Kapitaldynamikk i en overlappende generasjonsmodell med et pay-as-you-go pensjonssystem*

Joachim Thøgersen†

22.05.2012

Sammendrag

Denne artikkelen presenterer en OLG modell med et ikke-fondert pensjonssystem, der aktørene har perfekt fremsyn. Tiden antas å være diskret, og individene antas å leve i to perioder. Selv i en enkel versjon av et slikt oppsett vil kapitaldynamikken være komplisert. Dette innebærer at kapitalutviklingen vil beskrives med en differenslikning som ikke kan løses eksplisitt. For å studere kapitaldynamikken må en da forholde seg til numeriske løsninger eller en implisitt løsning. I flere tilfeller vil det imidlertid være ønskelig å løse for kapitaldynamikken eksplisitt. I denne artikkelen presenteres fire ulike måter å formulere modellen på slik at kapitaldynamikken kan studeres eksplisitt. Avslutningsvis ser vi på et eksempel for å illustrere hvordan eksplisitte løsninger er nyttig dersom en skal studere den økonomiske veksten under ulike pensjonssystemer.

*Takk til Trond-Arne Borgersen, Bjørnar Larssen, en anonym referent, og deltakere på Forskermøtet, Bergen 2011, for nyttige innspill.

†Økonomiutdanningen, Høgskolen i Oslo og Akershus.
(E-post: joachim.thogersen@hioa.no)

1 Introduksjon

I denne artikkelen er hensikten å beskrive kapitaldynamikken i en OLG modell med et ikke-fondert pensjonssystem. Et slikt system kalles pay-as-you-go (PAYGO), ettersom pensjonsutbetalingen til de eldre i periode t, løpende blir finansiert av skatteinnbetalingene til de arbeidende i periode t. For å analysere blant annet kapitalakkumulasjon og økonomisk vekst blir kapitalmarkedet og kapitaldynamikken sentral. I den enkle modellen vi skal studere her, vil vi ikke legge vekt på forklaringer bak økonomisk vekst, men heller rette oppmerksomheten mot hvordan kapitalutviklingen kan beskrives i en enkel OLG modell med produksjon. Modellen er basert på Allais (1947) og Diamond (1965).

Vi skal anta at tiden $t = 0, 1, 2, ...$ er diskret. Aktørenes beslutninger tas på bestemte tidspunkter. Det interessante blir da å se på hvordan økonomien påvirkes over tid av disse beslutningene. Det vil si hvordan økonomien utvikler seg fra $t = 0$ og fremover. På tidspunkt $t = 0$ antas det kjente initialbeholdninger.

Matematisk vil et slikt rammeverk innebære studiet av differenslikninger. En differenslikning er en regel som rekursivt binder sammen verdiene på ulike variabler på ulike tidspunkter. Dersom vi begrenser oss til å studere utviklingen i en slik variabel, vil differenslikningen binde sammen verdiene til denne variabelen på ulike tidspunkter. En slik variabel kalles en tilstandsvariabel. Dersom vi noterer tilstandsvariabelen med $k_t \in \mathbb{R}_{++}$, vil en endimensjonal, førsteordens differenslikning skrives som:

$$k_{t+1} = f(k_t)\,, \tag{1}$$

der $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig deriverbar, og initialverdien til k_0 er gitt. Systemet er endimensjonalt ettersom det beskriver utviklingen i en tilstandsvariabel, og av første orden idet verdien på tilstandsvariabelen i $t + 1$ kun avhenger av verdien på samme variabel i forrige periode. Ettersom likningen er av første orden, er det kun nødvendig å kjenne en initialbeholdning. Videre er likningen autonom ettersom t ikke inngår som et eget argument.

Studiet av kapitaldynamikk i en OLG modell, innebærer gjerne bruk av teori for slike likninger.[1] Løsningen på differenslikningen kalles en trajektorie $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$, som på ethvert tidspunkt skal tilfredsstille (1). I økonomiske modeller vil slike likninger ofte ikke kunne løses eksplisitt. Det vil da være aktuelt å studere de kvalitative egenskapene til løsningen, som eksistens, entydighet og stabilitet omkring en steady-state likevekt. En steady-state likevekt av differenslikningen i (1) er et nivå $\bar{k} \in \mathbb{R}_+$, slik at:

$$\bar{k} = f(\bar{k})\,. \tag{2}$$

I teorien om differenslikninger finnes det verktøy for å studere om en slik likevekt eksisterer, om den er entydig, om løsningen av likningen konvergerer mot en eventuell slik likevekt, osv. Leseren henvises til Mickens (1990) og Galor (2007) for nærmere om dette.

En stor utfordring i selv enkle OLG modeller er imidlertid at kapitaldynamikken gjerne beskrives med en dynamisk likning av typen:

$$k_{t+1} = f(k_t, k_{t+1})\,, \tag{3}$$

som implisitt definerer k_{t+1} som en funksjon av k_t. At k_{t+1} ikke defineres eksplisitt, fremkommer ved at k_{t+1} opptrer på både høyre og venstre side. Løsningens kvalitative egenskaper kan da studeres implisitt, eller ved bruk av numeriske tilnærminger som kan beskrive løsningens kvantitative egenskaper. I flere sammenhenger er det imidlertid ønskelig med en dynamisk likning som definerer k_{t+1} eksplisitt. For eksempel i studiet av økonomisk vekst, eller i komparative studier av ulike forsikringsordninger der parametrene i modellen kan variere. Ved å gjøre relativt enkle endringer i oppsettet av modellen kan eksplisitte løsninger fremkomme. Det er disse endringene denne artikkelen handler om. Dette er imidlertid ikke en utfyllende liste over alternativer for å gjøre kapitaldynamikken eksplisitt. Det er heller ikke slik at det alltid er nødvendig eller ønskelig å ty til slike endringer i modellen. Men for noen formål kan det være forenklende. Disse poengene blir også diskutert i de avsluttende kommentarene.

[1] OLG modeller kan også kreve at systemer av slike likninger studeres. Det vil si at det åpnes for flere dimensjoner. Dessuten kan også flere perioder inngå. Slike komplikasjoner diskuteres ikke her.

