MASTEROPPGAVE
MGLU-17
Mai 2022

Elevers bruk av matematisk modellering i arbeid med problemløsningsoppgaver

Vitenskapelig artikkel

30 sp. oppgave

Sophie Ugland Thoresen

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier
Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

«Jeg blir forvirret. Det er så vanskelig å huske så mange tall samtidig. Det var mye enklere å løse oppgavene med læringspartneren, for da kunne han huske tallene også kunne jeg regne dem sammen.» - Elev med papir og blyant foran seg

Forord

Det er rart å se at studietiden går mot slutten. Etter fem år på OsloMet er jeg klar for å tre inn i arbeidslivet med begge beina. En epoke er over og en annen er i ferd med å begynne. Av totalt ti semestre på OsloMet, har fem av dem blitt gjennomført under en global pandemi. Dette har selvfølgelig satt sitt preg på studietiden, men jeg føler vi har kommet igjennom på en god måte. Det er en sliten, glad og stolt student som nå leverer inn resultatet av en interessant, slitsom, stressende, spennende og ikke minst morsom arbeidsperiode.

Tusen takk til elevene som var med på forskningsprosjektet mitt, til lærerne, og til skolens ledelse som la til rette for datainnhentingen i en uforutsigbar og travel tid. Takk for tiden og tilliten.

Jeg må også rette en stor takk veilederen min Anders Månsson for gode, grundige og konstruktive tilbakemeldinger underveis. Det har vært godt å kunne henvende meg til deg når jeg har følt meg usikker.

Til slutt må jeg takke foreldrene mine. Takk for oppmuntring og motiverende ord når jeg har hatt behov for det. Takk for hjelp i hverdagen og for hjelp med korrekturlesing. Takk for all støtte og trøst, samt smil og latter underveis i prosessen.

Sammendrag

Resultatene fra TIMSS-undersøkelsen fra 2015 viser at norske elever presterer svakt i emnet algebra. Dette forklares med at elevene stort sett har en instrumentell forståelse av emnet og har problemer med å se på emnet som nyttig. I tillegg til tallregning blir algebra sett på som en motor i matematikk, og det er derfor problematisk at så mange elever syntes det er utfordrende. Tidligere forskning viser at arbeid med problemløsningsoppgaver i matematikk er med på å skape en relasjonell forståelse for emnet. Å knytte de matematiske operasjonene til virkelighetsnære kontekster øker også elevenes forståelse av matematikkens nyttighet, og dette virker igjen positivt på elevenes motivasjon.

Matematisk modellering defineres som prosessen med å oversette mellom den virkelige verden og matematikk begge veier. For å mestre dette må elever lære flere ulike strategier i møte med et matematisk problem. Den mest utfordrende delen av modelleringsprosessen er selve matematiseringen, den delen hvor en skal velge hvilken matematikk som egnes best til å løse problemet. Modellering i undervisningen gir elevene mulighet til å oppleve matematikk som et redskap til å forstå og beskrive fenomener fra verden rundt seg. Elever kommer til skolen med matematisk innsikt som i liten grad er basert på matematiske symboler. Skolens oppgave blir å hjelpe elever med å uttrykke og formidle matematikk på ulike måter.

På bakgrunn av dette ønsket jeg å se hvordan elever bruker penn og papir når de løser oppgaver som de ennå ikke har en lært løsningsmetode for. Gjennom oppgavebaserte intervjuer av 21 elever på fjerde trinn, har jeg fått innblikk i elevenes forhold til og bruk av penn og papir. Elevene fikk tildelt et likningssett med tre ukjente, satt i en kontekst av priser på forskjellig frukt. Funnene viser at elever i stor grad løser oppgaver med hoderegning og bruker ikke penn og papir underveis i denne prosessen. Det virker som flere av elevene ignorer eller velger ikke å skrive på papiret fordi de ikke har lært hvordan de skal løse slike oppgaver. Penn og papir brukes i stor grad til å bruke allerede innlærte metoder eller til å skrive det endelige svaret på oppgaven. Av 21 elever var det kun én elev som brukte penn og papir uten å bruke en systematisert og innlært metode. Mine observasjoner viser at elevene ikke er vant med å skrive på papiret på en utforskende og kreativ måte. Dette er viktig ferdighet å ha i møte med komplekse og kompliserte virkelighetsnære problemer, da matematiske problemer i det virkelig liv sjeldent kommer med forslag til løsningsmetode.

Elever trenger å erfare at det er greit å bruke penn og papir på en kreativ og utforskende måte. Det er lov å prøve seg frem når en ikke har en konkret fremgangsmåte å bruke. Elever må introduseres for flere måter å løse oppgaver på, slik at de selv kan velge det som fungerer best for dem. Dessverre er det slik at elever ofte får en instrumentell forståelse av matematikken. For å unngå dette må matematikken vi lærer bort knyttes til eksempler fra det virkelige liv. Vi må også utforske og vise hvordan en kan bruke matematikken kreativt, slik at elevene lettere kan se sammenhenger og få en relasjonell forståelse.

Abstract

The results from the TIMSS survey from 2015 show that Norwegian students perform poorly in the subject of algebra. This is explained by the fact that the students mostly have an instrumental understanding of the subject and have problems seeing the subject as useful. In addition to numeracy, algebra is seen as an important part of mathematics, and it is therefore problematic that so many students find it challenging. Previous research shows that working with problem-solving tasks in mathematics helps to create a relational understanding of the subject. Linking the mathematical operations to real-life situations also increases the students 'understanding of the usefulness of mathematics, and this has a positive effect on the students' motivation.

Mathematical modeling is defined as a process of translating between the real world and mathematics both ways. To master this, students must learn several different strategies in when facing of a mathematical problem. The most challenging part of the modeling process is the mathematization itself, in which is the part where you must choose which mathematics is best suited to solve the problem. Modeling in teaching gives students the opportunity to experience mathematics as a tool to understand and describe phenomena from the world around them. Students come to school with a mathematical insight that is to a small extent based on mathematical symbols. Therefore, the school's task will be to help students express and convey mathematics in different ways.

Based on this, I wanted to see how students use paper and pen when they solve mathematical problems they have not yet learned a method to solve. Through assignment-based interviews of 21 students in the fourth grade, I have gained insight into the students' relationship to using paper and pen. The students were given a set of equations with three unknowns, in a context of prices for different fruits. The findings show that students largely solve problems with mental arithmetic and do not use pen and paper during this process. It seems that several of the students ignore or choose not to use paper and pen because they have not learned how to solve problems like the one that was presented to them. Paper and pen are largely used to practice already learned methods or to write the final answer to the task. Out of 21 students, only one student used paper and pen without using a systematized and acquired method. My observations show that students are not used to writing on paper in an exploratory and creative way. This is an

important skill to have facing complex and complicated real-world problems, as mathematical problems in real life rarely occurs with suggestions for solutions.

Students need to experience that it is okay to use paper in a creative and exploratory way. They are allowed to explore when they do not have a specific procedure to use. Students must be introduced to several ways of solving problems, so that they can choose what works best for them. Unfortunately, students often gain an instrumental understanding of mathematics. To avoid this, the mathematics we teach must be linked to examples from real life that the students can relate to. We must also use research and show how to do mathematics creatively and enable students to see connections more easily and gain a relational understanding.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

Det står i den nye læreplanen i matematikk at «matematikk er et sentralt fag for å kunne forstå mønstre og sammenhenger i samfunnet og naturen gjennom modellering og anvendelser. Matematikk skal bidra til at elevene utvikler et presist språk for resonnering, kritisk tenkning og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering. Matematikk skal forberede elevene på et samfunn og et arbeidsliv i utvikling ved å gi dem kompetanse i utforsking og problemløsing» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Den internasjonale kartleggings-undersøkelsen TIMSS undersøker elevers kunnskaper i ulike emner innenfor matematikken. Resultatene viser at norske elever generelt presterer på et lavere nivå enn ønsket, men at de presterer langt lavere i algebra enn de gjør i de andre emnene (Bergem, 2016, s. 36.)

Tallregning og algebra blir ansett som en motor i matematikk, og det er derfor problematisk at så mange elever syntes det er utfordrende. Kompetanse i algebra og de ferdighetene som en får med arbeid med emnet, danner et viktig grunnlag for videre arbeid i matematikk, men også for andre emner som bruker matematikk. Algebra handler om å utforske strukturer, mønstre og relasjoner og er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019). Svake prestasjoner i f.eks. fysikk kan forklares med svake prestasjoner i regning og algebra (Grønmo & Hole, 2017). Barn trenger gode regneferdigheter og en sterk forståelse av algebra. De trenger gode hoderegningsstrategier og en god nok forståelse av matematiske operasjoner, slik at overgangen til abstrakt algebra blir enkel.

Den verden vi lever i i dag krever ferdigheter og forståelse i matematikk. Dette behovet vil bare bli større og større etter hvert som årene går (Fosnot ss. Xiii – xiv). Kunnskapsdepartementet har publisert rapporter hvor de har sett på sammenhengen mellom matematikkprestasjoner og frafall i videregående skole. Rapportene viser at frafallet kan skyldes svake grunnleggende ferdigheter. Det indikeres også at jo bedre resultater en har i matematikk, jo større er sjansene for å fullføre det første året på videregående skole (Kunnskapsdepartementet, 2020). En stor del av matematikken i skolen bygger på generalisert aritmetikk og algebra. Å mestre dette er viktig for videre arbeid i matematikkfaget, samt i studier som bygger på nettopp algebraisk kunnskap (Naalsund, 2012).

1.1 Bakgrunn

Da jeg gikk tredje året på lærerstudiet skrev jeg en FOU-oppgave. Den gangen ønsket jeg å se om «elevers svar og algebraiske tenkning blir påvirket av hvordan en oppgave blir presentert». Den gang skulle jeg gjennomføre forskningen min i løpet av en praksisperiode. Forskningen som da ble gjennomført var ikke tilstrekkelig og jeg fikk ikke de svarene jeg trengte for å komme til en konklusjon. Jeg valgte å bruke spørreskjema som metode, men svært få av elevene skrev på papiret for å vise hvordan de løste en oppgave. Jeg måtte derfor konkludere med at det var for mange elementer som jeg ikke hadde tatt hensyn til før jeg startet med forskningen.

Denne oppgaven er inspirert og motivert av erfaringene jeg gjorde for to år siden, samt observasjoner jeg har gjort i klasserommet i senere tid. Jeg har jobbet som lærer ved siden av studiene og ble overrasket da jeg så en jente på ni år uanstrengt løse en problemløsningsoppgave. I mitt hode så jeg et sammensatt likningssett med flere ukjente, men hun så et praktisk spørsmål om klinkekuler i en pose. Jeg ville derfor ta opp tråden fra forskningen jeg har hadde gjort tidligere. Denne gangen vil jeg finne ut hvilke vaner elever har for å bruke penn og papir ved arbeid med problemløsningsoppgaver. Problemløsning er noe elevene starter med fra tidlig alder av og som de vil fortsette med ut skolegangen. Vi vet viktigheten av å bruke penn og papir i matematikken, spesielt etter hvert som elevene blir eldre og oppgavene blir mer komplekse. Det er derfor interessant å se hvilke vaner elevene har og hvilke metoder som faller dem naturlig å bruke, før de har fått algoritmiske føringer fra lærer eller andre voksne.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Jeg har selv alltid hatt mye glede av matematikken, spesielt algebra og problemløsning. Algebra har etter min mening ikke fått den anerkjennelsen faget fortjener, og jeg unner andre å få glede av matematikken slik som jeg gjorde. Derfor ønsker jeg å se hvordan vi kan arbeide på de lavere trinnene slik at elever har et bedre utgangspunkt for innlæring av den abstrakte matematikken. Fordi abstrakt matematikk i stor grad blir gjort på skrevet på papiret ønsket jeg å se hvordan elever på barneskolen bruker penn og papir i matematikk. Formålet med denne oppgaven er å observere hvilke vaner elever har for å bruke penn og papiret under matematiske resonnementer, og hva de skriver på papiret. Jeg skal på ingen måte finne årsaken til hvorfor ting er som de er, eller finne løsningen på «algebra-problemet». Det jeg faktisk kan gjøre er å observere og dele erfaringer som jeg har gjort meg, som videre kan brukes i annen og mer omfattende forskning. Det er begrenset hva jeg kan få gjort med denne masteroppgaven, men jeg kan i alle fall gjøre litt og håpe på at det kan hjelpe noen andre.

Studiens forskningsspørsmål er:
(1) Hvordan bruker elevene penn og papiret når de løser problemløsningsoppgaver? og
(2) Hva skriver elevene på papiret for å vise hvordan de har kommet frem til svaret på oppgaven?

1.3 Oppgavens oppbygging

I kapittel 2 vil jeg presentere oppgavens teorigrunnlag. Jeg vil trekke frem tidligere forskning og teorier som vil kunne hjelpe med å besvare problemstillingen min.

I kapittel 3 vil jeg presentere teori om forskningsmetode, samt redegjøre for de metodiske valgene jeg har tatt for dette prosjektet. Videre vil jeg forklare de etiske hensynene som er tatt og drøfte min egen rolle som forsker. Jeg vil vurdere oppgavens reliabilitet og validitet før jeg presenterer utvalget, utforming av intervjuguide og gjennomføring av pilotintervjuer. Til slutt vil jeg redegjøre for gjennomføringen av de faktiske intervjuene, samt operasjonalisere og forklare hvordan jeg vil kategorisere funnene.

I kapittel 4 legger jeg frem data som har blitt samlet inn. Dette er elevenes skriftlige besvarelser, deres muntlige svar og resonnementer, i tillegg til mine egne observasjoner.

I kapittel 5 vil jeg analysere funnene fra datainnsamlingen og knytte dette til noe av teorien presentert i kapittel 2. Videre vil jeg diskutere funnene og knytte disse opp mot problemstillingen min

I kapittel 6 vil jeg oppsummere oppgaven og komme med en konklusjon som svar på oppgavens forskningsspørsmål.

I kapittel 7 vil jeg presentere noen refleksjoner jeg har gjort meg i etterkant av arbeidet med denne oppgaven og forklare hva jeg tenker om videre forskning.

2. Teori

2.1 TIMSS-undersøkelsen

Tall fra TIMSS-undersøkelsen fra 2015 viser at norske elever strever med algebra. Undersøkelsen gjennomføres hvert fjerde år og tester elever i matematikk og naturfag på femte og niende trinn. Norge har deltatt siden den første undersøkelsen ble gjennomført i 1995. Undersøkelsen måler elevenes prestasjoner i fire ulike emneområder. Disse er tall, statistikk, geometri og algebra. Vi har derfor konkrete tall som sier noe om hvordan norske elever presterer i emnet algebra. Hele 60 land deltar i undersøkelsen, noe som også gjør at en kan sammenligne landenes resultater. Spesielt for de norske elevene er at de scorer langt lavere i algebra enn de gjør i de andre emnene (Bergem, 2016, s. 36). Resultatene fra 2011 viste en betydelig tilbakegang i algebra sammenlignet med tidligere år, til tross for en generell forbedring i de andre emnene (Grønmo, Hole, & Stedøy, 2017, s. 89). Hinna, Rinvold og Gustavsen erfarer at ungdomsskoleelever er redde for bokstaver i matematikken, og at dette kan være en av grunnene til at elevene presterer som de gjør (Hinna et. al, 2012, s. 200).

Det er gjort kartlegginger som viser hvor mye tid lærere bruker på å undervise i de ulike matematiske emner. Der kommer dem frem at lærere bruker mindre tid på undervisning i geometri og algebra, og heller bruker mer tid på enkle, hverdagslige beregninger med tall og statistikk (Grønmo, Borge og Rosén, 2013, ss. 79-81). Algebra blir fort abstrakt og elevene kan derfor ende med en instrumentell forståelse istedenfor en dypere, relasjonell forståelse. Målet er at elevene skal ha en relasjonell forståelse, slik at de kan anvende og tilpasse det de har lært fra før.

Grønmo et. al (2017) har skrevet rapporten «Prioritering og progresjon i skolematematikken, en analyse av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier» hvor de har sett på og tolket norske elevers resultater på TIMSS-undersøkelsen. De skriver at «utfordringene i norsk skole er at våre elever presterer alarmerende svakt i algebra» (Grønmo et. al, 2017, s. 84). Bekymringene over elevenes svake prestasjoner i algebra er gjennomgående i rapporten. Grønmo et.al. (2017) viser også til analyser av hva som vektlegges av matematiske emner fra ungdomstrinnet til lærerutdanningen. Resultatene viser at den nordiske profilen kjennetegnes med stabilt lav vektlegging av algebra i skolen. Dette gjelder på alle nivåene i skolen.

2.2 Algebra på barnetrinnet

Schoenfeld (1992) trekker frem typiske elevoppfatninger om matematikkens natur. Det første er at matematikkoppgaver kun har ett korrekt svar. Det er også bare én riktig måte å løse et matematisk problem på, og dette er vanligvis den regelen som læreren har lært klassen. Flere elever forventer ikke å forstå matematikken, men de forventer å lære en metode utenat og bruke den mekanisk uten forståelse for hvorfor den fungerer. Videre oppfattes matematikk som en ensom aktivitet som isolert blir utført av enkeltpersoner. Matematikk er ifølge elevene et fag hvor det ikke er vanlig å samarbeide. Det menes også at de som har forstått matematikken de har blitt undervist i, vil kunne løse ethvert tildelt problem på under fem minutter. Matematikken som læres på skolen har lite eller ingenting med den virkelige verden å gjøre (Schoenfeld, 1992, s. 27). Kort fortalt så er matematikk noe en lærer for å løse oppgaver på skolen, hvor det viktigste er å bruke riktig fremgangsmåte for å komme frem til riktig svar. Å være god i matematikk defineres av hvor raskt du klarer å løse en oppgave.

Gode forkunnskaper i tall og regning er viktig og grunnleggende for videre arbeid med algebra (Grønmo, Borge & Onstad, 2013, s. 166). Det er derfor avgjørende å jobbe målrettet med dette allerede på barneskolen. Algebra kjennetegnes ved at det regnes med tall og variabler. Kort fortalt så er algebra generalisert aritmetikk. Dette er å finne sammenhenger ved tall og matematiske operasjoner, for å så kunne formulere denne på en generell og forenklet måte (Blanton, 2008, s. 4). Algebraisk tenkning defineres av Kieran på følgende måte:

«Algebraic thinking in the early grades involves the development of a way of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool, but which are not exclusive to algebra and which should be engaged in without using any letter- symbolic algebra at all, such as analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting" (Kieran, 2004, s. 149).

Etter «PISA-sjokket» er det flere som har forsket på hvorfor norske elever presterer lavt i matematikk. Mye av denne forskningen har også vært rettet mot algebra og hvordan vi kan legge til rette slik at flere kan mestre emnet. Av forskningen jeg har lest, så handler de fleste om hvordan læreren kan endre undervisningspraksisen sin, slik at elevenes forståelse og motivasjon øker. Hovedtrekket er variasjon i hvordan oppgavene blir presentert, samt å knytte den abstrakte regningen til hverdagslige eksempler.

Brizuela og Schliemann (2004) mener at lave prestasjoner i algebra ikke kan tillegges elevene. De mener at lærere holder tilbake undervisning i algebra fordi dette er noe elevene ikke skal lære før de er eldre. De ville vise at elever på de lavere trinnene også kan løse oppgaver som stort sett er forbeholdt eldre elever. Deres funn viser at elever på lavere trinn klarer å løse oppgaver ment for eldre elever. Hvis yngre elever var i stand til å jobbe med algebra, kunne også eldre elever gjøre det. De antar at eldre elevers prestasjoner i algebra er påvirket at den typen undervisning de får. Brizuela og Schliemann konkluderer med at hvis elevene i tidlig alder hadde blitt eksponert for algebra, ville de vært i stand til å håndtere langt mer kompleks matematikk når de er eldre (Brizuela & Schliemann, 2004, s. 39).

