Det kunne man også se fra en elevs respons til oppgaven: Elevene ble spurt om hva de syntes om oppgaven i slutten av arbeidet med oppgavene og en elev sa «Hvis ikke du hadde vært her kunne jeg ikke finne noe». Det er tydelig at læreren har en viktig rolle for at elever skal kunne klare slike åpne oppgaver uten spesifikt innhold. Lærerens rolle er viktig for at en ikke lukke oppgaven ved å gi elevene alle nødvendige informasjoner for løsning av oppgaven men heller lede elevene til å finne sammenhengene selv, og stille spørsmål til å skape rike matematiske diskurser.

Et annet punkt som bør diskuteres med tanke på hvilke kompetanser som kommer til uttrykk hos alle grupper med forskjellige oppgaver (Figur 6, s.68), er eksistensen av hjelpemiddelkompetansen. Vi kan ikke konkludere at åpne oppgaver ikke gir elevene mulighet til å utvikle denne kompetansen. Dette fordi det er sjeldent at alle kompetansene kan utvikles gjennom et undervisningsforløp eller en oppgave (Skott et al., 2015, s. 302). Selv om elevene kunne bruke dynamisk geometriprogram (Geogebra) for å beskrive sammenhenger mellom sidelengder og areal som en funksjon og tegne grafen til denne funksjon, eller Excel for å lage et diagram som visualiserer utfallene for terningkast, har det ikke skjedd under arbeidet med oppgavene. Det kan være på grunn av at elevene ikke besitter med denne kompetansen. Hvis læreren vil fokusere på denne kompetansen, kan hun/han ta eksemplene med i undervisningen.

Alle oppgavene i denne studien var åpne etter Yeos metode og svar kriteriet (Yeo, 2017). Disse kriteriene for oppgavene har vært med på å skape samtaletyper som leder til rike matematiske diskurser (Franke et al., 2007, s. 234), som har elementer av forskjellige kompetansetyper.

5.3 Elevenes faglige nivå og kompetanser som kom til syne

Et kriterium for studien min var at gruppene skulle bestå av elever som var på omtrent samme faglige nivå, og det skulle være elever fra tre nivåer. Jeg ønsket å se hvilken betydning elevenes faglige nivå har å si for kompetansene som kommer til uttrykk når de arbeider med åpne oppgaver. Elevene som hadde lavest nivå, på bakgrunn av samtalen med læreren og resultatet deres fra første vurdering, var i gruppe 2. Elevene med høyeste nivå blant utvalget var i gruppe 1. Når det gjelder kompetanser som kommer til uttrykk og løsninger på oppgaver, kunne man se likheter. Niss og Jensen (2002, s. 65) påpeker at besittelse av kompetansen kan variere fra person til person. Selv om samme kompetansetyper kommer til uttrykk hos alle gruppene, er dekningsgraden varierende. Det vil si elever i gruppe 1 viser flere elementer av kompetansen de uttrykker. Et eksempel som kan trekkes inn her er at elevene i gruppe 1 viser større dekningsgrad av resonnementskompetanse enn elever i gruppe 2 i arealoppgaven. Analysen viser at gruppe 1 støtter argumentene sine med matematiske og algebraiske løsninger i tillegg til å visualisere dem, mens gruppe 2 valgte å vise at verdiene stemmer med oppgaven. Det vil si en muntlig rettferdiggjøring av egne svar. Den rettferdiggjøringen vil gi mulighet til å ta i bruk kommunikasjonskompetansen.

Elevene i gruppe 1 er på høyere nivå enn elever i gruppe 2 og gruppe 3. Når en ser på teknisk nivå av problembehandlingskompetansen, kan analysen tyde på at elever i gruppe 1 og gruppe

3 var på omtrent samme tekniske nivå. Begge gruppene kunne foreslå en annen figur som ikke var rektangulær, men ingen av gruppene gikk videre for å finne en løsning. Uavhengig av elevenes nivå, kan det tenkes at teknisk nivå av problembehandlingskompetansen kan ha mulighet til å økes med utvidelse av en oppgave.