Det er viktig å være klar over at flere av de dynamiske likningene i denne artikkelen er ikke-lineære og kan derfor ha komplisert dynamikk. I denne artikkelen vil vi ikke gå inn i problemstillingene knyttet til dette, og leseren henvises til May (1976) for en oversikt over matematiske modeller med komplisert dynamikk.[2]

Resten av artikkelen har følgende struktur. I avsnitt 2 vil jeg illustrere en enkel OLG modell uten PAYGO. Med enkel OLG modell sikter jeg til at demografien behandles relativt enkelt, den intertemporale nyttefunksjonen er logaritimisk, teknologien beskrives med en Cobb-Dougals produktfunksjon, og modellen er deterministisk.[3] Disse forenklingene fjerner problemet skissert i likning (3). Men i avsnitt (3), der jeg inkluderer et PAYGO system, dukker imidlertid problemet opp igjen. Avsnitt (4) viser derfor noen måter å unngå problemet på, ved å endre modellens struktur. Om disse endringene går på bekostning av andre elementer eller ønskelige egenskaper, avhenger av hva modellen skal brukes til. En diskusjon av dette etterfølges ikke her. I avsnitt (5) ser vi på et eksempel der vi ønsker å sammenligne økonomisk vekst under ulike pensjonssystemer. Som vi skal se vil en slik sammenligning bli enklere dersom vi utleder eksplisitte uttrykk for kapitaldynamikken. Siste avsnitt (6) gir noen avsluttende kommentarer.

2 En OLG modell uten sosial forsikring

For å lettere se komplikasjonene av sosial forsikringssystemet mht. kapitalutviklingen, starter vi med en beskrivelse av OLG modellen uten offentlige inngrep for en lukket økonomi. Alle varene i modellen er realgoder, det vil si at godene enten er konsumgoder eller produksjonsfaktorer. Konsumgodene skal tilfredsstille husholdningenes nytte, og produksjonsfakorene har til hensikt å fremstille konsumgoder. De to markedene der disse varene omsettes, kalles

[2] Jeg er takknemlig ovenfor referenten som har gjort meg oppmerksom på dette og denne artikkelen.

[3] Dette innebærer at aktørene har perfekt fremsyn med hensyn til variabler som blir bestemt fremover i tid.

hhv. ferdigvaremarkedet og kapitalmarkedet. Det tredje og siste markedet i modellen er arbeidsmarkedet. Her bestemmes tilbudet av og etterspørselen etter arbeidskraft. Alle markedene antas å være karakterisert av fullkommen konkurranse. Det vil si at prisene i de enkelte markedene sørger for likhet mellom tilbud og etterspørsel. Videre er de enkelte markedene interavhengige, slik at modellen er en generell likevektsmodell.

Demografien i modellen beskrives på følgende måte. Økonomien består av en sekvens av individer som lever i to perioder. I første periode er individet yrkesaktiv, mens i andre periode er individet pensjonert og utenfor arbeidsstyrken. I hver periode t, blir N_t personer født. Populasjonen antas å vokse med en konstant rate $n \in (-1, +\infty)$:

$$N_{t+1} = (1+n)N_t \,. \tag{4}$$

I hver periode $t \geq 1$, vil derfor den totale populasjonen være $N_t + N_{t-1}$. Dette innebærer at den totale beholdningen av individer i hver periode består av unge og gamle som lever samtidig.

2.1 Produksjon

I hver periode t er produksjonen gitt ved en Cobb-Douglas produktfunksjon $Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$, der K_t er realkapital, L_t er arbeidskraft, $0 < \alpha < 1$ er kapitalandelen, og $A > 0$ er en skalaparameter. Det følger at produksjonen har positive, men avtagende grenseprodukter og konstant skalautbytte. Produksjon per arbeider y_t, finner vi ved å dividere produktfunksjonen på L_t:

$$y_t = Ak_t^{\alpha} \quad \text{der} \quad k_t := \frac{K_t}{L_t} \,. \tag{5}$$

Realkapital fremkommer av investeringer gjort i perioden før. Kapitalbeholdningen i periode $t+1$ består dermed av realinvesteringer gjort i periode t, og gjenstående kapitalbeholdning fra periode t. For alle $t \geq 1$, vil kapitalakkumuleringen skje på følgende måte $K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$, der $0 < \delta < 1$ er kapitalens depresieringsrate, og I_t er realinvesteringer. I periode $t = 0$ finnes det en gitt kapitalbeholdning som allerede er installert.

Bedriftene i økonomien er pristakere, og vi normaliserer prisen på ferdigvaren Y. Leieprisen på kapital er gitt ved realrenta r_t, mens prisen på arbeidskraft er gitt ved reallønna w_t, per enhet. Bedriften tilpasser seg optimalt ved å velge den kapitalmengden og mengden av arbeidskraft som maksimerer profitt:

$$\max_{K_t, L_t} \left\{ AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - w_t L_t - r_t K_t - \delta K_t \right\} .$$

Ettersom individets livsløp kun deles inn i to perioder, er det rimelig å anta at hver periode er relativt lang. Derfor kan det også argumenteres for at en rimelig antagelse er å la kapitalen fullt ut depresiere i hver periode, det vil si $\delta = 1$. Kapitalakkumuleringen omskrives da til $K_{t+1} = I_t$, og bedriftens profitt uttrykkes da som:

$$\max_{K_t, L_t} \left\{ AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - w_t L_t - R_t K_t \right\} , \tag{6}$$

der $R_t = 1 + r_t$ er avkastningen på realkapital, altså rentefaktoren. Optimeringsproblemet gir følgende førsteordensbetingelser:

$$w_t = (1 - \alpha) A k_t^{\alpha} , \tag{7}$$

$$R_t = \alpha A k_t^{\alpha - 1} . \tag{8}$$

Fra førsteordensbetingelsene i (7) og (8) kan man finne optimal etterspørsel etter arbeidskraft og realkapital.

