MASTEROPPGAVE

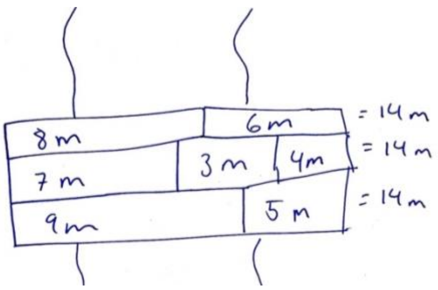
M1GLU17

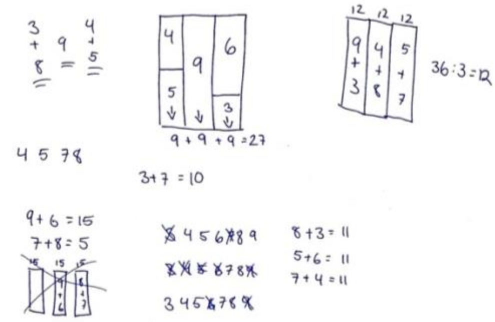
Mai 2022

Elevers argumentasjon i arbeid med matematisk bevis – argumentasjonsformer, årsaker og kjønn

Students Argumentations in Proving Activities in Mathematics – Modes of Argumentation, Reasons and Gender

30 stp. oppgave





Guro Hetty Askeland

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Utviklingen av regneferdigheter i matematikk handler om å analysere og løse et spekter av stadig mer komplekse problemer med effektive og hensiktsmessige begreper, symboler, metoder og strategier.

(Utdanningsdirektoratet, 2019b)

Sammendrag

Formålet med denne masteroppgaven er å undersøke hvordan elever beviser på barneskolen, med spesifikt fokus på elever på 5. trinn. Det er brukt en kvalitativ tilnærming med observasjon og elevtekstanalyse. Elever fra to klasser på 5. trinn har blitt observert i en undervisningsøkt der de har fått tildelt en bevisoppgave. Arbeidet de har gjort på ark har blitt samlet inn og analysert ut fra kategorier som samsvarer med Stylianides (2007) kriterier for bevis. Det teoretiske rammeverket i denne oppgaven baserer seg på teori om bevis, resonnering, kjønn i matematikken og ulike årsaker til at elevene beviser på den måten de gjør. Dette med særlig fokus på de sosiomatematiske normene i klasserommet og lærerens kunnskap om bevis. Studien vil også se nærmere på hvilke argumentasjonsformer elevene bruker, og forskjeller mellom jenter og gutter i arbeid med bevisoppgaver.

Resultatene fra studien samsvarer med tidligere forskning om at elever ofte argumenterer empirisk, og at elever virker mer overbevist om at svaret er riktig hvis de bruker representasjoner. Den understreker også hvor viktig læreren er i arbeid med bevis, og at kunnskapen læreren har om bevis er sentralt for å lære elevene å bevise. Det har ikke kommet fram noen særlige kjønnsforskjeller blant elevene i de to klassene i dette studiet.

Abstract

The purpose of this master thesis is to investigate how students prove in primary school. I have used a qualitative approach with observation and student text analysis. Students from two 5th grade classes have been observed in a mathematic lesson where they have been assigned a proving task. All their work has been collected and analyzed based on Stylianides (2007) criteria for proof. The theoretical framework in this thesis is based on theory of proof, reasoning, gender in mathematics, and various reasons why students prove in the way they do. This with special emphasis on the socio-mathematical norms in the classroom and the teacher's knowledge of proof. The study will also tap into what modes of argumentation students use and differences between girls and boys in working with proving tasks.

Results from this study corresponds with earlier research stating that students often make empirical arguments and that the students seems more convinced by the right answer when they use representations. It also emphasizes the importance of the teacher in working with proving tasks, and that the knowledge of proof that teachers have is important to be able to teach students to engage in proving tasks. This study does not contain evidence that suggests any prominent differences between the sexes in working with proof in the two classrooms.

Forord

Mitt femårig studieløp på lærerstudiet på OsloMet er nå ved veis ende. Jeg har blandede følelser knyttet til at jeg ikke lenger er student til høsten, men nå venter et nytt og spennende kapittel som lærer. Det blir godt å endelig få brukt den kunnskapen jeg har tilegnet meg gjennom studieløpet.

Det har vært en utfordrende prosess å skrive denne masteroppgaven, og jeg ville ikke klart det uten god hjelp fra veileder, Ellen Konstanse Hovik. Takk for at du alltid har vært tilgjengelig og gitt gode konstruktive tilbakemeldinger. Jeg vil også takke medstudenter som har gjort prosessen hyggeligere med lange lunsjpauser og gode samtaler, mine venner utenom studiet, Ina og Hannah, som har hjulpet meg med korrekturlesing og spørsmål, familien min som har støttet meg og holdt meg med selskap mens jeg har skrevet, og elevene og lærerne i de to klassene jeg observerte. Jeg hadde ikke klart det uten dere.

OsloMet – storbyuniversitetet, mai, 2022

Guro Hetty Askeland

Innholdsfortegnelse

Figurliste

Tabell-liste

Kapittel 1: Innledning

Bakgrunn for valg av tema

I løpet av min egen skolegang var bevis som en matematisk aktivitet i skolen noe jeg ikke hadde kjennskap til. Jeg ble gjort oppmerksom på metoden først da jeg startet på lærerutdanningen. Undervisningen jeg fikk på grunnskolen og videregående i matematikk gikk mest i å pugge ny kunnskap og reprodusere tidligere kunnskap. Dette gjorde at jeg ikke trivdes så godt i matematikkundervisningen. Jeg likte matematikk, men jeg fikk ikke god nok tid til å faktisk forstå hvorfor en gjorde som en gjorde. Dette gjenspeilet seg spesielt i karakterene jeg fikk på videregående i matematikk. Jeg oppdaget fort hvor viktig læreren var for at jeg skulle forstå matematikken. Etter et halvt år med en lærer som ikke tok seg tid til å hjelpe de elevene som ikke forstod matematikken, byttet jeg lærer. Med den nye læreren fikk jeg tid til å utforske emnene nærmere og jeg begynte å forstå det jeg skulle gjøre. Derfor ble jeg positivt overrasket da jeg ble introdusert for matematisk bevis, for den måten å arbeide på åpner opp for å jobbe grundigere med temaet som undersøkes, som i sin tur vil kunne gi en bedre forståelse for temaet. En av hovedgrunnene til at elever burde lære seg å bevise i matematikk er ifølge Stylianides (2009) at bevis skaper en dypere forståelse og overbevisning for matematikkfaget.

Forskere innen matematikkdidaktikk mener at økt vektlegging av arbeid med bevis danner grunnlag for og utvikling av dybdelæring allerede i grunnskolen (Valenta & Enge, 2020), og matematisk bevis blir ofte omtalt som kjernen i matematikk (Svendsen, 2020). I den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen er bevis en del av kjerneelementene i faget. Bevis kommer ikke så godt frem i kompetansemålene, men som Valenta & Enge (2020) kommer frem til i analysen av læreplanen, legger den opp til arbeid med flere bevisrelaterte kompetanser. Elevene skal utforske og argumentere i matematikk samt arbeide med å se sammenhenger og bruke ulike representasjoner. Bevis kan være uttrykt på forskjellige måter, og vi tenker ofte på matematisk bevis som noe formelt og abstrakt, gjerne med algebraiske symboler, men i skolen skal uttrykksmåten være tilpasset elevgruppen (Ball & Bass, 2003; Valenta & Enge, 2020). Et av kjerneelementene i læreplanen heter *Resonnering og argumentasjon* (Utdanningsdirektoratet, 2019c), og handler om at elevene skal kunne resonnere for å forstå og for å løse problemer, argumentere for valg av fremgangsmåte, resonnement, og løsninger, og bevise at de er gyldige. Matematikkfaget skal i følge Utdanningsdirektoratet (2019a) bidra til «at elevene utvikler et presist språk for resonnering, kritisk tenkning og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering.». Arbeid med bevis vil kunne hjelpe til med akkurat dette. Gjennom resonnering og argumentasjon kan en utvikle forståelse for ulike temaer innenfor matematikk, som for eksempel algebra, geometri, tall og måling (Skott, 2018).

Problemstilling

I min studie ønsker jeg å se på hvordan elever beviser på barneskolen, og da spesielt på 5. trinn. Jeg har derfor valgt å arbeide ut fra følgende problemstilling;

Hvordan beviser elever på 5. trinn i matematikk?

Siden denne problemstillingen er såpass vid, har jeg tenkt til å konkretisere problemstillingen med tre underspørsmål for å begrense oppgaven:

1. Hvilke argumentasjonsformer bruker elevene når de skal bevise?
2. Hvilke årsaker kan spille inn på hvordan elevene jobber med bevis?
3. Finnes det noen kjønnsforskjeller i deltakelse og mestring når elevene arbeider med bevis?

Det første underspørsmålet ble formulert for at det skal bli lettere å se tendenser blant elevenes argumentasjonsformer, og det andre underspørsmålet bygger på det første ved å se på hvilke årsaker som kan spille inn på hvorfor elevene argumenterer slik de gjør. Det siste underspørsmålet handler om det finnes noen kjønnsforskjeller i matematikk når det kommer til mestring og deltakelse i arbeid med bevis. Jeg hadde om kjønn og matematikk på pensum på fjerde året på lærerutdanningen og jeg ble veldig interessert i dette temaet. Der hadde vi om Paechter (2002) sitt syn på jenter og matematikk og derfor kom jeg inn på tanken om at bevisoppgaver ville kunne gi jenter mulighet til å forstå det de gjør. Min erfaring med undervisningen jeg fikk på skolen gjorde også at jeg ble interessert i om kjønn hadde noe å si for mestring i matematikkfaget, og om undervisningstyper som lar elever utforske og skape konseptuell kunnskap gjør at jenter presterer bedre.

Oppgavens oppbygning

Kapittel 2 vil ta for seg teorien som jeg bruker i masteroppgaven, og den vil sette rammer for analysen og drøftingen. Kapittelet er delt inn i flere underoverskrifter og vil ta for seg bevis sett fra flere perspektiver og ulike mulige grunner for hvorfor elevene argumenterer slik som de gjør. Kapittelet vil også omhandle ulike perspektiver på kjønn i matematikken.

Kapittel 3 vil ta for seg valg og begrunnelse av metoder. I dette kapittelet vil jeg begrunne alle valgene jeg har tatt før, under og etter innsamling av datamaterialet. Jeg vil belyse hvilke etiske vurderinger jeg måtte ta i arbeid med innsamlingen og ulike utfordringer med metoden og feilkilder med meg som forsker.

I kapittel 4 vil jeg presentere funnene og analysere disse med hjelp av Stylianides (2007) tre kriterier for bevis. Elevsvarene som blir analysert har først blitt plassert i kategorier som jeg selv har valgt, men her også vil kategoriene følge kriteriene for bevis.

I kapittel 5 vil jeg diskutere funnene mine opp mot relevant teori. Jeg vil diskutere de ulike måtene elevene argumenterer på etter hvilken oppgave argumentasjonen hører til. Deretter skal jeg diskutere lærerens deltakelse som en av årsakene til at elevene argumenterer slik de gjør og elevenes mestring og deltakelse ut fra det matematiske kjønnsperspektiv.

I kapittel 6 vil jeg prøve å svare på problemstillingen og underspørsmålene, samt komme med kritikk av egen studie og forslag til videre forskning.

Begrepsavklaring

Argumentasjonsformer

I min studie vil *argumentasjonsformer* være et overordnet begrep som inkluderer muntlig argumentasjon, skriftlig argumentasjon, og representasjonsformer som tegninger, modeller, konkreter etc.

Gyldig argumentasjon

I min studie vil *gyldig argumentasjon* være et begrep som brukes om en argumentasjon som tilfredsstiller Stylianides (2007) krav for bevis, og vil være en betegnelse for når en argumentasjon blir ansett som et gyldig bevis.

Kapittel 2: Teoretisk rammeverk

I dette kapittelet vil jeg redegjøre for teorien som setter rammer for min studie som har problemstillingen: Hvordan beviser elever på 5. trinn i matematikk? Jeg vil redegjøre for hva som menes med bevis på barneskolen, og komme med ulike kriterier for og syn på bevis. Jeg skal også redegjøre for teori som kan svare på de tre underkategoriene. Denne teorien vil omfatte forskning på kjønn, lærerens rolle i arbeid med bevis og sosiomatematiske normer.

2.1 Bevis

Bevis på barneskolen er en gyldig argumentasjon som er uttrykt på en måte som er kjent for en gitt gruppe elever. Stylianides (2007) definerer bevis som et matematisk argument med påstander for eller imot en matematisk påstand. Og et bevis må følge disse karakteristiske trekkene:

1. *Aksepterte utsagn: den bruker utsagn som er aksepterte i en gitt gruppe elever og som er sanne og lett tilgjengelig*
2. *Argumentasjonsmåter: den bruker former for resonnering som er kjente og sanne for en gitt gruppe elever*
3. *Representasjonsformer: argumentasjonen er uttrykt ved bruk av hensiktsmessige representasjoner som er kjente og sanne for en gitt gruppe elever*

((Stylianides, 2007, pp. 291-292), min oversettelse)

Det er først når et argument tilfredsstiller de tre kravene for et bevis at argumentet vil overstige bevisterskelen og bli regnet som et bevis. Stylianides (2007) mener at denne definisjonen av bevis er passende for bruk i matematikken på skolen, hovedsakelig fordi den ser på matematikk som en disiplin og på elever som matematiske tenkere. Den forhindrer også empirisk argumentasjon som bevis. Definisjonen til Stylianides (2007) åpner opp for at en kan bevise med andre uttrykksmåter enn formelle matematiske bevis, og at beviset bygger på definisjoner som er kjente i det fellesskapet beviset utvikles i (Valenta & Enge, 2020).