Gruppe 2, som er på lavest faglig nivå, fikk også mulighet til å øke teknisk nivå av symbol- og formalismekompetansen. Under løsning av arealoppgaven kom elevene med en løsning der figuren var kvadratisk. De laget en andregradslikning med en ukjent $x \times x = x^2 = 36$. De fant for denne likningen. Videre kom de fram til enn annen likning der de valgte to variabler slik at likningen ble $x \times y = 36$. Med stillasbygging i form av spørsmål som for eksempel «Hvordan kan du vise ...», «Hva vet du om det?», kunne elevene løse den oppgaven, og dermed fikk de mulighet til å øke teknisk grad av både problembehandlings-, og symbol-, og formalismekompetansen sin. Problembehandlingskompetansen må være med fordi den andre likningen var et problem for disse elevene. Dette viser igjen at et problem er relativt. Fra analyse av alle gruppene viser det seg at spørsmålene som stilles for å forsterke besittelse av gjeldende kompetanser, er et nødvendig grep.

Hvis en skal se resultatene fra analysen med tanke på antall løsningsforslag, er det ikke så store forskjeller mellom gruppe 2 og gruppe 3 som har forskjellige faglige nivå. Hvis en tar utgangspunkt i arealoppgaven, har gruppe 1 flest løsningsforslag. Det kommer av at de har generalisert hvordan de kunne finne andre verdier. Den generaliseringen kom som en følge av at de har funnet hvilke sidelengder som kan tilfredsstille ønsket areal. For å ha oversikt over hvilke sidelengder de har, lagde de en tabell som inneholdt alle lengdene de hadde funnet. En annen mulig forklaring for dette er at en kan besitte en kompetanse på forskjellige nivåer (Niss & Jensen, 2002, s. 65). Det vil si at elevene i gruppa 1 har større dekningsgrad i modellerings kompetanse enn de andre gruppene siden de har laget en modell som beskriver areal av en rektangulær for som $x \cdot y = 36$, der x og y er alle sidelengder som tilfredsstiller arealet. Derfor viser dette en større dekningsgrad enn de som ikke kan lage denne modellen.

Et annet resultat fra analysen er at noen kompetanser kom ulik til syne hos gruppene. Eksempel på dette er *symbol- og formalismekompetanse* og *modelleringskompetanse*. Disse kompetansene er observert hos gruppe 1, med elever som har høyere faglig nivå. Elevene i gruppe 1 har større aksjonsradius av *modellering*- og *symbol- og formalismekompetanse* enn elever i andre grupper (se figur 6 s.68). Siden de viser elementer av disse kompetansene i alle oppgaver. Her skal det ikke tenkes at elever som har høyere faglig nivå vil vise større aksjonsradius av kompetanse. Et eksempel på det kan observeres i gruppe 3, der de viser større aksjonsradius av representasjonskompetanse enn gruppe 1, som har høyere faglig nivå. En mulig grunn kan være at i homogene grupper av elever med høyere faglig nivå, antar man at alle vet hvordan oppgaven kan løses (Webb, 1991, s. 380) Gruppesammensetningen kan være en mulig grunn her. Elevene i gruppe 3 kan ha andre behov for å se om en løsning stemmer enn elever i gruppe 1. Siden elevene i gruppe 1 har høyere faglig nivå enn elever i gruppe 3, kan de lettere akseptere eller se at en løsning stemmer.