2.2 Husholdninger

Den representative konsumenten født ved inngangen til periode t, antas å maksimere sin nytte over livsløpet. Nytten avhenger av tilgangen på konsumgoder i de to periodene konsumenten lever. I første periode av livet er konsumenten ung og tilbyr uelastisk en enhet arbeidskraft til bedriftene. Reallønna som opptjenes allokeres i første periode mellom konsum $c_{1,t}$, og sparing s_t:

$$w_t = c_{1,t} + s_t . \tag{9}$$

I andre periode av livet er individet ute av arbeidsstyrken og må leve av oppsparte midler. Konsum som gammel er dermed gitt ved:

$$c_{2,t+1} = R_{t+1} s_t . \tag{10}$$

Dersom vi setter betingelsen i (10) inn i betingelsen i (9), fremkommer individets intertemporale budsjettbetingelse:

$$c_{1,t} + \frac{c_{2,t+1}}{R_{t+1}} = w_t \, . \tag{11}$$

Preferansene til den representative konsumenten er gitt ved en logaritmisk nyttefunksjon:

$$u(c_{1,t}, c_{2,t+1}) = \log c_{1,t} + \rho \log c_{2,t+1} \, , \tag{12}$$

der $\rho = 1/(1+\xi) \in (0,1)$ er diskonteringsfaktoren, og $\xi > 0$ viser individets tidspreferanserate. Det vil si i hvilken grad konsumenten foretrekker konsum nå eller senere (som gammel). Det følger at nyttefunksjonen $u(\cdot,\cdot)$ har en intertemporal substitusjonselastisitet lik 1. Dette er en urealistisk verdi på substitusjonselastisiteten, men valget av nyttefunksjon er gjort for å gjøre analysen enklere og mer transparent. For å maksimere nytten over livsløpet vil individet velge en konsumbane som maksimerer (12), gitt den intertemporale budsjettbetingelsen i (11). Dette gir følgende Euler likning for konsumet:

$$c_{2,t+1} = \rho R_{t+1} c_{1,t} \, . \tag{13}$$

Ved å sette inn betingelsene fra (9) og (10) fremkommer følgende uttrykk for optimal sparing for individet:

$$s_t = \frac{\rho}{1+\rho} w_t \, . \tag{14}$$

Vi ser at økt lønn gir økt sparing. Dessuten ser vi at renta ikke påvirker sparingen. Det følger av at den intertemporale substitusjonselastisiteten er lik 1, hvilket innebærer at substitusjonseffekten og inntektseffekten kansellerer hverandre. Likning (14) vil være sentral i beskrivelsen av kapitaldynamikken i økonomien, ettersom sparing impliserer kapitalakkumulering.

2.3 Likevekt og kapitaldynamikk

Økonomien består av tre markeder: ferdigvaremarkedet, kapitalmarkedet og arbeidsmarkedet. Likevekten på arbeidsmarkedet i periode t, innebærer likhet mellom tilbudet av arbeidskraft N_t, og etterspørselen etter arbeidskraft

L_t. Lønna som klarerer likevekten er således gitt ved førsteordensbetingelsen i (7), men kapital per arbeider er nå identisk med kapital per innbygger, mao. $k_t = K_t/N_t$. Likevekten i kapitalmarkedet inntreffer når bedriftenes etterspørsel etter kapital er lik det private tilbudet av kapital I, som bestemmes av samlet sparing i økonomien: $I_t = N_t s_t$. Likevekten er således gitt ved $K_{t+1} = N_t s_t$. Ved å dividere på N_t, finner vi likevekten på per capita form:

$$(1+n)k_{t+1} = s_t \,. \tag{15}$$

Som følge av Walras' lov i periode t, vil likevekten i arbeidsmarkedet og i kapitalmarkedet implisere likevekten i ferdigvaremarkedet:

$$Y_t = N_{t-1}c_{2,t} + N_t(c_{1,t} + s_t)\,. \tag{16}$$

For en gitt initial beholdning av kapital $k_0 > 0$, vil den intertemporale likevekten være en sekvens av prisen $\{w_t\}$, som tilfredsstiller førsteordensbetingelsene i (7) og (8), likevektsbetingelsene og de aggregerte variablene $\{K_t, Y_t, k_t\}$, og som bestemmer $\{s_t\}$. Den intertemporale likevekten skal beskrive sammenhengen mellom periode t og $t+1$. Ettersom kapitalakkumuleringen skjer ved at sparingen til unge konsumenter transformeres til produktiv kapital perioden etter, vil utviklingen av kapital knytte periodene sammen. Kapitaldynamikken fremkommer altså ved å ta utgangspunkt i likevektsbetingelsen på kapitalmarkedet (15), sette inn uttrykket for optimal sparing (14) og førsteordensbetingelsen i (7). Dette gir:

$$(1+n)k_{t+1} = \frac{\rho}{1+\rho}(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}\,. \tag{17}$$

Vi ser at kapitaldynamikken er gitt ved en eksplisitt funksjon av typen (1). Videre er differenslikningen endimensjonal og av første orden.

Forklaringen til at kapitaldynamikken fremkommer eksplisitt her, ligger i formen på nyttefunksjonen. Når den intertemporale substitusjonselastisitet er lik 1, ekskluderes renta fra uttrykket for optimal sparing. Dersom renta hadde inngått, ville R_{t+1} inngått i sparingen. Ettersom individene antas å ha perfekt fremsyn, ville da k_{t+1} inngått på høyre side i (17).

I Romer (2002) brukes det en nyttefunksjon med konstant relativ risikoaversjon (CRRA). Dette gjør at sparingen i periode t blir en funksjon av renta i periode $t+1$. Dermed vil R_{t+1} inngå i uttrykket for kapitaldynamikken. Ved en slik nyttefunksjon vil mulighetene for en eksplisitt løsning avhenge av formen på produktfunksjonen. I Romer brukes en generell produktfunksjon som antas å ha neoklassiske egenskaper. Kapitaldynamikken blir da kun definert implisitt.[4]

Kun en implisitt løsning vil naturlig nok også være mulig i det generelle tilfellet, der både nyttefunksjonen og produktfunksjonen er generelle, men antas å ha neoklassiske egenskaper. Se de la Croix og Michel (2002) for et oppsett med generelle funksjoner. En utførlig diskusjon av eksistens, entydighet og stabilitet i dette tilfellet er gitt av Galor og Ryder (1989) og Wendner (2004). Det er verdt å merke seg at i disse generelle oppsettene følger det hverken eksistens eller entydighet av en steady-state likevekt. Dette må i så tilfelle forutsettes.[5]

I det påfølgende skal vi imidlertid holde oss til det enkle oppsettet med logaritmisk nyttefunksjon og Cobb-Douglas produktfunksjon. Uten offentlige inngrep generelt, og sosial forsikring spesielt, vil da kapitaldynamikken fremkomme eksplisitt. Denne egenskapen endres imidlertid dersom man inkluderer et sosialforsikringssystem med ikke-fonderte alderspensjoner. Et slikt PAYGO pensjonssystem anvendes i Norge og flere andre land. En OLG modell med et PAYGO system er derfor et svært relevant utgangspunkt for flere spørsmål av intergenerasjonell karakter. For eksempel om et slikt PAYGO system gir høyere økonomisk vekst og velferd enn alternative pensjonssystemer. Eller om det er optimalt å finansiere de unges utdanning via private eller offentlige løsninger. Eller om hvordan implikasjonene av offentlig gjeld fordeles mellom generasjoner.