Margrethe Naalsund (2012) har i sin doktorgradsavhandling «Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students algebraic profiency» forsøkt å finne årsaken til hvorfor norske elever syntes algebra er vanskelig. Gjennom samtaler og observasjoner av elever på ungdomsskoletrinnet, kom det frem at elever på åttende trinn i stor grad brukte «gjett og sjekk»-strategier og prøvde seg frem til riktig svar. Dette gjaldt ved arbeid med likninger. Her skilte elevene på åttende trinn seg fra elevene Naalsund observerte på tiende trinn. Elevene på tiende trinn anvendte mer formelle strategier for å løse likninger, men intervjuer i etterkant avslørte at elevene ikke var helt sikre på hvorfor akkurat disse strategiene ble brukt. Elevene så på algebra og likninger som unødvendig manipulasjon av symboler, og de har liten eller ingen forståelse for hvorfor løsningsstrategiene og reglene er som de er. Naalsund finner og konkluderer med at elevene har ferdigheter i algebraisk problemløsning, men mangler en grunnleggende forståelse for hvorfor de gjør som de gjør. I intervjuene som ble gjennomført hadde elevene problemer med å forklare egen tankegang og metode, samt begrunne valgene de har gjort. Mange av elevene begrunnet svarene sine med at de brukte metodene som læreren hadde sagt de skulle bruke. Naalsund erfarer også at de fleste elevene opplever dette som meningsløse aktiviteter, som igjen spiller inn på elevenes motivasjon (Naalsund, 2012).

2.2.1 Instrumentell og relasjonell forståelse

Dette som Naalsund (2012) beskriver kan minne om at elevene har en instrumentell forståelse for algebra. Det er Skemp (2006) som har presentert begrepene relasjonell og instrumentell forståelse. Instrumentell forståelse kjennetegnes ved at elevene har evnen til å løse oppgaver ved hjelp av innlærte prosedyrer og algoritmer. Det mangler da en forståelse for hvorfor en bruker akkurat disse fremgangsmåtene. Naalsund (2012) observerte også dette i sin forskning, at elevene ikke forstod hvorfor de ulike fremgangsmåtene «fungerte». Hun konkluderer med at denne mangelen på forståelse er en av grunnene til at norske elever presterer svakt i algebra.

Som en motsetning til instrumentell forståelse, presenterer Skemp begrepet relasjonell forståelse. Relasjonell forståelse innebærer å kunne løse en gitt oppgave, men også samtidig ha kunnskap om hvorfor den løses på akkurat denne måten. En evner altså å se arbeidet i sammenheng med tidlige arbeid i faget, og klarer å knytte dette til ny kunnskap. Når en innehar relasjonell forståelse er en ikke avhengig av å lære konkrete algoritmer for oppgaveløsing, fordi en evner å bruke tidligere innlært kunnskap for å løse en gitt oppgave. Elever med relasjonell forståelse er derfor gode problemløsere (Skemp, 2006).

2.2.2 Algebraisk tenkning og pre-algebra

Algebra mer enn bare kunnskap og teknikker. Det er en måte å tenke på (Kieran, 2004, s. 146). Algebra handler om å finne mønstre og se sammenhenger, for å så generalisere disse. Dette jobber elever med fra tidlig alder og da kalles det gjerne for pre-algebra. Pre-algebra er designet for å hjelpe elever med å finne matematiske strukturer og mønstre, for å så beskrive dem på en mest mulig konkret måte (Blanton, 2008, s. 6). Blanton (2008) forteller at algebraisk tekning kjennetegnes ved å uttrykke matematiske sammenhenger, tenke modeller og begrunne disse. Når barn oppdager sammenhenger eller mønstre i matematikken, tenker de algebraisk. Å generalisere prosesser og finne mønstre er en viktig del av å tenke algebraisk, og er en viktig forutsetning for videre arbeid med algebra. Til å begynne med vil elevene kunne forklare funnene sine muntlig, og etter hvert vil de kunne forklare på en mer abstrakt måte med tall og bokstaver. Dette skjer samtidig som elevene får en dypere forståelse av hva algebra er (Blanton, 2008).

En grunnleggende antakelse av tidlig algebraundervisning er at den vil øke barnas forståelse av algebraiske konsepter som vil tjene dem godt i deres stort sett aritmetikkbaserte matematikklasserom i grunnskolen. I sin tur vil dette øke sannsynligheten for suksess i studiet av mer avansert matematikk, spesielt algebra, i videregående klassetrinn (Blanton, Stephens, Knuth, Gardiner, Isler, & Kim, 2015, s. 41). Likningssystemer i tidlig algebra kan introduseres ved å sammenligne kombinasjoner av mengder og undersøke sammenhenger mellom disse kombinasjonene. Hvis en forståelse av disse relasjonene er forankret i en meningsfull kontekst, blir strategier for å løse ukjente i dem lettere å utvikle og generalisere. Å sammenligne mengder får elevene til å tenke på relasjoner i stedet for ligninger og prosedyrer. Målet er imidlertid ikke å presse på symbolisering for tidlig – elevene vil symbolisere med variabler når de er klare. (Fosnot, 2010, s. 153)

2.3 Problemløsningsoppgaver og RME (Realistic Mathematics Education)

Både voksne og barn har problemer med å knytte matematikken til den virkelige verden. Dette underbygger Schoenfeld (1992, s. 27) som refererer til elever som ytrer at de ser liten sammenheng mellom matematikken de lærer på skolen og den virkelige verden. Han mener at noe av årsaken til dette er at matematikkundervisningen stort sett handler om å reprodusere det læreren har demonstrert, istedenfor å arbeide med virkelighetsnære problemer. Undervisningsteorien RME (Realistic mathematics education) handler nettopp om det å knytte matematiske prosesser til virkeligheten. Hensikten er å gjøre matematikken mer tilgjengelig for elevene (Beswick, 2011). Her blir det lagt vekt på at elevene selv skal få utforske problemene de får presentert og skal selv prøve å finne den beste måten å løse problemene på. Den stiller seg altså kritisk til den tradisjonelle måten å undervise matematikk på. Blum (2015, s. 81) trekker frem dette som en god fremgangsmåte for å hjelpe elever med å forstå og mestre matematikken, samt være med på å motivere elevene for arbeid i matematikken og gi større innsikt i matematikkens nytteverdi. Boaler (2003) understreker også at å knytte matematiske prosesser til realistiske kontekster vil ha en positiv effekt på elevenes faglige motivasjon.

Hensikten med å gi elevene et matematisk problem er å inspirere til arbeid til å sette i gang tankeprosesser. Når dette lykkes, er det fordi det dreier seg om reelle utfordringer. Det er ikke snakk om å lære ferdigheter for ferdighetenes egen skyld, men å gi problemstillinger hvor ferdigheter og matematisk kompetanse tas i bruk. Problemløsning vil på den måten gi rike erfaringer ved at ulike deler av den matematiske kompetansen til elevene tas i bruk samtidig. Det gjelder praktiske oppgaver som viser matematikk brukt i hverdagslige sammenhenger og det gjelder mer teoretiske oppgaver som viser strukturer og sammenhenger i faget (Alseth & Røsseland, 2006, s. 106).

2.3.1 Hva er et problem/problemløsning?

Selv om begrepet problemløsning på mange måter er selvforklarende, finnes det flere ulike definisjoner når det brukes i en matematikkdidaktisk sammenheng (Schoenfeld, 1992).

Matematiske problemer har vært en sentral del av matematikken siden matematikkens opprinnelse, så begrepet problem har ofte blitt brukt. Begrepet problemløsning er derimot relativt nytt (Stanic & Kilpatrick, 1988).

I følge Branca (1980) er problemløsning ikke bare en metode eller en strategi for å gi mening til en situasjon, men også en slags tenkning som brukes til å løse ikke-algoritmiske situasjoner. Siden problemløsning inkluderer koordinering av kunnskap, intuisjon og kritisk tenkning, kan man si at det er en langt mer kompleks prosess enn å bruke gitte prosedyrer eller regler for å nå en løsning (Charles, Lester & O´Daffer, 1987). I følge Schoenfeld (1992) handler ikke problemløsning om den kunnskapen man allerede besitter, men heller om hvordan man anvender denne for å løse noe ukjent. Problemløsning er å forske for å nå et mål som er åpenbart, men ikke lett å nå. Hvis matematikk er problemløsning, kan problemløsning defineres som å eliminere problemsituasjonen ved å bruke kritiske resonneringsprosesser og nødvendig kunnskap. Problemløsning kan generelt defineres som å involvere seg i en oppgave som det ikke er noe umiddelbart svar på (NCTM, 2000).

Arbeid med problemløsningsoppgaver gir elevene økt forståelse av matematiske begreper, og det er lite som gir større grad av mestringsfølelse i matematikk enn å lykkes med vriene problemer og forstå begreper og sammenhenger. Tradisjonelt har vi lagt lite vekt på begge disse aspektene i matematikkundervisningen (Alseth & Røsseland, 2006, s. 106).

Schoenfeld (1992) refererer til Stanic and Kilpatrick (1988) som identifiserer fem roller for matematisk problemløsning:

1. Som begrunnelse for undervisning i matematikk. Problemløsning ble brukt for å knytte matematikken til erfaringer fra den virkelige verden. Dette for å overbevise elever om verdien av matematikk.
2. Å gi spesifikk motivasjon for fagtemaer. Problemer brukes ofte til å introdusere emner med den implisitte eller eksplisitte forståelsen at når du har lært leksjonen som følger, vil du være i stand til å løse problemer av denne typen.
3. Som rekreasjon. Rekreasjonsproblemer er ment å være motiverende. De viser at «matte kan være gøy» og at det er underholdende bruksområder for ferdighetene elevene mestrer.
4. Som et middel til å utvikle nye ferdigheter. Nøye sekvenserte problemer kan introdusere elevene til nytt fagstoff og gi en kontekst for diskusjoner om fremgangsmåter.

5. Som praksis. Det store flertallet av skolematematikkoppgaver, faller inn under denne kategorien. Elevene får vist en teknikk og får deretter problemer å øve på til de mestrer teknikken.
(Schoenfeld, 1992, s. 5)

2.3.2 Undervisning i problemløsning

Problemløsning er en sammensatt prosess og er av den grunn vanskelig å undervise i. Det har blitt forsket på dette emnet i håp om å finne den beste måten å undervise i problemløsning. Lester (1996) har satt sammen en liste med fire hovedprinsipper ved undervisning i problemløsing:

1. Mengdetrening er viktig og nødvendig for at elever skal utvikle og forbedre sin evne til problemløsing.
2. Det tar tid å bli god i problemløsning
3. Lærerens holdning til problemløsning er avgjørende for om eleven tar til seg undervisningen i problemløsning. Læreren må understreke viktigheten av temaet.
4. Strukturert undervisning i problemløsning gir elevene bedre læringsutbytte

(Lester, 1996)

Problemløsning i undervisningen er med på å sette i gang læreprosesser hos elevene. Gode matematiske problemer har fokus på utforskningen. De inspirerer til at elevene utvikler nokså bestemte matematiske kompetanser. Det er naturligvis bra og nødvendig at elevene er engasjert og ivrig, og at de opplever matematikkfagene som inspirerende og utfordrende (Alseth & Røsseland, 2006, s. 106). Læreren bør oppmuntre elevene til å gjette og gjette, og bør tillate dem å resonnere på egenhånd i stedet for å vise dem hvordan de kan komme frem til en løsning eller et svar (Schoenfeld, 1992, s. 28).

Alle lærer på forskjellige måter og dette gjelder selvfølgelig også for elever. Realistiske kontekster fungerer for mange, men kan også være en barriere for andres læring (Boaler, 2003). Både høyt- og lavt presterende elever kan syntes det er utfordrende å arbeide med virkelighetsknyttede oppgaver. De svakeste elevene kan ha problemer med å skille ut den informasjonen som er relevant for oppgaven. De sterkeste elevene kan syntes det er utfordrende å løse en oppgave som ikke har en rask og åpenbar algoritmisk løsning (Kramarski, Arami & Mevarech, 2002).

Lee og Anderson (2013) har studert ulike fremgangsmåter ved matematikkundervisning. Den ene metoden var læring gjennom direkte introduksjon. I denne typen undervisning er det typisk at elevene lærer seg bestemte prosedyrer for å løse en bestemt type oppgaver. Denne måten å lære på er tidseffektiv, reduserer krav til arbeidsminne og gir riktige løsninger. Baksiden ved denne måten å lære på er at den fører til overfladisk og utenatgående kunnskap som huskes dårlig i ettertid (Lee & Anderson, 2013). Når elever løser rutineoppgaver bruker de ofte metoder som de har lært tidligere, eller de fremgangsmåtene som er gitt i instruksjonen av oppgavene. Lithner (2008) kaller denne arbeidsmåten for et algoritmisk resonnement. Med det menes at eleven følger prosedyrer som er laget for å gi raske og nøyaktige svar, men som ikke knytter matematikken til en virkelig kontekst eller mening. Det motsatte, å løse ikke-rutineoppgaver, gjør at elevene i større grad utforsker matematiske konsepter, arbeider kreativ med allerede innlærte metoder og begrunner metodene med matematikk. Denne typen tilnærming kaller Lithner (20089 for kreativt matematisk resonnement. Han understreker at dersom en vil forbedre elevenes læring og unngå at de benytter utenatlærte metoder, må elever arbeide og slite med matematiske problemer, uten å ha fått detaljerte instruksjoner om hvordan disse kan løses (Lithner, 2008). Elever som bruker lenger tid på og går mer grundig inn i en oppgaves løsningsprosess, har større sjanse for å huske metoden senere sammenlignet med de som løser oppgaven ved hjelp av en tidseffektiv, innlært algoritme (Olsson & Granberg, 2018, s. 432).

Lærerens rolle ved arbeid med problemløsningsoppgaver er ikke å undervise i en forhåndsdefinert læreplan, men heller å legge til rette for læring ved å støtte, veilede og overvåke læringen av ny kunnskap ved å bringe inn læreplanen "på forespørsel". Bruken av problemløsningsoppgaver i undervisningen representerer dermed et skifte i den tradisjonelle pedagogikken, fra en veiledersentrert til en studentsentrert tilnærming. Metodene og konseptene denne undervisningen skiller seg fra tradisjonell klasserombasert undervisning, og er mer i tråd med case-basert undervisning i profesjonsutdanning og arbeidsplasser (Schmidt, Rotgans & Yew, 2011).

2.3.3 Strategier i problemløsning

Siden det er flere ulike måter å løse et problem, er det viktig å ha kjennskap til forskjellige problemløsningsstrategier. I tillegg til å kjenne til problemstrategiene, er det også viktig å vite hvordan og når man skal bruke disse strategiene. Problemløsning har en viktig rolle når det gjelder å gjøre, lære og undervise i matematikk (Avcu & Avcu, 2010). Elever utvikler en dypere forståelse av matematikk når de blir pålagt å slite, i positiv forstand, med viktige matematiske begreper. Kampen starter når en elevs forkunnskaper ikke er tilstrekkelige til å løse en gitt oppgave og ingen løsningsmetode er gitt. En produktiv kamp innebærer gjenfinning, rekonstruksjon, og kanskje korrigering av forkunnskaper, sammen med tolkning av oppgaven som står for hånden og konstruksjon av ny kunnskap i forhold til det som allerede er kjent (Olsson & Grønberg, 2018, s. 421)

Et mål med undervisning med problemløsningsoppgaver er å hjelpe studentene til å utvikle forståelse for relevante teoretiske perspektiver med utgangspunkt i en konkret situasjon eller case slik at de senere kan anvende kunnskapen i nye praktiske situasjoner. Problemløsningsoppgaver skal utformes slik at læring av grunnleggende kunnskaper fremmes og viser til hvordan fagkunnskap kan utøves i praksis (Hmelo-Silver, 2004).

2.3.4 Undersøkelseslandskaper

«Undersøkelseslandskap» er en term som først ble brukt av den danske matematikk-didaktikkeren Ole Skovmose. Han fortalte om en undervisningsform som er frodig og som frister til og inviterer til undersøkelse. En lærer prøver å stimulere elevene til undring og refleksjon gjennom spørsmål som hva, hvis og hvorfor det? Skovmose setter dette i kontrast til vanlig oppgaveløsning slik vi kjenner det fra tradisjonell matematikkundervisning. Her handler det om helt bestemte oppgaver som skal løses med helt bestemte metoder, og elevene skal få helt bestemte svar (Alseth & Røsseland, 2006, s. 99).

Undersøkelseslandskap er et læringsmiljø som er kjennetegnet ved at læreren og elevene har en spørrende og utforskende holdning. Fokus er på gode, utfordrende problemer og på løsningsprosessen. For læreren blir det vesentlige ikke at elevene løser en bestemt oppgave og roper ferdig, men å holde en kreativ åpen og konstruktiv prosess i gang. Læreren skal mobilisere elevenes forkunnskaper, slik at eleveneslik at de lettere skal se sammenhenger mellom fagstoffet og tidligere erfaringer. Slik kan relasjoner mellom ulike matematiske begreper dannes, og elevene blir i stand til å tenke selvstendig basert på innsikt og erkjennelse. Å bevege seg i et undersøkelses landskap krever at deltakerne bruker hjernen på en helt annen måte enn ved «bevisstløs» utfylling av oppstilte regnestykker, side opp og side ned i tradisjonelle lærebøker (Alseth & Røsseland, 2006, s. 99)

2.4 Modellering

2.4.1 Hva er modellering?

Björkquist (2003, s. 56) forklarer matematisk modellering som en prosess og «den mest fullstendige typen matematisk problemløsning». For å mestre dette er det viktig at elevene lærer seg flere ulike innfallsvinkler og strategier i møte med et matematisk problem. Blum og Ferri (2009, s. 45) definerer matematisk modellering som prosessen med å oversette mellom den virkelige verden og matematikk i begge retninger.

Blomhøj (2003) forklarer matematisk modellering som den prosessen som tar sted når man lager en matematisk modell for å beskrive og forutse forhold utenfor matematikken, og samtidig reflekterer over sammenhengen mellom de matematiske representasjonene og det de representerer fra virkeligheten (Blomhøj, 2003, s. 51). Han trekker frem hverdagslige eksempler som vi ofte ikke tenker over er matematiske, slik som husnummeret på et hus eller tallet på kølappen i butikken.

Matematiske modeller er mentale kart som viser relasjoner som hjelper oss å forstå og representere vår verden. Som sådan er de kraftige verktøy for å løse problemer. Selve modellene er konstruert. De kommer frem fra representasjoner av handlingen i situasjonen. Senere vil disse utvikle seg til representasjoner av situasjonen ved hjelp av kuber eller tegninger. Etter hvert utvikler modellering seg til en symbolsk representasjon av selve matematiseringen og blir et verktøy å tenke med. (Fosnot, 2010, s. 75)

Matematiske modelleringsoppgaver skal gjøre så elevene skaper og utvikler egne matematiske løsninger og ideer. Oppgavene er formulert slik at det er flere metoder og strategier som kan brukes for å løse oppgaven. Oppgaven kan også ha flere gyldige svar. På grunn av dette vil elever på forskjellige ferdighetsnivå løse oppgaven, uavhengig av hvilken kompetanse og hvilke forkunnskaper de besitter (Gilat & Amit, 2013). Hensikten med slike oppgaver er at elevene skal forstå de ulike anvendelsesområdene til modellering, og samtidig se sammenhenger mellom den virkelige verden og matematikken (Maass & Engeln, 2018).

Blomhøj (2006) presenterer tre nytteperspektiver av modellering i matematikken. Disse tre nytteperspektivene det samfunnsmessige, det undervisningsmessige, og det læringsmessige perspektivet.

Det samfunnsmessige perspektivet på modellering handler om å se hvilken nytte matematisk modellering har i samfunnet. Dette perspektivet deles videre i tre deler. Den første delen er at modellering er en integrert del av flere fagområder, slik som naturvitenskapelige, tekniske og økonomiske fagområder. Her er det verdifullt å kunne anvende matematikk på papiret, modellere, analysere og kritisere matematiske modeller. Den andre delen er at vi har matematiske modeller rundt oss hele tiden, og det er derfor viktig å kunne bruke og hente ut informasjon fra disse. Eksempler på slike modeller kan være forsikringer eller spareplaner. Tredje og siste delen innebærer at elever må ha kompetanse nok til å kunne ta samfunnsmessige beslutninger. Å kunne forstå og stille seg kritisk til modeller som blir presentert er et viktig grunnlag for å kunne delta i demokratiske prosesser.