Det finnes flere definisjoner og beskrivelser av hvordan elever arbeider med bevis på barneskolen. Russell mfl. (2011) har beskrevet fire typiske nivåer i elevers arbeid med argumentasjon og bevis, som Hovik & Solem (2016) gjengir i sin artikkel:

1. *Begrunnelse ved å referere til autoriteter (lærer, lærebok, foreldre m.m.)*

2. *Begrunnelse gjennom konkrete eksempler (6+5=5+6, 3+8=8+3)*
3. *Matematisk resonnering basert på en visuell representasjon (konkreter eller tegning) eller tekst/regnefortelling*
4. *Bevis ved bruk av algebraisk notasjon og bruk av regnelovene*

(Hovik & Solem, 2016, p. 47)

Det Russell mfl. (2011) mener med nivå 3 er at representasjonsbasert bevis skal kunne løfte enkelteksempler fra det spesielle til det generelle og dermed være like holdbart som bevis ved bruk av formell matematikk (Hovik & Solem, 2016). Stylianides (2007) kriterier for bevis sammenfaller med nivå tre og fire av Russell mfl. (2011) sine nivåer i elevers arbeid med argumentasjon og bevis. Elever som jobber med figurbevis når de arbeider med bevis vil i større grad bli overbevist enn hvis de bruker lingvistiske bevis. Dette kommer av at en figur kan hjelpe elevene til å se om en påstand eller antagelse er sann og hvorfor den stemmer (Barwise & Etchemendy, 1996; Hovik & Solem, 2016).

Stacey mfl. (1982) mener derimot at det finnes tre faser når en skal jobbe med bevis. Fasene skal hjelpe deg med å lage et sterkere bevis og spisse din argumentasjon. De tre fasene er;

1. *overbevis deg selv*
2. *overbevis en venn*
3. *overbevis en skeptiker/fiende*

(Stacey et al., 1982, p. 87)

Fase tre er den viktigste fasen og vil være der du har klart å gjennomføre et bevis. Her må du ha en så klar argumentasjon at noen som er en skeptiker også blir overbevist om at du har funnet riktig svar. Stacey mfl. (1982) argumenterer for at det å være sin egen fiende er en veldig viktig ferdighet for å kunne lage et godt nok bevis. Den første og andre fasen er lett, der skal du bare overbevise deg selv og en venn. Selv om fase to er å overbevise noen andre enn deg selv om at det du sier er korrekt, vil ikke det kunne regnes som bevis før du har klart å overbevise noen som ikke er med på tankegangen din (Stacey et al., 1982).

2.1.1 Empirisk argumentasjon

Det som menes med empiriske argumenter er argumenter som baserer seg på bruk av eksempler som gir bekreftelse, men ufullstendige bevis på at en påstand er sann (Stylianides, 2007). Forskning viser at elever beviser matematiske påstander ved hjelp av empirisk argumentasjon fordi de har vanskeligheter med å skille mellom bevis og empirisk argumentasjon. Empirisk argumentasjon blir ikke definert som gyldig bevis fordi argumentasjonen ikke ekskluderer muligheten for et moteksempel til påstanden. Det finnes to typer empirisk argumentasjon; *naiv empirisme* og *avgjørende eksperiment* (Stylianides, 2009). Hovedforskjellen mellom empirisk argumentasjon og bevis ligger i argumentasjonsmetodene som brukes i de to argumentene; ugyldig og gyldig argumentasjon. Empiriske argumenter er ikke holdbare som bevis fordi argumentet ikke tar for seg muligheten for at argumentet kan motbevises, mens bevis kan generalisere, og vil gjelde for alle tilfeller innenfor et emne (Stylianides & Stylianides, 2009).

Ved bruk av naiv empirisme bruker en passende eller tilfeldige eksempler for å bevise en påstand eller trekke en slutning. Når elever bruker avgjørende eksperiment for å bevise vil de gjennomgå en strategisk jakt på et moteksempel. Dette gjør at denne måten å argumentere på blir sett på som mer avansert enn naiv empirisme fordi en leter etter moteksempler for å falsifisere påstanden (Stylianides, 2009).

2.1.2 Representasjonsbasert bevis

Ved å lage representasjonsbasert bevis vil det kunne hjelpe elevene med å forme et mentalt bilde av hvordan en matematisk prosedyre fungerer. Dette vil også hjelpe elevene med å utvikle en forventing om at matematikk gir mening, og de vil kunne forstå de matematematiske prosedyrene på et dypere nivå (Russell et al., 2011). Representasjonsbasert bevis starter med at en må velge hvilken måte en vil fremstille sin fremgangsmåte. Et komplett representasjonsbasert bevis må inneholde både den representasjonen en har valgt og dynamiske elementer, slik som forklaringer av modellen (Russell et al., 2011).

Russell mfl. (2011, p. 57) kommer med tre kriterier for at et representasjonsbasert bevis skal være komplett:

1. Det som skal bevises må bli representert gjennom diagrammer, konkreter eller kontekst
2. Representasjonsmetoden må romme alle forekomster
3. Representasjonen må vise hvorfor påstanden er sann

2.1.3 Lærerens rolle i elevenes utvikling av bevis

Hvis ikke lærerne har en god nok forståelse for hva bevis er, kan en ikke forvente at de vil kunne fremme argumentering og bevis blant elevene (Stylianides & Ball, 2008). Det finnes tre forskjellige elementer av kunnskap læreren må kunne om bevis. Det første elementet omhandler evnen til å forstå og fungere i samsvar med at utviklingen av bevis bruker den matematiske kunnskapen som er tilgjengelig for å konstruere matematisk teoremer, og for å bevise dem for andre. Komponentene i denne kunnskapen kan knyttes til de tre kriteriene for bevis (Stylianides, 2007). Hvis lærere kan kjenne igjen de tre kriteriene i elevens argumentasjon i undervisningen sin kan lærerne bruke den kunnskapen for å lage en undervisning som fremmer elevenes bevisføring, og gjøre kunnskapen om de tre kriteriene allment kjent for klassen. Det andre elementet omhandler evnen til å forstå rollen til det matematiske språket når en arbeider med bevis. Matematisk språk er en avgjørende hjørnestein for å bevege seg mot validert matematisk kunnskap (Ball & Bass, 2000; Stylianides & Ball, 2008). En må være oppmerksom på hvordan matematiske argumenter blir representert og hvordan matematiske ideer blir definert. Denne evnen omhandler to av kriteriene til bevis; aksepterte utsagn og representasjonsformer. Det tredje elementet gjelder evnen til å skille mellom empiriske og deduktive argumentasjonsformer. Hvis lærere på grunnskolen får elevene til å tenke at noen få velvalgte eksempler utgjør bevis vil tanken om bevis på videregående være vanskelig for dem (Martin & Harel, 1989; Stylianides & Ball, 2008). Dette elementet knytter seg til ett av kriteriene for bevis på barneskolen;

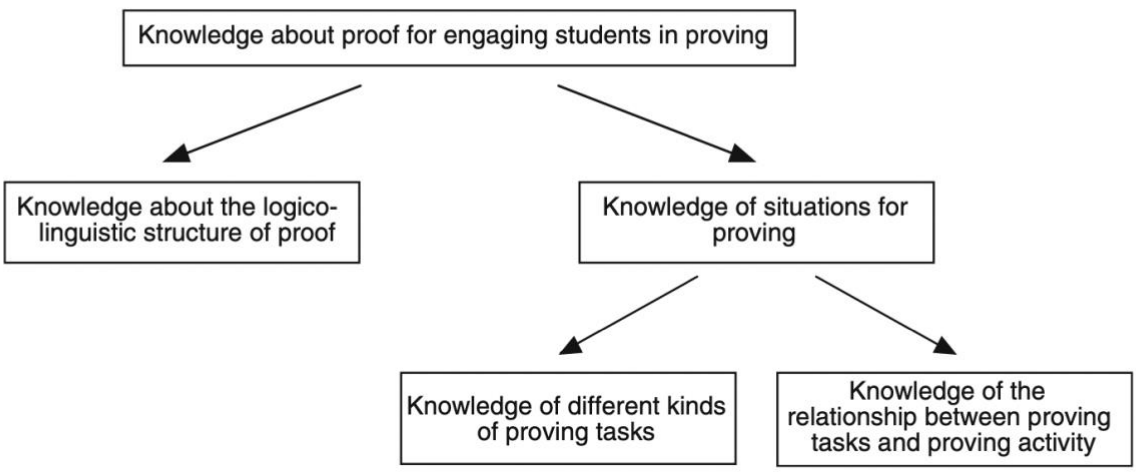


Fig. 1 A classification of different forms of knowledge about proof for engaging students in proving

Figur 1: Lærerens kunnskap om bevis (Stylianides & Ball, 2008, pp. 313)

representasjonsformer.

I følge definisjonen til Stylianides (2007) kan ikke empirisk argumenter telle som bevis på skolenivå fordi empiriske argumenter benytter ugyldige måter å argumentere på, som fremmer aksept av matematiske påstander som er basert på ufullstendige bevis. Deduktive argumenter derimot, er forbundet med en rekke gyldige argumenter hvorav noen har blitt undersøkt i forhold til læreres kunnskap om bevis. Eksempler på dette er argumentasjonsformer knyttet til matematisk induksjon, bevis ved kontraposisjon og konstruksjon av moteksempler (Stylianides & Ball, 2008).

312 A. J. Stylianides, D. L. Ball

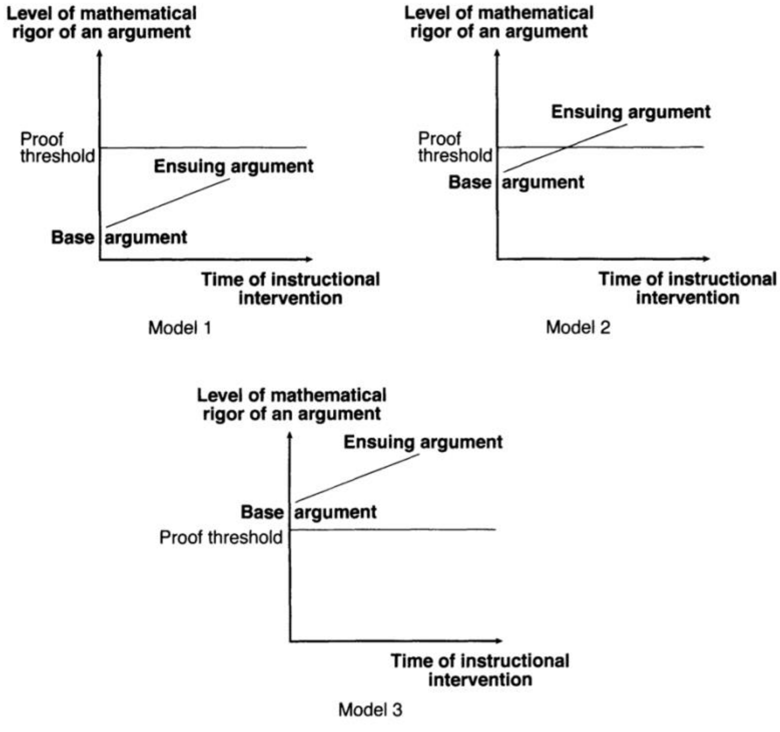
Table 1 A classification of proving tasks with illustrative examples

Purpose of a proving task	Number of cases involved in a proving task		
	A single case	Multiple but finitely many cases	Infinitely many cases
Verification of a statement	Prove that 186 plus 243 is a multiple of 3.	Prove that the sum of any two multiples of 3 between 30 and 50 is a multiple of 3.	Prove that the sum of any two multiples of 3 is a multiple of 3.
Refutation of a statement	Disprove that 186 plus 243 is a multiple of 6.	Disprove that the sum of any two multiples of 3 between 30 and 50 is a multiple of 6.	Disprove that the sum of any two multiples of 3 is a multiple of 6.

Tabell 1: Klassifikasjon av bevisoppgaver (Stylianides & Ball, 2008, pp. 312)

Stylianides & Ball (2008) introduserer en ny kunnskap lærere burde ha, og det er kunnskap om situasjonsbevis. Læreren må være i stand til å identifisere situasjoner som krever bevis, gjenkjenne viktige matematiske forskjeller mellom situasjonene, og iscenesette muligheter for elevene til å delta i bevis. De har laget et rammeverk for ulike typer bevisoppgaver som lærere kan bruke for å skape muligheter for elevene til å arbeide med bevis (tabell 1). Klassifiseringen av bevisoppgaver baserer seg på to matematiske kriterier; hvor mange svar som er involvert i oppgaven - ett svar, mange men endelige svar og uendelig mange svar - og hensikten med oppgaven - å verifisere eller falsifiser en påstand. Når elevene deltar i autentiske matematiske aktiviteter med læreren som stillasbyggere blir ikke bevisoppgavene gitt til elevene slik som i rammeverket, men de kommer av hendelser der elevene utforsker fenomener, diskuterer hypoteser og genererer formodninger. Stylianides & Ball (2008, p. 313) tilføyer to underkategorier til kunnskap om situasjonsbevis. De kaller dem for kunnskap om forskjellige bevisoppgaver – en eller flere løsninger - og kunnskap om forholdet mellom bevisoppgaver og bevisaktiviteter – forståelse for hvilke oppgaver som kan åpne opp for bevisaktiviteter.

Level of mathematical rigor of an argument (Stylianides, 2007, pp. 314-315), eller som jeg har oversatt det til; *matematikkens strenghet til et argument*, handler om utviklingen til elevenes argument i arbeid med bevis (figur 2). Modellen handler om i hvilken grad de tre kriteriene for bevis i argumentasjonen - aksepterte utsagn, argumentasjonsmåter og representasjonsformer - blir oppfylt i arbeidet med utviklingen av bevis over tid. I løpet av denne utviklingen blir elevene hjulpet av læreren til å utvikle sitt bevis. Det første argumentet eleven kommer med kalles for *base argument* som betyr det grunnleggende argumentet. Dette argumentet markerer starten på den faglige instruksjonen (instructional intervention). Her skal læreren prøve å hjelpe elevene til å forbedre sine matematiske metoder i arbeidet med bevis. Det neste argumentet eleven kommer med kalles for *ensuing argument*, altså det påfølgende argumentet. Dette argumentet markerer slutten på den faglige instruksen. Hvis et argument tilfredsstiller alle de tre kriteriene for bevis vil nivået av matematisk strenghet til argumentet overstige bevisets grense og vil derfor bli ansett som gyldig (Stylianides, 2007).



Figur 2: Matematikkens strenghet til et argument (Stylianides, 2007, pp. 315)

2.1.3.1 Lærerens kommunikasjon

Bevis blir betegnet som en aktivitet med en sosial karakter av Jones & Herbst (2012). For å skape et klasseromsmiljø der elevene deler ideer, kommer med formodninger, gir begrunnelser og resonnerer bør læreren skape en dialog med elevene som legger ansvaret til å resonnere på elevene. Læreren burde også analysere elevenes argumenter og hjelpe elevene mens de resonnerer. Denne måten å føre en dialog på vil kunne hjelpe til med å utvikle de sosiomatematiske normene for hva som betegnes som gyldig bevis (Martin et al., 2005).