En utfordring ved bruk av en slik modell er imidlertid at selv den enkle modellen beskrevet over, utvidet med PAYGO og perfekt fremsyn, kompli-

[4]En Cobb-Douglas produktfunksjon vil selv i tilfellet med CRRA-nytte gi en eksplisitt løsning.

[5]I standard lærebøker antas det gjerne en monotont konvergerende steady-state likevekt, jfr. Blanchard og Fischer (1989) og Heijdra og Ploeg (2002).

serer kapitaldynamikken betydelig. Dette er tema i neste avsnitt.

3 En OLG modell med PAYGO

Modellen i avsnitt (2) utvides nå med et ikke-fondert pensjonssystem. Dette innebærer intergenerasjonelle overføringer fra de unge i periode t, til de som er gamle i periode t, det vil si de som er født i periode $t-1$. Overføringene er finansiert ved beskatning av arbeidsinntekt. Overføringene og administrasjonen av forsikringssystemet gjøres av offentlig sektor. Befolkningen antas fremdeles å vokse med raten n. Bedriftene i økonomien påvirkes ikke direkte av det sosiale forsikringssystemet, slik at produktfunksjonen i (5) og førsteordensbetingelsene i (7) og (8) beskriver fremdeles produksjonssiden i økonomien.

3.1 Husholdninger

Den representative konsumenten ønsker fremdeles å maksimere nytte over livsløpet, og nyttefunksjonen er gitt ved (12). Budsjettrestriksjonene endres imidlertid av pensjonssystemet. Konsumenten betaler nå en proporsjonal inntektsskatt $\tau_t \in (0,1)$. De unge individene allokerer således lønna mellom eget konsum, sparing og skattebetaling:

$$w_t = c_{1,t} + s_t + \tau_t w_t \,. \tag{18}$$

Som gammel i periode $t+1$ kan individet født i periode t, nå leve av både oppsparte midler og pensjonsutbetalingen. Dette gir følgende budsjettbetingelse for andre periode:

$$c_{2,t+1} = R_{t+1} s_t + P_{t+1} \,, \tag{19}$$

der P_{t+1} er en sosialforsikringsytelse. Den intertemporale budsjettbetingelsen blir i denne modellen:

$$c_{1,t} + \frac{c_{2,t+1}}{R_{t+1}} = w_t(1-\tau_t) + \frac{P_{t+1}}{R_{t+1}} \,, \tag{20}$$

der venstre side viser nåverdien av konsumet, og høyre side viser nåverdien av inntekt. For å holde det offentlige budsjettet i balanse antas det at pensjonsutbetalingen er variabel, og at bidragsraten τ er konstant. Dette kalles et innskuddsbasert program. Videre antas pensjonsutbetalingen å være en konstant andel $\theta < 1$ av lønna. Kompensasjonsgraden antas å bli koblet til lønna i perioden før utbetalingen, det vil si at pensjonsutbetalingen avhenger av lønna som var gjeldende i den perioden individene var yrkesaktive, mao. $P_{t+1} = \theta w_t$.

Det representative individet maksimerer nyttefunksjonen gitt den intertemporale budsjettbetingelsen i (20). Optimeringsproblemet kan løses ved å anvende Euler-likningen i (13). Ved innsetting av budsjettbetingelsene i (18) og (19) fremkommer følgende:

$$R_{t+1}s_t + P_{t+1} = \rho R_{t+1}(w_t - s_t - \tau_t w_t)\,,$$

som vi kan løse for s_t for å finne individuell optimal sparing:

$$s_t = \frac{1}{1+\rho}\left[\rho w_t(1-\tau_t) - \frac{P_{t+1}}{R_{t+1}}\right]\,. \tag{21}$$

Vi ser nå at ved å inkludere et pensjonssystem kompliseres uttrykket for optimal sparing, ift. uttrykket i (14). Forventet rente påvirker sparebeslutningen. Vi ser at økt forventet rente gir høyere sparing. Det innebærer at substitusjonseffekten er større enn inntektseffekten.

3.2 Likevekt og kapitaldynamikk

Likevektsbetingelsene i arbeidsmarkedet, kapitalmarkedet og godemarkedet er som i avsnitt 2.3. Optimal sparing er imidlertid nå gitt ved (21). PAYGO pensjonssystemet innebærer at de totale bidragene fra de unge må være lik pensjonsutbetalingene til de eldre:

$$\tau_t w_t N_t = \theta w_t N_{t-1} \quad \Rightarrow \quad \theta = (1+n)\tau_t\,. \tag{22}$$

Betingelsen i (22) viser at økt n, øker skattegrunnlaget slik at nødvendig skatterate τ_t, for å finansiere pensjonen blir lavere. Økt befolkningsvekst er dermed en fordel for konsumentenes disponible inntekt ved et PAYGO system.