Det undervisningsmessige perspektivet handler om å kunne anvende matematisk modellering for å begynne og beskrive matematikken på de ulike nivåene i utdanningsløpet. Et fravær av modelleringskompetanse kan gjøre det utfordrende for elevene å knytte matematikken til den virkelige verden og kan dermed ha vanskeligere for å se matematikkens nytteverdi. For å utvikle denne kompetansen er det nødvendig å arbeide med modelleringsprosesser.

Det læremessige perspektivet handler om at elevene må utvikle kompetanse i modellering slik at de kan anvende kompetansen i møte med matematikkfaget. Matematikk som fag er mer praktisk og betydningsfullt når en kan arbeide med matematisk modellering. Det forutsettes at elevene allerede har erfaring med modellering, før de selv skal få utforske og finne modelleringsmetoder (Blomhøj, 2006, ss.89-93).

Blomhøj (2003) forklarer hvorfor han mener matematisk modellering bør ha en sentral rolle i matematikkundervisningen. Arbeid med matematisk modellering i klasserommet gjør at elevene kan se nytteverdien av modelleringen og se hvordan modellering kan brukes som et redskap for å beskrive og forstå fenomener fra virkeligheten. Videre kan dette arbeidet også være med på å utvikle elevenes kritiske dømmekraft. Matematiske modeller blir ofte benyttet som grunnlag i teknologiske og administrative sammenhenger når beslutninger skal tas i samfunnet. Det er derfor viktig å forstå disse tabellene og kunne vurdere dem med et kritisk blikk (Blomhøj, 2003, ss.69-70).

2.4.2 Utfordringer ved modellering

Blum og Ferri (2009) erfarer at elever syntes modellering er vanskelig. De begrunner dette i at modellering krever kognitiv kompleksitet, nettopp fordi en modelleringsprosess krever at en bruker flere ferdigheter på samme tid. Eksempler på ferdigheter som anvendes ved modellering er å konstruere, lese, forenkle, kommunisere og validere (Blum & Ferri, 2009). I arbeid med modellering må elever selv finne og trekke ut informasjonen som er relevant for å løse problemet. Elevene må selv å lage en modell og analysere denne. De må forenkle denne informasjonen på en god måte slik at det kan brukes i en modell. Så må elevene evne å lage en modell og analysere denne. Blomhøj (2003) trekker også frem beregning, matematisering og validering som ferdigheter som brukes i en modelleringsprosess. Det understrekes at dette ikke er ferdigheter som elevene må inneha før de begynner med modelleringsarbeid, men at dette er ferdigheter som kan utvikles gjennom arbeid med matematisk modellering (Blomhøj, 2003, s. 52)

En modelleringsprosess er sammensatt og består av flere delprosesser. Galbraith og Stillman (2006) har i sin forskning funnet ut at *matematisering* er den delprosessen som elever syntes er mest utfordrende. Matematisering er når problemer fra virkeligheten skal knyttes til matematikken. Her må elever systematisere og generalisere, for å så formulere problemet med et matematisk språk (Galbraith & Stillman, 2006).

Jankvist og Niss (2019) har i sin studie trukket frem flere grunner til hvorfor elever syntes matematiseringen er den mest utfordrende delen av modelleringsprosessen. Den første grunnen som blir trukket frem er at elever ikke ser hvordan problemet kan knyttes til matematikken. En annen grunn er at elevene ikke vet hvilken matematikk som er relevant å bruke for å modellere det spesifikke problemet. Sist trekkes det frem at elever ikke tenker over hvilke konsekvenser det har å trekke ut gale opplysninger av problemet (Jankvist & Niss, 2019, s. 27).

2.5 Matematikk på papiret

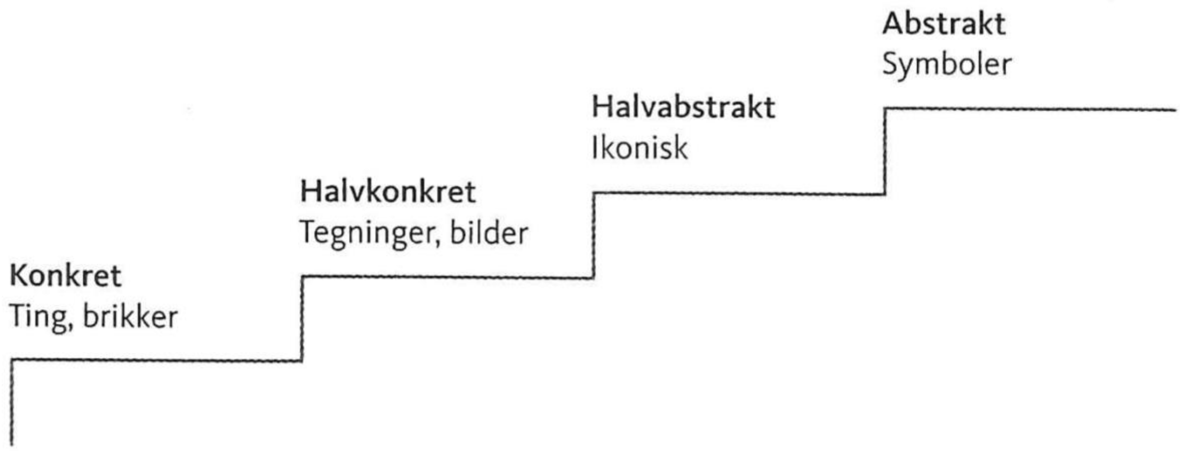
Lehrer, Schauble, Carpenter og Penner (2000) hevder at inskripsjoner som tabeller, tegninger, diagrammer og grafer gir mulighet for visualisering og eksternalisering av tenkning, kommunikasjon av planer og ideer, og sporing av argumenter og formodninger. Lehrer et al. (2000) hevder at elevenes bruk av inskripsjoner kan sees som styrende for utviklingen av deres problemløsningsprosess og tenkning, gjennom progressiv matematisering av ideer og argumenter laget ved hjelp av inskripsjoner. Matematiske konsepter, forsøk på representasjoner av disse konseptene gjennom inskripsjoner, og individuell og kollektiv tenkning er ofte nært forbundet. Dessuten argumenteres nødvendigheten av at elever produserer inskripsjoner selv for å løse problemer på en meningsfull måte. Derfor kan bruken av inskripsjoner være viktig for å bygge bro mellom en problemsituasjon og matematiseringen som trengs (Lehrer et al., 2000).

I rapporten «Med ARK&APP» er det sett nærmere på læreres bruk av papirbaserte og digitale læremidler. Forskningen viser at fire av fem lærere i matematikk i hovedsak bruker papirbaserte læremidler. Under ti prosent av de spurte lærerne i grunnskolen rapporterer at de bruker de digitale læremidlene like mye som de papirbaserte. Tilnærmet ingen lærere har rapportert at de hovedsakelig bruker mest digitale læremidler i matematikk på femte til tiende trinn. Basert på undersøkelsene som ble gjort fremstår det at matematikkundervisningen i stor grad er monologisk helklasseundervisning, hvor det settes av mye tid til individuelt arbeid. Undervisningen og arbeid i faget gjøres i all hovedsak i papirbaserte læremidler og skrivebøker (Gilje, Ingulfsen, Dolonen, Furberg, Rasmussen, Kluge, Knain, Mørch, Naalsund & Skarpaas, 2016, s. 70).

Fernandes, Wammes og Meade (2018) har forsket på elevenes bruk av tegning som en del av undervisningen. De konkluderer med at det å tegne gjør at en husker ny læring bedre. Tegning forsterker og hjelper en med å huske det en har lært. Det er mer kraftfullt å tegne notater enn å bare skrive notater. Tallene fra undersøkelsen viser at personene som tegnet informasjonen hadde dobbelt så god evne til å gjenkalle det de hadde lært, sammenlignet med de som ikke tegnet. Tegning aktiverer flere områder i hjernen. Det tvinger personen til å prosessere informasjonen visuelt, motorisk og semantisk. Det gjør også at en får en bedre og dypere forståelse av læringsstoffet. Dette er fordi en må forholde seg mer aktivt til det en lærer, enn hvis en kun skriver av det noen andre har skrevet (Fernandes, Wammes & Meade, 2018). Det er dog viktig å skille mellom hva som er matematisk tegning og hva som er skribling.

2.5.1 Representasjoner og abstraksjonsnivå

Når elever begynner på skolen har de allerede mye erfaring med matematikk. De vet hvor mange is de har spist i helgen og at de er tre år eldre enn lillebroren sin. De vet også at hvis de har åtte kjeks og spiser tre av dem, så har de fem igjen. Denne matematikken er i liten grad basert på matematiske symboler. Skolens oppgave er derfor å hjelpe elevene med å utvikle en forståelse for matematiske symboler og begreper, samt hjelpe elevene med å uttrykke seg på ulike måter. Det endelige målet i matematikk er å kunne anvende de abstrakte matematiske symbolene. Elever vil på et tidlig stadium kunne gjenfortelle en praktisk eller dagligdags situasjon. Etter hvert som deres matematiske kompetanse og forståelse utvikler seg vil de kunne bruke representasjoner for de virkelige tingene. Videre vil de kunne erstatte disse representasjonene med abstrakte symboler. Holm (2002) sammenligner denne utviklingen med å gå opp en trapp med fire trinn. Disse fire trinnene beskriver i hvilken grad elever bruker konkreter eller abstrakte symboler som representasjon. Disse fire trinnene går fra konkret til halvkonkret, halvabstrakt og til slutt abstrakt (Alseth & Røsseland, 2006, ss.108-110).



Figur 1 - Hentet fra Alseth & Røsseland, 2006, s.110

På et konkret nivå vil elevene bruke konkreter som representasjon. Dette er fysiske objekter som de kan kjenne på og flytte på, slik som brikker, steiner eller pinner. På et halvkonkret nivå vil elevene arbeide med bilder av konkretene. Dette kan være fotografier, illustrasjoner eller bilder. Selv om dette fortsatt kan virke svært konkret, er det mer utfordrende for elevene å manipulere halvkonkreter enn det er å manipulere konkreter.

Det tar tid for en elev å bevege seg fra det konkrete til det abstrakte nivået, og tiden dette tar vil variere fra elev til elev. Elever vil derfor være på forskjellige nivåer. Alseth og Røsseland (2006) skriver at det er viktig å tilpasse til den enkelte elev når en skal arbeide med representasjoner. Dette gjelder spesielt i et undersøkelseslandskap. Noen elever er trygge på å arbeide med abstrakte fremstillinger, samtidig som andre elever ikke vil kunne klare å løse en slik oppgave. Det må legges til rette slik at elever kan bevege seg mellom disse abstraksjonsnivåene som Holm (2002) beskriver. Alseth og Røsseland (2006) bruker et eksempel hvor elever skal løse regnestykket 5+3. Ved bruk av konkreter kan en haug på fem klosser og en haug på tre klosser legges sammen til en stor haug. Da kan eleven telle seg frem til åtte klosser. Dersom eleven løser oppgaven med illustrasjoner av grupper på fem og tre klosser vil det ikke være like enkelt å legge dem sammen til en gruppe. På et halvabstrakt nivå anvender elevene stiliserte uttrykk og bruker ikke lenger bilder eller illustrasjoner. Eksempler på slike stiliserte uttrykk kan være tellestreker, prikker eller firkanter. Her vil det ikke være mulig å se hva hvert tegn står for, en ser kun hvilket kvantum dette objektet finnes. På det øverste abstrakte nivået finner vi de matematiske symbolene. At symbolet 5 står for fem av noe, kan en ikke forstå ved å studere symbolet. Dette er noe som må læres og som krever tid (Alseth & Røsseland, 2006, ss. 110-111)

De abstrakte matematiske symbolene ble utviklet for å effektivisere matematikken. Sifrene gjør det mer effektivt å løse problemer. Dersom en skal legge sammen store tall vil det være svært tungvint å gjøre dette med konkreter. Dersom en har god tallforståelse, vil det være svært enkelt å gjøre dette med tallsymboler. Målet i matematikken er å få elevene høyere opp i «trappen». Det er ikke ønskelig at de oppholder seg lengre enn nødvendig på det konkrete og det halvkonkrete nivået. Et kjennetegn ved gode problemløsere er at de er fleksible i bruken av uttrykksformer. Å kunne skifte mellom ulike uttrykksformer vil kunne hjelpe dem med å finne løsninger på problemer (Alseth & Røsseland, 2006, s. 111).

Matematikk er et svært abstrakt fag. Dersom en varierer bruken av ulike representasjoner vil dette legge til rette for at elever kan utvikle en dypere matematisk forståelse. Uten representasjoner vil arbeid med de fire regneartene være vanskelig å forstå. Som tidligere nevnt er det viktig å knytte matematikken til realistiske og praktiske eksempler. Derfor er matematikken rik på ulike typer representasjoner (Svingen, 2018). Representasjon sammen med kommunikasjon er et kjerneelement i matematikkens nye læreplan under Fagfornyelsen. Der står det at

«... representasjoner i matematikk er måter å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på. Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske. Kommunikasjon i matematikk handler om at elevene bruker matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer. Elevene må få mulighet til å bruke matematiske representasjoner i ulike sammenhenger gjennom egne erfaringer og matematiske samtaler. Elevene må få mulighet til å forklare og begrunne valg av representasjonsform. Elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner» (Kunnskapsdepartementet, 2019).

2.6 Sosiomatematiske normer i klasserommet

Alle klasser forholder seg til normer i klasserommet. Noen er kanskje uttalte og bevisste, mens normer som råder er ofte ikke uttalte. I et klasserom kan vi snakke om sosiale normer. Dette kan være hvilke regler som gjelder for hvordan en oppfører seg i klasserommet, og hva som kategoriseres som «greit eller ikke greit». Det kan også handle om hvordan elevene pleier å sitte i klasserommet eller hvem av elevene som pleier å rekke opp hånden. Disse normene gjelder i alle fag. Normer som gjelder spesielt for matematikkundervisningen kalles for sosiomatematiske normer. Det var Yackel og Cobb (1996) som først introduserte dette begrepet. For å eksemplifisere begrepet skriver de:

"… Normative understandings of what counts as mathematically different, mathematically sophisticated, mathematically efficient, and mathematically elegant in a classroom are sociomathematical norms. Similarly, what counts as an acceptable mathematical explanation and justification is a sociomathematical norm" (Yackel & Cobb, 1996, s. 461).

Disse normene kan for eksempel være hva som regnes som en god begrunnelse, eller hva som vurderes som en løsning på et problem. Kilhamn (2011) forklarer sosiomatematiske normer som regelmessigheter i klasseromsaktiviteter knyttet til matematiske problemstillinger. Alle normer er felles etablerte, dynamiske og spesifikke for en bestemt kombinasjon av elever og lærer, det vil si en bestemt klasseromspraksis. Derfor vil de sosiomatematiske normene variere fra klasserom til klasserom. Ofte er normer usynlige og implisitte inntil de endres eller brytes (Kilhamn, 2011, s. 127). Lærere kan i stor grad styre de sosiale og sosiomatematiske normene i klasserommet. En av lærerens oppgaver i klasserommet er å legge til rette for matematiske diskusjoner. Samtidig opptrer læreren som en deltaker som kan legitimere visse aspekter ved barnas matematiske aktivitet og implisitt sanksjonere andre. Elever oppfatter hva andre elever presenterer i klasserommet, i tillegg til hvordan læreren responderer på elevens fremlegg. På bakgrunn av dette vil elevene se hva som anses som bra eller mindre bra, og tilpasse seg etter dette (Yackel & Cobb, 1996, s. 466)

2.7 Digitale hjelpemidler i matematikkundervisningen

De siste årene har det blitt mer bruk av digitale hjelpemidler i skolen. Skoler har datamaskiner og læringsbrett. Noen skoler er nettbrett-skoler hvor alle elever får utdelt et nettbrett hver. Chan og Leung (2014) har forsket på forskjellen med å bruke digitale, dynamiske programvarer (eks. Geogebra) eller penn og papir i undervisning. I denne studien har de sett på eldre elevers arbeid med temaene funksjoner og geometri. Forskningen viser at elever som bruker dynamiske programvarer til å løse problemløsningsoppgaver, får et bedre læringsutbytte av arbeidet. Disse elevene presterer også bedre på tester i ettertid sammenlignet med elever som kun anvender penn og papir. Funnene fra studien viser at elevenes utvikling av konseptuell og prosessuell kunnskap om funksjoner og geometri forbedres gjennom arbeid med dynamiske programvarer. I programmer slik som Geogebra kan en funksjon defineres algebraisk og endres dynamisk. Elevene vil også øyeblikkelig kunne se sammenhenger mellom en funksjonslikning og en graf, og hvordan grafen endres dersom funksjonslikningen endres (Chan & Leung, 2014). Kombinasjonen av å se representasjoner av funksjoner, formler, grafer og tabeller, og sammenhengen mellom disse, vil hjelpe elevene med å utvikle en bedre og mer relasjonell forståelse av funksjoner (Coleman, Lima & Schools, 2015). Teknologien lager et interaktivt miljø hvor elevene kan utforske og engasjere seg i kreative resonnementer og problemløsning (Chan & Leung, 2014).

Siew, Geofrey og Lee (2016) har forsket på bruken av appen Dragonbox 12+ når yngre elever skal lære om algebra. Deres studie viser at dette arbeidet hjelper elevene med å utvikle en mer positiv holdning til læring av algebra. Appen hjelper elevene med å se nytteverdien av algebra i hverdagen og de blir tryggere på å lære algebra. Elever som arbeidet med DragonBox 12+ viste mer selvtillit i arbeidet med algebra sammenlignet med elever som lærte med konvensjonelle metoder. De mener videre at matematikklærere burde reflektere over egen praksis og bruke mer spillbaserte læringsverktøy i algebraundervisningen. De mener at å utvikle problemløsningsferdigheter og en positiv holdning til matematikken, kan være med på å øke prestasjoner i algebra på internasjonale kartleggingsundersøkelser som TIMSS (Siew et. al, 2016, ss. 75-76).

Vår verden endres raskt på grunn av digitale teknologier. De siste årene har det skjedd betydelige endringer på mange områder, både personlige og profesjonelle, og disse endringene kommer til å bli mer dyptgripende og komme til raskere i nær fremtid. Dette krever nye forslag og metoder for utdanningsmodeller og spesielt for opplæring av lærere. Derfor er det viktig at institusjonene som er ansvarlige for opplæring av lærere implementerer retningslinjer på ulike områder – både i grunnopplæring og etterutdanning – for å forbedre utviklingen av deres digitale kompetansenivåer (Rubio, Gassó & Engen, 2019, s. 3).

3. Metode

Målet for denne oppgaven har vært å undersøke hvordan elever på fjerde trinn bruker papiret når de løser en oppgave, og hvilke metoder de bruker når lærer ikke har lagt føringer. For å samle inn data til denne studien har jeg valgt en kvalitativ forskningsmetode. Sett i lys av problemstillingen/forskningsspørsmålene jeg har valgt, var det naturlig å velge en metode hvor elevsvarene stod i fokus og at elevene kunne utdype og begrunne svarene sine. Jeg valgte derfor å gjennomføre oppgavebaserte intervjuer. I dette kapittelet vil jeg begrunne og beskrive de valgene jeg har tatt, med formål om å styrke oppgavens reliabilitet og validitet. Jeg vil beskrive valget av metode, etiske hensyn, utvalget av informanter og hvordan jeg har analysert den innsamlede dataen. Videre vil jeg vurdere studiens kvalitet ved bruk av begrepene validitet og reliabilitet.

3.1 Valg av metode

Fordi jeg ønsket å se på hvordan elever tenker og systematiserer når de jobber med problemløsningsoppgaver, var det naturlig for meg å velge en kvalitativ metode, nærmere bestemt et oppgavebasert intervju. Fordelen med denne metoden er at jeg får et større innblikk i elevenes tankegang og fremgangsmåte, samt at jeg har muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål. For å sikre at jeg fikk svar på det jeg lurte på, valgte jeg heller å bruke tid med elevene og intervjue dem samtidig som de løste oppgaven. Alternativet kunne ha vært å dele ut oppgaven i en undervisningstime, men da kunne jeg risikert at elever ikke gjennomførte oppgaven og jeg kunne ha gått glipp av interessante observasjoner.