5.4 Felles kompetanser hos alle tre gruppene

Åpne oppgaver har en karakter som gir mulighet til å generalisere en situasjon, undersøke underliggende matematiske aspekter, kommunisere i og med matematikk, være kreativ heller enn å bare bruke algoritmer og tidligere lærte algoritmer, antar Sullivan m.fl. (2009, s. 19). Denne antakelsen kan observeres i analysene i form av hvilke kompetanser som kommer til syne under arbeid med åpne oppgaver. Tankegangs-, kommunikasjons-, resonnements- og problembehandlingskompetansen blir observert hos alle grupper i alle oppgavene. Jeg skal nå drøfte at det kan være tre mulige grunner for at disse kompetansene kommer til syne.

Den første grunnen er at oppgavene i studien er åpne etter svar- og metodekriteriet (Yeo, 2017, s. 179). Et resultat av dette, er at det finnes flere riktige svar og metoder for å finne disse svarene som elevene kan finne. Elevene i alle grupper har både like og ulike svar som tilfredsstiller oppgavens krav. Vi ser fra oppsummering av analysen at gruppene henholdsvis har fem, tre og tre løsninger på den første oppgaven. For at disse løsningene tas opp innad i gruppene, tar elevene i bruk nødvendige kompetanser. Hvis en skal skissere prosessen fra start til slutt av oppgaveløsingen, kommer det å forstå oppgavens innhold først hos alle grupper. Elevene bruker lengre tid på å diskutere hva oppgaven er etter, og hva de må gjøre først i forhold til resten av prosessen. I denne fasen ble det observert at elevene stiller nødvendige spørsmål som leder dem til å finne den planen de trenger for å løse oppgaven. Et eksempel på slike spørsmål er som følgende «Hvordan funker det?» Dette var fra Gr1-Opp1, der den ene eleven vil få en forklaring på hvorfor det skal være riktig. Elevene kommer med ulike svar som skaper en situasjon der de har behov for å begrunne svaret sitt. Å begrunne svaret sitt krever elementer av både resonnements-, og problembehandlingskompetansen. I tillegg til det, holder elevene en matematisk diskusjon gjennom denne prosessen som har karakteristikk av kommunikasjons-kompetansen.

Den andre grunnen er at kompetansene er tett forbundet. Niss og Jensen (2002, s. 63) slår fast at en kompetanse ikke kan tenkes isolert fra andre. Det er synlig i analysen av alle oppgavene at elevenes arbeid med hver av oppgavene inneholder en rekke av kompetanser som kommer til uttrykk gjennom samme sekvens. Et eksempel på dette kan trekkes fra analysen av Gr2-Opp2 der den ene eleven lurer på om det er mulig at spillet ser rettferdig ut, men kombinasjoner av ønsket situasjon har forskjellige antall. Slike formuleringer kan være tegn på tankegangskompetanse ifølge Niss og Jensen (2002, s. 48). Med dette lager eleven et problem som trenger en løsning. Å lage et problem og løse det problemet inneholder elementer av problembehandlingskompetanse. Løsning på problemet begrunnes av denne eleven gjennom et resonnement som hviler på å telle antall kombinasjoner og formidles med en matematisk samtale. I sin helhet har denne prosessen elementer av de fire nevnte felles kompetanser. Det kommer av at kompetansene er tett forbundet. Hvis en antar at elevene hadde en lignende oppgave som har et fasitsvar, ville det antakelig ikke vært rom for tankegangs- og resonnementskompetanse med mindre læreren stiller nødvendige spørsmål.