Likevekten på kapitalmarkedet er fremdeles gitt ved $(1+n)k_{t+1} = s_t$. For å finne et uttrykk for kapitaldynamikken setter vi uttrykket for optimal sparing (21) og PAYGO betingelsen $P_{t+1} = \theta w_t = (1+n)\tau_t w_t$, inn i likevektsbetingelsen på kapitalmarkedet. I tillegg legger vi til grunn at bidragsraten er konstant $\tau_t = \tau$. Dette gir følgende uttrykk for kapitalakkumuleringen:

$$(1+n)k_{t+1} = \frac{1}{1+\rho}\left[\rho(1-\tau) - \frac{(1+n)\tau}{R_{t+1}}\right] w_t \,. \tag{23}$$

Ved å sette førsteordensbetingelsene i (7) og (8) inn i (23) følger det at i den intertemporale likevekten på kapitalmarkedet vil kapitalutviklingen være gitt ved følgende implisitte funksjon:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+\rho}\left[\frac{\rho(1-\tau)}{1+n} - \frac{\tau}{\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}}\right](1-\alpha)Ak_t^{\alpha}\,, \tag{24}$$

der sekvensen $\{k_t\}_{t\geq 0}$ kalles en likevektstrajektorie. Likning (24) kan ikke løses eksplisitt for k_{t+1}. Vi har dermed en dynamisk likning av typen (3). Steady-state likevekt impliserer $k_{t+1} = k_t = \bar{k}$, som her er gitt ved:

$$\bar{k} = \left[\frac{\rho(1-\tau)A}{1+n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\alpha(1+\rho)+\tau(1-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \,. \tag{25}$$

En kan dermed studere lokal stabilitet omkring steady-state, ved å se på:

$$\Delta(k) := \left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k_t=\bar{k}} \tag{26}$$

Dersom $|\Delta(k)| < 1$ er steady-state likevekten til (24) lokalt stabil,[6] dersom $\Delta(k) = 1$ er steady-state likevekten en ustabil sykel, og dersom $|\Delta(k)| > 1$ er steady-state likevekten ustabil og divergerende.

I flere sammenhenger er det imidlertid ønskelig å løse likning (24) eksplisitt. For eksempel vil en slik løsning være nyttig dersom man ønsker å studere vekstfaktoren k_{t+1}/k_t. I neste avsnitt skal vi av denne grunn se på ulike måter å endre modellen på, slik at kapitaldynamikken kan løses eksplisitt.

[6]Mer konkret er steady-state likevekten monotont konvergerende dersom $\Delta(k) \in [0,1)$, og konvergerer oscillerende dersom $\Delta(k) \in (-1,0)$

4 Alternativer for å finne eksplisitte løsninger

Formålet i dette avsnittet er å vise ulike måter å endre modellen i avsnitt 3 på, slik at kapitaldynamikken kan løses eksplisitt. Det innebærer at kapitalakkumulasjonen i likning (24) som er av typen (3), kan modifiseres til en likning av typen (1).

4.1 Alternativ 1: Adaptive forventninger

Vi har så langt antatt at forventningene er perfekte. Dette innebærer bl.a. at forventet verdi på realrenta er lik den korrekte verdien, $R^e_{t+1} = R_{t+1}$. I dette alternativet skal vi heller legge til grunn adaptive forventninger. Med adaptive eller statiske forventninger menes det at forventningene blir basert på variabelens tidligere historie. I tilfellet med adaptive forventninger til realrenta vil forventningene bli styrt av følgende likning:

$$R^e_t = R^e_{t-1} + \mu\left(R_{t-1} - R^e_{t-1}\right) ,$$

der μ er en justeringskoeffisient som sier noe om hvor raskt forventningene tilpasser seg faktisk realrente. Den enkleste varianten av adaptive forventninger er å la $\mu = 1$, slik at $R^e_t = R_{t-1}$. Det er denne vi skal legge til grunn i dette avsnittet.

I modellen over er realrenta i likning (23) en forventningsstørrelse. Bruk av adaptive forventninger innebærer at:

$$R^e_{t+1} = R_t = \alpha A k_t^{\alpha-1} . \tag{27}$$

Forventet verdi på realrenta i periode $t+1$ er lik verdien på realrenta i periode t. Ved å sette førsteordensbetingelsene i (7) og (27) inn i (23) fremkommer følgende likning for kapitalakkumuleringen:

$$k_{t+1} = \frac{1-\alpha}{1+\rho}\left[\frac{\rho A(1-\tau)}{1+n}k_t^{\alpha} - \frac{\tau}{\alpha}k_t\right] . \tag{28}$$

Kapitaldynamikken er således gitt ved en eksplisitt funksjon som er av typen (1), det vil si $k_{t+1} = f(k_t)$.

4.2 Alternativ 2: Pensjonsutbetaling relatert til lønn

I modellen i avsnitt 3 består pensjonsutbetalingen av en konstant andel av lønna opptjent som yrkesaktiv. Det vil si at produktet av lønna som var gjeldende i periode t og en fast kompensasjonsgrad, utgjør alderspensjonen i periode $t+1$ for generasjon t. Dette innebærer at pensjonistenes utbetaling ikke påvirkes av eventuell lønnsvekst i samfunnet. Teknologisk fremgang i økonomien vil således ikke medføre velferdsforbedringer for de eldre. Denne implikasjonen kan imidlertid endres ved å la pensjonsutbetalingen være knyttet til lønna som gjelder i perioden da pensjonsutbetalingen skjer. Eventuell lønnsvekst i samfunnet vil da også reflekteres i alderspensjonene. Pensjonsutbetalingen i periode $t+1$ blir da:

$$P_{t+1} = \theta w_{t+1}\,. \tag{29}$$

Uttrykket for individuell optimal sparing i (21) blir da:

$$s_t = \frac{1}{1+\rho}\left[\rho w_t(1-\tau_t) - \frac{\theta w_{t+1}}{R_{t+1}}\right]. \tag{30}$$

Likevekten i kapitalmarkedet er fremdeles gitt ved $(1+n)k_{t+1} = s_t$. Ved å sette optimal sparing (30), fast skatterate og førsteordensbetingelsene i (7) og (8), inn i likevektsbetingelsen fremkommer:

$$k_{t+1} = \frac{\alpha\rho A(1-\alpha)(1-\tau)}{(1+n)\left[\alpha(1+\rho)+\tau(1-\alpha)\right]} k_t^{\alpha}\,, \tag{31}$$

som er en likning av typen (1). Å relatere pensjonsutbetalingen til lønna som er gjeldende i perioden da utbetalingen skjer, vil altså endre kapitaldynamikken fra (24) til (31).