Den største forskjellen mellom kvalitative og kvantitative metoder er graden av fleksibilitet, hvor den kvantitative metoden er lite fleksibel. Det er dog mulig å kombinere disse to metodene, da det i noen forskningstilfeller kan være nødvendig og hensiktsmessig å innhente både kvantitative og kvalitative data. Kvalitative undersøkelser er mer fleksible da de åpner for mer spontanitet og tilpasninger underveis. Deltakeren vil ha muligheten til å svare utfyllende med egne ord, og den som intervjuer får muligheten til å avklare eventuelle uklarheter og stille oppfølgingsspørsmål (Christoffersen & Johannesen, 2012).

Det som kjennetegner kvalitativ forskning er at den blir gjennomført med få forskningsdeltakere. Målet er å få detaljert kunnskap om et gitt emne gjennom de utvalgte deltakerne. Et kvalitativt intervju sikter mot nyanserte beskrivelser av den intervjuedes livsverden. Innenfor de kvalitative forskningsmetodene er det observasjon og intervju som blir oftest blir benyttet. Ved å observere får en kun se hvordan elevene jobber, men en har ikke muligheten til å stille spørsmål om hvorfor de har gjort som de har gjort. Ved å kombinere observasjon og intervju vil en kunne få observert hva, hvor og hvordan, for å så kunne stille spørsmål som hvorfor. Da kan en få frem elevenes tanker og refleksjoner, og samtidig få hørt hva de legger til grunn og deres erfaringer (Kvale & Brinkmann, 2015).

Et oppgavebasert intervju er at informanter får utdelt en oppgave som de skal løse, etterfulgt av et intervju om løsningsprosessen. Denne formen for intervju kjennetegnes ved at informantene interagerer med både oppgaver og intervjueren, og egner seg godt for å få innsikt i hvordan elever begrunner løsningene sine. Hovedfokuset er ikke på riktige eller gale svar, men heller prosessen mot en løsning (Goldin, 2000). Goldin (1997) forklarer to formål ved oppgavebaserte intervjuer. Det første er å observere hvilken matematisk atferd elevene har i en kontekst som inneholder oppgaveløsning. Det andre formålet er å trekke slutninger fra observasjonene. Slik kan forskeren si noe om elevenes mulige meninger, kunnskapsstrukturer, kognitive prosesser, påvirkning eller endring av disse i løpet av intervjuet (Goldin, 1997, s. 40). Oppgavebaserte intervjuer kan være strukturert i ulik grad. Vi skiller mellom strukturerte, semistrukturerte eller åpne intervjuer. Et semistrukturert intervju tar utgangspunkt i en intervjuguide, hvor tema og spørsmål kan ha en varierende rekkefølge. Fleksibilitet er en fordel med å velge et semistrukturert intervju. Det gir mulighet for å tilpasse spørsmål underveis avhengig av hva respondenten forteller (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 79).

3.2 Forskningsetikk

3.2.1 Melding til NSD (Norsk Senter for Forskningsdata)

Da jeg bestemte meg for å gjennomføre kvalitativ forskning på elever, måtte jeg vurdere om jeg skulle søke NSD. Jeg valgte å legge til rette så jeg ikke måtte håndtere noen personopplysninger. Siden jeg var interessert i å se hva elevene produserte på papiret var det ikke nødvendig å ta lydopptak av intervjuene. Det ble tatt noen få notater underveis. Det var derfor mulig for meg å ivareta elevenes anonymitet både før, underveis og etter intervjuene. Dalland (2017) skriver at dersom det utelukkende er anonyme opplysninger som skal håndteres, er ikke prosjektet meldepliktig. Et anonymt datamateriale består av opplysninger som ikke på noe vis kan identifisere enkeltpersoner, hverken direkte, indirekte eller via koblingsnøkkel (Dalland, 2017, s. 237). Jeg så det ikke nødvendig å søke NSD da jeg verken behandlet noen personopplysninger, ikke samlet inn sensitiv informasjon om elevene, og dermed kunne ivareta elevenes anonymitet.

3.2.2 Innhenting av samtykke

Informert samtykke betyr at forskningsdeltagerne informeres om undersøkelsens overordnede formål og plan for gjennomføring, så vel som om mulige risikoer og fordeler ved å delta i forskningsprosjektet. Informert samtykke innebærer dessuten at man sikrer seg at de involverte deltar frivillig, og informerer dem om deres rett til når som helst å trekke seg ut av undersøkelsen (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 104). Da elevene er mindreårige og ikke kan samtykke til deltakelse på egenhånd, måtte jeg hente inn samtykke fra elevenes foresatte. Elevenes foresatte ble informert om prosjektet allerede på foreldremøte ved skolestart. Jeg forklarte prosjektets formål, tema og hva en eventuell deltakelse ville innebære. Jeg forklarte så at et mer detaljert informasjonsskriv ville bli sendt ut rundt juletider, sammen med en samtykkeerklæring. Dette skrivet og samtykkeerklæringen ble utformet sammen med skolens rektor. Elevene fikk med seg hver sin kopi hjem, og jeg fikk tilbake samtykkeerklæringer med signatur fra foresatte. Både informasjonsskrivet og samtykkeerklæringen ligger som vedlegg 1 og 2. Alle trinnets elever fikk mulighet til å delta, og jeg fikk inn samtykke fra totalt 54 elever.

3.2.3 Etiske hensyn ved forskning på egen arbeidsplass

Å forske på egen arbeidsplass gjør at det blir noen ekstra hensyn å ta. På NSD (2022) sine nettsider er det listet opp noen punkter en må være bevisst når en forsker på egen arbeidsplass. De blir oppsummert under fire overskrifter: frivillighet, dobbeltrolle, tilgang til opplysninger og taushetsplikt som forsker. Under punktet frivillighet skriver NSD at det kan være vanskelig å takke nei til å delta på et forskningsprosjekt dersom en har et forhold til forskeren. Her blir relasjonen elev/lærer trukket frem som eksempel. NSD understreker at rekrutteringen må gjennomføres på en måte som sikrer at deltakelsen er og oppleves som frivillig. Dette ble understreket i informasjonsskrivet jeg sendte ut. Videre ble det også presisert at forskningsprosjektet ikke ville påvirke elevenes forhold til meg som lærer, samt at de når som helst kunne trekke samtykket sitt uten at dette ville få noen konsekvenser.

Det er også viktig at jeg skiller mellom rollen min som lærer og som forsker. Det må også være tydelig for elevene hvilken rolle jeg er i. For å lage et tydelig skille på dette, gjorde jeg ikke noe datainnhenting i klasserommet. Alle intervjuene ble gjort utenom klasserommet for å skille forskningssituasjonen fra vanlig undervisning. Jeg var også tydelig med elevene og presiserte at grunnen til at de blir tatt ut av klasserommet er fordi de skal være med på forskningsprosjektet mitt.

Som tredje punkt trekker NSD frem presiseringen at selv om jeg har tilgang til informasjon om informantene, betyr ikke at jeg får lov til å bruke disse i prosjektet mitt uten at jeg har fått samtykke til det. Jeg la derfor til et punkt på samtykkeerklæringen hvor jeg spurte om «barnets kontaktlærer kan formidle informasjon om barnets resultater i matematikk». Dette fordi det kan være interessant å knytte funn fra datainnsamlingen til hvordan elevene tidligere har prestert i matematikk. NSDs siste punkt handler om at funn og resultater fra forskningen, ikke skal tas med tilbake til skolen og elev/lærer-samarbeidet. Taushetsplikten min som forsker gjelder på lik linje som taushetsplikten min som lærer, og det er viktig å skille skole fra forskning.

3.3 Forskning på egne elever

Det er helt klart at min rolle som intervjuer har innvirkning på intervjuene. Spørsmålet er da om i hvilken grad det blir påvirket, og om det har noe å si for resultatene i forskningen. Som nevnt jobber jeg som fag- og forsterketlærer på elevenes trinn. De kjenner meg godt og jeg kjenner dem. Jeg er ikke faglærer i matematikk, men har hatt mye matematikkundervisning med dem på høstsemesteret. Det som kan være en utfordring ved disse forskningsintervjuene, er at det er et ujevnt maktforhold mellom intervjueren og intervjuobjektet. Det er intervjueren som sitter i førersetet og definerer situasjonen. Intervjuet skjer i min interesse og mitt formål er å få svar og respons fra elevene som egner seg til å brukes i prosjektet. For å få god og riktig data er det viktig at jeg som intervjuer i minst mulig grad påvirker intervjuobjektet. Det er jeg som forsker som skal tolke informantens svar og som har muligheten til å frem informasjon uten at informanten nødvendigvis vet hva jeg ser etter (Kvale & Brinkmann, 2015). Gjennom arbeidet med denne masteroppgaven har jeg vært bevisst min rolle som forsker og i stor grad prøvd å legge til rette for en så nøytral gjennomføring som mulig. Både i forkant, underveis og i ettertid av intervjuene har jeg vært bevisst på hvordan jeg som elevenes lærer vil påvirke deres opplevelse av situasjonen, samt hvordan de oppfører seg og svarer på spørsmålene mine.

3.4 Beskrivelse av utvalg

Til tross for at jeg hadde samtykker fra elever i alle tre klassene på trinnet, valgte jeg kun å intervjue elever fra samme klasse. Dette fordi jeg vet det at klassene ikke følger nøyaktig samme undervisningsplan og dette ville gitt et ikke korrekt sammenligningsgrunnlag. Jeg valgte å intervjue elevene i den klassen som jeg kjenner best og hvor jeg underviser mest. I denne klassen har jeg også hatt matematikkundervisning hvor vi har arbeidet med problemløsningsoppgaver. I denne gruppen var det 21 elever som ville være med og som leverte samtykker. Johannesen, Tufte og Kristoffersen (2016) skriver at det ikke finnes noe fasit for hvor mange informanter en burde ha i kvalitative studier. Det som betyr noe, er at en har nok informanter slik at en får tilstrekkelig informasjon til å besvare problemstillingen.

Elevene som er intervjuet i denne studien er elever som jeg kjenner fra før. Til vanlig jobber jeg som fag- og ressurslærer på fjerde trinn. Etter litt frem og tilbake valgte jeg å intervjue mine egne elever. Hovedårsaken til at jeg valgte å intervjue mine egne elever var smittevern og praktiske årsaker. Da denne beslutningen skulle tas var det en ny nedstenging av samfunnet og jeg ble satt i kohort med elevene mine. På bakgrunn av dette ble mitt utvalg det som kalles et bekvemmelighetsutvalg (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 52). Det vil si at jeg har lagt til rette og valgt informanter slik at datainnhentingen ble enkel å gjennomføre. På denne måten sikret jeg at masterprosjektet på en trygg måte kunne gjennomføres, samt også tok høyde for at det kunne komme uforutsette restriksjoner eller lignende. I utgangspunktet hadde jeg sett for meg å intervjue elever på mellomtrinnet, men med noen få justeringer ble studien min tilpasset fjerde trinn.

3.5 Intervjuguide

Før jeg intervjuet elevene valgte jeg ikke å lage en detaljert intervjuguide. Dette var fordi jeg ikke ville være bundet av et skjema hvis en elev kom med et interessant resonnement. Jeg gikk inn i intervjuene med fire momenter jeg skulle legge merke til.

1. Løser eleven oppgaven på egenhånd?
2. Bruker eleven papiret for å løse oppgaven/systematisere?
3. Hva skriver eleven på papiret?
4. Abstraksjonsnivå

Da jeg valgte å gjennomføre oppgavebaserte intervjuer, fant jeg det mer naturlig å stille oppfølgingsspørsmål basert på hva elevene gjorde og hvordan de løste oppgaven. Det jeg valgte å gjøre var å finne ut hvilke spørsmål jeg skulle stille i de ulike situasjonene. Dersom en elev hadde problemer med å komme i gang skulle jeg spørre «hvilke ulike kombinasjoner kan vi ha for at et eple og en pære skal koste fem kroner?». Det jeg så i prøverunden var at de fleste elevene prøvde kombinasjonen to og tre kroner, og glemte at én og fire kroner også kunne være en kombinasjon. Hvis elevene hadde prøvd litt på egenhånd, men likevel stod fast, skulle jeg tipse dem om at det finnes en annen kombinasjon enn to og tre kroner.

Scenario	Spørsmål
Eleven klarer ikke å løse oppgaven på egenhånd	Hvilke kombinasjoner har vi som gjør at et eple og en pære til sammen koster fem kroner?
Hvis eleven står fast etter å ha prøvd gale verdier	Finnes det noen annen kombinasjon enn det du har prøvd?
Eleven løser oppgaven uten å bruke papiret	Hvordan kom du frem til svaret? Hvis du skulle vist meg på papiret hvordan du kom frem til svaret, hvordan ville du ha skrevet det da?
Eleven skriver svaret på oppgaven uten å vise hvordan hun/han kom frem til svaret	Hvis du skulle vist meg på papiret hvordan du kom frem til svaret, hvordan ville du ha skrevet det da?
Eleven løser oppgaven og viser fremgangsmåten på papiret	Hvorfor har du valgt å bruke denne metoden? Hvor har du lært denne metoden?

Figur 1 - Intevjuguide

Da jeg utformet intervjuguiden min, brukte jeg Goldins (1997) fem prinsipper for oppgavebaserte intervjuer. Det første prinsippet går ut på at oppgavene som gis skal være tilpasset til den som skal løse oppgavene. Disse oppgavene skal også ha en rik representasjonsstruktur og en åpen problemløsning. På denne måten vil det være rom for at elevene kan løse oppgaven på den måten som passer dem best, uten veiledning fra intervjueren. Det åpnes for spontanitet og kan gi verdifull informasjon for intervjueren. Goldins fjerde prinsipp er at intervjuguiden skal ha tydelige kriterier. Dette er for å bedre muligheten for repliserbarhet og generalisering. Det siste prinsippet handler om å gi elevene mulighet til å bruke ulike representasjonsformer. I disse intervjuene fikk elevene utdelt hvite ark, blyant og viskelær (Goldin, 1997, ss. 61-62).

3.6 Troverdighet

3.6.1 Validitet

Christoffersen & Johannesen (2012) forklarer begrepet validitet som studiets gyldighet. Kvale & Brinkmann (2015) definerer validitet som en uttalelses eller studies sannhet, riktighet og styrke. Det er et kvalitetskrav. Det er viktig å sørge for at tolkningen ikke blir et produkt av mine subjektive holdninger, men et produkt av forskningen som er gjort (Johannessen, Tufte & Christoffersen, 2016, s. 232). En valid slutning er korrekt utledet fra sine premisser. Et valid argument er et fornuftig velfundert, berettiget sterkt og overbevisende argument. Validitet i samfunnsvitenskapene dreier seg om hvorvidt en metode er egnet til å undersøke det den skal undersøke. I en bredere fortolkning har validitet å gjøre med i hvilken grad en metode understreker det den er ment til å undersøke. Med denne vide oppfatningen av validitet kan den kvalitative forskningen i prinsippet gi gyldig vitenskapelig kunnskap (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276). For å sikre forskningens validitet valgte jeg ikke å intervjue elever på tvers av klassene. Dette fordi jeg vet hvor store forskjeller det kan være mellom klasserommene, spesielt med tanke på faktisk undervisning og de sosiomatematiske normene som er til stede. På bakgrunn av dette valgte jeg å kun intervjue elever som går i samme klasse, og som derfor har fått lik undervisning og som forholder seg til de samme normene i klasserommet. Jeg har også intervjuet alle elevene fra den klassen som leverte samtykkeerklæring. Dette for å få et helhetlig bilde av hvordan klassen bruker papiret i matematikken, uavhengig av for eksempel kjønn, matematisk nivå eller andre grupperinger. Med så mange deltakere i studien har jeg også et bedre grunnlag for å komme med en konklusjon.

Som jeg har beskrevet tidligere i oppgaven så vil ikke denne forskningen fortelle om hvordan absolutt alle elever på fjerdetrinn bruker papiret når de løser problemløsningsoppgaver. Det den kan videreformidle er de observasjonene og erfaringene jeg har gjort meg i en utvalgt klasse. Funnene gjelder nok ikke alle fjerdeklasser, men tendensene kan nok kjennes igjen i andre klasserom.

3.6.2 Reliabilitet

Reliabilitet har å gjøre med forskningsresultatene som konsistens og troverdighet. Med andre ord handler det om i hvilken grad studiens data er pålitelige. Reliabilitet behandles ofte i sammenheng med spørsmålet om hvorvidt et resultat kan reproduseres på andre tidspunkter av andre forskere. Dette har å gjøre med om intervjupersonene ville endre sine svar i et intervju med en annen forsker. Intervjuerens reliabilitet ble spesielt diskutert i sammenheng med ledende spørsmål (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276). Cohen, Manion og Morrison (2018) mener reliabilitet handler om at det skal være en stor grad av nøyaktighet mellom innsamlede data og det som faktisk fant sted under datainnsamlingen. Selv om jeg gjennom å beskrive hvordan forskningen er planlagt og gjennomført oppnår transparens, er det ikke sikkert at en ny gjennomføring av intervjuene ville gitt de samme svarene. Det er en kvalitativ metode som er brukt så informantenes svar blir påvirket av situasjonen der og da.

Studien baserer seg på hva elevene produserer og de utsagnene de kommer med i den bestemte konteksten. Elevenes utsagn og handlinger under intervjuet er ikke reproduserbare, men det de produserte på papiret er konkrete data. For å styrke forskningens reliabilitet har jeg lagt ved elevbesvarelsene som vedlegg. Det er også svært sannsynlig at dataene fra de oppgavebaserte intervjuene er farget av at jeg har en relasjon til intervjuobjektene. I analysen av disse dataene legges mine personlige erfaringer og oppfatninger til grunn, som gjør at ingen vil tolke dataene på nøyaktig samme måte som jeg har gjort (Johannessen, Tufte & Christoffersen, 2016, s. 229). For å øke reliabiliteten har jeg forsøkt å forklare i detalj hvilke faktorer som har spilt inn på gjennomføringen, samt beskrevet mine fokusområder under intervjuene. Jeg har også forsøkt å forklare hvordan elevene har oppført seg, slik at det dannes et tydeligere bilde av situasjonen dataene er hentet fra.

3.7 Pilotintervju

Dalen (2011, s. 30) mener det er viktig å gjennomføre prøveintervjuer i kvalitative studier. Dette er for å teste intervjuguiden og oppdage eventuelle feil som må rettes opp, samtidig som en skal teste sin egen rolle som intervjuer. Å ha gjennomgått prøveintervjuer gjør også at det er lettere å løsrive seg fra intervjuguiden i de faktiske intervjuene (Tjora, 2017, s. 158). Goldin (1997) anbefaler også å gjennomføre pilotintervjuer når en skal bruke oppgavebasert intervju som metode.

For å sikre at intervjurunden ville gi riktige svar og tilstrekkelig med data, valgte jeg å gjennomføre en runde med prøveintervjuer. Jeg startet med å ta ut én og én elev fra klasserommet, og ga dem en oppgave de skulle løse. Oppgaven var som følger:

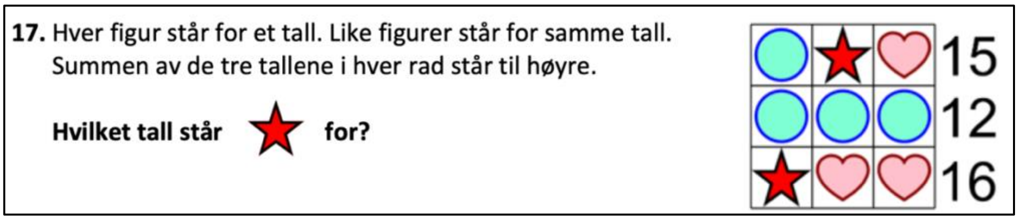
Oppgave 1

> Uansett hvilket tall du velger, vet jeg at svaret til slutt vil bli 4.
>
> Tenk på et tall mellom 1 og 10.
> Multipliser (gang) dette tallet med 2.
> Legg til 8.
> Divider (del) det du har nå på 2.
> Trekk fra tallet du tenkte på i starten.