Den tredje grunnen er at oppgaveløsingen foregikk i grupper, og ikke individuelt. Denne studiens læringsteori baserer seg på metaforen «læring som deltagelse». Gjennom deltagelse i arbeid med åpne oppgaver viser elevene hvordan de kan sette i gang med å finne løsninger. Elevsamarbeid kan kjennetegnes som en gjensidig prosess hvor de utforsker hverandres resonnement og synspunkter for å bygge en felles forståelse rundt en oppgave (Goos, Galbraith, & Renshaw, 2002, s. 196). Analysene viser at elevene har skapt den gjensidige prosessen når de setter i gang med oppgaveløsningen hvor de diskuterer hva oppgaven spør etter, og hva de skal gjøre slik at de kan komme fram til en felles forståelse. Ifølge Goos et al. (2002, s. 196) blir elevene gjennom denne prosessen enige om akseptable løsningsmetoder og tolkninger som medfører gjensidig samhandling som vil kreve at elevene foreslår og forsvarer egne ideer. Allerede her kan en begrunne at en slik samhandling vil resultere i å ta bruk resonnement-, tankegangs-, og kommunikasjonskompetanse. Problembehandlingskompetansen kommer til syne som resultat av de andre kompetansene siden å forsvare sine løsninger vil kreve et løsningsforslag. En annen grunn til at den gjensidige prosessen oppstår kan være også på grunn av at åpne oppgaver tilbyr betydelige muligheter for å stimulere aktiv elevdeltakelse i læring og tenkning i matematikk (Sullivan et al., 2000, s. 6).

6. Avslutning og konklusjon

Fokuset i denne oppgaven var å finne hva åpne oppgaver har å si for elevenes helhetlige matematisk kompetanse. Problemstillingen for denne oppgaven er formulert slik:

«Hvilke kompetanser kommer til syne hos elever når de arbeider med åpne oppgaver?»

I tillegg til dette forskningsspørsmålet ønsket jeg å finne svar på et delforskningsspørsmål som lyder slik:

«Har elevenes faglige nivå noe å for hvilke kompetanser som kommer til syne i arbeid med åpne oppgaver?»

To hovedfaktorer i denne studien er åpne oppgaver og matematiske kompetanser. For å gjøre rede for disse to faktorene brukte jeg «Kompetencer og matematiklæring» (Niss & Jensen, 2002). Under søking av litteratur fant jeg at det finnes andre beskrivelser for matematiske kompetanser. I teori kapittelet har jeg gjort rede for valg av teoretisk rammeverk for matematisk kompetanser. Valget ble tatt på bakgrunn av at bare Niss og Jensen (2002) har beskrevet at kompetansene er synlige på bakgrunn av elevenes respons på gitte oppgaver og dermed har kompetanser en atferdskarakter som kan observeres.

Når det gjelder åpne oppgaver er det stor enighet i at en oppgave som har flere enn en løsning, er den en åpen oppgave (Yeo, 2017). Yeos rammeverk for oppgavenes åpenhet viser at det ikke holder å kalle en oppgave åpen bare ved å se antall svar oppgaven har. Derfor har jeg brukt dette rammeverket for å bestemme på hvilken måte mine oppgaver er åpne. Ifølge dette rammeverk er areal- og sannsynlighetsoppgaven åpne når det gjelder *metode, svar* og *utvidelse.* Gangetabelloppgaven er åpen etter alle kriteriene i dette rammeverket.

Metode for innsamling av data er observasjon, og min rolle i denne studien veksler mellom deltakende observatør og tilstedeværende observatør. Disse to rollene ga meg henholdsvis mulighet til å stille utdypende spørsmål slik at kompetansene elevene viser bestemmes mer objektivt, og få innsikt i elev-elev samtaler under arbeid med åpne oppgaver. Dataene ble analysert etter analyseverktøyet på bakgrunn av hvilke karakteristikker kompetansene (Niss & Jensen, 2002) har. Disse dataene kommer fra tre grupper á tre elever med forskjellige faglige nivå ut ifra lærerens vurdering i en prøve i tall og tallregning. Dette fordi jeg også ønsker å undersøke om det er en sammenheng mellom faglig nivå og kompetansetyper som kommer til uttrykk.