Elevenes tenkning bør stimuleres og utfordres. Lærere bør understreke at målet er å tenke matematisk og at elevene ikke blir dømt bare ut fra om svaret deres er riktig eller ikke (Shahrill, 2013). Shahrill (2013, pp. 227-228) har formulert en liste over hva læreren burde gjøre for å få en vellykket matematikksamtale med elevene. Jeg vil bare nevne de som er relevante for min studie: Læreren burde planlegge spørsmål som passer spesifikt til aktiviteten de skal gjennomføre, formulere klart og tydelig spørsmålene de skal stille, stille elevene flere spørsmål slik at de kan utdype, forklare bedre eller utvikle svarene sine, og prøve å oppmuntre flere elever til å delta. Læreren burde også bruke skjulte og åpne strategier og ikke rette spørsmålet til en spesifikk elev. Ved å stille spørsmål til hele klassen «tvinger» en elevene til å følge med og mentalt svare på spørsmålet. Forskning viser at gode spørsmålsferdigheter henger sammen med elevers prestasjoner i matematikk. Å bruke spørsmål som et verktøy i undervisningen vil kunne motivere og utfordre elevene og øke interaksjonen i klasserommet (Shahrill, 2013).

2.2 Resonnering

Resonnering er den tankegangen som blir tatt i bruk når en skal produsere påstander og komme til konklusjoner i oppgaveløsning (Lithner, 2008). Ball & Bass (2003) mener at matematisk resonnering er en grunnleggende ferdighet i matematikk, og de kommer med tre grunner til at dette er tilfellet. Den første er at forståelse i matematikk er meningsløs hvis en ikke understreker viktigheten av resonnering. En kan ha forståelse for ulike prosedyrer innenfor det matematiske feltet, men hvis en ikke har relasjonell/konseptuell forståelse kan en gjøre meningsløse feil «*Unjustified knowledge is unreasoned, hence, easily becomes unreasonable*.» (Ball & Bass, 2003, p. 28). Resonnering vil kunne hjelpe med å selv oppdage når en gjør feil. Den andre grunnen er at det å bare kunne bestemte matematiske ideer og prosedyrer er utilstrekkelige hvis en må løse oppgaver en ikke er helt kjent med. For eksempel kan elever støte på et problem når de får i oppgave om å løse dette stykket: $8 = \_ + 5$. De kan tenke at 8 ikke sier at de må gjøre noe og de kan da si at det ikke er noe å skrive i det blanke feltet. Dette kan komme av at de ikke resonnerer rundt betydningen av «er lik» tegnet. Den tredje og siste grunnen for at matematisk resonnering er en grunnleggende ferdighet er at resonnering er fundamentalt for å rekonstruere glemt kunnskap når det er behov for det. En som har lært seg å dividere, men har glemt prosedyren, kan ved hjelp av resonnering komme frem til en løsning hvis han kan bruke forståelsen av divisjon.

Poenget til Ball & Bass (2003) er at matematisk resonnering er like fundamentalt for forståelse og bruk av matematikk som tekstforståelse når en skal lese en tekst. En kan knapt si at en kan lese hvis en bare klarer å avkode ord. På samme måte kan en ikke si at en kan regne og bruke matematikk hvis en så vidt kan bruke matematiske prosedyrer. Prosedyrekunnskaper er nyttige og fundamentale for å kunne delta i matematiske aktiviteter, men alene er de ikke mer enn den fonetiske og strukturelle analysen av ord (Ball & Bass, 2003).

Resonnering blir i denne artikkelen brukt om normer og praksiser som er kollektive i faget, og ikke som en individuell egenskap som bare en selv kan forstå. Resonneringen må bli forstått av andre og den må være faglig riktig. Resonnering for bevis baserer seg på to grunnlag. Det første grunnlaget er allmennkunnskap. Ball and Bass (2003) er enige med Yackel and Cobb (1996) om at den almene kunnskapen er de sosiomatematiske normene i et klasserom, altså de normene, ideene og meningene som er kjente i et klasserom og hvilke svar som er matematisk akseptert. Den allmenne kunnskapen er den kunnskapen som bestemmer hva som er akseptabelt av matematiske resonnementer innenfor en gitt kontekst eller samfunn. Det andre grunnlaget for matematisk resonnering er språk. Altså bruk av symboler, begreper og definisjoner.

Lithner (2008) mener at definisjonen til Ball & Bass av begrepet resonnering er for smalt fordi rammene bare gjelder for bevis, selv om begrepet bevis anses i en videre forstand som begrunnelse (justification). Lithner mener at resonnering ikke nødvendigvis er basert på formell logikk, og dermed ikke er begrenset til bevis. Resonneringen kan være feil så lenge resonneringen er fornuftig for den som resonnerer, og at det finnes grunner som støtter den. Strukturen til resonnering baserer seg på følgende fire trinn:

1) En deloppgave blir fremført hvor en problematisk situasjon blir presentert der det ikke er åpenbart hvordan en skal gå frem for å løse oppgaven
2) Det foretas et strategivalg – hvilke prosedyrer bør brukes? Og hvordan vil du løse oppgaven? Gjenskape kunnskap, konstruere, oppdage, gjette etc.? Dette kan støttes av en argumentasjon; hvorfor vil strategien løse oppgaven?
3) Strategien blir brukt. Strategien blir støttet av en verifiserende argumentasjon; hvorfor løste strategien oppgaven?
4) Konklusjon

((Lithner, 2008), min oversettelse)

Forskning viser at en av hovedårsakene til lærings- og prestasjonsvansker i matematikk kommer av at de fleste elever er for avhengige av memoreringsteknikker, og at de bruker overfladiske matematiske resonneringer (Boesen et al., 2010).

For å lære seg å begrunne innenfor matematikk må elevene engasjere seg i å skape og uttrykke sine egne begrunnelser og argumenter. Dette kan utvikles gjennom samtaler i klasserommet (Brodie, 2010). Elevers matematiske resonnement er grunnleggende for hvordan de kan skape mening i matematikk, og deres meningsskaping er grunnleggende for hvordan de lærer å resonnere og argumentere (Boaler & Brodie, 2004).

2.3 Sosiomatematiske normer

I et klasserom vil det være noen sosiale normer som forklarer hvordan en skal opptre i klasserommet og hva som er sosialt akseptabelt. De sosiale normene i et klasserom forteller noe om hva det forventes av elevene som for eksempel at de skal forklare sine løsninger og tenkemåter. Disse normene er generelle for alle fag. I matematikkfaget derimot finnes det normer som gjelder spesifikt for faget, og de blir kalt for *sosiomatematiske normer* (Yackel & Cobb, 1996). De sosiomatematiske normene sier noe om hva som er akseptabelt av matematiske forklaringer og begrunnelser i klasserommet. De sier noe om forståelsen som forventes av elevene når det kommer til hva som blir regnet som et akseptabelt matematisk svar og forklaring (Yackel & Cobb, 1996). Validiteten til et argument er også bestemt av de sosiomatematiske normene (Lithner, 2008). Disse normene blir utarbeidet i samarbeid mellom lærer og elever, men det er i hovedsak læreren som er nøkkelpersonen i selve utarbeidelsen (Kleve & Ånestad, 2016).

2.4 Gutter og jenter i matematikkfaget

Kjønnsforskjeller i elevers akademiske prestasjoner har vært et ganske kontroversielt tema hos psykologer og lærere/pedagoger i mange tiår (Sewasew et al., 2018). På grunn av jenters underrepresentasjon i akademiske fag som vitenskap, teknologi, ingeniør og matematikk har mange forskere prøvd å finne ut grunnen til dette (Else-Quest et al., 2010). Noe av forskningen på prestasjoner i matematikk har pekt ut en tradisjonell kjønnsforskjell i favør til guttene, mens andre mener at det ikke er en signifikant forskjell (Samuelsson & Samuelsson, 2016). I en analyse av nasjonale prøver på 5. trinn i Norge i 2021 (Utdanningsdirektoratet, 2021) kommer det frem at guttene presterte bedre i år sammenliknet med i fjor i regning, mens jentene presterte dårligere i år enn i fjor. Her viste det også at det var en forskjell mellom gutter og jenter i mestringsnivå der det var størst prosentandel gutter på mestringsnivå tre enn jenter (se vedlegg 2). Siden utdanningsdirektoratet startet med trendmåling av kjønnsforskjeller i 2014 har det aldri vært færre gutter som har prestert på det laveste nivået og flere på det høyeste nivået enn det var i 2021. For jentene var det motsatt. Fra 2017 til 2020 har den gjennomsnittlige skalapoengforskjellen mellom jenter og gutter vært lik. Guttene har hatt to skalapoeng høyere enn jentene, mens det i 2021 hadde økt med ytterligere 2 skalapoeng mellom de to kjønnene. Jentene hadde gått ned ett poeng mens guttene gikk opp ett poeng, noe som gjør at den totale skalapoengforskjellen lå på fire poeng (Utdanningsdirektoratet, 2021).

I følge Paechter (2002) er det ikke stor forskjell på prestasjoner i matematikk mellom jenter og gutter, men det er stor forskjell mellom kjønnene på motivasjon i og fornøyelse med matematikk. Det er et overtall av gutter som velger å gå videre med matematikk på skolen sammenlignet med jenter. Paechter (2002) mener at dette kan ha noe med hvordan jenter og gutter ser på matematikken og problemløsing. Gutter er rasjonelle når det kommer til problemløsing og de godtar lettere at det er et riktig svar. De har et mer «rettferdig» syn på matematikken. Jenter derimot har en tendens til å se på rammene rundt oppgaven og de vil ha en mer «omsorgsfull» tilnærming til å løse problemet. Dette synet på maskulinitet og femininitet i matematikken er både en tradisjonell og stereotypisk måte å se på jenter og gutter på, men samtidig har dette rot i faktisk atferd hos kjønnene. Måten en ser på og tilnærmer seg moralske avgjørelser i hverdagen kan ha en effekt på om en føler seg komfortable med matematisk tenking. Unge gutter vil være mer komfortable med matematisk tenking fordi det likner mye på hvordan de tilnærmer seg viktige spørsmål i livene deres. Jenter er mer opptatt av å forstå hvorfor og hvordan en regner enn det gutter er. Gutter derimot er mer interessert i å finne en løsning så fort som mulig, og dette kan være grunnen til at det er en forskjell mellom mannlige og kvinnelige elever Paechter (2002).

Boaler (1994) har undersøkt om kontekstoppgaver i matematikken gjør en forskjell i prestasjoner hos gutter og jenter. Hennes forskning tyder på at det er mer sannsynlig at jenter presterer lavere enn gutter på kontekstoppgaver når de ikke får lov til å ta høyde for faktorene som blir brukt i oppgaven. Kontekstoppgaver i matematikkundervisningen kan virke relevant for læreren og andre voksne, men for elever vil konteksten bare være en ramme rundt den egentlige oppgaven. Den virkelighetsnære konteksten kan også virke som noe som bare brukes i matematikken, og som ikke vil være faktiske problemer som eleven kan støte på i hverdagen. Mattelandskapet som blir skapt av matematikkoppgaver kan være ødeleggende for elever som er sosialt bevisste og som er bekymret for relevansen i faget til deres fremtidige liv. Som oftest er disse elevene jenter. Likevel argumenterer hun for at kontekstoppgaver i noen tilfeller kan oppmuntre til forståelse og refleksjon rundt likheten mellom det de har lært og fremtidige problemer hvis oppgavene gir rom for refleksjon, diskusjon og resonnering, i stedet for memorering av tidligere prosedyrer. Forskningen til Boaler (1994) indikerer at det ikke er store forskjeller blant jenter og gutter i deres prestasjoner i matematikk. Likevel ser hun noen tendenser til at jentene presterte dårligere enn guttene på én av fire kontekstoppgaver. Oppgaven gikk ut på at elevene måtte sette opp en jobbliste for fire personer som skulle gjøre ulike arbeidsoppgaver. Arbeidsoppgavene tok forskjellig tid å gjennomføre og de hadde to dager på seg for å gjøre alle oppgavene. Svarene til de jentene som presterte dårlig på oppgaven tyder på at de hadde et større engasjement til oppgaven enn det oppgaven spurte om. Dette engasjementet kom i flere former; noen diskuterte viktigheten av de forskjellige jobbene, andre så på rekkefølgen på hvordan jobbene realistisk ville blitt gjort og andre så på reiseveien til noen av jobbene. Resultatet viser også at både jenter og gutter prøvde å integrere virkelige variabler med den matematiske oppgaven. På en annen side sier forskningen at de kontekstoppgavene som engasjerer jentene vil føre til dårligere prestasjoner enn de kontekstoppgavene som virker mindre «realistiske». Dette kan ha noe med at det er lettere for jenter å se bort ifra konteksten og at de fokuserer mer på de matematiske prosedyrene når konteksten ikke er engasjerende (Boaler, 1994).

Forskningen til M. Samuelsson og J. Samuelsson (2016) sier at et støttende gruppemiljø ser ut til å ha en mer positiv effekt på jenters karakterer enn det har hos gutter. Resultatet av deres studie var at jenter og gutter oppfatter matematikkundervisningen forskjellig og at de lager egne filtre som regulerer deres tenkning og handling i matematikkrelaterte situasjoner. Guttene føler at de er mer involvert i timene enn jenter og at de samarbeider mer på gruppearbeid. Jenter som er mindre involvert i timene har en tendens til å fokusere mer på sitt eget arbeid, og verken søker hjelp eller tilbyr det til andre. Dette kan komme av lærerens holdninger til gutter og jenter i undervisningen. Lærere kan ha en tendens til å tenke at jenter er mer selvgående og vil derfor fokusere mer på å inkludere gutter som ofte kan være urolige i håp om at de vil holde seg fokusert på oppgaven. Det at jenter ser på matematikk som vanskelig kan komme av at de ikke er like involvert eller ikke så ofte del av muntlig aktivitet i matematikk som gutter. Studien viser at elevers utbytte av gruppearbeid er tre ganger så effektiv som arbeid med tradisjonell matematikkundervisning fordi lærere som underviser på denne måten trekker oppmerksomheten mot andre kvaliteter enn kun prosedyrekunnskap slik som resonnement og kommunikasjon (Samuelsson & Samuelsson, 2016).