Figur 2 - Oppgave 1

Jeg gjennomførte denne oppgaven med to elever, og innså raskt at dette ble for vanskelig for dem. De løste oppgaven greit, men da jeg spurte dem hvordan det var mulig at svaret alltid ble 4, stoppet det opp. Det var vanskelig å løse fordi en forklaring må være abstrakt og inneholde divisjon og multiplikasjon av en ukjent. Jeg valgte derfor å prøve en annen oppgave.

Oppgave 2



Figur 3 - Oppgave 2 (Matematikksenteret, 2019)

Oppgaven er hentet fra matematikksenterets kengurukonkurranse fra 2019 (Matematikksenteret, 2019). Denne oppgaven løste jeg også med to elever. Jeg valgte denne oppgaven fordi det ikke er nødvendig å bruke multiplikasjon eller divisjon, samt at den er støttet opp med figurer. Dette var et likningssett med tre ukjente og tre delstykker. I et av delstykkene må elevene forholde seg til alle tre ukjente samtidig. De to elevene jeg ga denne oppgaven til, syntes den var vanskelig å forstå og løse. Dermed ble elevens fokus noe annet enn det jeg hadde håpet, og jeg fikk ikke sett det jeg ønsket med tanke på forskningsspørsmålet.

Til slutt prøvde jeg med oppgave 3.

Oppgave 3

Figur 4 - Oppgave 3 (Matematikksenteret, 2019)

Denne oppgaven støttes med halvkonkreter. Dette likningssettet har også tre ukjente og tre delstykker, men her er det lavere tall. Det er også kun to og to ukjente i hvert delstykke. Denne oppgaven er hentet fra samme heftet som oppgave 2, altså matematikksenterets kengurukonkurranse fra 2019. Elevene jeg prøvde oppgaven på syntes den var fin og syntes den var ok å løse. Elevene løste oppgaven i hodet og kunne vise fremgangsmåten sin på papiret da jeg ba om det. Jeg valgte derfor å gå videre med denne oppgaven til de «ordentlige intervjuene». Alle oppgaver i heftet med kenguruoppgaver blir gitt med svaralternativer. På de mest utfordrende oppgavene vet jeg av erfaring at flere elever gjetter eller bruker elimineringsmetoder for å finne et svar. For å unngå dette valgte jeg å fjerne oppgavens svaralternativer før jeg presenterte oppgaven for elevene.

3.8 Gjennomføring oppgavebasert intervju

Det er en forutsetning for å lykkes med forskningsintervjuer at det skapes en avslappet stemning der informanten er komfortabel med å snakke åpent (Tjora, 2017, s. 118). Før jeg startet med intervjuene hadde jeg en prat med klassen i plenum om hva som ville skje når de ble tatt ut, med hensikt om å gjøre dem trygge og komfortable. Det var av praktiske årsaker naturlig å snakke med elevene i skoletiden. Elevene var i kjente omgivelser og var i «skolemodus» da jeg snakket med dem. Jeg tok ut én og én elev som ble med meg ut på et grupperom. Der hadde jeg rigget meg til og elevene kunne sette seg på en plass hvor jeg hadde lagt frem papir, blyant og viskelær.

Da jeg gjennomførte selve intervjuene begynte jeg med en kort, uformell samtale om hva som skulle skje. Jeg forklarte at de skulle få løse en oppgave de kanskje hadde løst før, og at hvis de trengte hjelp av meg til å løse den, så skulle de få det. Jeg forklarte at etter de hadde funnet svaret på oppgaven ville jeg stille dem noen spørsmål. Det ble presisert at de skal svare akkurat det de tenker, og at det ikke er noen riktige eller gale svar på spørsmålene mine. Jeg kommenterte bevisst ikke at det lå skrivesaker på bordet. Intervjuene varte fra 7 til 25 minutter, alt ettersom hvordan elevene løste oppgaven og hva de hadde å fortelle i ettertid. Da de første intervjuene var gjennomført ga jeg beskjed om at de ikke måtte si svarene til de andre elevene som ikke har vært inne ennå. Jeg forstod etter hvert at det ikke ville bli et problem, for denne oppgaven vekket et konkurranseinstinkt hos elevene, og de ville derfor ikke gi hverandre svarene.

Etter den uformelle samtalen om hva vi skulle gjøre fikk elevene oppgaven av meg og beskjed om å løse den. Imens elevene arbeidet med oppgaven, inntok jeg en observatørrolle. Jeg sa ingenting før elevene henvendte seg til meg. Noen av elevene kunne trenge et bekreftende nikk eller smil, og det fikk de. Goldin (2000) mener til at «gale» svar skal behandles på samme måte som «riktige» svar en viss tid, men at det etter hvert bør åpnes for at informanten kan rette opp feilene sine gjennom oppfølgings- eller retrospektive spørsmål. Han trekker også fram dilemmaet mellom å gi rom for den frie oppgaveløsningen og å ta hensyn til tidsbruk og fremdrift i intervjuet, som hele tiden må tas stilling til av intervjueren. Etter hvert intervju samlet jeg notatene mine og arket hvor elevene hadde løst oppgaven. På denne måten fikk jeg sikret dataene og tatt vare på dem, slik at jeg kunne ta dem opp igjen senere.

For å få oversikt over elevenes tendenser ved oppgaveløsning valgte jeg ut fire momenter som jeg ville se etter under intervjuet. Det første jeg ville se etter var om elevene klarte å løse oppgaven, altså komme frem til riktig svar uten noe hjelp fra meg. Dersom noen elever så på meg underveis for å få bekreftelse på at de var på rett vei, vil dette telle som hjelp. De elevene som løste oppgaven på egenhånd, fikk ikke så mye som et bekreftende blikk eller nikk fra meg før oppgaven var ferdig løst. Det andre momentet jeg så etter var om elevene brukte papiret til å løse oppgaven. Jeg ønsket å se om elevene brukte papiret til å regne ut oppgaven, holde styr på tall eller noe så enkelt som å overlevere svaret sitt. Elevene hadde skrivesaker og ark foran seg og jeg unngikk bevisst å nevne dette. Det var for å se hvilke vaner elevene har for å bruke papir for utregning. Alt fra å kladde og vise utregning til kun å skrive det endelige svaret på oppgaven vil regnes som å bruke papiret.

Elevene som ikke brukte papiret til å løse eller besvare oppgaven, ville bli oppfordret til å vise meg på papiret hvordan de kom frem til svaret. På denne måten ville jeg få alle til å bruke papiret. Det tredje momentet jeg så på, handlet derfor om hva elevene skrev på papiret. Her skilte jeg mellom tre ulike underkategorier: fremgangsmåte, utregning og svar. Med Holms (2002) fire abstraksjonsnivåer i bakhodet ønsket jeg å se i hvilken grad elevene brukte abstraksjon på papiret. Her har jeg delt i fire underkategorier: figur, ord, bokstav og ingen. Disse fire underkategoriene kan delvis knyttes til Holms fire abstraksjonsnivåer, uten at de kan knyttes sammen en-til-en.

Operasjonalisering av begreper i tabell		
Løste oppgaven	Selv	Eleven løser oppgaven helt på egenhånd uten hjelp fra meg. Å løse oppgaven definerer jeg som å komme frem til riktig svar.
	Med hjelp	Eleven løser ikke oppgaven på egenhånd og får bekreftelser eller hjelp fra meg underveis. Å løse oppgaven definerer jeg som å komme frem til riktig svar.
Brukte papiret selv	Ja	Eleven bruker papir og blyant til å løse oppgaven, eller avgi svaret sitt, uten at jeg har nevnt eller oppfordret til det.
	Nei	Eleven bruker ikke blyant og papir til å løse oppgaven. Eleven regner i hodet og gir besvarelsen sin verbalt.
Innhold på papiret	Fremgangs-måte	Eleven viser hvordan hun eller han kom frem til verdiene på frukten, samt hvordan de er addert sammen for å finne det endelige svaret.
	Utregning	Eleven kun skrevet verdien av de tre fruktene og viser hvordan de er addert sammen for å finne det endelige svaret.
	Svar	Eleven har kun skrevet det endelige svaret, uten å vise fremgangsmåte eller utregning.
Abstraksjons-nivå	Figur	Eleven har tegnet de ulike fruktene på papiret.
	Ord	Eleven har skrevet navnet på de ulike fruktene på papiret.
	Bokstav	Eleven har skrevet forbokstavene på de ulike fruktene på papiret.
	Ingen	Eleven har ikke skrevet om de ulike fruktene på papiret.

Figur 5 - Operasjonalisering av begreper i tabell

4. Resultater av datainnsamling

Elev	Løste oppgaven		Brukte papiret selv		Innhold på papiret			Abstraksjonsnivå			
	Selv	Med hjelp	Ja	Nei	Fremgangs-måte	Utregning	Svar	Figur	Ord	Bokstav	Ingen
A	1		1		1			1			
B		1		1	1			1			
C	1			1	1			1			
D		1	1		1					1	
E		1	1			1		1			
F	1		1		1				1		
G		1		1		1		1			
H		1	1		1			1			
I		1	1			1				1	
J	1			1		1			1		
K		1		1		1		1			
L	1			1		1		1			
M	1			1		1		1			
N	1			1		1		1			
O		1		1			1				1
P	1			1		1		1			
Q		1		1		1					1
R		1		1		1		1			
S		1	1			1					1
T		1		1		1					1
U		1		1		1				1	
Sum	8	13	7	14	6	14	1	12	2	3	4

Figur 6 - Oversikt over funn fra intervjuer

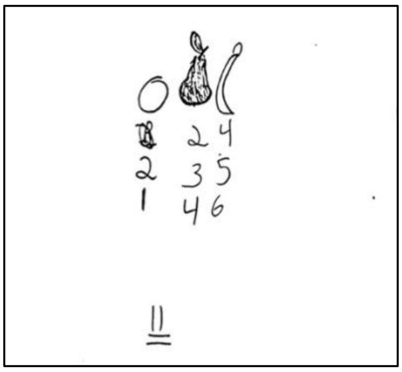
Som beskrevet i forrige kapittel har jeg kategorisert mine funn i en tabell. Dette for å få oversikt over hvilke tendenser elevgruppen har. Hver elev har sin egen kolonne hvor det er satt et 1-tall for å markere hvordan han eller hun gjorde det i de fire hovedkategoriene.

Av totalt 21 elever var det kun åtte av dem som kom frem til riktig svar uten hjelp eller støtte fra meg. Seks av disse åtte løste oppgaven i hodet uten å skrive på papiret. De to elevene som løste oppgaven på egenhånd og samtidig skrev på papiret var elev A og F. Begge brukte en systematisk metode for å komme frem til svaret, og viste fremgangsmåten sin skriftlig på papiret.

Det var kun syv elever som brukte skrev på papiret uten at jeg ba dem om det. Det vil si at 2/3 av elevene overhodet ikke skrev på papiret. Disse 14 regnet i hodet og ga svaret sitt og begrunnelser muntlig. Jeg ba disse fjorten elevene om å vise på papiret hvordan de hadde kommet frem til svaret. Da var det kun to av elevene som faktisk skrev fremgangsmåten sin på papiret. De tolv andre skrev kun verdien på fruktene og adderte dem sammen til et endelig svar.

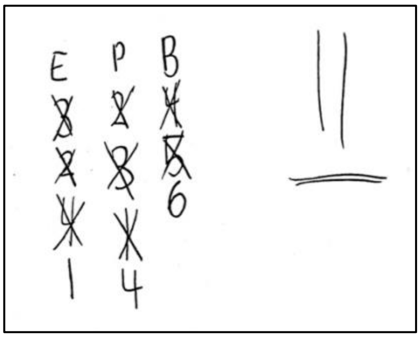
Seks elever skrev fremgangsmåten sin på papiret og hvilke ulike kombinasjoner de har prøvd ut før de kom frem til svaret. 14 elever viste enkel utregning av regnestykket. Én elev skrev kun det endelige svaret uten utregning. Av de seks elevene som viste fremgangsmåten sin, skrev fire stykker papiret på eget initiativ, og to skrev på papiret etter å ha blitt bedt om det. Jeg vil nå trekke frem noen elevsvar som jeg mener er interessante å se nærmere på. Jeg legger også ved alle elevsvarene som vedlegg. Jeg gir elevene navn ut fra hvilken bokstav de har i skjemaet.

4.1 Elever som viste fremgangsmåte på papiret uten oppfordring fra meg



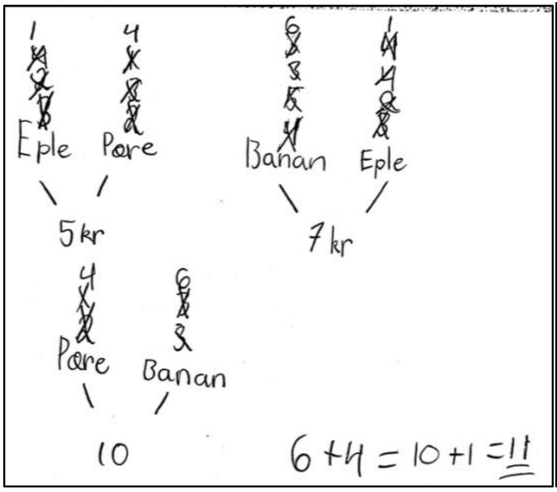
Figur 7 - Besvarelse A: Anna

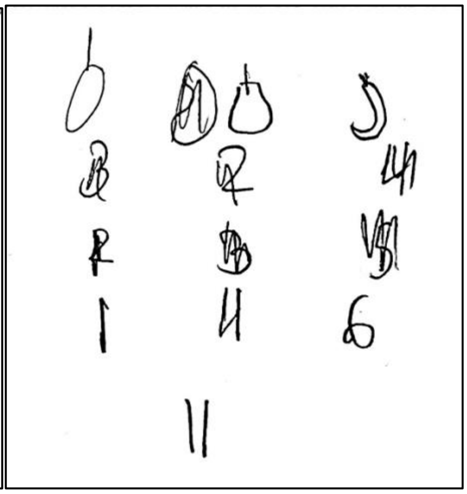
Anna uttrykker ofte glede over å jobbe med matematikk, spesielt med kenguruoppgaver. Tidligere har hun bedt om å få sitte inne i friminuttet for å arbeide videre med oppgavene. Hun er positivt innstilt og har god motivasjon for oppgaveløsing. Da vi startet intervjuet og jeg sa hun skulle få løse en kenguruoppgave, sa hun «jippi». Anna tok opp blyanten med en gang og begynte å løse oppgaven. Hun tegnet først de forskjellige fruktene, før hun begynte å teste ulike verdier. Hun løste oppgaven og kom frem til riktig svar uten noen form for hjelp fra meg. Da hun var ferdig, spurte jeg henne hvor hun har lært å løse oppgaver på denne måten. Hun forklarte at hun har en morfar som er glad i matematikk. De har gjort jobbet mye sammen i matematikk, og hun forklarer selv at de har løst algebra-oppgaver fra hun gikk i første klasse. På den måten har hun lært ulike måter å løse oppgaver på, samtidig som hun vet hvordan hun kan modellere dette på papiret. Hun forteller også at hun får god oppfølging og hjelp når hun gjør lekser hjemme.



Figur 8 - Besvarelse D: Dina

Dina er en elev som mestrer matematikk godt. Idet hun skal begynne å løse oppgaven plukker hun opp blyanten og skriver ned forbokstavene på fruktene. Her stopper det litt opp og hun trenger litt hjelp med å komme i gang. Jeg stilte henne spørsmålet «hvilke priser kan eplet og pæren ha hvis de skal koste fem kroner til sammen?». Da løsnet det og hun brukte papiret systematisk for å løse oppgaven. Dina fortalte at pappa ofte sitter med henne når hun gjør lekser i matematikk. Hun forteller at han bruker mye matematikk i jobben sin og derfor har lært henne flere gode måter å løse oppgaver på. Metoden hun har brukt for å løse denne oppgaven er en av metodene som pappa har lært henne.

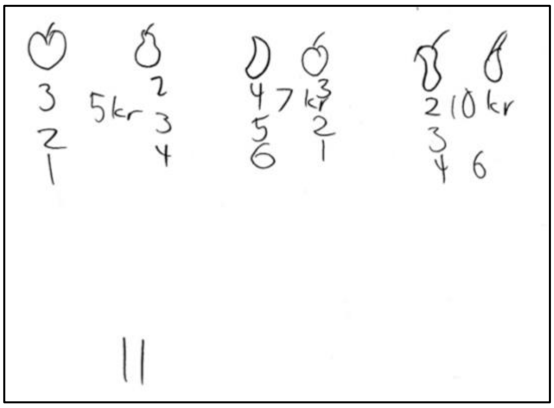




Figur 9 - Besvarelse F: Frida *Figur 10 - Besvarelse H: Helene*

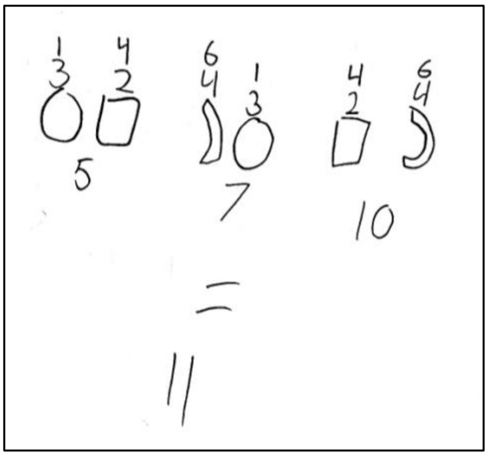
Frida og Helene er de to andre elevene som brukte papiret uten at jeg ba dem om det. Deres forklaringer er svært like Anna og Dina sine forklaringer. Alle fire jentene mestrer matematikk og uttrykker glede av matematikken. Metodene som Frida og Helene har benyttet er også noe de har lært hjemme i forbindelse med lekser i matematikk.

4.2 Elever som viste fremgangsmåte på papiret etter oppfordring fra meg



Figur 11 - Elev B: Bendik

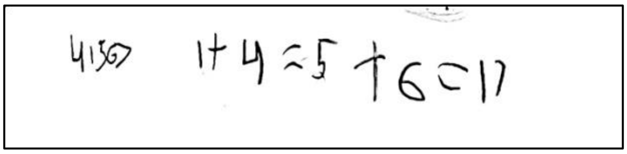
Bendik er også en elev med positiv innstilling til matematikkfaget. Han er både motivert for og trives med å løse matematikkoppgaver. Han uttrykker også glede når jeg forteller at han skal løse en kenguruoppgave. Med en gang han ser oppgaven, forteller han at han vet hvordan han kan løse denne oppgaven. Pappa har nemlig vist ham en metode for å løse oppgaver som dette. Problemet er bare at han ikke husker metoden. Han prøver lenge å løse oppgaven i hodet, uten hell. Han referer gjentatte ganger til denne metoden som han ikke husker. Jeg ser han blir frustrert over at han ikke husker metoden, og at dette distraherer ham. Når han prøver å løse oppgaven i hodet virker det som prosessen stopper opp fordi han glemmer verdiene underveis i prosessen. Jeg peker på papiret som ligger foran ham og sier at det kan være enklere å holde styr på verdiene hvis han skriver dem ned. Da løsner det og han kommer på metoden som han hadde lært av pappa. Han tegner fruktene slik de er stilt opp i oppgaven og skriver prisene som er gitt i oppgaven. Han tester ut ulike verdier og prøver seg frem helt til det går opp. Da noterer han seg riktig svar. Fra jeg tipset om å bruke papiret til han skrev endelig svar på oppgaven, fikk han ingen hjelp fra meg. Metoden hadde Bendik lært av pappa en dag de hadde gjort matematikkleksen sammen.