4.3 Alternativ 3: Endogen teknologisk utvikling

Denne modifiseringen er mer omfattende enn de over, men i tillegg til å gjøre kapitaldynamikken eksplisitt, vil modellen nå også endogenisere vekstprosessen.

Det antas nå at skalaparameteren A angir arbeidsproduktivitet og endogeniseres ala Romer (1986).[7] Tilnærmingen tar utgangspunkt i at det eksisiterer teknologiske eksternaliteter fra den aggregerte kapitalbeholdningen til arbeidsproduktiviteten i den enkelte bedrift. Dette uttrykkes som:

$$A_t = \frac{1}{a}\frac{K_t}{N_t}\,, \tag{32}$$

der a er en produktivitetsparameter som reflekterer kapitalintensitetens innvirkning på arbeidsproduktiviteten.[8] Ettersom arbeidsproduktiviteten er relatert til arbeidskraften L_t, og likevekten i arbeidsmarkedet innebærer $L_t = N_t$, vil produktfunksjonen i dette oppsettet formuleres som $Y_t = K_t^\alpha (A_t N_t)^{1-\alpha}$. Innsetting av (32) i denne produktfunksjonen gir:

$$Y_t = \left(\frac{1}{a}\right)^{1-\alpha} K_t \quad \text{og} \quad y_t = \left(\frac{1}{a}\right)^{1-\alpha} k_t\,, \tag{33}$$

på per arbeider form. Optimal tilpasning for bedriftene gir ved denne strukturen på modellen følgende førsteordensbetingelser:

$$A_t(1-\alpha)\hat{k}_t^\alpha = w_t\,, \tag{34}$$

$$\alpha\hat{k}_t^{\alpha-1} = R_t\,, \tag{35}$$

der $\hat{k}_t := K_t/A_tN_t$ er kapital per effektive arbeider. Fra denne definisjonen og likning (32) følger det at kapital per effektive abeidsenhet er konstant:

$$\hat{k}_t := \frac{K_t}{A_tN_t} = a\,. \tag{36}$$

Ettersom førsteordensbetingelsene i (34) og (35) viser at renta R_t, og lønn per effektive arbeider w_t/A_t, er funksjoner av $\hat{k}_t$, vil:

$$(1-\alpha)a^\alpha A_t = w_t\,, \tag{37}$$

$$\alpha a^{\alpha-1} = R_t = R \quad \forall t\,. \tag{38}$$

---

[7] Fremstillingen til Romer bygger på Arrow (1962).

[8] Se Grossman and Yanagawa (1993) og Wigger (2002) for tilsvarende tilnærminger.

Lønn per arbeider er altså proporsjonal med nivået på arbeidsproduktiviteten, det vil si at lønna vokser med A_t. Lønn per effektive arbeider er konstant over tid. Realrenta blir også konstant over tid. Ved bruk av disse førsteordensbetingelsene vil kapitalakkumuleringen i (23) bli:

$$(1+n)k_{t+1} = \frac{1}{1+\rho}\left[\rho(1-\tau) - \frac{(1+n)\tau}{R}\right](1-\alpha)a^{\alpha}A_t\,. \tag{39}$$

Idet $A_t = k_t/a$, kan således kapitaldynamikken i denne varianten av OLG modellen skrives som:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+\rho}\left[\frac{\rho(1-\tau)}{1+n} - \frac{\tau}{R}\right](1-\alpha)a^{\alpha-1}k_t\,. \tag{40}$$

Denne differenslikningen er av type (1).

4.4 Alternativ 4: En liten åpen økonomi

En åpen økonomi innebærer at økonomien deltar på internasjonale kapital- og ferdigvaremarkeder. En *liten* åpen økonomi innebærer at aktørene, det vil si produsentene, konsumentene og myndighetene, ikke kan påvirke prisene på de internasjonale markedene. Det antas at både ferdigvarer og kapitalvarer er internasjonalt perfekt mobile. Prisene på ferdigvarer og kapitalvarer betraktes således som eksogene av aktørene i økonomien. Av dette følger det at realrenta er eksogent bestemt, sett fra den lille økonomiens ståsted. Videre antas det at renta er konstant, slik at $R_t = R$, for alle t.

La oss nå ta utgangspunkt i modellen fra avsnitt (3). Produsentene tilpasser seg optimalt ved å tilfredsstille betingelsene i (7) og (8). Eksogen og konstant rente impliserer at:

$$R = \alpha A k^{\alpha-1}\,, \tag{41}$$

slik at kapital per arbeider k, er konstant og bestemt fra (41). Kapitalintensiteten er altså konstant i en liten åpen økonomi. Videre ser vi fra (7) at lønn per arbeider også blir konstant. Ettersom $k = K_t/N_t$ er konstant, og N_t vokser med rate n, må også K_t vokse med rate n, det vil si $K_{t+1} = (1+n)K_t$. Den totale kapitalbeholdningen vokser dermed i takt med befolkningen.

Husholdningene antas å tilpasse seg optimalt over livsløpet, slik at sparingen er gitt ved (21). Dersom vi nå tar hensyn til at renta og lønna er konstante, og i tillegg setter inn et PAYGO system med konstant skattesats $\theta = (1+n)\tau$, blir optimal sparing:

$$s_t = \frac{1}{1+\rho}\left[\rho(1-\tau) - \frac{(1+n)\tau}{R}\right] w\,. \tag{42}$$

Antagelsen om en åpen økonomi påvirker modelloppsettet på to måter til. For det første vil reallikningen i (16) utvides med nettoeksport på høyre side. For det andre vil sparingen bli brukt til enten å bygge innenlandsk realkapital K, eller til å akkumulere utenlandske aktiva B. Den intertemporale budsjettbetingelsen blir dermed:

$$N_t s_t = K_{t+1} + B_{t+1} - B_t\,, \tag{43}$$

der $CA_t = B_{t+1} - B_t$ er driftsbalansen. Ved bruk av uttrykket for sparing i (42), og at k er konstant over tid, blir budsjettbetingelsen per arbeider:

$$(1+n)b_{t+1} = b_t + \frac{1}{1+\rho}\left[\rho(1-\tau) - \frac{(1+n)\tau}{R}\right] w - (1+n)k\,, \tag{44}$$

der $b_t := B_t/N_t$. Ettersom kapitalintensiteten er konstant, vil fluktuasjoner i sparingen kun ha effekt på aktivaposisjonen overfor utlandet. Kapitaldynamikken begrenser seg således til et forhold mellom sparing og landets fordringer på utlandet. Det er ingen vekst i kapital per arbeider, og dermed heller ingen kapitalakkumulasjon. På den annen side vil dynamikken i modellen, som drives av dynamikken i driftsbalansen, kunne analyseres ved bruk av likning (44).[9] Videre ser vi at dynamikken i modellen beskrives ved en differenslikning av typen (1).