Kapittel 3: Metode

Jeg vil nå redegjøre for valg av metoder som best mulig egner seg til å svare på problemstillingen min: *Hvordan beviser elever på 5. trinn i matematikk?* Noe av formålet i dette prosjektet er å undersøke hvordan elever på mellomtrinnet gjennomfører bevis i matematikk, og om det innad i klassen er kjønnsforskjeller i bevisføring og deltakelse i helklassesamtalen. I mitt forskningsprosjekt er jeg ikke på utkikk etter å generalisere elevenes prestasjoner i arbeid med bevisoppgaver, men jeg er interessert i å få frem ulike fremgangsmåter og representasjonsmetoder. I tillegg til å se på elevenes bevisføring er jeg også interessert i om det er noen kjønnsforskjeller i bevisføringen og deltakelse i helklassesamtalen.

Samfunnsvitenskapelige metoder handler om hvordan vi kan gå frem for å få informasjon om den sosiale virkeligheten, og en kan finne et skille mellom kvalitative og kvantitative metoder. Generelt sett er kvalitative metoder mer fleksible enn kvantitative metoder. Det vil si at i kvalitative metoder er det større mulighet for interaksjon mellom forsker og deltaker. Relasjonen mellom forsker og deltaker er også mindre formell enn ved bruk av kvantitative metoder (Christoffersen & Johannessen, 2012). Siden jeg vil observere to klasser på mellomtrinnet for så å analysere elevsvar har jeg valgt kvalitative metoder.

Å analysere bevisføring på lavere trinn kan være vanskelig i og med at mange forbinder bevis med noe en gjør på høyere trinn, derfor er det viktig å observere settingen elevene er i når de jobber med bevis for å underbygge det skriftlige arbeidet til elevene.

3.1 Kasusstudie

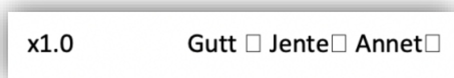
Casestudie eller kasusstudie brukes mye i utdanningsforskning og kjennetegnes ved at forskeren innhenter mye informasjon fra få enheter over en kortere eller lenger periode. Det benyttes gjerne flere datakilder, men felles for datakildene er at de er steds- og tidsavhengige. I en kasusstudie retter en oppmerksomhet mot en spesiell kasus og undersøker den grundig og detaljert for å få med mest mulig data. Det finnes ingen fasit på hvordan kasusstudier gjennomføres, en har derfor relativt frie hender (Christoffersen & Johannessen, 2012).

I min studie vil jeg fokusere på to klasser på 5. trinn som gjennomførte et likt undervisningsopplegg og jeg vil benytte meg av to datakilder; observasjon og dokumentanalyse. Når en bruker observasjon som metode kan vi kun beskrive det informantene gjør. Det er derfor vanlig å kombinere observasjon med andre forskningsmetoder slik som dokumentanalyse og intervju (Dalland et al., 2021).

3.1.1 Observasjon

Når en skal ut i feltet vil en møte forskningsfeltet med sin egen teoretiske bakgrunn og antakelser. Dette vil kunne farge forskerens observasjon, men den teoretiske bakgrunnen kan også fokusere observasjonen (Christoffersen & Johannessen, 2012). Samtidig kan dette gjøre at vi har på oss spesielle «briller» som gjør at det vi legger merke til ikke vil være det samme som hva en annen ville lagt merke til (Dalland et al., 2021). Som en observatør må en være klar over hvilken rolle en skal ha under observasjonen. Jeg inntok rollen som *ikke-deltakende observatør* (Dalland et al., 2021), dette vil si at jeg interagerte så lite som mulig med elevene. Det var læreren som hadde ansvar for undervisningsøkten og helklassesamtalen, og det var helklassesamtalen jeg skulle observere. Mens elevene jobbet med matematikkoppgavene gikk jeg rundt og så på at elevene jobbet. I denne situasjonen var det noen elever som tok kontakt med meg, men i og med at jeg var mer interessert i elevenes deltakelse, argumentasjon og resonnering i helklassesamtalen så jeg ikke på denne interaksjonen som problematisk for min observasjon. Arbeidet elevene gjorde med oppgavene var grunnlaget for helklassesamtalen og jeg tillot derfor at elevene kunne ta kontakt med meg da jeg gikk rundt. Jeg opplevde at det i noen tilfeller var positivt at jeg hadde snakket med elevene før helklassesamtalen fordi jeg da forstod deres tankegang bedre og jeg kunne koble det til noe håndfast. I helklassesamtalen satt jeg bakerst i klasserommet og noterte ned det elevene sa.

For at det skulle bli lettere for meg å skrive ned elevenes argumentasjon bestemte jeg meg for at jeg ville ha en helklassesamtale der elevene skulle dele sine argumenter. På denne måten kunne jeg lettere koble den muntlige argumentasjonen med det skriftlige arbeidet. Dette gjorde jeg ved at jeg på forhånd hadde laget ark som elevene skulle skrive på. Jeg hadde merket arkene med en tilfeldig valgt bokstav og nummer for å se hvem som var i par og hvilken klasse de hørte til, i tillegg var arkene merket med bokser de skulle krysse av for å vise hvilket kjønn de har. I helklassesamtalen måtte elevene først si hvilket nummer de hadde på arkene sine slik at jeg kunne skrive ned hvem som sa hva og senere koble de muntlige svarene til de skriftlige svarene. Et ark kunne se slik ut, se figur 1. Bokstaven «x» står for hvilken klasse eleven går i og nummeret «1.0» forklarer hvilket elevpar. Dette vil si at x1.0 og x1.1 jobbet sammen og x2.0 og x2.1 jobbet sammen. Hvert par


x1.0 Gutt ☐ Jente☐ Annet☐

Figur 3: Eksempel elevark

ble delt inn i samme kjønn, dette var et bevisst valg fra min side. På denne måten kunne jeg lettere skille mellom jenter og gutter og deres deltakelse og bevisføring.

3.1.2 Tekstanalyse

Elevtekster kan ikke studeres uavhengig av konteksten og eleven. Enkeltelevers skrivelyst, motivasjon og kognitive evner er noen faktorer ved elevers skriving som er ukjente for forskeren. Både det usynlige og det synlige landskapet har noe å si for hvordan en kan si om noe er gyldig eller pålitelig i forskningen (Øgreid, 2021). Jeg er interessert i finne ut hvordan elever på mellomtrinnet beviser matematiske oppgaver skriftlig, og den beste måten å få førstehånds data på er å observere klasser for å få konteksten til elevsvarene.

Vurdering av kvalitet på elevtekster er en komplisert oppgave. Det finnes to motstridende måter å analysere elevtekster på. Holistisk vurdering innebærer at en vurderer tekstens kvalitet ut ifra isolerte trekk. Analytisk vurdering handler om å vurdere elevteksten ut fra en spesifikk modell (Øgreid, 2021). Siden jeg skal se på hvordan elever beviser vil jeg analysere elevsvarene ved hjelp av Stylianides (2007) definisjon på bevis på barneskolen. En utfordring ved denne analysemetoden er at en kan ende opp med å bekrefte modellen i stedet for å se det spesielle ved elevenes svar. Analysen av elevtekstene må være presise slik at andre som skal gjøre samme analyse kan trekke samme konklusjon (Øgreid, 2021). Derfor har jeg valgt å bruke en analytisk vurdering når jeg skal analysere elevsvarene. På denne måten kan andre som leser dette masterprosjektet se hvilke vurderinger jeg har tatt. Elevtekster kan analyseres kvalitativt eller kvantitativt. Det er vanskelig å finne et stort skille mellom kvalitativt og kvantitative tekstanalyse fordi en ikke kan unngå å søke etter mønster i kvalitative analyser, og en ikke kan unngå å se det unike meningsinnholdet i en kvantitativ analyse (Øgreid, 2021). Selv om jeg gjennomfører en kvalitativ studie vil jeg se etter mønstre i elevtekstene og jeg vil analysere dem ut ifra mønstrene. Samtidig vil jeg se på det unike ved elevtekstene.

Både Stylianides (2007) selv og Stylianides & Ball (2008) bruker de tre kriteriene for bevis for å analysere elevers argumenter i undervisningssituasjoner der elevene skal bevise.

3.2 Rekruttering av informanter

Observasjon er en vanlig metode innenfor kvalitativ forskning og metoden egner seg godt når forskeren ønsker seg direkte tilgang til det hun undersøker. Observasjon egner seg best når problemstillingen er knyttet til et geografisk område, og derfor er valg av setting svært viktig.

Settingen snakker ikke bare om stedet en skal observere, men også den menneskelige settingen (Christoffersen & Johannessen, 2012).

På grunn av koronasituasjonen på skolene i Oslo og omegn var det vanskelig å finne skoler som kunne la meg observere i klassene deres. Derfor kunne jeg ikke være så selektiv med hvilket område og skole jeg ville observere i. Valg av skole, klasse og elever ble i stor grad styrt av skoler som var tilgjengelige og som hadde mulighet til å hjelpe meg. På forhånd hadde jeg bestemt meg for å observere på mellomtrinnet, og ett av kriteriene mine var at jeg ville observere en så lik gruppe som mulig. Derfor presiserte jeg i eposten at de to klassene jeg skulle observere måtte være på samme trinn og skole. Jeg hadde ikke krav om at lærerne hadde erfaring med undervisning i bevis på barneskolen. Jeg sendte en forespørsel på epost til trinnansvarlige på skoler rundt i Oslo og omegn der jeg skrev om formålet mitt med masterprosjektet og hvordan datainnsamlingen skulle foregå. Av de 15 skolene jeg sendte epost til fikk jeg svar fra 5, der bare to av de hadde mulighet til å hjelpe meg. Jeg fikk tilbud om å gjennomføre observasjonen av to lærere som hadde ansvar for matematikk på trinnet. De hadde to klasser med 28 elever hver på 5. trinn, der den ene læreren var med i begge matematikkøktene i de to klassene. Vi avtalte et møte på teams slik at jeg kunne gi dem mer omfattende informasjon om prosjektet og observasjonen. På møtet ble vi enige om at den ene læreren skulle ha ansvar for begge undervisningsøktene for å øke reliabiliteten til prosjektet.

3.3 Utfordringer med metoden

En svakhet ved min metode var at jeg ikke tok lydopptak av elevene i helklassesamtalen, noe som gjør at mine observasjoner blir farget av det jeg syntes var interessant for mitt masterprosjekt. Siden jeg i hovedsak var ute etter den skriftlige bevisføringen til elevene, og den muntlige argumentasjonens funksjon var til for å utfylle den skriftlige, så jeg ikke nødvendigheten av lydopptak. En annen svakhet ved metoden min er at det ikke var jeg som styrte helklassesamtalen og jeg fikk dermed ikke spurt om det jeg lurte på. På grunn av dette fikk jeg se hvor viktig det er for lærer å ha god nok kunnskap om bevis. Jeg er interessert i å finne ut hvordan elever beviser på 5. trinn, og hadde det vært jeg som hadde gjennomført undervisningstimen kunne det hende at jeg fikk noen andre resultater. Dette kunne gjort at elevene ikke hadde jobbet med bevis slik de ville gjort hvis det var læreren deres som hadde timen, og det kunne ført til at jeg ikke så hvordan elevene egentlig jobber med bevis.

Øgreid (2021) beskriver en utfordring ved å analysere elevtekstene ut ifra en modell. Utfordringen er at en kan ofte ende opp med å beskrive trekkene i elevtekstene positivt eller negativt ut fra hvordan disse trekkene kommer til uttrykk gjennom analyseverktøyet. Dette kan gjøre at elevtekstene innenfor en kategori kan bli beskrevet som mer like enn det de egentlig er.

Det jeg savnet i helklassesamtalen var elevenes mulighet til å komme opp på tavla og vise hva de tenkte, i stedet satt de på plassen sin og fortalte muntlig hva de hadde tenkt og gjort. Elevene fikk utdelt konkreter i form av laminerte plankebiter i forskjellige lengder. Dette skapte to utfordringer for innsamling av data. Den første utfordringen var at elevene som brukte konkretene ikke skrev ned trinnene i sin utforskning på arket, dette gjorde at den muntlige argumentasjonen i helklassesamtalen ble desto viktigere for å finne ut av hva de hadde tenkt. Samtidig viste det seg slik at de som brukte konkreter ikke deltok i helklassesamtalen. Den andre utfordringen med konkretene var at noen av elevene målte lengden på konkretene og deretter satt opp regnestykker ut ifra hvor lange de var. Den faktiske lengden på konkretene stod ikke i samsvar med hvor lange de egentlig skulle være. Dette gjorde at noen av elevene misforstod oppgaven.

Det samme opplegget ble gjennomført i begge klassene av den samme læreren, men det var likevel noen faktorer som spilte inn på at timene ble forskjellige. Den første faktoren var at klasse x ikke kom inn fra friminutt før ti minutter inn i timen. Dette gjorde at elevene ikke kom i gang med oppgaven før det var 40 minutter igjen av timen. I klasse y begynte timen rett etter lunsj, noe som gjorde at elevene var i gang med oppgaven mye raskere.

3.4 Etiske forhold

I samsvar med veileder og Norsk senter for forskningsdata, NSD, fant vi ut at det ikke var nødvendig med en godkjenning av prosjektet av NSD. I og med at jeg ikke undersøker enkeltelevers prestasjoner i matematikk, men ser generelt på hvordan elever beviser, var det lettere å anonymisere elevene. Elevene skulle ikke skrive navn på arkene sine og de elevsvarene på ark som ble brukt i denne oppgaven ble skrevet om av meg, deretter ga jeg dem nye navn slik at det blir en bedre flyt i analyse og resultatkapittelet. Under observasjonen ble de muntlige elevsvarene kodet etter tilfeldige nummere som elevene hadde fått. Alt av data oppbevares i sin opprinnelige form, og har ikke blitt digitalisert. På denne måten kan ikke opplysningene jeg samlet inn kobles direkte eller indirekte til informantene og kategoriseres derfor som anonymt (Johannessen et al., 2016).

På ingen tidspunkt gjennom innsamlingen har jeg skrevet ned elevenes navn, eller andre identifiserende personopplysninger. Foreldrene til elevene fikk et informasjonsskriv før observasjonen der jeg beskrev prosjektet og hva det ville si å delta i studien.

3.5 Kvalitetssikring

I dette underkapittelet skal jeg ta for meg ulike aspekter ved kvalitetssikring av masteroppgaven. Dette innebærer reliabilitet og validitet.