Figur 12 - Besvarelse C: Caroline

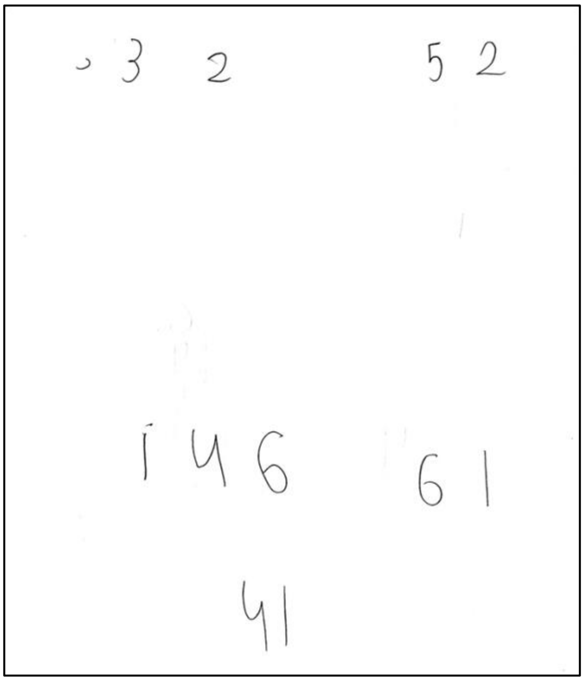
Caroline er den siste eleven som har vist fremgangsmåte på papiret. Hun mestrer matematikk godt og har stor glede av faget. Hun uttrykker støtt og stadig at hun vil jobbe med matematikk når hun blir stor. Hun er også begeistret for kenguruoppgaver og kan i likhet med Anna be om å få jobbe videre i friminuttene. Hun begynner å løse oppgavene i hodet og klarer å komme frem til riktig svar uten noe hjelp fra meg. Hun forteller meg svaret muntlig, og begrunner samtidig svaret sitt med å forklare fremgangsmåten. Jeg ber henne vise meg på papiret hvordan hun kom frem til svaret. Da forklarer hun meg det muntlig en gang til, og jeg må be henne om å vise på arket som ligger foran henne. Da begynner hun å skrive ned hvordan hun har løst oppgaven, samtidig som hun sier fremgangsmåten sin høyt for tredje gang. Hun inkluderer i den skriftlige besvarelsen hvilke ulike kombinasjoner hun har prøvd ut. Jeg spør henne hvor hun har lært denne metoden. Hun forteller slik som jentene før henne at pappa har lært henne den i forbindelse med matematikkleksene.

4.3 Andre observasjoner

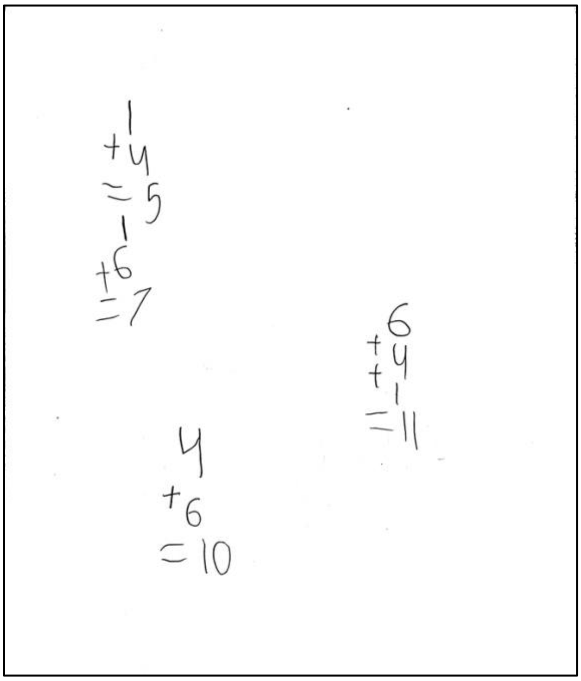


Figur 13 - Besvarelse T: Thomas

Dette er besvarelsen til Thomas. Han liker matematikk, men syntes det kan være vanskelig til tider. Da han fikk utdelt oppgaven gikk han rett for å løse den, men innså fort at dette ble vanskelig. Jeg hjalp ham derfor med å prøve ulike kombinasjoner for priser på frukten, for å se om det kunne gå opp til slutt. Det var fortsatt vanskelig for ham å regne det sammen, og det var da han kom med et sitat som jeg syntes var interessant. Som nevnt tidligere i oppgaven, så har elevene stort sett jobbet i læringspar når de har løst kenguruoppgaver. Den uken da Thomas ble intervjuet av meg, satt han i læringspar med en gutt jeg har valgt å kalle for Albert. Thomas sa til meg: «Jeg blir forvirret. Det er så vanskelig å huske så mange tall samtidig. Det var mye enklere å løse oppgavene med Albert, for da kunne han huske tallene også kunne jeg regne dem sammen.». Da spurte jeg: «har du noen hjelpemidler foran deg nå som kan hjelpe deg med å holde styr på tallene?». Da plukket han opp blyanten og skrev de tre tallene som er til venstre i besvarelsen hans. Da vi fortsatte å løse oppgaven brukte han ikke arket for å huske hvilke tall han hadde brukt. Til slutt kom vi frem til verdien til frukten, og jeg måtte minne ham på hva oppgaven faktisk spør etter. Han skriver derfor slik vi kan se i besvarelsen; han legger først sammen eplet og bananen som blir fem, før han videre legger til verdien til bananen. Da kommer han frem til at de tre fruktene til sammen vil koste elleve kroner. Rett etter han skrev ned besvarelsen sin sa han: «Jeg ser at jeg har brukt likhetstegnet feil, men du forstår hva jeg mener.».

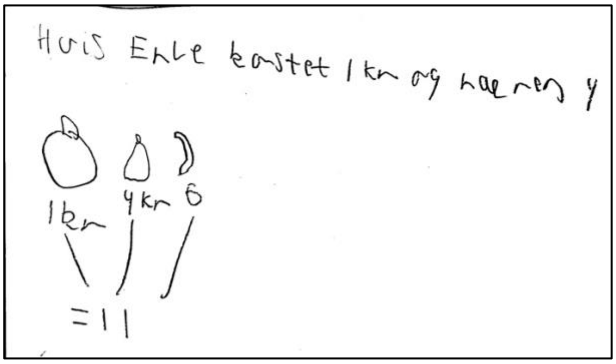


Figur 14 - Besvarelse S: Sander side 1



Figur 15 - Besvarelse S: Sander side 2

Sander trives med matematikk og er sterk i hoderegning. Da han fikk tildelt oppgaven forsøkte han først å løse oppgaven i hodet. Etter kort tid sa han høyt at «dette blir jo helt feil». Da plukket han opp blyanten. Sander var den eneste eleven som brukte papiret til å prøve seg frem med ulike verdier, uten tilsynelatende å ha en systematisert metode eller strategi. Det hele fremstod tilfeldig, og han skrev de ulike tallene rundt omkring på papiret. Han stoppet opp etter å ha prøvd ut tallene tre og to som verdier på eplet og pæren. Jeg tipset han om at det kunne være andre kombinasjoner enn tallene to og tre. Da løsnet det og han kom frem til riktig kombinasjon. Jeg ba han skrive på papiret slik han ville ha skrevet dersom dette var en prøve. Han brukte standardalgoritmen for addisjon og satte opp de ulike verdiene han hadde funnet. Han la så disse sammen slik illustrasjonen i oppgaven hadde vist. Til slutt spurte jeg han på hva oppgaven faktisk spør etter, og da la han sammen verdien på de tre fruktene.



Figur 16 - Besvarelse P: Petter

Petter liker matematikk og mestrer faget. Han får presentert oppgaven og begynner å regne i hodet. Han sier ingenting før han ser på meg og sier «13». Da spør jeg hvordan han kom frem til det, og han forklarer steg for steg hvordan han legger sammen tallene én, fire og seks. Idet han forklarer utregningen sin retter han opp sitt eget svar og sier at det blir elleve til sammen. Da ber jeg han se for seg at han skulle løst denne oppgaven på en prøve hvor han ikke får forklart muntlig hva han har tenkt. Jeg ber ham vise på papiret hvordan han har kommet frem til svaret sitt. Jeg ber han se for seg at en lærer som ikke er til stede, skal kunne se på arket hans og forstå hvordan han har tenkt. Det han gjør da er interessant. Petter begynner å forme setninger om hvordan han har gått frem. Jeg stopper ham og sier at i matematikk så tegner vi ofte når vi skal vise hva vi har tenkt. Det var uvant for ham og han spør om han kan tegne de ulike fruktene. Jeg svarer ja og da begynner han å tegne på papiret.

En siste, generell observasjon jeg gjorde meg var hvordan elevene forholdt seg til blyanten under intervjuet. Noen la ikke merke til papiret og blyanten som lå foran dem, mens andre elever brukte dem til å løse oppgaven. Dog var det vanligste å plukke opp blyanten i det de begynte å løse oppgaven, uten å faktisk bruke den til å skrive. Mange av elevene plukket den opp og fiklet med den imens de tenkte. Det virket som flere la merke til at det var en gjenstand der, uten å tenke over hvilket bruksområde denne gjenstanden hadde.

5. Analyse

5.1 Å forske på egen arbeidsplass

Det at jeg har forsket på egne elever har selvfølgelig påvirket forskningen. Samtidig er jeg sikker på at dataene jeg har samlet inn er gyldige. Goldin (1997) skriver at «sosial og psykologisk kontekst» påvirker intervjuet gjennom interne representasjoner som eleven har konstruert. Barnets forventninger i et intervju kan være påvirket av at det blir utført av en lærer som de kjenner fra før og at intervjuet foregår på skolen, og dermed kan bli antatt av barnet som en slags test som " teller" mot en evaluering. Barn tenker ofte, spesielt i begynnelsen, at oppgavene sannsynligvis har "riktige" og "gale" svar, og at visse metoder vil møte intervjuerens godkjenning, mens andre ikke vil. Det er derfor en mulighet for at eleven gir et svar som eleven tror intervjueren vil høre. Selve intervjuet kan finne sted i et øyeblikk når eleven er våken, trøtt, sulten, distrahert eller spent. Intervjuet kan også foregå på et tidspunkt hvor eleven foretrekker å være tilbake i sin vanlige klasse med venner, eller kan på den andre siden glede seg til et interessant avbrekk fra klasserommet (Goldin, 1997, s. 58)

Jeg mener det er flere fordeler ved at jeg har intervjuet mine egne elever. Elevene kjenner elevene meg godt. Vi har en relasjon og de er trygge på meg. Jeg erfarte at elevene hadde lett for å forklare meg hva de tenkte og at de var mer åpne. Jeg har også kunnskap om elevenes evner og vet i hvilken grad jeg kan utfordre dem. En annen fordel var at jeg kunne velge oppgaver som jeg visste elevene hadde et positivt forhold til. Å arbeide med «kenguruoppgaver» er populært i klasserommet, så da jeg forklarte under intervjuet at elevene skulle løse en kenguruoppgave ga flesteparten en positiv respons. Som Goldin (1997) sier så kan elevene svare det de tror jeg ønsker å høre. Jeg var ikke ute etter å høre elevenes meninger om en sak. Det jeg var interessert i å se var hvordan de løste en oppgave og hvordan de brukte papiret. Elevene visste ikke hvilke momenter jeg så etter under intervjuet og kunne derfor ikke gi svarene som jeg ville ha. Mitt fokus var ikke på hva elevene sa, men på hvordan de løste oppgaven og hvordan de forholdt seg til og brukte papiret.

5.2 Elevenes tidligere matematikkopplæring

For å få en bedre forståelse for dataene jeg har samlet inn og elevenes vaner, har jeg hatt uformelle samtaler med klassens tidligere kontaktlærer. Sara, som jeg har valgt å kalle henne, var elevens kontaktlærer fra første og ut tredje klasse. Jeg spurte henne om hvordan hun tidligere har arbeidet med matematikk i klassen. Alle elevene på skolen har fått utdelt hver sin iPad. Denne blir brukt i store deler av undervisningen, allerede fra første trinn. Hun presiserer at store deler av matematikkundervisningen er gjort på den tradisjonelle måten, hvor det er mye tavleundervisning og elevene arbeider i fysiske bøker. For å få et bedre inntrykk av hvordan elevene har arbeidet tidligere har jeg bladd i matematikkbøkene som de har brukt de første tre årene på skolen. Disse bøkene består stort sett av matematikkoppgaver hvor elevene skal fylle inn riktig verdi eller svar i et blankt felt. Det er lagt opp til at elevene skal regne i hodet.

Jeg spurte Sara hvilke erfaringer elevene har med å skrive i rutebøker. Hun bekreftet at elevene har arbeidet i rutebøker tidligere. Sara forklarte videre at når de har skrevet i rutebøkene sine, har hun gitt beskjed om hva og hvordan de skal skrive i bøkene. Dette er typisk hvis de har mengdetrening på en ny innlært algoritme, eller at noe skal kopieres fra en oppgave i matematikkboken. De har med andre ord lite eller ingen erfaring med å jobbe fritt på papiret. Elevene har ikke fått et blankt ark uten å ha fått føringer på hva som skal stå på papiret, og hvordan de skal skrive det. Når elevene får arbeide kreativt og utforskende på papiret bruker de hjernen på en helt annen måte enn når de kun fyller inn riktig svar i svarboksen (Alseth & Røsseland, 2006, s. 99).

Matematikkundervisningen som elevene har hatt i løpet av fjerde klasse har også i stor grad tatt utgangspunkt i digitale ressurser hvor elevene skal fylle inn riktig svar. Når de arbeider på iPaden er det sjeldent i kombinasjon med ruteboken. Den brukes slik som de er vant med, ved at de skal gjøre mengdetreningsoppgaver for å øve inn standardalgoritmer eller andre metoder. Nettressursene er interaktive og gjør at elevene for eksempel kan tegne symmetriske figurer eller hoppe på en tallinje. Dette er operasjoner som enkelt kan overføres til papiret, men dette har elevene lite erfaring med.

5.3 Elevenes erfaring med problemløsningsoppgaver

Det er viktig å presisere at disse intervjuene ble gjennomført i januar og februar 2022. Da hadde elevene gått et halvt år i fjerde klasse. Oppgaven som de løste er hentet fra et hefte laget av Matematikksenteret. Heftet er ment for å løses av elever på fjerde og femte trinn. Elevene i denne klassen har ikke hatt mye undervisning i problemløsning og har heller ikke fått noe systematisert opplæring i hvordan slike oppgaver kan løses.

Det skal sies at elevene har løst mange kenguruoppgaver gjennom høstsemesteret. Da har oppgavene vært tilgjengelige på deres iPad og elevene fikk løse oppgavene i sitt eget tempo. De ble satt i gang uten noe veiledning fra lærer og stod fritt til å velge hvilken metode de vil bruke. De har sittet i læringspar og har fått samarbeide dersom de har ønsket det. Om læringsparet har stått fast på en oppgave har de selvfølgelig hatt anledning til å be meg om hjelp. Hvis det var noen oppgaver som flere syntes var vanskelige, har jeg modellert og løst dem på tavlen i plenum. Det har ikke vært en vane for elevene å bruke papiret når de har jobbet med slike oppgaver tidligere. Stort sett så løser elevene oppgavene i hodet, og ringer rundt riktig svaralternativ. Alle oppgavene i heftet har fire svaralternativer som elevene skal velge mellom. Et fåtall av elevene har spurt om å få et ark til å regne på, men stort sett så blir oppgavene regnet i hodet eller med små notater rett på iPaden. De elevene som spør om ark, er de sterkeste elevene som har lært metoder som de kan bruke på arket. Som Lester (1996) skriver så er det vanskelig å undervise i problemløsning fordi løsningsprosessen er sammensatt. Av de fire hovedprinsippene han mener burde være til stede i undervisningen med problemløsing, mangler disse elevene kun ett av dem. Dette er det siste punktet som handler om at undervisningen må være strukturert og målrettet (Lester, 1996). Elevene har fått mye tid til å jobbe med problemløsningsoppgaver og har derfor fått mye mengdetrening. Læreren har også vært svært positiv til oppgavene og har presisert viktigheten av dem. Til tross for dette har undervisningen vært usystematisk og til tider tilfeldig.

5.4 Matematikk på papiret og modellering

Som datainnsamlingen min viser og som blir bekreftet av tidligere og nåværende lærer, så har ikke elevene for vane å bruke papiret når de løser matematikkoppgaver. Stort sett blir oppgaver løst med utfylling på skjerm eller med reproduksjon av lærerens metode på papir. Under intervjuene så ser vi at de elevene som bruker papiret for å regne ut selve oppgaven, er de elevene som har en innlært metode som de vet de kan benytte seg av. Disse elevene virker mer trygge og angriper oppgaven med mer selvtillit. De elevene som ikke har en innlært metode, må prøve seg frem for å finne riktig svar. Elevene har ingen erfaring med å bruke papiret på en utforskende og kreativ måte. Jeg har forståelse for at mange da ikke benytter seg av papiret i en situasjon hvor en må være kreativ og utforskende. Basert på observasjoner og lærernes uttalelser kan jeg se for meg at elevene knytter matematikk på papiret er forbeholdt innlærte metoder.

Når elevene tidlig lærer at det skal stå et siffer i hver rute i ruteboken, og at tallene skal stå rett under hverandre, forstår jeg at elever som Petter blir usikker når jeg sier at han kan tegne en pære på arket. På mange måter er matematikken innlært på med strenge føringer, som for eksempel at det skal kun være tall, matematiske symboler og rette streker på papiret. Det er tydelige regler for hvordan prosedyrer skal gjennomføres, noe som igjen da hemmer den kreative, utforskende og morsomme matematikken på papiret. Det er som Alseth og Røsseland (2006) forklarer om Skovmoses undersøkelseslandskap. Det er viktig at elevene får prøve seg frem og erfare matematikk, uten at læreren legger føringer for hvordan dette skal gjøres. På denne måten vil elevene gjøre seg interessante erfaringer som de vil lære av. De vil også bruke hjernen på en helt annen måte enn når en kun reproduserer hva læreren har forklart (Alseth & Røsseland, 2006, s. 99). Dette er viktig ferdighet å ha i møte med komplekse og kompliserte virkelighetsnære problemer, da matematiske problemer i det virkelig liv sjeldent kommer med forslag til løsningsmetode. Læreren bør oppmuntre elevene til å gjette, prøve seg frem, og resonnere på egenhånd i stedet for å vise dem hvordan de kan komme frem til en løsning eller et svar (Schoenfeld, 1992, s. 28).

Det er lett å forstå hvorfor noen elever ikke legger merke til papiret og skrivesakene som ligger foran dem under intervjuet. Når en ikke har som instinkt at en trenger papir for å løse en utfordrende matematikkoppgave, er det helt naturlig å ignorere det som et mulig hjelpemiddel. Flere av elevene jeg intervjuet plukket opp blyanten imens de løste oppgaven i hodet, uten å bruke blyanten til å skrive. Noen brukte den til å peke på skjermen. Slik jeg så det var det flere elever som registrerte at ark og skrivesaker var tilgjengelig, men at de ignorerte dem nettopp fordi de ikke visste hvordan de kunne bruke det. Ja, det er viktig å lære elevene gode hoderegningsstrategier og effektive måter å løse en oppgave på. Samtidig er det også viktig å skille ut de litt mer tidkrevende metodene som også er gode, typisk de metodene som gjøres på papiret. Som Fosnot (2010) skriver så er det ikke viktig at elevene løser oppgavene i hodet. Det viktigste er at de løser problemene <u>med</u> hodet! (Fosnot, 2010, s. 155). Elever som tegner det de har lært, har dobbelt så stor sjanse for å faktisk huske hva de har gjort (Fernandes et. al, 2018). Dette underbygges også av Olsson og Granberg (2018) som også viser at elever som bruker lenger tid på og går mer grundig inn i løsningsprosessen, har større sjanse for å huske metoden senere sammenlignet med de som løser ved hjelp av en effektiv, innlært algoritme (Olsson & Granberg, 2018, s. 432).

5.5 Å begrunne svarene sine

Når elevene har matematikk med meg er de vant til at de må forklare hvorfor de svarer som de gjør. Om de ikke gjør det, vet de at jeg stiller oppfølgingsspørsmål som «hvorfor det?» eller «hvordan kom du frem til det?». Flere av elevene som løste oppgavene på egenhånd, avga forklaring samtidig som de fortalte svaret sitt. Vi har altså etablert dette som en sosiomatematisk norm i klasserommet (Yackel & Cobb, 1996). De elevene som ikke forklarte fremgangsmåten sin på eget initiativ, fikk oppfølgingsspørsmål fra meg. Elevene ble bedt om å forklare hvordan de kom frem til svaret. De aller fleste elevene forklarte fremgangsmåten sin godt muntlig. Da jeg ba dem vise på papiret hvordan de hadde kommet frem til svaret, var det flere som nølte. Dette hadde de lite erfaring med, samt at dette ikke var noe de hadde lært på skolen. De har altså gode metoder for å forklare fremgangsmåten sin muntlig, men ikke god nok kompetanse til å formulere dette matematisk på papiret.