[9]Driftsbalansen per arbeider i periode t er gitt ved $ca_t = (1+n)b_{t+1} - b_t$. Bruk av kapitalmarkedslikevekten gir da $ca_t = s_t - (1+n)k$.

5 Case: En sammenligning av økonomisk vekst under ulike pensjonssystemer

I dette avsnittet skal vi se på et eksempel der det er nyttig med et eksplisitt uttrykk for kapitaldynamikken. Vi skal ta utgangspunkt i følgende spørsmål: Er den økonomiske veksten størst ved et ikke-fondert pensjonssystem eller ved et fondsbasert pensjonssystem? Dette spørsmålet er studert i en rekke artikler og bøker (Wiedmer, 1996; Thøgersen, 2001; Blanchard og Fischer, 1989; Heijdra og Ploeg, 2002; Azariadis, 2000). Med økonomisk vekst siktes det her til veksten i kapitalintensiteten (k). I en lukket økonomi med PAYGO, perfekt fremsyn og neoklassiske egenskaper er kapitaldynamikken beskrevet ved likning (24). Denne likningen kan ikke ved standard rotutdragning løses eksplisitt for k_{t+1}. Det følger at likningen på en standard måte heller ikke kan omskrives til en eksplisitt vekstfaktor k_{t+1}/k_t. Å gjøre en sammenligning av vekstfaktoren under ulike pensjonssystemer må derfor gjøres implisitt eller numerisk. Dersom man ønsker en sammenligning av de eksplisitte uttrykkene for vekstfaktoren ved forskjellige pensjonssystemer, kan man benytte én av alternativene beskrevet i forrige avsnitt. Vi skal nå bruke alternativ 3 med endogen teknologisk utvikling.[10].

5.1 Økonomisk vekst ved et PAYGO system

Ved å definere økonomisk vekst som vekstfaktoren til kapitalintensiteten, vil økonomisk vekst ved et PAYGO system være gitt ved:

$$g^{PAYG} := \left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)^{PAYG} = \frac{1}{1+\rho}\left[\frac{\rho(1-\tau)}{1+n} - \frac{\tau}{R}\right](1-\alpha)a^{\alpha-1}\,, \tag{45}$$

som følger av likning (40). Merk at vekstfaktoren er uavhengig av tid. Generelt kan vekstfaktoren g være større eller mindre enn en. Altså kan positive eller negative reelle vekstrater bli predikert, avhengig av parameterverdiene.[11] Vi ser også at økt skatterate vil redusere veksten.

[10]Fremstillingen i dette avsnittet er basert på Wiedmer (1996)

[11]Dersom det antas at $\frac{(1+n)\tau}{\rho R} < 1 - \tau$, vil vekstfaktoren være positiv.

5.2 Økonomisk vekst ved et fondert pensjonssystem

I dette sosialforsikringssystemet antas det at det offentlige trekker inn en skatt fra de yrkesaktive i periode t, og investerer disse midlene i et fond. I periode $t+1$ betales skatten ut igjen til de som er gamle i periode $t+1$. Dette innebærer at de enkelte generasjoner finansierer sin egen pensjonsutbetaling. Budsjettbetingelsen ved dette sosialforsikringssystemet blir dermed:

$$\theta w_t N_t = R_{t+1}\tau_t w_t N_t \quad \Rightarrow \quad \theta = R_{t+1}\tau_t \,. \tag{46}$$

Venstre side er pensjonsutbetalingene, mens høyre side viser skatteinnbetalingene. Merk at renta er inkludert. Det skyldes at skatteinnbetalinger og pensjonsutbetalinger skjer i to ulike perioder, slik at avkastningen på fondet må inkluderes. Et sentralt poeng her er altså at myndighetene bygger opp et fond av skatteinnbetalingene. Dette gjør at myndighetene bidrar til akkumuleringen av nasjonalformuen. Deres bidrag består således av samlede skatteinnbetalinger, og kan dermed uttrykkes som:

$$\Omega_{t+1} = \tau_t w_t N_t \,, \tag{47}$$

der Ω_{t+1} er offentlig formue ved inngangen av periode $t+1$. På per capita form blir dette:

$$(1+n)\omega_{t+1} = \tau_t w_t \,, \tag{48}$$

der $\omega := \Omega/N$. Mulighetene for det offentlige til å bygge formue gjør at tilbudet av kapital nå både kan komme fra privat og offentlig sparing. Likevektsbetingelsen i kapitalmarkedet blir dermed:

$$K_{t+1} = N_t s_t + \Omega_{t+1} \,, \tag{49}$$

som på per capita form blir:

$$(1+n)k_{t+1} = s_t + (1+n)\omega_{t+1} \,. \tag{50}$$

For å finne individuell optimal sparing tar vi utgangspunkt i likning (21). Dette uttrykket for optimal sparing er generelt og ikke avhengig av type pensjonssystem eller endogen teknologisk utvikling. For å inkludere et fondsbasert pensjonssystem setter vi inn at $P_{t+1} = \theta w_t = R_{t+1}\tau_t w_t$. For å ivareta endogen teknologisk utvikling benyttes førsteordensbetingelsen fra (37) og (38). Endelig antas fremdeles bidragsraten å være konstant over tid. Dette gir:

$$s_t = \frac{1}{1+\rho}\left[\rho(1-\tau) - \tau\right](1-\alpha)a^{\alpha-1}k_t\,. \tag{51}$$

Ved å sette dette uttrykket for optimal sparing og likning (48) inn i likevektsbetingelsen på kapitalmarkedet får vi etter litt regning:

$$(1+n)k_{t+1} = \frac{\rho}{1+\rho}(1-\alpha)a^{\alpha-1}k_t\,. \tag{52}$$

Vekstfaktoren ved et fondsbasert pensjonssystem blir dermed:

$$g^F := \left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)^F = \frac{\rho}{(1+\rho)(1+n)}(1-\alpha)a^{\alpha-1}\,. \tag{53}$$

Dette uttrykket for vekstfaktoren er tilsvarende det vi får dersom vi setter $\tau = 0$ inn i likning (40), og løser dette for k_{t+1}/k_t. Det vil si at det fonderte systemet gir tilsvarende vekst som fravær av et pensjonssystem. Dette resultatet omtales gjerne som at det fonderte systemet virker nøytralt på økonomien. Altså er samlet sparing og økonomisk vekst upåvirket av det fonderte systemet. Forklaringen er at husholdningene vet at deres innbetalinger gir samme renteavkastning som deres egen sparing. Økt offentlig sparing motsvares av en tilsvarende nedgang i privat sparing. Total sparing endres derfor ikke.