Denne studien er en kvalitativ studie og derfor er hensikten ikke å generalisere, men ha dypere innsikt i fenomenet som studeres. Min analyse og drøfting tyder på at det er fire kompetansetyper som skiller seg ut i elevenes arbeid med åpne oppgaver, uavhengig av elevenes faglige nivå. Disse kompetansene er tankegangs-, resonnement-, problembehandlings- og kommunikasjons-kompetanse. Det viser seg at oppgavenes åpenhet etter svar- og metodekriteriet, uavhengig av elevenes faglignivå, kan være en mulig forklaring på at disse felles kompetansene kom til syne. Disse kompetansene kommer til syne med forskjellig dekningsgrad og teknisk nivå. Gruppen der elevene har høyest faglige nivå viser større teknisknivå og dekningsgrad av kompetansen enn de andre gruppene. Et annet funn fra analysen tyder på at elevens faglige nivå ikke trenger å være årsaken til at disse elevene har lavere dekningsgrad. Dette kan være på grunn av at elever på lavere faglige nivå har større behov for å redegjøre for sine løsningsforslag og strategier for å rettferdiggjøre om svaret deres stemmer, enn elever på høyere faglig nivå.

Et annet resultat som kommer ut i denne studien er oppgavenes egenskaper. Analysene tyder på at elever letter kan engasjere seg i åpne oppgaver som kan kobles til et tema de kan kjenne igjen fra undervisning eller lærebøker. Gangetabelloppgaven er en oppgave som ikke kunne kobles til et kjent tema. Dette skapte et behov for forklaring og veiledning i alle grupper slik at de kunne sette i gang med å finne løsninger. Etter Yeos (2017) kriterier var den oppgaven åpen etter kompleksitet. Det kan peke på at læreres støtte er en nødvendig ingrediens slik at elevene kan styrke kompetansen de viser, og ikke minst gi dem mulighet til å utvikle nye kompetanser.

Studien har et sosialt konstruktivistisk trekk. Oppgaveløsingen i samarbeid kan ha påvirkning på kompetansetyper som kom til uttrykk. Dette kan være en mulig indikator for at spesielt kommunikasjons- og resonnementskompetanse kom til syne hos alle grupper med alle oppgaver. Siden begge kompetansene har elementer av gjensidighet, kan oppgaveløsning i felleskap ha vært en mulig grunn for at disse kompetansetypene ble observert.

Denne studien har gitt innsikt i elevenes arbeid med åpne oppgaver og kompetansene som kom til uttrykk. Det viser at elever kan ta i bruk flere kompetansetyper med bruk av åpne oppgaver. Videre kan det være mulig å formode at disse kompetansene som kommer til uttrykk kan utvikles gjennom passende dialog med elever.

7. Videre forskning

I denne studien ble det valgt noen elever, og disse elevene ble delt etter faglig nivå. Arbeid med åpne oppgaver i heterogene grupper kunne vært nyttig å undersøke. Det ville også vært interessant å se hvordan bruk av åpne oppgaver påvirker elevdeltakelse og posisjonering i hele klasserommet. Det ville også vært spennende å se hva slags rolle læreren ville fått, og hvordan læreren kan dirigere en slik aktivitet i hele klasserommet.

Når jeg skriver denne oppgaven arbeides det med fornyelse av læreplaner blant annet i matematikkfaget. Det er et større fokus på dybdelæring og tverrfaglighet etter hva Ludvigsen-utvalget har utarbeidet. Videre forskning av åpne oppgaver som er mer omfattende og kan knyttes til situasjoner fra virkeligheten kan være nyttig. Dette fordi slike oppgaver kan gi muligheter til å legge til rette for bruk av flere kilder og fagområder. Det kan være lønnsomt å utvikle slike åpne oppgaver. Det kan være mulig å anta at åpne oppgaver kan ha mulighet til tverrfaglig arbeid og dybdelæring.

REFERANSER

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2005). Undersøgende samarbejde i matematikundervisningen: udvikling af IC-Modellen.

Boaler, J. (2012). *From psychological imprisonment to intellectual freedom-the different roles that school mathematics can take in students' lives.* Paper presented at the 12th international congress on mathematical education, Seoul, Korea.