5.6 Innlært metode - som hjelp eller til hinder?

Som nevnt var det de elevene som allerede hadde en innlært metode som brukte papiret for å løse oppgaven. En kontrast til dette var Bendik som også hadde en innlært metode for hvordan han kunne løse oppgaver som dette. Problemet var bare at han ikke husket hvordan den var. Dette satte en stopper for Bendik og gjorde så han ikke klarte å konsentrere seg. Bendik har fått inntrykket at den metoden han hadde lært var den eneste måten han kunne løse oppgaven på. Han var også så opptatt av å huske denne metoden, at det var vanskelig å prøve seg frem med noe annet. Dette viser at Bendik hadde en instrumentell forståelse av hvordan oppgaven kunne løses, og samtidig manglet den relasjonelle forståelsen for å kunne bruke tidligere kunnskaper på en kreativ måte (Skemp, 2006).

Alle lærer på forskjellige måter og dette gjelder selvfølgelig også for elever. Realistiske kontekster fungerer for mange, men kan også være en barriere for andres læring (Boaler, 2003). Både høyt- og lavt presterende elever kan syntes det er utfordrende å arbeide med virkelighetsknyttede oppgaver. De svakeste elevene kan ha problemer med å skille ut den informasjonen som er relevant for oppgaven. De sterkeste elevene kan syntes det er utfordrende å løse en oppgave som ikke har en rask og åpenbar algoritmisk løsning (Kramarski et. al, 2002).

5.7 Oppfølging fra foresatte

Jeg har trukket frem besvarelsene til Anna, Frida, Helene, Dina, Bendik og Caroline. Disse seks elevene har levert det jeg mener er en svært god besvarelse, fordi de har vist både fremgangsmåte og utregning på papiret. Disse har til felles at de for det første har en positiv holdning til faget og er motivert for å lære. Noe annet de også har til felles er oppfølging hjemmefra. Da jeg spurte dem hvor de har lært disse metodene svarte alle seks at de har lært det av en voksen i familien som har hjulpet dem med leksene. Da de forklarte dette stilte jeg noen oppfølgingsspørsmål om personen som hadde lært dem dette. For å bevare anonymiteten går jeg ikke i detalj, men i korte trekk er dette mennesker som ser verdien av utdanning og ser viktigheten og bruksverdien av å ha en god og relasjonell matematisk forståelse. Elevene forklarte også hvordan de ser at de voksne bruker matematikk både på jobb og i hverdagen, som igjen er med på å knytte den teoretiske matematikken til den virkelige verden. Som nevnt tidligere, så vil en forståelse av matematikkens nytteverdi også være med å øke motivasjonen (Boaler, 2003). Dette mener jeg disse seks elevene er gode eksempler på.

6. Konklusjoner

For å øke elevers forståelse og kompetanse innen algebra er det viktig å sikre at elevene ikke bare har en instrumentell forståelse, men også en relasjonell forståelse av emnet (Skemp, 2006). Det er viktig at elever vet hvorfor en oppgave løses slik den gjør, i tillegg til at de må se nytteverdien av matematikken. En måte å gjøre dette på er å knytte regningen til virkelighetsnære situasjoner. På denne måten vil elevene få en forståelse for hvordan matematikken kan brukes i praksis, samt få et bedre bilde av matematikkens bruksverdi. Elever er stort sett umotivert fordi de ikke ser meningen av det de gjør (Naalsund, 2012). Dette underbygger Schoenfeld (1992, s. 27) som refererer til elever som ser liten sammenheng mellom matematikken de lærer på skolen og den virkelige verden. Han mener at noe av årsaken til dette er at matematikkundervisningen stort sett handler om å reprodusere det læreren har demonstrert, istedenfor å arbeide med virkelighetsnære problemer. Det er derfor et klokt grep å la elevene arbeide med problemløsningsoppgaver, for å øke deres forståelse og motivasjon.

Skovmose trekker frem viktigheten med at elever får leke seg med og være kreative med matematikken på papiret. De må få utforske og eksperimentere med tall, algoritmer og modellering (Alseth & Røsseland, 2006, s. 99). Samtidig er det viktig at vi gir elevene de verktøyene de trenger for å kunne gjøre nettopp dette. Elevene må eksponeres for ulike måter å bruke papiret på og ulike måter å komme frem til svar på. Det er ikke nok å gi dem én metode for å løse en bestemt type oppgaver, men gi dem mange så de kan finne ut hvilken metode som passer dem best. Siden det er flere ulike måter å løse et problem, er det viktig å ha kjennskap til forskjellige problemløsningsstrategier. I tillegg til å kjenne til problemstrategiene, er det også viktig å vite hvordan og når man skal bruke disse strategiene. Problemløsning har en viktig rolle når det gjelder å gjøre, lære og undervise i matematikk (Avcu & Avcu, 2010, s. 1284). Vi må gi elevene nok verktøy til å fylle verktøykassen sin med, slik at de kan løse et hvert problem de møter på. Fordi matematikk også blir mer sammensatt og abstrakt jo høyere en kommer opp i klassetrinn, desto viktigere er det å skape de gode vanene tidlig. Jeg mener det er viktig å ikke tenke at en skal løse en oppgave i hodet fordi det er det raskeste og mest effektive. En må også bruke tiden på å føre på papiret og steg for steg vise fremgangsmåten sin (Fosnot, 2010).

Oppgavens forskningsspørsmål er: (1) Hvordan bruker elevene penn og papiret når de løser problemløsningsoppgaver? og (2) Hva skriver elevene på papiret for å vise hvordan de har kommet frem til svaret på oppgaven? For å finne svar på forskningsspørsmålene jeg presenterte i innledningen har jeg gjennomført en rekke oppgavebaserte intervjuer for å så kartlegge en klasses vaner. Etter å ha analysert funnene vil jeg si at elever i liten grad bruker papiret når de løser problemløsingsoppgaver. Papiret blir stort sett brukt av de elevene som har lært en konkret fremgangsmåte for denne typen oppgaver. Elevene som ikke har en skriftlig innlært metode som kan brukes, velger ikke å bruke papiret og heller bruke hoderegning. Elevene bruker også papiret i liten grad for å vise hvordan de har kommet frem til et svar på oppgaven. Majoriteten av elevene skriver det avsluttende regnestykket for å vise hvordan de regnet frem det endelige svaret. Disse elevene viser ikke fremgangsmåten for hvordan de har funnet verdiene på de ulike fruktene.

Det er viktig å legge vekt på en tidlig algebraundervisning. Den vil øke elevenes forståelse av algebraiske konsepter som igjen vil tjene dem godt på senere tidspunkt når undervisningen blir mer aritmetikkbasert og matematikken blir mer abstrakt. En tidlig innsats for å øke elevers forståelse av algebra vil øke sannsynligheten for suksess i matematikk og spesielt i algebra når de kommer på de høyere klassetrinnene (Blanton et.al, 2015, s. 41). Det er viktig at elevene får mengdetrening i løsning av problemløsningsoppgaver og at de kan få være kreative og utforskende i løsningsprosessen. Læreren må støtte opp under elevenes prosess og hjelpe dem med ulike måter å formidle hva de har gjort og tenkt. Dette gjelder både muntlig og skriftlig.

Jeg vil avslutte med å trekke frem et poeng fra den sosiokulturelle pedagogen Lev Vygotsky. Han mente at all intellektuell utvikling og all tenking har utgangspunkt i sosial aktivitet. Han skrev videre at utvikling går fra en tilstand der eleven kan gjøre ting sammen med andre, til en tilstand der eleven kan gjøre ting alene (Imsen, 2015, s. 188). Vi må ikke glemme hvordan vi kan hjelpe hverandre til å bli bedre. Matematikk handler ikke bare om å komme frem til riktig svar. Når vi arbeider med matematikk må vi tenke, resonnere, generalisere, fundere, kritisere, forklare, argumentere, modellere, formulere, bevise, diskutere og samarbeide. Vi må jobbe sammen og snakke om faget, samt utfordre, motivere og lære av hverandre. Slik kan vi få en dypere og mer omfattende forståelse av hvordan ting henger sammen.

7. Refleksjon og videre forskning

Når jeg nå er ferdig med datainnhenting kan jeg se flere momenter ved forskningen som jeg ville ha gjort annerledes. Dersom jeg skulle ha gjennomført dette prosjektet på nytt ville jeg ha tatt lydopptak av intervjuene. Da jeg planla datainnhentingen antok jeg at det ville være tilstrekkelig å ta skriftlige notater under intervjuene. Dette fordi det jeg i hovedsak skulle se på var hva elevene selv skrev på papiret. Nå i ettertid skulle jeg ønske at jeg fikk muligheten til å høre igjennom intervjuene en ekstra gang. Da ville jeg fått muligheten til å plukke opp viktige momenter eller sitater som jeg hadde oversett i situasjonen.

En annen ting jeg har reflektert over, er at jeg kunne gjort observasjoner i klasserommet. Da ville jeg fått sett klassen og elevene fra et annet perspektiv, enn når jeg selv har undervisning. Dette kunne gitt meg informasjon og innblikk i klasserommets vaner og sosiomatematiske normer. Da jeg selv ofte er i klasserommet, er det dessverre enkelt å overse slike detaljer. Dersom jeg går inn i klasserommet med intensjon om å observere matematikkundervisningen, vil jeg automatisk ha et annet fokus enn vanlig og jeg vil mest sannsynlig observere situasjoner jeg ellers ville gått glipp av.

For å legge til en ekstra dimensjon på datainnhentingen, ville jeg ha gjennomført strukturerte intervjuer med elevenes tidligere og nåværende kontaktlærer. Dermed kunne jeg fått mer informasjon om elevenes arbeidsmåter og vaner i matematikk, samt få kunnskap om erfaringer som elevene har gjort seg tidligere. Da ville jeg i større grad kunnet sette meg inn i og forstå hvorfor elevene handler og arbeider slik de gjør.

Dersom jeg hadde gjennomført prosjektet med lydopptak av intervjuene, observasjoner i klasserommet og intervjuer med kontaktlærere, ville jeg hatt et bedre grunnlag for å trekke mine konklusjoner. Konklusjonene jeg har kommet frem til i denne oppgaven baserer seg i stor grad på mine subjektive erfaringer fra klasserommet og fra intervjuene. Dersom jeg hadde hatt mer konkret data å se tilbake på i tolkning- og analyseringsprosessen, kunne jeg gjort mer omfattende analyser, samtidig som dette ville økt forskningens og studiens reliabilitet.

Jeg er glad for at jeg valgte å intervjue mine egne elever. Jeg tror og mener at elevene ga mer oppriktige svar fordi vi kjente hverandre fra før. De vet at jeg vet hva de kan og at det ikke er noe farlig å være ærlig med meg hvis ting er vanskelig. Dette erfarte jeg under intervjuene. En annen fordel mener jeg er tiden som ble brukt. Sett at datainnhentingen måtte skje innen en viss tidsperiode, fikk jeg brukt denne tiden svært effektivt. Dette fordi elevene var lett tilgjengelig for meg og fordi vi ikke måtte bruke mye tid på introduksjon og at elevene skulle bli trygge på meg. Vi kunne gå «rett på sak». Derfor kunne jeg intervjue 21 elever jeg kjenner på samme tid som jeg hadde rukket å intervjue et færre antall fremmede elever.

Videre skal det bli spennende å se om elever presterer noe bedre på TIMSS-undersøkelsen nå etter to skoleår med ny læreplan. Fagfornyelsens kjerneelementer inkluderer utforsking, problemløsning, modellering, resonnering, abstraksjon og generalisering (UDIR, 2019). Dette er alle ferdigheter og prosesser som elever har bruk for i matematikken, spesielt i algebra og i arbeid med problemløsningsoppgaver. Jeg er nysgjerrig på hvordan elever presterer nå sammenlignet med tidligere, og om det er noen spesifikke områder i matematikken som skiller seg ut. De nye læreplanene legger mer vekt på elevenes ferdigheter, sammenlignet med læreplanene fra kunnskapsløftet, som i stor grad la vekt på detaljerte kompetansemål. Hvilken effekt dette har hatt på elevenes kompetanse og forståelse av matematikk gjenstår å se. Jeg både håper og tror at det har gått i riktig retning.

8. Referanseliste

Alseth, B., & Røsseland, M. (2006). Undersøkelseslandskap i matematikk. I Frislid, M., & Traavik, H., *Boka om GLSM - Grunnleggende lese-, skrive- og matematikkopplæring* (ss. 99-120). Oslo: Universitetsforlaget.

Avcu, S. & Avcu, R. (2010). Pre-service elementary mathematics teachers' use of strategies in mathematical problem solving. I *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, Volume 9, ss. 1282-1286.

Bergem, O. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O. Bergem, H. Kaarstein, & T. Nilsen, *Vi kan lykkes i realfag - Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (ss. 22-43). Oslo: Universitetsforlaget.

Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of contextualized1 tasks. I *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(2), ss. 367-390.

Björkquist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (ss. 51-57). Bergen: Fagbokforlaget.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J-S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. I *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), ss. 39–87.

Blomhøj, M. (2003) Modellering som undervisningsform. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (Red.) *Kan det virkelig passe? - Om matematikklæring.* (ss. 51-71). København: L&R Uddannelse.

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (Red.), *Kunne det tænkes? – om matemtiklæring*. Albertslund: Malling Beck.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? I: Sung Je Cho (red.), *The Proceedings of the 12th international congress on mathematical education. Intellectual and attitudinal challenges* (ss. 73–96).

Blum, W., & Ferri, R. B., (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? I *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), ss. 45-58.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice – the case of the «dance of agency». I N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (red.) *Proceedings of the 27th conference of the international group for the Psychology of mathematics*. Education (ss. 3–16). Honolulu, Hawaii: PME.

Branca, N. A. (1980). Problem solving as a goal, process, and basic skill. I S. Krulik (Red.), *Problem solving in school mathematics* (Vol. 1980, ss. 3-8). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Brizuela, B., & Schliemann, A. (2004). Ten-Year-Old Students Solving Linear Equations. I *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), ss. 33–40.

Chan, K. K., & Leung, S. W. (2014). Dynamic geometry software improves mathematical achievement: *Systematic review and meta-analysis. I Journal of Educational Computing Research*, 51(3), ss. 311–325.

Charles, R. I., Lester, F. K., & O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). London: Routledge.

Coleman, T., Lima, L., & Schools, B. C. P. (2015). Teaching the function concept in a technology-rich & common core-aligned classroom. I *The Banneker Banner, 29*(2), ss.18–41.

Dalen, M. (2011). *Intervju som forskningsmetode* (2. utgave). Oslo: Universitetsforlaget.

Dalland, O. (2017). *Metode og oppgaveskriving.* Oslo: Gyldendal.

Fernandes, M. A., Wammes, J. D., & Meade, M. E. (2018). The Surprisingly Powerful Influence of Drawing on Memory. I *Current Directions in Psychological Science*, *27*(5), ss. 302–308.

Fosnot, C. T., & Jacob, B. (2010). *Young mathematicians at work: constructing algebra*. Portsmouth, NH: Heinemann

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. I *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), ss. 143-162.

Gilat, T., & Amit, M. (2013). Exploring young students' creativity: the effect of model eliciting activities. I *PNA (Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática), 8*(2), ss. 51-59.

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J.A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., Knain, E., Mørch, A., Naalsund, M. & Skarpaas, K. G. (2016). *Med ark og app, Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer*. Oslo: Reprosentralen, Universitetet i Oslo.

Goldin, G. A. (1997). Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. I *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph* (ss. 40–62).

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-based Interviews in Mathematics Education Research. I A. E. Kelly & R. A. Lesh (Red.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Ss. 517-545.

Grønmo, L., Borge, I., & Onstad, T. (2013). Hvor står vi – hvor går vi? I L. Grønmo, & T. Onstad, *Opptur og nedtur - Analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige* (ss. 163-169). Oslo: Akademika Forlag.

Grønmo, L., Borge, I., & Rosén, M. (2013). Læringsmuligheter og prestasjoner i matematikk på 8. trinn. I L. Grønmo, & T. Onstad, *Opptur og nedtur - Analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige* (ss. 73-96). Oslo: Akademika Forlag.

Grønmo, L., Hole, A., & Stedøy, I. (2017). Prioritering og nedprioritering av fagområder i matematikk. I L. Grønmo, & A. Hole, *Prioritering og progresjon i skolematematikken* (ss. 79-94). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Hinna, K. R., Rinvold , R. A., & Gustavsen, T. (2012). *QED 1-7 - matematikk for grunnskolelærerutdanningen.* Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Hmelo-Silver, C.E. (2004). Problem-based learning: What and how do students learn? I *Educational Psychology Review*, *16*(3), ss. 235–266.

Holm, M. (2002). *Opplæring i matematikk – for elever med matematikkvansker og andre elever.* Oslo: Cappelen Akademisk Forlag.

Imsen, G. (2015). *Elevens verden (5.utg)*. Oslo: Universitetsforlaget.

Jankvist, U. T. & Niss, M. (2019). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. I *International Journal of mathematical education in science and technology*. 51(4), ss. 467-496

Johannessen, A., Tufte P. A. & Christoffersen, L. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utgave). Oslo: Abstrakt forlag.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*. 8, ss. 139-151.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers.* (PhD), Göteborg: Acta Universitas Gothenbourgensis.

Kramarski, B., Arami, M., & Mevarech, Z. R. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. I *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), ss. 225-250.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05.

Kunnskapsdepartementet. (2020). Intensiv matematikkundervisning kan gi mindre frafall. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/intensiv- matematikkundervisning-kan-gi-mindre-frafall/id2690088/

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utgave). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lee, H. S., & Anderson, J. R. (2013). Student learning: What has instruction got to do with it? I *Annual Review of Psychology*, 64, ss. 445–469.

Lehrer, R., Schauble, L., Carpenter, S., & Penner, D. (2000). The interrelated development of inscriptions and conceptual understanding. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), I *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (ss. 325-360). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I Ahlström, R., Bergius, B., Emmanuelson, G., Emmanuelson, L., Holmquist, M., Rystedt, E. & Wallby, K. (Red.), *Matematik - ett kommunikationsämne* (ss. 85-91). Göteborg: Nämnaren.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. I *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), ss. 255–276.

Matematikksenteret (2019). *Kengurukonkurransen 2019*. Hentet fra:

https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Kenguru/Ecolier%202019%20bokmål.pdf

Maass, K., & Engeln, K. (2018). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. I *ZDM* (50), ss. 273-285.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM Publications.

Norsk Senter for Forskningsdata, (2022). *Forske på egen arbeidsplass*. Hentet fra: https://www.nsd.no/personverntjenester/oppslagsverk-for-personvern-i-forskning/forske-pa-egen-arbeidsplass/

Naalsund, M. (2012). Why is algebra so difficult? *A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency*. Faculty of educational sciences, University of Oslo. Oslo.

Olsson, J., & Granberg, C. (2018) Dynamic Software, Task Solving With or Without Guidelines, and Learning Outcomes. I *Tech Know Learn* 24**,** ss. 419–436.

Rubio, J. C. C., Gassó, H. H., & Engen, B. (2019). Digital Competence for Teachers: Perspectives and foresights for a new school. I *Comunicar*. 61.

Schmidt H.G., Rotgans J.I., & Yew E.H. (2011). The process of problem-based learning: What works and why. I *Medical Education*, *45*(8), ss. 792-806.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 334-370). New York: MacMillan.

Siew, N.M., Geofrey, J., & Lee, B.N. (2016). Students' algebraic thinking and attitudes towards algebra: the effects of game-based learning using Dragonbox 12 + app. *I The Research Journal of Mathematics and Technology*, 5 (1), ss. 66-79.