For å sammenligne veksten i en PAYGO økonomi med en økonomi med et fondert system kan vi sammenligne de eksplisitte uttrykkene for veksten gitt ved likning (45) og (53). Vi ser da at:

$$g^F = g^{PAYG}\Big|_{\tau=0} > g^{PAYG}\Big|_{\tau>0}\,. \tag{54}$$

Altså er den økonomiske veksten høyere ved et fondsbasert pensjonssystem enn ved et ikke-fondert pensjonssystem.

Vi har dermed sett at eksplisitte uttrykk for kapitaldynamikken er svært hensiktsmessig for å sammenligne den økonomiske veksten under ulike sosialforsikringssystemer ved endogen vekst. Det er en rekke relaterte momenter knyttet til både velferdseffekter, dynamisk effisiens, befolkningsaldring m.m. som ikke er analysert eller kommentert i dette avsnittet. Det skyldes formålet med denne artikkelen, og at en videre drøfting av ulike pensjonssystemer faller utenfor denne artikkelens rammer.

6 Avsluttende kommentarer

Formålet med denne artikkelen har vært å se på ulike måter å formulere en OLG modell med PAYGO på, for å lettere kunne analysere kapitaldynamikken. Motivasjonen for å se på dette er relatert til formen på uttrykket for kapitalakkumulasjonen i en enkel OLG modell med ikke-fonderte pensjoner. Uttrykket for kapitalakkumuleringen er sentralt i vekstmodeller og kalles derfor gjerne den fundamentale likningen"i modellen (Barro og Sala-i-Martin, 2004). Hensikten med likningen er å beskrive dynamikken i modellen. For mange formål er det ikke nødvendig med en eksplisitt løsning eller et eksplisitt uttrykk av likningen. Eksistens, entydighet og stabilitet kan i de fleste tilfeller studeres ved implisitte uttrykk.[12] Dessuten kan approksimasjoner og numeriske tilnærminger i flere tilfeller være tilstrekkelig.

I andre tilfeller kan det imidlertid være ønskelig å studere kapitaldynamikken ut ifra et eksplisitt uttrykk, slik som i likning (1). Dette kan være aktuelt dersom en har utvidet modellen langs andre dimensjoner, for eksempel med alderspensjoner, med subsidier til utdanning, med humankapital, med gjeldsproblematikk, eller med fertilitetsratens effekt på den økonomiske veksten. I slike tilfeller kan det være hensiktsmessig å ha et eksplisitt uttrykk for vekstraten til kapitalintensiteten i økonomien.

Med dette som utgangspunkt søker denne artikkelen å vise noen måter å formulere OLG modellen med PAYGO på, som kan lede til eksplisitte uttrykk for kapitalutviklingen. Artikkelen viser også et case for å illustrere hvordan eksplisitte uttrykk for kapitaldynamikken kan forenkle sammenlingningen av ulike pensjonssystemer.

[12]Dette betinges av at likningen oppfyller kriteriene for at teoremet for implisitte funksjoner kan brukes.

Referanser

Allais, M. (2002). *Economie et Intérêt*. Imprimerie Nationale.

Arrow, K.J. (1962). The Economic Implications of Learning by Doing. *The Review of Economic Studies* **29**, 155–173.

Azariadis, C. (2000). *Intertemporal Macroeconomics*. Blackwell Oxford & Cambridge USA.

Barro, R.J. og Sala-i-Martin, X. (2004). *Economic Growth*. The MIT Press: Massachusetts.

Blanchard, O.J. og Fischer, S. (1989). *Lectures on Macroeconomics*. The MIT Press: Boston.

de la Croix, D. og Michel, P. (2002). *A Theory of Economic Growth: Dynamics and Policy in Overlapping Generations*. Cambridge University Press.

Diamond, P.A. (1965). National Debt in a Neoclassical Growth Model. *American Economic Review* **55**, 1126–1150.

Galor, O. (2007). *Discrete Dynamical Systems*. Springer.

Galor, O. og Ryder, H.E. (1989). Existence, Uniqueness, and Stability of Equilibria in an Overlapping-Generations Model with Productive Capital. *Journal of Economic Theory* **49**, 360–375.

Grossman, G.M. og Yanagawa, N. (1993). Asset Bubbles and Endogenous Growth. *Journal of Monetary Economics* **31**, 3–19.

Heijdra, B.J. og van der Ploeg, F. (2002). *Foundations of Modern Macroeconomics*. Oxford University Press.

May, R.M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* **261**, 459–467.

Mickens, R.E. (1990). *Difference Equations: Theory and Applications*. Chapman and Hall.

Romer, D. (2002). *Advanced Macroeconomics*. Mcgraw-Hill Higher Education.

Romer, P. (1986). Increasing Returns and Long-Run Growth. *Journal of Political Economy* **94**, 1002–1035.

Thøgersen, Ø. (2001). Reforming Social Security: Assessing the effects of alternative funding strategies in a small open economy. *Applied Economics* **33**, 1531–1540.

Wendner, R. (2004). Existence, Uniqueness, and Stability of Equilibrium in an OLG Economy. *Economic Theory* **23**, 165–174.

Wiedmer, T. (1996). Growth and social security. *Journal of Institutional and Theoretical Economics* **152**, 531–539.

Wigger, B.U. (2002). *Public Pensions and Economic Growth.* Springer. Berlin.