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 89-105.

Brekke, G. (2002). Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk. In *Kartlegging av matematikkforståelse* (pp. 1-24): Universitet i Oslo: Læringsenteret.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307): Springer.

Cifarelli, V. V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem-solving situations. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(3), 302-324.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education* (5th ed.): routledge.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2013). *Research methods in education*: Routledge.

Dalland, O. (2017). *Metode og oppgaveskriving* (6 ed.): Gyldendal Norsk Forlag AS.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1*(1), 225-256.

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: Creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 193-223. doi:10.1023/A:1016209010120

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Christoffersen, L. (2010). Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode.

Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J., & Turner, L. A. (2007). Toward a definition of mixed methods research. *Journal of mixed methods research, 1*(2), 112-133.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., & National Research Council (U.S.). Mathematics Learning Study Committee. (2001). *Adding it up : helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*, 19-44.

Matematikksenteret. (2014). Teoretisk bakgrunnsdokument for arbeid med regning på ungdomstrinnet.

Niss, M. (2007). Opgavediskursen i matematikundervisningen. *MONA-Matematik-og Naturfagsdidaktik*(1).

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Survey team on: conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *Zdm, 48*(5), 611-632.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Vol. 18): Undervisningsministeriet.

Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom.

Pehkonen, E. (1997). *Use of Open-Ended Problems in Mathematics Classroom. Research Report 176*: ERIC.

Prestage, S., & Perks, P. (2001). *Adapting and extending secondary mathematics activities: New tasks for old*: Routledge.

Skott, J., Jess, K., & Hansen, H. C. (2015). *Matematikk for Lærerestuderende: Delta Fagdidaktikk*. Frederiksberg C: Forlaget samfundslitteratur.

Solem, I. H., & Ulleberg, I. (2013). Hva spør lærer om? In H. Christensen & I. r. Ulleberg (Eds.), *Klasseledelse, fag og danning* (pp. 139-154): Gydendal Akademisk.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American educational research journal, 33*(2), 455-488.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(4), 268-275.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2009). Converting mathematics tasks to learning opportunities: An important aspect of knowledge for mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal, 21*(1), 85-105.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2012). *Teaching with tasks for effective mathematics learning* (Vol. 9): Springer Science & Business Media.

Sullivan, P., Mousley, J., & Jorgensen, R. (2009). Mathematical problem solving in Singapore schools. In B. K. Y. B. Har (Ed.), *Mathematical Problem Solving* (Vol. 1, pp. 17-42).

Sullivan, P., Warren, E., & White, P. (2000). Students' responses to content specific open-ended mathematical tasks. *Mathematics Education Research Journal, 12*(1), 2-17.

Udir. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag. Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Formaal

Utdanningsdirektoratet. (2016, 18.05.2016). Å forstå kompetanse. Retrieved from https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/forsta-kompetanse/

Vygotsky, L. S., Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S., & Souberman, E. (1980). *Mind in Society: The Development og Higher Psychological Processes*. In. doi:https://ebookcentral-proquest-com.ezproxy.hioa.no/lib/hioa/reader.action?docID=3301299&query=

Webb, N. M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for research in mathematics education*, 366-389.

www.regjering.no. (2017). *Overordnet del-verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. www.udir.no Retrieved from https://www.regjeringen.no/contentassets/37f2f7e1850046a0a3f676fd45851384/overordnet-del---verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen.pdf.

Yeo, J. B. (2017). Development of a framework to characterise the openness of mathematical tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 175-191.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 60*(3), 297-321.