3.5.1 Reliabilitet

Jeg valgte å observere to klasser på samme trinn for å forsikre meg om at elevene har hatt så lik undervisning som mulig. Ved en ren tilfeldighet fikk jeg svar fra to lærere hvor den ene læreren var med i begge klassene sin matematikkundervisning. Dette gjør igjen at undervisningen de to klassene har hatt var mer lik enn ved andre skoler der de har forskjellige lærere. Som tidligere nevnt ble jeg enig med de to lærerne at hun som hadde første undervisningsøkt skulle ha den andre også for å øke reliabiliteten til prosjektet.

Ved å bruke elevsvar som datakilde vil leseren av denne masterstudien bare få tilgang til felten og forskningen gjennom min beskrivelse. Dette gjør at tilliten til forskningen hviler på leserens tillitt til min vitenskapelige redelighet (Øgreid, 2021). Jeg har en forforståelse av det temaet jeg undersøker som vil kunne påvirke min oppfatning og tolkning av observasjonen og elevsvarene. Dette kan gjøre at det jeg tolker av min datainnsamling ikke ville vært det samme som en annen sin tolkning, men siden jeg skal analysere elevsvarene etter Stylianides (2007) sine kriterier for bevis vil analysen min følge rammene til modellen.

3.5.2 Validitet

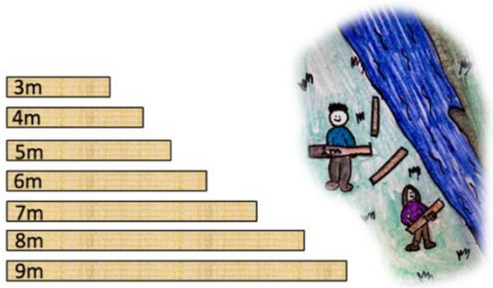
Validitet innenfor kvalitativ metode handler om i hvilken grad forskerens metode og funn reflekterer problemstillingen og representerer virkeligheten (Johannessen et al., 2016). Hadde jeg intervjuet elever eller lærere og spurt dem om hvordan de beviser i matematikk ville jeg ikke fått gode nok data til å kunne svare på min problemstilling. Ved å kombinere observasjon med elevtekstanalyse vil jeg kunne få dypere forståelse for hvordan akkurat de to klassene beviser. Elevtekster alene som data vil ikke kunne gi meg nok til å forstå hva elevene har tenkt og gjort, derfor ville jeg kombinere elevtekstanalysen med observasjon. Når en bruker flere metoder i samme studie vil en kunne øke troverdigheten til studien, dette kalles for metodetriangulering (Johannessen et al., 2016). Det at jeg plasserer elevsvarene inn i kategorier gjør at jeg kan se etter mønster og hyppighet av argumentasjonsmetoder. Selv om jeg bruker en kvalitativ tilnærming til forskningen, kan det være hensiktsmessig å bruke kvantitative mål. Analyseskjemaet jeg bruker vil kunne være et middel for å kartlegge data som vanligvis går tapt i intensiv kvalitativ forskning (Silverman, 2001).

3.6 Begrunnelse av oppgave

I utforskende aktiviteter der elevene søker etter mønster og sammenhenger og lager hypoteser kan de ha større behov for å undersøke sammenhengen enn hvis de får en ferdig presentert hypotese som de blir bedt om å bevise (Valenta & Enge, 2020).

Jeg har tatt utgangspunkt i en oppgave fra Abakus 7a (Pedersen et al., 2006) sitt problemløsningskapittel som jeg har modifisert til mitt eget formål; å få elevene til å bevise. Jeg har også lagt inn en oppfølgingsoppgave slik at elevene får utforsket mer. Selv om jeg har valgt en oppgave fra 7. trinn pensum og elevene jeg skal observere går i 5. klasse, tenker jeg at de ikke vil få store problemer med å løse oppgaven hvis de får tid til å resonnere og hjelp til å forstå hva oppgaven er ute etter. Som Ball & Bass (2003) skrev i sin artikkel er resonnering en viktig egenskap for å løse problemer en ikke er kjent med fra før av. Har en kunnskap om hvordan addering fungerer og hvordan tekstoppgaver er bygd opp vil en kunne løse denne oppgaven ved å resonnere seg frem til en løsning.

Oppgaven elevene skal gjøre ser slik ut:



Samron og Eva skal lage en bro over en liten bekk. De må bruke alle plankene på tegningen og det må være tre planker i bredden.

Hvordan kan plankene legges? Bevis at dere har funnet riktig svar.

Hvordan kan plankene legges hvis ikke alle plankene må brukes? Det skal fortsatt være tre planker i bredden. Bevis at dere har funnet alle mulige løsninger.

Oppgaven ble gitt muntlig til elevene av læreren, og elevene fikk mulighet til å hente seg konkreter av plankebitene som de kunne bruke for å løse oppgaven. I samtale med lærer ble oppgaven endret fra «hvordan kan plankene legges hvis det skal være fem planker i bredden» til «hvordan kan plankene legges hvis ikke alle plankene må brukes?».

I oppgave 1 er det riktige svaret 14 meter. I oppgave 2 går det an å lage fem mulige lengder på broen; 9 meter, 11 meter, 12 meter, 13 meter og 14 meter.

3.7 Analysemetode

Siden en del av min problemstilling er å finne ut om det er noen kjønnsforskjeller når elevene beviser, startet jeg med å sortere elevsvarene etter kjønn og klasse. Det vil si at alle svarene som ble gjort av jenter i den ene klassen ble plassert i en bunke og guttene i en annen. Elevsvarene ble stiftet sammen i par slik at jeg lettere kunne se hvilke par som hørte sammen. Siden elevenes argumentasjon i helklassesamtalen skulle utfylle de skriftlige svarene valgte jeg å skrive de muntlige svarene på arkene til de respektive elevene. Dette gjorde jeg for å lettere forstå det elevene hadde tenkt og gjort mens de jobbet. I observasjonsnotatene mine skrev jeg en «j» eller «g» foran nummeret til eleven slik at jeg kunne se hvor mange jenter og gutter som hadde deltatt i helklassesamtalen og hva de hadde sagt. På denne måten kunne jeg også analysere argumentasjonen slik at jeg så hvor mange av jentene og guttene som tilfredsstilte kravene til bevis.

	Empirisk Argumentasjon		Systematisk gjennomgang				Konkreter	Feil
	Naiv empirisme	Avgjørende eksperiment	Systematisk gjennomgang	Direkte regning	Multimodal argumentasjon	Muntlig		

Tabell 2: Analysekategorier

Neste steg i analysen var å lage mine egne kategorier for bevis. Jeg utviklet analyseskjemaet mitt flere ganger underveis slik at elevsvarene skulle passe inn i skjemaet. De første kategoriene jeg startet med kalte jeg for *empirisk argumentasjon, bevis og konkreter*. Underveis mens jeg plasserte elevsvarene inn i kategoriene så jeg at noen av elevsvarene ikke passet inn under hovedkategorien «*konkreter*», og jeg bestemte meg derfor for å legge til en ekstra kategori. Denne kategorien kalte jeg for *feil*. Dette gjorde jeg fordi noen av elevene hadde misforstått oppgaven og dermed ikke klarte å svare på oppgaven. De elevsvarene som faller inn under kategorien *konkreter* vil ikke gi meg nok informasjon til å analysere, og de vil derfor bare bli inkludert når jeg analyserer det store bildet som f.eks. hvor mange av hvert kjønns bevis som tilhører hvilken kategori.

Neste steg var å lage passende underkategorier til hver hovedkategori. Under kategorien *empirisk argumentasjon,* lagde jeg to underkategorier; *naiv empirisme* og *avgjørende eksperiment.* Denne kategorien lagde jeg for de elevsvarene som ikke kan bli kategorisert som bevis, men som likevel har funnet riktig svar. Den neste hovedkategorien *bevis,* delte jeg inn i fire underkategorier; *systematisk gjennomgang, tekst, muntlig* og *regning.* Jeg har valgt de underkategoriene basert på hvilke muligheter elevene har hatt til å bevise, gjennom muntlig argumentasjon, skriving, regning eller en systematisk gjennomgang av mulige løsninger.

Da jeg plasserte elevsvarene inn i disse underkategoriene måtte jeg endre på to av underkategoriene. Jeg endret kategorien *tekst* til *multimodal argumentasjon* fordi noen av elevsvarene ikke kunne bli sett på som bevis med bare en representasjonsmetode. Jeg endret også underkategorien *regning* til *direkte regning,* dette gjorde jeg fordi begrepet *regning* også kan brukes om de elevsvarene som blir plassert under *systematisk gjennomgang*. Jeg ville skille mellom de to kategoriene og valgte jeg derfor å bytte til *direkte regning*. Skjemaet ble også delt inn etter klasse og oppgave.

Videre begynte jeg å plassere elevsvarene inn i analyseskjemaet mitt. Dette ble gjort flere ganger slik at jeg ble sikker på at alle elevsvarene ble kategorisert likt. Etter at jeg hadde begynt å skrive på resultat- og analysekapittelet mitt fant jeg ut at flere av elevsvarene som jeg hadde kategorisert som bevis ikke tilfredsstilte Stylianides (2007) sine kriterier for bevis på barneskolen. Derfor måtte jeg endre på analysen min, og jeg bestemte meg for at hovedkategorien *bevis* heller skulle hete *systematisk gjennomgang*. Det finnes flere måter å jobbe systematisk på, og jeg har derfor valgt å skille mellom de ulike representasjonsmetodene. Noen av elevsvarene vil bli kategorisert som ren *systematisk gjennomgang,* andre vil høre til underkategoriene til systematisk gjennomgang; *direkte regning, multimodal argumentasjon* og *muntlig*. Under vil jeg definere hva jeg mener med de enkelte kategoriene.

Empirisk argumentasjon:

Under empirisk argument har jeg to underkategorier; naiv empirisme og avgjørende eksperiment. De to underkategoriene baserer seg på Stylianides (2009) definisjon på empirisk argument.

Naiv empirisme

Elevsvarene jeg plasserer under naiv empirisme har enten bare kommet med riktig løsning, eller så har de jobbet mer systematisk, men argumentasjonsmetoden er ikke holdbar som bevis. Flere av elevsvarene som blir plassert under denne kategorien er på god vei til å føre et bevis, men argumentasjonen deres tilfredsstiller ikke de tre kriteriene for bevis på barneskolen (Stylianides, 2007).

Avgjørende eksperiment

På grunn av type oppgave elevene skal løse vil ingen av svarene bli kategorisert som avgjørende eksperiment. Det vil si at oppgaven ikke legger opp til at elevene strategisk kan lete etter moteksempler.

Systematisk gjennomgang

Med systematisk gjennomgang mener jeg at elevene systematisk går gjennom mulige løsninger for å finne riktig svar. Dette kan de gjøre ved å bruke valgtrær, lister, direkte regning, multimodal argumentasjon eller bevise muntlig. Jeg har valgt å skille mellom ulike måter elevene kan arbeide systematisk på, og derfor vil noen av elevsvarene som faller inn under denne kategorien bli plassert i ulike underkategorier basert på representasjonsmetode.

Systematisk gjennomgang

De som har gått systematisk gjennom ulike plankekombinasjoner, enten ved bruk av lister eller valgtrær, og som klarer å vise at de har funnet riktig løsning vil bli plassert under denne kategorien.

Direkte regning

Med dirkete regning mener jeg de elevsvarene som systematisk viser hvordan de kom frem til løsningen. De elevsvarene som blir plassert i denne kategorien har valgt å addere summene til plankebitene og deretter dividere på tre, for så å finne plankekombinasjoner til summen de fikk.

Multimodal argumentasjon

I denne kategorien vil elevsvar som bruker flere representasjonsformer for å argumentere for riktig svar bli plassert. Den ene representasjonsformen alene vil ikke være holdbar som bevis, men sammen vil de støtte hverandre og gjøre argumentasjonen sterkere.

Muntlig

Denne kategorien ble laget for den muntlige argumentasjonen i helklassesamtalen, etter at elevene hadde delt sine fremgangsmåter fra oppgave 2, om hvorfor det ikke går an å lage en bro som er lenger enn 14 meter.

Konkreter

De elevene som har levert blankt har jobbet med konkreter og har ikke skrevet ned noe på arket sitt. Derfor har de blitt plassert i denne kategorien.

Feil

Det var også noen elever som ikke har klart å løse oppgavene og elevsvarene deres vil bli plassert i denne kategorien.

3.8 Forsker som feilkilde

Siden jeg skal analysere elevsvar og elevers argumentasjon ved bruk av en analytisk vurdering må jeg bruke en passende modell. Stylianides (2007) kommer med tre karakteristiske trekk som et argument må følge for at det skal gjelde som bevis. Modellen baserer seg på tre trekk som skal være sanne og kjente for en gitt gruppe elever. Det som gjør det vanskelig å bruke denne modellen i et analysearbeid der en ikke kjenner til de sosiomatematiske normene i et klasserom er at en ikke nødvendigvis vet hva som er kjent og sant for elevene i klassen. Det er også vanskelig å skille de tre kriteriene fra hverandre fordi de overlapper hverandre. Så min studie er basert på generelle antakelser om hva som burde være kjent i en norsk 5. klasse. Samtidig har jeg sett på de representasjonsformene som hyppig går igjen i klassene, noe som gir meg et bedre inntrykk av hva elevene er vant med å bruke. Min inndeling av elevsvar vil være farget av min tolkning av de tre kriteriene, og vil derfor kanskje ikke stemme overens med hva andre ville tolket dem som.

Kapittel 4: Presentasjon av funn og analyse

I analysen vil jeg fokusere på hvordan elevene gjennomførte bevis, og jeg vil analysere svarene etter hvilken kategori de oppfyller kriteriene til. Innenfor hver enkelt kategori vil jeg analysere eksempler fra de to oppgavene hver for seg. Dette har jeg gjort for å skape en struktur i analysen, og for å forhindre eventuelle gjentakelser. Jeg har valgt å ikke analysere klassene hver for seg fordi det ikke var så stor forskjell i argumentasjonsformer, jeg vil heller komme med en generell analyse av de to klassene der jeg vil belyse eventuelle kjønnsforskjeller i argumentasjonsformer og bevisføring. I analysen vil den muntlige argumentasjonen bli koblet til bevisføringen til elevene, dette gjør jeg for å kunne utfylle de skriftlige svarene. Argumentene elevene kom med i helklassesamtale 1 vil bli koblet sammen med oppgave 1 og argumentene i helklassesamtale 2 med oppgave 2. Jeg vil underveis i analysen bruke Stylianides (2007) sine tre kriterier for bevis på barneskolen aktivt.