Skemp, R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *I Mathematics Teaching in the Middle School*,12(2), ss. 88-95.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. I R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (ss. 1–22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

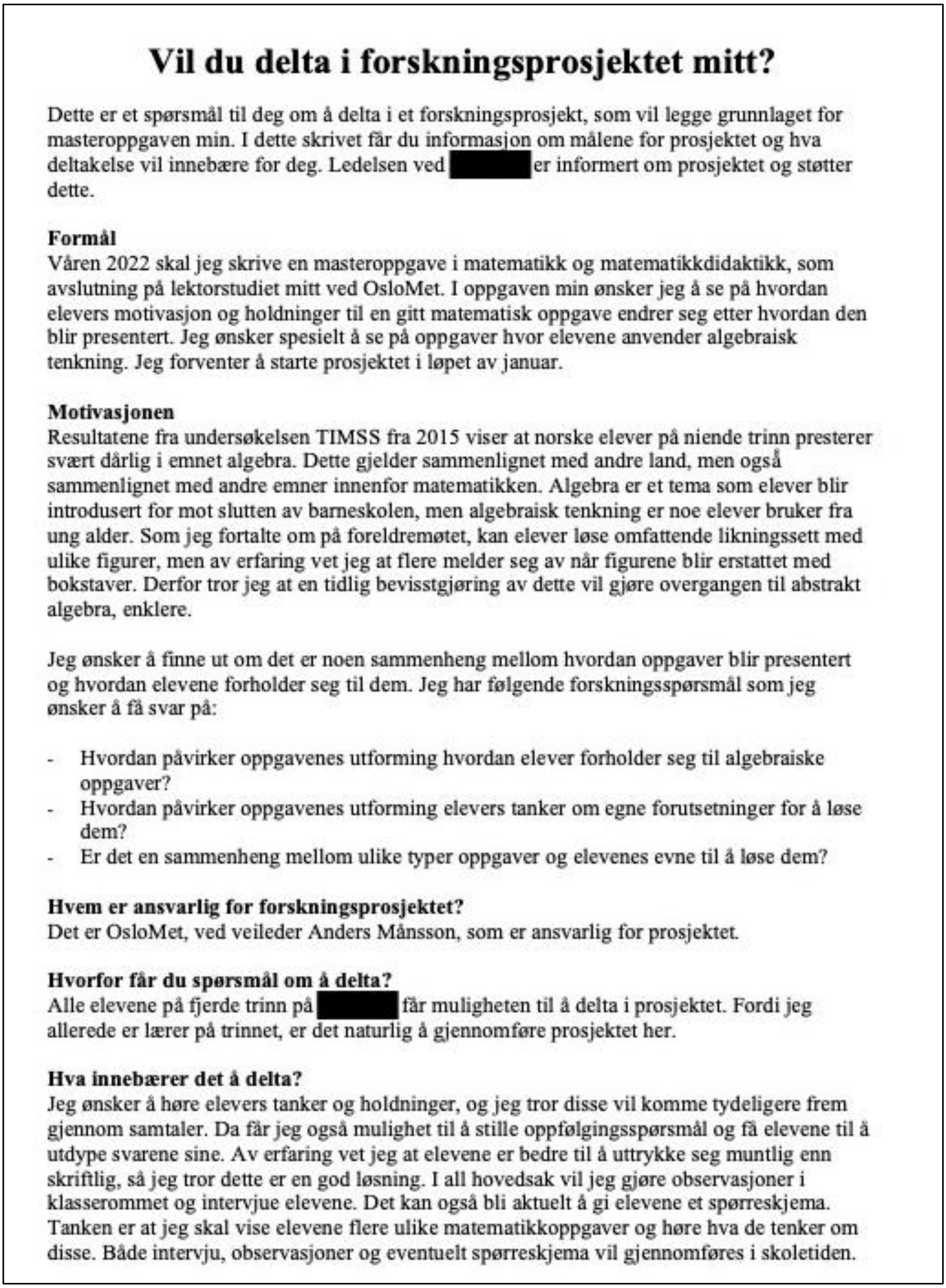
Svingen, O. E. L. (2018). *Representasjoner i matematikk*. Trondheim: NTNU Matematikksenteret. Hentet fra: https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P1_M4.Representasjoner%20i%20matematikk.pdf

Tjora, A. H. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Yakel, E., & Cobb, P. (1996). Sosiomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. I *Journal for Researchin Mathematics Education*. 27(4), ss. 458-477.

9. Vedlegg

9.1 Vedlegg 1: Informasjonsskriv



Vil du delta i forskningsprosjektet mitt?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt, som vil legge grunnlaget for masteroppgaven min. I dette skrivet får du informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg. Ledelsen ved [redacted] er informert om prosjektet og støtter dette.

Formål
Våren 2022 skal jeg skrive en masteroppgave i matematikk og matematikkdidaktikk, som avslutning på lektorstudiet mitt ved OsloMet. I oppgaven min ønsker jeg å se på hvordan elevers motivasjon og holdninger til en gitt matematisk oppgave endrer seg etter hvordan den blir presentert. Jeg ønsker spesielt å se på oppgaver hvor elevene anvender algebraisk tenkning. Jeg forventer å starte prosjektet i løpet av januar.

Motivasjonen
Resultatene fra undersøkelsen TIMSS fra 2015 viser at norske elever på niende trinn presterer svært dårlig i emnet algebra. Dette gjelder sammenlignet med andre land, men også sammenlignet med andre emner innenfor matematikken. Algebra er et tema som elever blir introdusert for mot slutten av barneskolen, men algebraisk tenkning er noe elever bruker fra ung alder. Som jeg fortalte om på foreldremøtet, kan elever løse omfattende likningssett med ulike figurer, men av erfaring vet jeg at flere melder seg av når figurene blir erstattet med bokstaver. Derfor tror jeg at en tidlig bevisstgjøring av dette vil gjøre overgangen til abstrakt algebra, enklere.

Jeg ønsker å finne ut om det er noen sammenheng mellom hvordan oppgaver blir presentert og hvordan elevene forholder seg til dem. Jeg har følgende forskningsspørsmål som jeg ønsker å få svar på:

- Hvordan påvirker oppgavenes utforming hvordan elever forholder seg til algebraiske oppgaver?
- Hvordan påvirker oppgavenes utforming elevers tanker om egne forutsetninger for å løse dem?
- Er det en sammenheng mellom ulike typer oppgaver og elevenes evne til å løse dem?

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Det er OsloMet, ved veileder Anders Månsson, som er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Alle elevene på fjerde trinn på [redacted] får muligheten til å delta i prosjektet. Fordi jeg allerede er lærer på trinnet, er det naturlig å gjennomføre prosjektet her.

Hva innebærer det å delta?
Jeg ønsker å høre elevers tanker og holdninger, og jeg tror disse vil komme tydeligere frem gjennom samtaler. Da får jeg også mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål og få elevene til å utdype svarene sine. Av erfaring vet jeg at elevene er bedre til å uttrykke seg muntlig enn skriftlig, så jeg tror dette er en god løsning. I all hovedsak vil jeg gjøre observasjoner i klasserommet og intervjue elevene. Det kan også bli aktuelt å gi elevene et spørreskjema. Tanken er at jeg skal vise elevene flere ulike matematikkoppgaver og høre hva de tenker om disse. Både intervju, observasjoner og eventuelt spørreskjema vil gjennomføres i skoletiden.

Under observasjoner og intervju kommer jeg kun til å ta skriftlige notater. Notatene vil være anonymisert og det er kun jeg som har tilgang til disse. Jeg kommer ikke til å notere navn eller annen informasjon som kan identifisere eleven. Ta kontakt dersom dere ønsker å se spørsmålene på forhånd. Det kan også bli aktuelt å se på hvordan eleven har gjort det i matematikk tidligere. Dette er informasjon som er viktig for meg å vite, slik at jeg kan tilrettelegge på best mulig måte.

Å være med på prosjektet vil ikke gå ut over den vanlige undervisningen. Elevene som deltar, vil derimot få ekstra oppfølging og veiledning i matematikken. Elever som ikke deltar, følger vanlig undervisning. En viktig presisering er at dette er et tilbud for alle, både de som mestrer godt, men også de som syntes matematikk kan være vanskelig. Jo bredere spekter av elever som er med, jo bedre er det for forskningen.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis dere velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for eleven hvis dere ikke vil delta eller senere velger å trekke samtykket. Dette vil ikke påvirke forholdet til lærere eller skolen.

Personvern
Jeg vil kun bruke opplysningene om elevene til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. For å sikre dette bruker jeg kun skriftlige notater hvor eleven er anonymisert. Det er kun jeg som vil ha tilgang til disse notatene. Jeg kommer ikke til å notere navn eller andre kontaktopplysninger. I selve masteroppgaven vil elevene også være anonymisert, og det vil ikke være mulig å identifisere dem.

Hva skjer med opplysningene dine når jeg avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres gjennom hele prosjektet. Når prosjektet avsluttes, noe som etter planen er i midten av mai 2022, vil notater og andre skriftlige dokumenter makuleres.

Dersom du har noen spørsmål om prosjektet, kan du ta kontakt med Sophie på sophie.thoresen@[redacted].no.

Med vennlig hilsen

Sophie Ugland Thoresen
Student

Anders Månsson
Prosjektansvarlig

9.2 Vedlegg 2: Samtykkeerklæring

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet, og har fått anledning til å stille spørsmål.

Jeg samtykker til at mitt barn, ______________________________________ (fyll inn navn), kan delta i forskningsprosjektet.

Jeg samtykker til at:

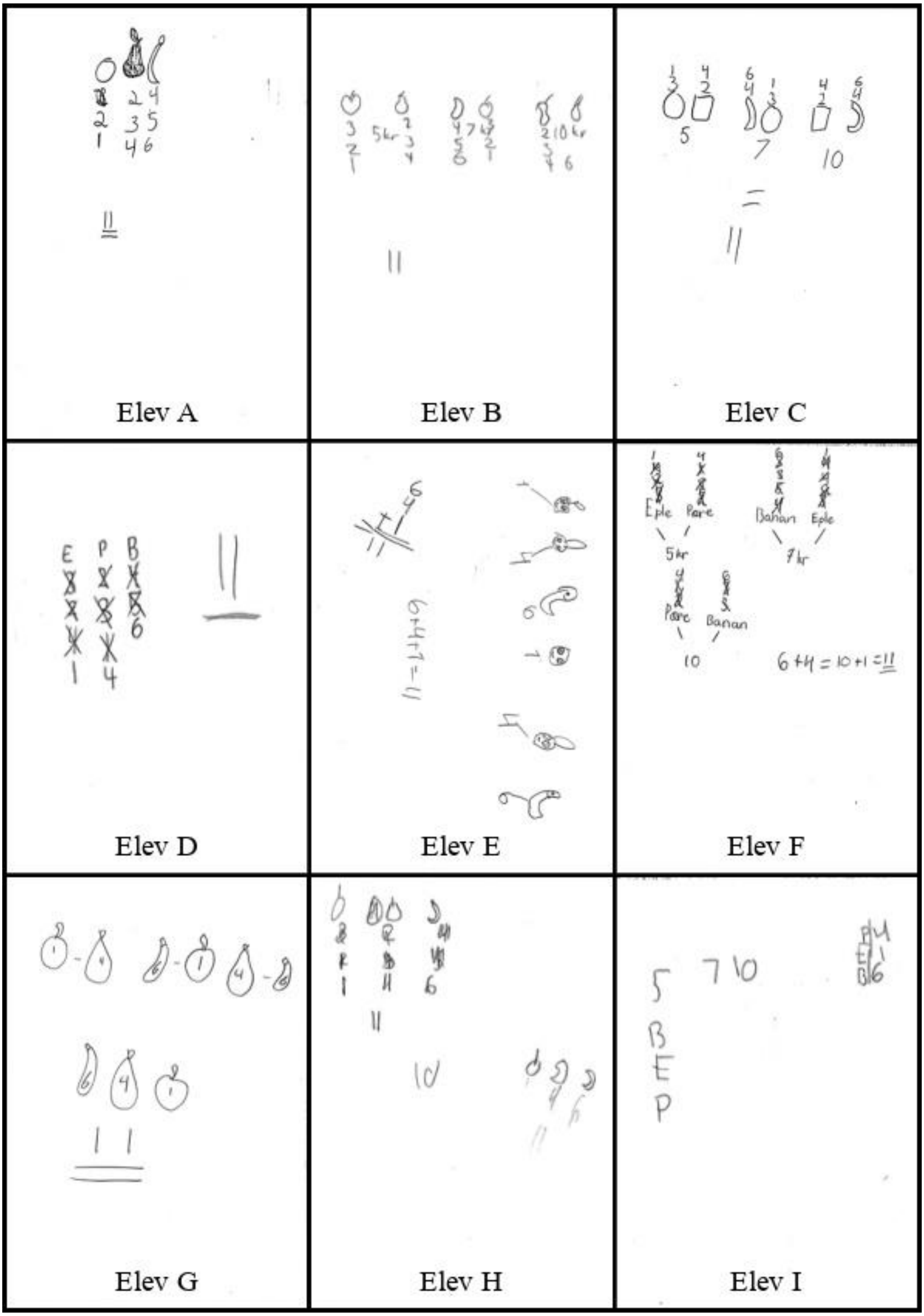
- ☐ barnet kan delta i intervju.
- ☐ barnet kan svare på spørreskjema.
- ☐ barnets kontaktlærer kan formidle informasjon om barnets resultater i matematikk.

Navn på foresatt: ____

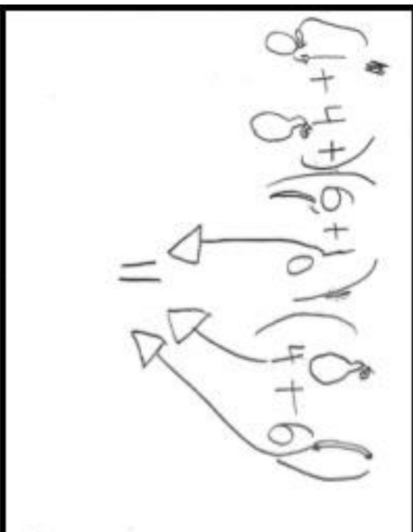
Dato og signatur foresatt:

____

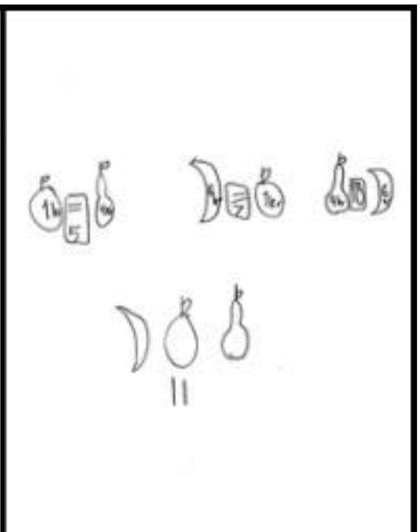
9.3 Vedlegg 3: Elevbesvarelser



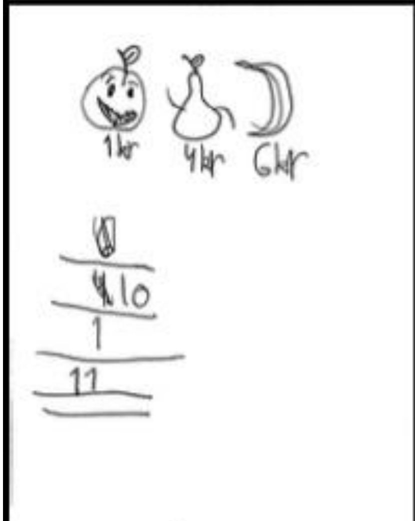
Elev J



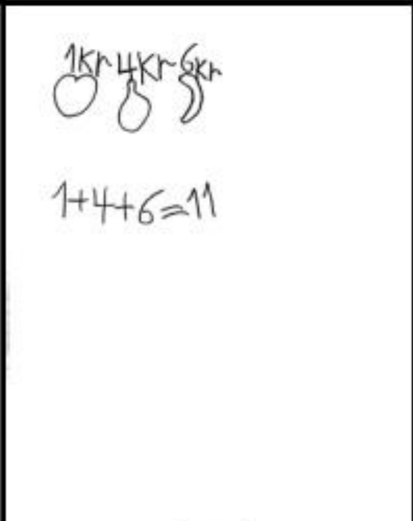
Elev K



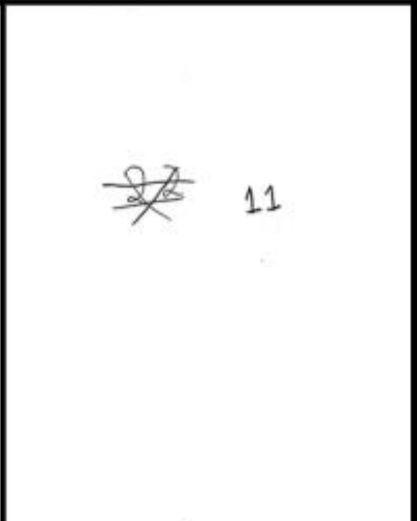
Elev L



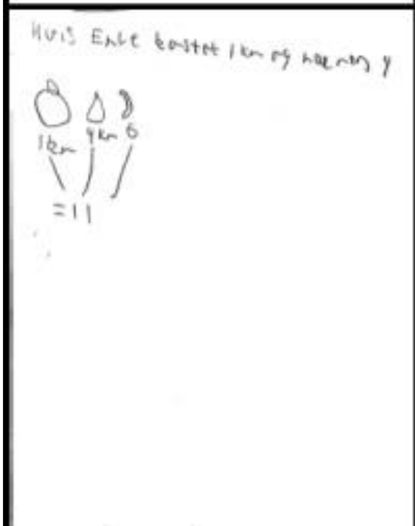
Elev M



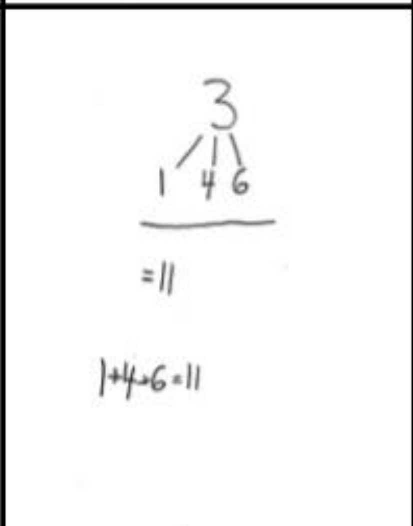
Elev N



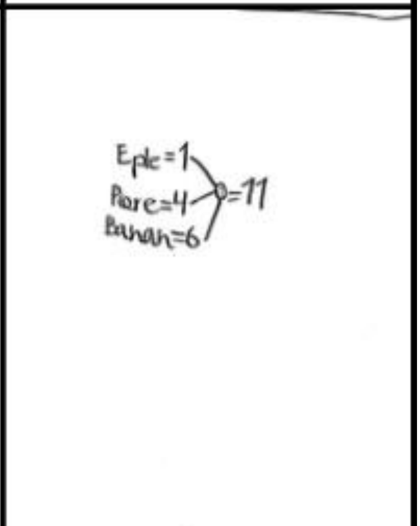
Elev O



Elev P

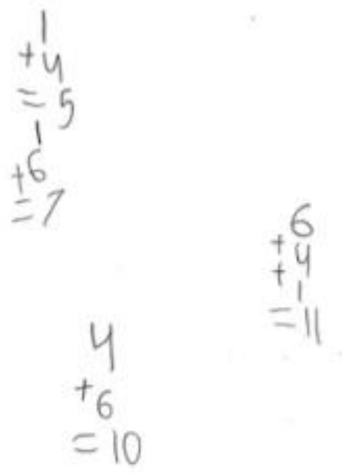


Elev Q

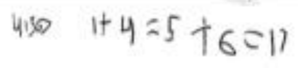


Elev R

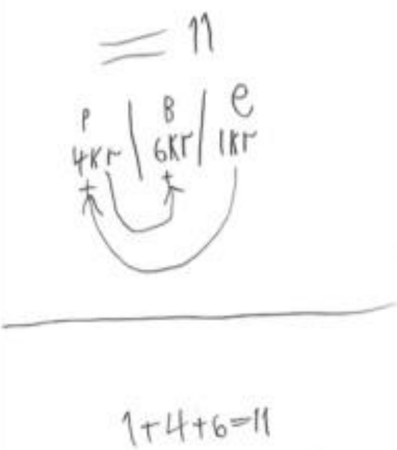
Elev S - s.1



Elev S - s.2



Elev T



Elev U