VEDLEGG 1: KVITTERING FRA NSD

NSD

George Harry Hitching
Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning Høgskolen i Oslo og Akershus
Postboks 4, St. Olavs plass
0130 OSLO

Vår dato: 20.09.2016 Vår ref: 49545 / 3 / AH Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 22.08.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

49545	*Åpne oppgaver og deres påvirkning på matematikk klasserommet*
Behandlingsansvarlig	*Høgskolen i Oslo og Akershus, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*George Harry Hitching*
Student	*Erdal Kilicdogan*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 01.11.2017, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt

Åsne Halskau

Kontaktperson: Åsne Halskau tlf: 55 58 21 88

Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

VEDLEGG 2: SAMTYKKESKJEMA

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

"Åpne oppgaver og deres påvirkning på matematisk tenkning"

Bakgrunn og formål
Oppgavene elevene arbeider med i matematikk timene er avgjørende for elevenes læring og deltakelse i matematikk. I forbindelse med masterstudiet ved Høgskolen i Oslo og Akershus vil jeg forske på hvordan rike/åpne oppgaver påvirker elevenes helhetlige kompetanse i matematikk. På den måten kan jeg ha innsikt i, elev-elev samtaler når elevene arbeider med åpne/rike oppgaver. Master oppgaven vil kunne gi lærere og lærerutdannere innsikt hva oppgave typen betyr for samtaler diskusjoner og kompetanse i matematikk.

Du blir spurt om å delta i studien fordi rektor ved deres skole og matematikklærere har sagt seg villige til å la meg å komme i matematikktimene og låne noen elever i forbindelse med oppgave løsning i perioden september –november 2017.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Når du deltar i forskningsprosjektet betyr det at du skal arbeide i en gruppe på 3 elever og løse tre matteoppgaver. Oppgavene elevene skal arbeide med er valgt fra temaet elevene arbeider med i den perioden eller fra noe de har lært tidligere. Det vil bli gjort lydopptak av elevene som har gitt samtykke om å delta i prosjektet, muligens i et eget grupperom. Jeg skal være tilstede under elevenes arbeid og være en del av gruppene. Jeg kommer til å gå rundt og observere gruppene og ta notater av hva elevene diskuterer om oppgavene.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Lydopptakene vil bli slettet når studien er ferdig. Deltakerne vil bli anonymisert og ikke mulig å gjenkjenne. Prosjektet skal etter planen avsluttes mai 2018.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Hvis du ikke ønsker å delta i prosjektet, blir det <u>ikke</u> konsekvenser for ditt forhold til skolen. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli slettet. Dersom du ønsker å delta eller har spørsmål til studien, ta kontakt med meg eller veilederen min George Harry Hitching.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Min e-post, Erdal Kilicdogan : erkia001@osloskolen.no
George Harry Hitching: george.hitching@hioa.no

Samtykke til deltakelse i studien

Det er fint om svarslippen returneres snarest mulig.

Jeg har mottatt informasjon om studien og samtykker til å delta i undersøkelsen.

Elevens Navn:_____________________________

Elevens underskrift:______________________________ Dato_______________

VEDLEGG 3: OPPGAVENE

Oppgave 1: Arealoppgaven

Dere skal bygge en innhegning. Delene gjerdet skal settes sammen av selges i to typer, $A = 2\,m$ og $B = 3\,m$. Arealet til innhegningen skal være $36\,m^2$. Hvor mange trenger dere av de to typene gjerde? Finn så mange løsninger dere rekker.

Oppgave 2: Sannsynlighetsoppgaven

Dere ruller en grønn og en rød terning og legger sammen antall øynene dere får. Tabellen nedenfor viser alle mulige summer.

Grønn terning

Rød terning

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Oppgaven deres er å designe to forskjellige spill for to spillere. Det første spillet skal være rettferdig, mens det andre spillet skal være urettferdig for en av spillerne. Lag reglene for spillene deres og begrunn hvorfor det ene spillet er rettferdig og det andre ikke.

Oppgave 3: Gangetabelloppgaven

Tabellen nedenfor inneholder mange spennende sammenhenger mellom tall. Studer tabellen og finn så mange sammenhenger mellom tallene som mulig.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100