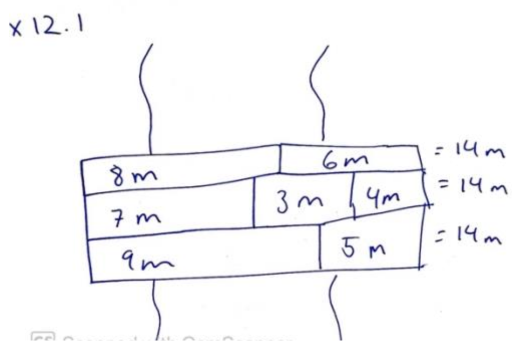
Se vedlegg 3 for inndeling av elevsvar i kategorier.

4.1 Oppgave 1

4.1.1 Naiv empirisme

Generelt for de to klassene var det flest elever som kom med en empirisk argumentasjon, og det var flest jenter som falt under denne kategorien. Et typisk trekk ved de elevene som hadde en empirisk argumentasjon var at de bare skrev ned det riktige svaret uten å vise hva de hadde gjort og de hadde ofte en argumentasjon som lød slik; *vi bare prøvde oss frem, vi brukte alle plankene, vi bare gjorde noe, vi gjetta og vi bare plussa sammen*. Dette er klassiske eksempler på naiv empirisme og vil ikke kvalifiseres som bevis i følge Stylianides (2007). Denne argumentasjonen kom frem både skriftlig og muntlig.

Et eksempel på naiv empirisme er Anna (x12.0) og Astrid (x12.1) sin argumentasjon. De tegnet en figur for å vise hvordan de hadde lagt plankene, og skrev deretter opp lengden på hver enkelt planke. De hadde skrevet summen av lengden på broen ved siden av. I helklassesamtalen argumenterte de for svaret sitt; «vi bare gjorde noe, vi tok plankene sammen og så ble det riktig. Alle plankene ble like lange». Elevene viser ikke hvordan de har kommet frem til den riktige løsningen og den muntlige argumentasjon utfyller ikke den skriftlige, noe som gjør at

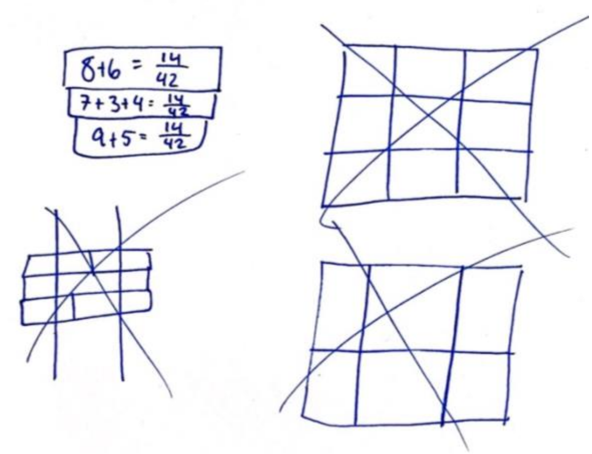


Figur 4: Anna - oppgave 1

jeg kategoriserer svaret som naiv empirisme. Svaret tar heller ikke høyde for at det kan være andre mulige løsninger. I følge Stylianides (2007) vil ikke svaret til Astrid og Anna oppfylle kravene for bevis. De bruker representasjonsformer som er kjente for elever ved å tegne opp broen og sette inn målene for plankebitene, men de argumenterer ikke for eller kommer med aksepterte utsagn som forklarer hvorfor svaret deres er riktig.

Et annet eksempel på en argumentasjon som faller inn under kategorien naiv empirisme er elevsvaret til Bjarne (y3.0) og Bilal (y3.1) fra klasse y. De hadde en interessant argumentasjon der de adderte sammen plankelengder slik at de fikk lengden på broen til å bli 14 meter, og deretter delt 14 på 42. 42 er summen til alle plankebitene addert sammen. I helklassesamtalen forklarer de hvordan de hadde funnet frem til summen 42. Bjarne forklarte også hvordan de hadde prøvd å dele summen på forskjellige tall, men at de ikke hadde fått det til;

> Først fikk vi 42. Vi la sammen alle plankene, så prøvde vi å dele på 40, men det gikk ikke. Så vi tenkte det var lettere å dele på tiere, men det gikk heller ikke. Så vi prøvde oss frem med plankebitene.



Figur 5: Bilal - oppgave 1

Argumentasjonen deres viser at de prøvde ut ulike måter å finne lengden på broen, men at de ikke helt forstod hvordan de skulle gjøre det. Det endte dermed med at de prøvde seg frem til de fant riktig løsning. Hvis vi ser tilbake på at de delte lengden på broen med 42, så kan det nesten virke som at de har skrevet hver plankelengde i broen som en brøk. På en side kan det virke som at Bjarne og Bilal har klart å argumentere for riktig svar ved at de viser at;

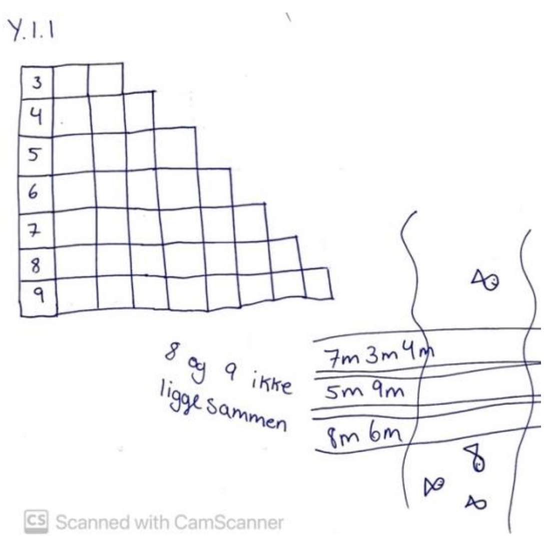
$$\frac{14}{42} + \frac{14}{42} + \frac{14}{42} = \frac{42}{42} = 1$$

Det som gjør at denne argumentasjonen ikke kan regnes som gyldig er at argumentasjonen ikke følger de karakteristiske trekkene til bevis på barneskolen. For det første er den muntlige argumentasjonen deres empirisk ved at de sier at de bare har prøvd seg frem noe som kan tyde på at de er fornøyde med at svaret de fikk var den eneste mulige løsningen. For det andre er den skriftlige argumentasjonsmetoden deres ikke kjent og lett tilgjengelig for de andre elevene i klassen. De bruker en representasjonsform som er kjent for elevene, men de kommer ikke med aksepterte utsagn som kan forklare hvorfor deres svar er det rette. Derfor vil ikke elevsvaret til Bjarne og Bilal bli kvalifisert som bevis i følge (Stylianides, 2007). Elevene hadde også tegnet opp to rutenett på arket sitt som de har krysset over. Det er ikke lett å tolke hva elevene har tenkt rundt dette, men kladdingen kan ha vært en del av deres resonnering rundt oppgaven.

Et annet elevpar, Colin (y1.0) og Christian (y1.1) fra klasse y, uttrykte også at de hadde prøvd seg frem. De viste en glede som kan tyde på en mestringsfølelse over at de fant riktig løsning etter mye prøving og feiling;

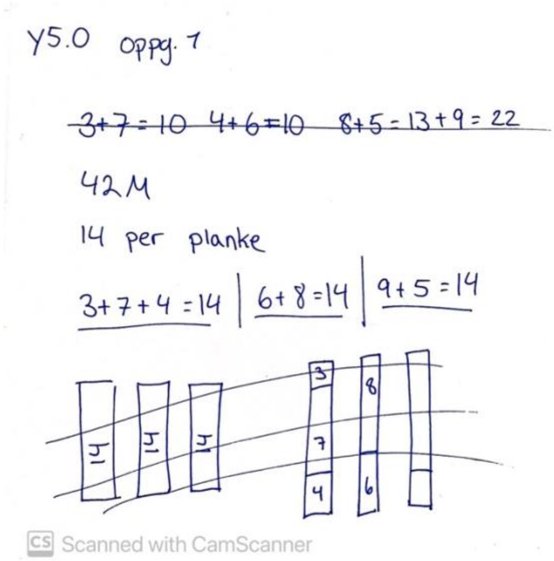
> **Christian:** Vi trodde vi aldri ville få det til, men plutselig gikk det! Vi satt plankene sammen.
>
> **Colin:** Vi ga opp nesten, vi fant deler og satt dem sammen.

Colin og Christian nøyer seg med å prøve ut forskjellige ting før de fant riktig svar. Hadde de dokumentert denne prøvingen kunne de ha nærmet seg et gyldig argument. Men siden de ikke viser hvordan de kom frem til svaret og de ikke hadde en systematisk fremgangsmetode vil ikke argumentasjonen deres være gyldig som bevis. Colin og Christian hadde tegnet opp en elv med en bro over der de hadde skrevet inn plankebitene som hører sammen, og skrevet «8 og 9 ikke ligge sammen». Hva de har ment med det er ikke godt å si, men det kan virke som at de prøver å bevise at de har funnet riktig plankekombinasjon og at andre plankebiter som 8 meter og 9 meter ikke kan settes sammen. De har også tegnet opp alle plankebitene og delt dem inn i enere. Dette kan de ha gjort for å bedre se lengden på plankebitene. Broen de har tegnet er en representasjonsform som er kjent hos medelevene, men de kom ikke med en argumentasjon, skriftlig eller muntlig, som kan bli ansett som gyldig, og de brukte heller ikke aksepterte utsagn som kunne forklare hvorfor deres løsning var riktig. Dermed blir ikke argumentasjonen deres ansett som gyldig i henhold til Stylianides (2007) tre kriterier for bevis.



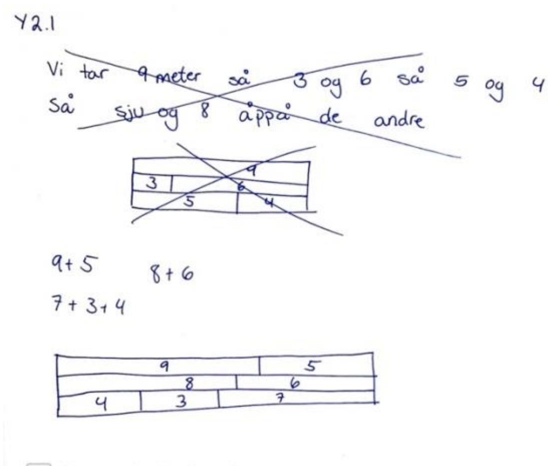
Figur 6: Christian - oppgave 1

Dennis (y5.0) og Danilo (y5.1) fra klasse y argumenterte på en måte som gjør at de er på god vei til å føre et bevis. De viser at de la sammen alle plankebitene og fikk summen 42. Så skriver de at de får *14 per planke* og setter opp regnestykker som blir 14 uten å bruke samme tall to ganger. De tegnet også opp plankebitene for å vise hvordan de skulle bli satt sammen. I helklassesamtalen kom Dennis med en argumentasjon som forklarte arbeidet de hadde gjort på arket; «Vi la sammen summen av alle plankene og fikk 42. Så delte vi på 3 og fikk 14. Så prøvde vi å finne plankebiter som ble 14.». I den muntlige argumentasjonen får vi en forklaring på hvorfor de fant frem til at lengden på broen skulle være 14 meter. Elevene argumenterer ikke for hvorfor de valgte å dele på tre, og de har heller ikke en systematisk gjennomgang som viser at denne metoden faktisk stemmer. I tillegg sier Dennis at de prøvde *å finne plankebiter som ble 14*, dette er et eksempel på naiv empirisme ved at de gir uttrykk for at *prøving* holder som bevis på at de har funnet riktig svar. I henhold til de tre kriteriene for bevis så vil jeg si at Dennis og Danilo er på vei til å komme med et bevis. Den muntlige argumentasjonen deres blir kategorisert som naiv empirisme, men den har elementer av utsagn som potensielt kunne blitt forklart bedre som igjen ville gjort argumentasjonen sterkere: «vi la sammen summen (...) og fikk 42. Så delte vi på 3». Dermed er det bare det tredje kriteriet til bevis som blir oppfylt; hensiktsmessig bruk av representasjonsformer (Stylianides, 2007).



Figur 7: Dennis - oppgave1

Elevparet Ivar (y2.0) og Ian (y2.1) hadde en multimodal fremgangsmåte ved at de kombinerte tekst, tegninger og muntlig argumentasjon for å bevise at de hadde funnet riktig svar. Det første jeg legger merke til er at elevene har skrevet en skriftlig tekst som viser hva de har gjort. Slik jeg tolker det så har de laget en bro med en lengde på 9 meter og tatt de resterende plankene og lagt de over de andre. Deretter må de ha sett at de har gjort feil, siden de har krysset over svaret sitt. Det ser også ut som at de har satt sammen kombinasjoner av plankebiter til å få lengden ni, men denne

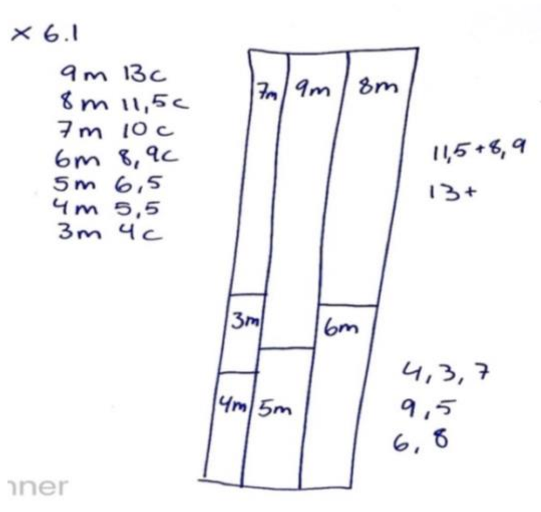


Figur 8: Ian - oppgave 1

løsningen gir en planke til overs. Deretter har de skrevet opp tre regnestykker som alle blir 14, og tegnet en tegning som viser hvordan broen blir lagt sammen. Arbeidet på arket er ikke utfyllende nok og vil ikke gi en klar nok begrunnelse på hvorfor plankekombinasjonene er de riktige og ikke noen andre kombinasjoner. I helklassesamtalen derimot argumenterer de for at de har prøvd flere lengder; «Vi prøvde på 11 men det gikk ikke. Så prøvde vi 13. Men med 14 funka det.». Selv om de sier at de har prøvd flere lengder vil ikke den skriftlige eller den muntlige argumentasjonen være gyldig som bevis. Elevene viser til en systematisk argumentasjon og de bruker hensiktsmessige representasjoner, men de kom ikke med aksepterte utsagn som kan bevise at de hadde funnet riktig svar (Stylianides, 2007). Hadde de forklart hvorfor de andre lengdene ikke fungerte og argumentert for at det alltid ble en planke til overs ville jeg ha kategorisert argumentasjonen deres som gyldig. Siden de ikke gjorde det og de bare kom med få eksempler og en argumentasjon som; «vi prøvde(...) men med 14 funka det», blir elevsvaret kategorisert som naiv empirisme.

Elevparet Kari (x6.0) og Kaja (x6.1) hadde valgt å måle plankekonkretene for å finne riktig løsning. De listet opp plankebitene og satt den faktiske lengden på konkretene ved siden av. De hadde også tegnet opp broen og delt den inn i de ulike plankebitene. Ved siden av tegningen hadde de prøvd å legge sammen målene med linjal, men det ser ut som at de forkastet den ideen, for rett under skrev de opp de plankekombinasjonene som ble 14 meter. I helklassesamtalen sa de dette;

> **Kari**: Vi målte med linjal. Det ble riktig med en gang.
>
> **Kaja**: Vi prøvde oss frem.



Figur 9: Kaja - oppgave 1

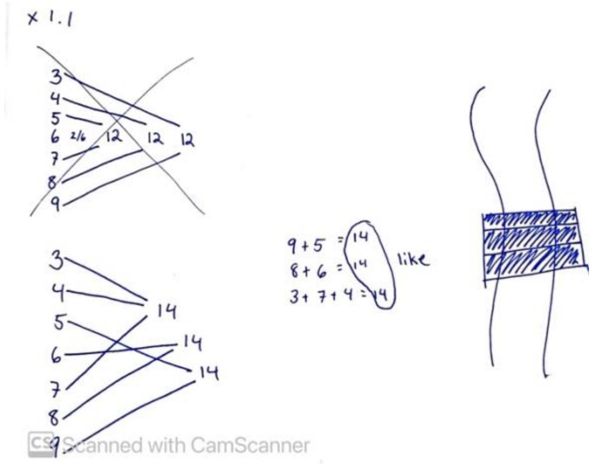
Det de sier i helklassesamtalen bekrefter det jeg tolket av den skriftlige argumentasjonen deres. Både den skriftlige og den muntlige argumentasjonen deres har typiske trekk fra naiv empirisme. De bruker argumentasjoner som; «vi prøvde oss frem» og «det ble riktig med en gang». Dette tyder på at de ikke ser behovet for mer utforskning eller forklaring på hvorfor deres løsning var riktig. Det at de bare skriver opp løsningen er gjennomgående hos mange av elevsvarene som har blitt kategorisert som naiv empirisme. Kaja og Kari bruker en representasjon som er kjent for elever ved at de tegner opp broen, men de bruker ikke utsagn som er aksepterte og sanne når de sier «det ble riktig med en gang» og elevsvaret deres oppfyller derfor ikke Stylianides (2007) kriterier for bevis.

4.1.2 Systematisk gjennomgang

Det var ikke mange elever som jobbet systematisk for å finne riktig svar, og det var bare et par elevpar fra hver klasse som gjorde dette. Elevparet som kom med et gyldig argument i klasse x jobbet systematisk ved at de satt opp en form for valgtre, og elevparene i klasse y som kom med et gyldig argument ved bruk av direkte regning. Siden det ikke var noen elevpar som klarte å finne alle plankekombinasjonene var det ingen som kom med et gyldig argument på oppgave 2.

4.1.2.1 Systematisk gjennomgang

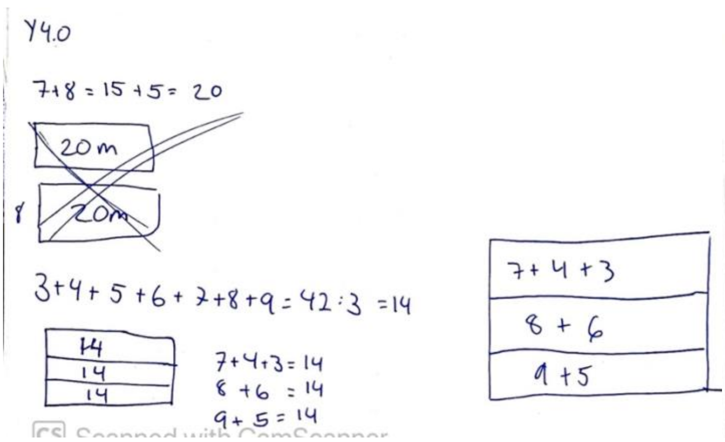
Elevpar Gunnhild (x1.0) og Gyda (x1.1) fra klasse x valgte å sette opp en form for valgtre der de satt streker fra lengden på broen til de ulike plankebitene. På grunn av valgt metode kan en lettere se at det må være tre plankebiter på den ene lengen. Dette har de vist ved å prøve kombinasjoner med lengden 12 meter. Der ble plankebiten 6 meter til overs, og det ser ut som at Gyda og Gunnhild har resonnert rundt hvorfor det ble en planke til overs og funnet ut at det må være tre planker på den ene lengden for at det skal gå opp. Til motsetning med de andre elevsvarene som har brukt en systematisk gjennomgang, men som ikke har gått gjennom alle mulige løsninger, så har jeg valgt å klassifisere dette svaret som et gyldig argument fordi valgtrærne viser at den ene plankelengden må inneholde tre plankebiter for at alle plankebitene skal bli brukt for å lage broen. Hadde de andre elevsvarene som ble kategorisert som naiv empirisme satt opp en liste over plankebitene og krysset dem ut mens de lagde kombinasjoner kunne det hjulpet dem med å få et gyldig argument. Argumentet til Gyda og Gunnhild tilfredsstiller de tre kriteriene for bevis på barneskolen (Stylianides, 2007). De bruker hensiktsmessige representasjoner for å få frem argumentet sitt, de resonnerer på en måte som er kjent for medelever ved at de setter et kryss over valgtreet med feil løsning og de bruker aksepterte utsagn som er sanne og lett tilgjengelige når de setter ring rundt lengden 14 og skriver *like*.



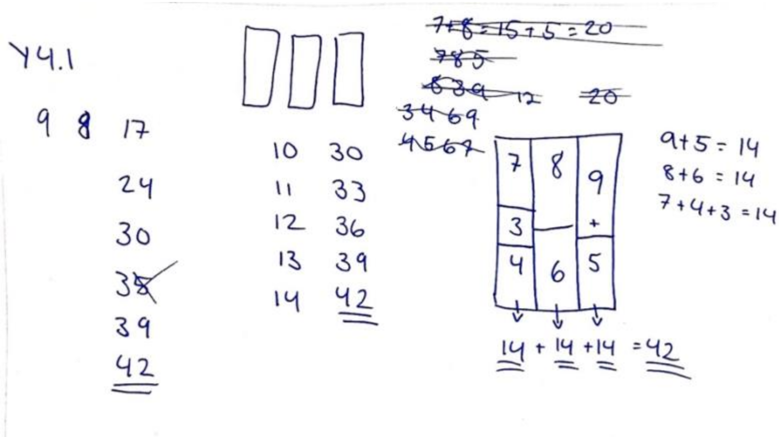
Figur 10: Gyda - oppgave 1

4.1.2.2 Direkte regning

I denne underkategorien var det bare ett elevpar som klarte å gjennomføre en argumentasjon som kan regnes som gyldig.



Figur 11: Hakim - oppgave 1



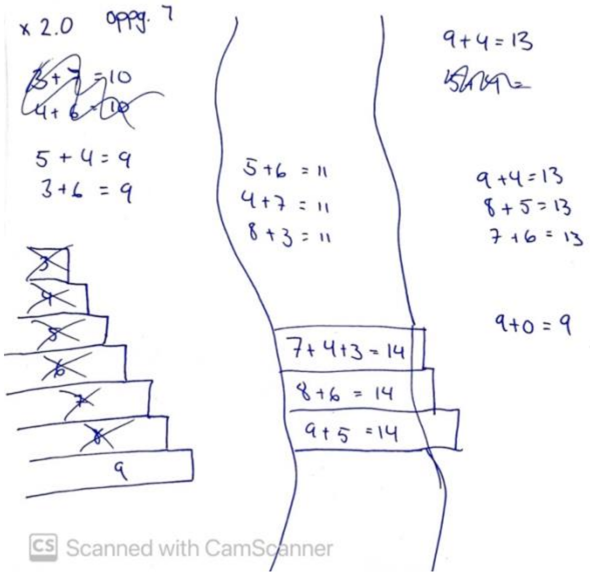
Figur 12: Huzaifa - oppgave 1

Elevparet Hakim (y4.0) og Huzaifa (y4.1) har arbeidet godt for å bevise at de har funnet riktig svar. Jeg velger å bruke arbeidstegningene til begge elevene fordi de to arbeidstegningene viser deres argumentasjon mye tydeligere sett i lys av hverandre. Jeg vil påpeke at de to elevene samarbeidet. Jeg starter med Hakim sin argumentasjon. Han har lagt sammen tre planker som blir til 20 meter, og deretter tegnet opp to planker med lengde 20 meter. Det er ikke lett å forstå hva han har tenkt her, men det ser ut som at han har prøvd seg frem med en lengde som er altfor lang og som de ikke har nok planker til å lage. Deretter har han lagt sammen alle plankebitene og dividert på 3. Dette har han nok gjort fordi bredden på broen skulle være tre planker med lik lengde. Nå har han funnet lengden på broen og kan sette sammen plankebiter som blir 14 meter. Han viser hvordan broen skal se ut ved å tegne et rektangel som er delt inn i tre, der han satt inn hvilke plankebiter som hører sammen. Jeg legger merke til at Hakim bruker likhetstegnet feil i sin utregning. Han har ved flere anledninger brukt likhetstegnet i en sammenheng der summen på hver side av likhetstegnet ikke er *lik*. Det sammen kan vi se hos Huzaifa også.

Huzaifa har satt opp argumentasjonen sin på en litt annen måte, men den følger samme struktur som Hakim sin. Arbeidstegningen hans er litt rotete og en kan ikke se ved første øyekast hva han har tenkt, men hvis vi ser på hva Hakim gjorde, ser vi at Huzaifa også startet med å prøve å lage en bro med lengde 20 meter. Han har satt sammen tre og tre planker som ble 20 meter, slik som dette; $7 + 8 = 15 + 5 = 20$ og $8 + 3 + 9 = 20$. Her ser det ut som han ikke har tenkt over at plankene bare kan brukes en gang, for 8 blir brukt to ganger. De neste kombinasjonene hans blir 22 meter og han stryker ut det han har gjort og begynner på nytt. Han har også satt opp en liste der han starter med en kort lengde på broen og multipliserte den med tre; $10 \times 3 = 30, 11 \times 3 = 33$. Dette gjør han til han får den totale summen til å bli 42. Huzaifa setter to streker under 42 for å vise at det må være den totale summen. Han lager en illustrasjon av broen der han setter en pil ned fra plankebitene og viser at lengden blir 14, og at $14 + 14 + 14 = 42$. Ved å se Hakim og Huzaifa sin argumentasjon i lys av hverandre vil jeg si at de kommer med en gyldig argumentasjon. Hakim sitt elevsvar alene ville ikke ha blitt kategorisert som et gyldig argument siden han ikke viser hvorfor 42 er den riktige løsningen, men Huzaifa derimot kommer med et gyldig bevis i form av at han systematisk går gjennom ulike lengder på broen og viser at broen må ha lengden 14 meter for at alle plankebitene skal bli brukt. Samtidig viser ikke Huzaifa hvordan han kom frem til at alle plankebitene lagt sammen blir 42, det gjorde derimot Hakim. Derfor vil jeg kategorisere de to elevsvarene i lys av hverandre som bevis. De oppfyller de tre kriteriene til Stylianides (2007) for bevis på barneskolen ved at de bruker representasjonsformer som er hensiktsmessige – lister, tegninger, regnelovene, piler –, de resonnerer på en måte som er kjent og sann for en gitt gruppe elever ved at de setter opp fremgangsmåten sin, og krysser ut de som ikke kan brukes. De bruker også aksepterte utsagn, dette viser de ved å sette piler ned fra bro-modellen til lengden og adderer dem sammen slik at det er lett å se at de tre lengdene sammen blir 42.

4.1.2.3 Multimodal argumentasjon

I denne kategorien var det bare ett elevpar som førte en gyldig argumentasjon ved hjelp av multimodal argumentasjon. Ved første øyekast virker det som at det muntlige og det skriftlige svaret til Fredrik (x2.0) og Farhad (x2.1) ikke stemmer helt overens. Det skriftlige svaret viser at de har prøvd å lage kombinasjoner av planker til ulike lengder av broen før de fant ut at lengden på broen skulle være 14 meter. Her har de gått systematisk gjennom de ulike mulige kombinasjonene før de fant den som stemte. De viser også at de har brukt alle plankene ved å krysse av for de plankene de har brukt. Den muntlige argumentasjonen deres virker å



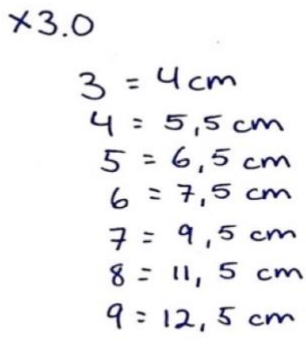
Figur 13: Fredrik - oppgave 1

vise det motsatte av det de har gjort på arbeidsarket sitt; «Vi prøvde masse. Vi prøvde med 10´er venner. Det var egentlig masse som funka, men det ble alltid en til overs». Hadde vi sett på den muntlige argumentasjonen alene ville en ikke kunne se at de hadde funnet riktig svar, men ser vi den skriftlige og den muntlige argumentasjonen i lys av hverandre så utfyller de to svarene hverandre. Den muntlige argumentasjonen styrker den skriftlige ved at de viser hvorfor de andre kombinasjonene som ikke ble til sammen 14 meter ikke var riktig. Selv om de ikke har gått gjennom alle lengdene fra 9 til 14 så viser de på en god måte at de andre løsningene ikke stemmer. Det at de hoppet over lengden 12 meter gjør ikke noe siden, ut ifra deres beregninger, det ikke vil være nødvendig å sjekke om kombinasjonene til 12 meter kan være en løsning. Derfor har jeg valgt å kategorisere denne argumentasjonens som multimodal fordi den skriftlige og den muntlige argumentasjonen sammen gjør at argumentasjonen blir gyldig. De bruker aksepterte utsagn; «(...)det ble alltid en til overs», de har brukt hensiktsmessige representasjoner i form av muntlig og skriftlig argumentasjon og de har resonnert på en måte som de andre elevene kan forstå ved at de har skrevet opp mulige løsninger og vist det riktige svaret ved at de tegnet en bro med de riktige målene. Dette gjør at deres argumentasjon blir ansett som gyldig i følge Stylianides (2007) sine tre kriterier for bevis.

4.1.3 Feil

Det var to elevpar som ikke klarte å finne en løsning på oppgave 1, og de ble plassert under denne kategorien.

Det første elevparet, Jannike (x3.0) og Jana (x3.1), hadde valgt å måle plankekonkretene. De satt opp en liste og skrev ned hvor lange de enkelte plankebitene faktisk var, men de klarte ikke å sette dem sammen til kombinasjoner slik at de fant lengden på broen. I helklassesamtalen sa de; «vi prøvde å måle de og sette sammen plankene. Vi fikk det ikke til, men vi skjønte det nå». De forklarer at de hadde prøvd å måle plankene for så å sette de sammen. Dette fikk de ikke til, men etter at flere elever hadde delt sine argumentasjoner forstod de hvilke plankebiter som hørte til hvor.



Figur 14: Jannike - oppgave 1

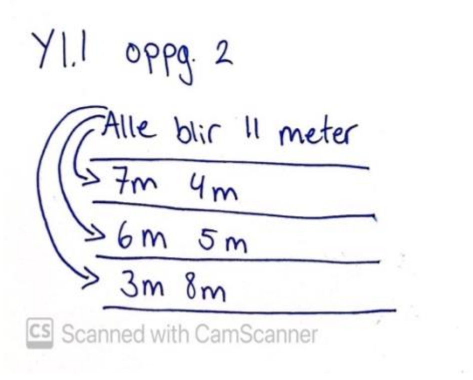
Det andre elevparet i denne kategorien er Luna (x11.0) og Line (x11.1). De har brukt to like plankebiter og satt dem sammen til lengden 8 meter, deretter har de brukt 8 meter planken to ganger og lagt de ved siden av. For å forklare fremgangsmåten hadde de tegnet hvordan plankene skulle settes sammen og skrevet en forklarende tekst; «Vi tok to 4m planker og to 8m planker og legget det sammen! BOOM!». Det kan se ut som at de har misforstått oppgaven eller så kan de ha syntes den var vanskelig og ikke klart å finne plankekombinasjoner.

Figur 15: Luna - oppgave 1

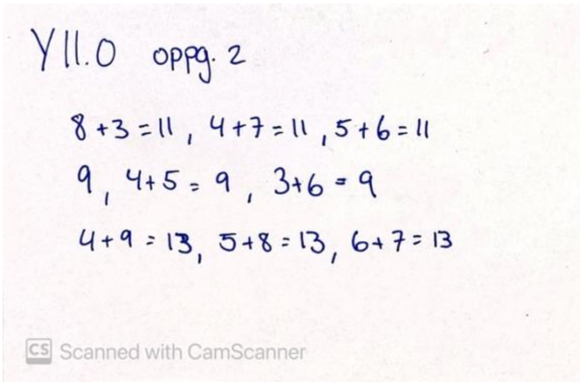
4.2 Oppgave 2

4.2.1 Naiv empirisme

På oppgave 2 var det flere som hadde gjort det samme, noen hadde prøvd å gå systematisk gjennom alle mulige løsninger, men ikke funnet alle, og noen kom bare med én løsning. Dette gjør at veldig mange av elevsvarene i begge klassene blir klassifisert som naiv empirisme. Se bilder for ulike representasjonsmetoder hos elevene.



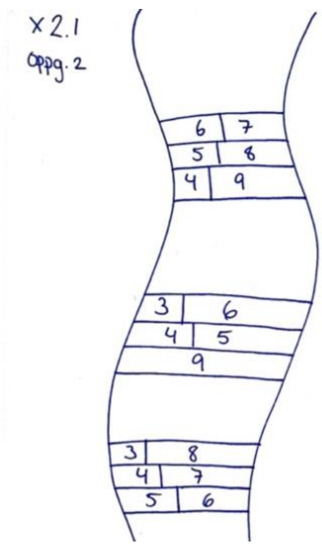
Figur 17: Christian - oppgave 2



Figur 16: Effat - oppgave 2

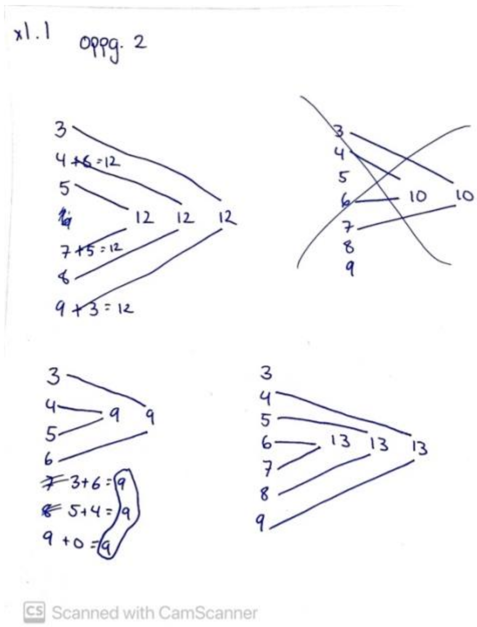
Colin (y1.0) og Christian (y1.1) kom bare med et eksempel på hvordan plankene kan legges hvis de ikke måtte bruke alle plankene på en gang. Dette kan bli karakterisert som naiv empirisme. Effat (y11.0) og Elise (y11.1) har gått mer systematisk til verks. Likevel viser svaret til Effat at de ikke har prøvd alle mulige løsninger, de har heller ikke startet med høyeste eller laveste mulig løsning for så å jobbe seg nedover eller oppover. Det ser mer ut som at de har valgt tilfeldige summer som de har lagd kombinasjoner til. Ved at de ikke har funnet alle mulige løsninger vil argumentasjonen deres bli kategorisert som naiv empirisme. Likevel har de brukt en hensiktsmessig representasjon ved at de satt opp en liste over kombinasjonene. Hadde Effat og Elise klart å finne alle mulige kombinasjoner ville argumentasjonen deres blitt ansett som gyldig.

Fredrik (x2.0) og Farhad (x2.1) fra klasse x har gjort det samme som Effat og Elise, men i stedet for å skrive opp en liste med regnestykkene har de valgt å tegne en elv med tre forskjellige broer som de har delt inn i de forskjellige kombinasjonene til plankebitene. Elevene bruker hensiktsmessige representasjoner i form av en elv med tre forskjellige broer, de resonnerer på en måte som er kjent og sann ved at de skriver opp kombinasjonene til de forskjellige lengdene på broene, men de kommer ikke med aksepterte utsagn som viser at de har funnet alle mulige løsninger. Hadde de to elevparene klart å finne alle mulige kombinasjoner så hadde argumentasjonen deres blitt kategorisert som gyldig, men på grunn av manglende løsninger blir svaret kategorisert som naiv empirisme. Likevel vil jeg si at elevene er på god vei til å komme med et gyldig argument.



Figur 18: Farhad - oppgave 2

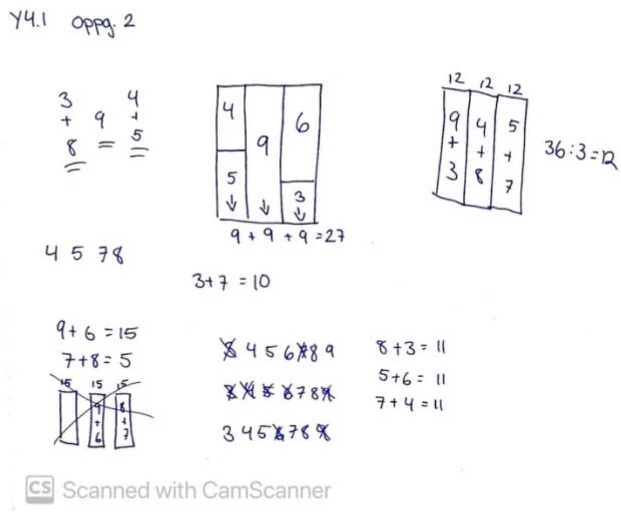
Gunnhild (x1.0) og Gyda (x1.1) har valgt en litt annen tilnærming enn de andre elevparene. De har valgt å sette opp en form for valgtre der de har laget kombinasjoner til de ulike lengdene. De har gått systematisk til verks og satt sammen det høyeste tallet (9), og det laveste tallet (3) til lengden 12, og deretter jobbet seg innover. Dette har de også gjort på de andre summene de har funnet, og en kan tydelig se systemet de har skapt. De har klart å finne tre av fem mulige løsninger, og hadde de funnet alle fem løsningene og klart å argumentere for at det ikke finnes flere løsninger ville argumentasjonen deres blitt kategorisert som gyldig. De har brukt hensiktsmessige representasjoner som klart viser hva de har tenkt, de har argumentert på en måte som er kjent og sann for medelever ved hjelp av valgtrær, men de har ikke brukt aksepterte utsagn som viser at de har funnet alle mulige



Figur 19: Gyda - oppgave 2

løsninger (Stylianides, 2007). Siden de ikke har klart å svare på oppgaven; *bevis at dere har funnet alle mulige løsninger*, blir ikke løsningen deres akseptert som bevis.

Hakim (y4.0) og Huzaifa (y4.1) har klart å finne tre av fem mulige løsninger. De har brukt ulike metoder for å finne de forskjellige løsningene. De har gjort mye likt som de andre elevparene, men det som kanskje skiller seg litt ut fra de andre, er at på to av lengdene de har funnet har de addert sammen plankebitene de har brukt. På lengde ni har de tegnet opp broen og addert sammen plankebitene, satt pil ned til de tre lengdene og til slutt addert de tre lengdene sammen. Det samme har de gjort med lengde 12 meter. På denne lengden har de prøvd å bruke samme fremgangsmåte som på oppgave 1, se kapittel 3.3.2 direkte regning. Det ser ut som de først har funnet plankebiter som til sammen blir 12 meter, og deretter, for å bevise at det er riktig sum, addert sammen de plankebitene de har brukt og delt på tre. De har også, som det eneste elevparet, prøvd å lage en bro med lengden 15. De har brukt hensiktsmessige representasjoner ved å gå systematisk gjennom mulige løsninger og argumentert på en måte som er kjent for elevene. De har ikke brukt aksepterte utsagn som beviser at de har funnet alle mulige løsninger. Derfor vil ikke argumentasjonen deres være gyldig, og elevsvaret blir kategorisert som naiv empirisme.



Figur 20: Huzaifa - oppgave 2

4.2.2 Muntlig

Under denne kategorien var det bare tre elever som var med i den siste helklassesamtalen om hvorfor det ikke går an å lage en bro som er lenger enn 14 meter. Helklassesamtalen fant sted etter at elevene hadde fått jobbet med oppgave 2, og spørsmålet fra læreren kom etter at elevene hadde fått tid til å dele sin argumentasjon med sine medelever.

Jeg vil starte med å analysere argumentasjonen til Farhad som går i klasse x. Her er et utdrag fra samtalen:

> **Lærer:** Var det noen som fikk til å lage lengder med 20? 15?
>
> **Farhad:** *Jeg tror ikke det går.*
>
> **Lærer:** Hvorfor ikke?

Farhad: *Jeg bare tenkte det. Jeg tror ikke det er nok høye tall til å bli 15*

Lærer: Hvordan kan du bevise det?

Farhad: *Fordi vi brukte alle plankene i stad da vi fikk 14. Da går det ikke an å lage lenger.*

Farhad argumenterer for at han tror det ikke finnes høye nok tall til å lage 15. Med høye nok tall tenker jeg at han mener at det ikke er nok plankebiter til å lage en lenger bro. Læreren prøver å få Farhad til å forklare bedre, og spør om han kan bevise at argumentasjonen hans er riktig. Da svarer Farhad at de hadde brukt alle plankene i stad da de lagde en bro med lengde 14 meter og at det derfor ikke gå å lage en lenger bro. Eleven refererer til oppgave 1 der de skulle finne hvordan plankebitene skulle legges hvis de måtte bruke alle plankene til å lage en bro. Da fant de en løsning hvor lengden på broen var 14 meter. Selv om han resonnerer rundt tidligere oppgaver, har han ikke en argumentasjon som forklarer hvorfor 14 meter er den lengste broen de kan lage. Han forklarer seg ikke godt nok til at argumentasjonen vil bli ansett som gyldig. Det at han ikke kommer med et matematisk eksempel, men bare refererer til oppgave 1, gjør at jeg kategoriserer argumentasjonen som naiv empirisme. Han oppfyller de to første kravene til Stylianides (2007) om bevis på barneskolen ved at han bruker aksepterte utsagn og resonnerer på en måte som er kjent for de andre elevene, men han har ikke brukt hensiktsmessige representasjoner for å bevise at hans argumentasjon var riktig. For at en argumentasjon skal bli ansett som gyldig må alle tre kriteriene være oppfylt. Jeg vil si at Farhad er på god vei til å føre et bevis, hadde han bare kommet med noen eksempler ville argumentasjonen hans vært gyldig.

Neste eksempel fra helklassesamtalen er i klasse y med Ivar og Huzaifa. Her er et utdrag fra samtalen;

Lærer: Var det noen som fikk til å lage 15?

Ivar: Nei, det er ikke mulig.

Lærer: Hvorfor ikke det?

Ivar: Hvis vi tar 9+6 får vi 15. Vi får ikke nok til å legge sammen til 15.

Huzaifa: I stad brukte vi alle og i stad var summen 42 og 15+15+15 blir 45.

I dette eksempelet ser vi to forskjellige måter å argumentere på. Ivar sin måte å argumentere på kategoriserer jeg som naiv empirisme. Han starter med å si at det ikke er mulig å lage en bro med lengde 15 meter, og når han blir spurt om hvorfor det ikke går kommer han med bare ett matematisk eksempel som blir 15, og sier deretter at de ikke får nok til å lage 15. Måten han argumenterer på, viser ikke hvorfor det ikke går an å lage en bro som er lenger enn 14 meter. Han kommer med en argumentasjon som er typisk for naiv empirisme og han oppfyller ikke noen av kravene til bevis (Stylianides, 2007). Huzaifa derimot kommer med en argumentasjon som forklarer godt hvorfor de ikke har nok plankebiter til å lage en bro som er 15 meter lang. Han refererer til oppgave 1 der de fant at alle plankebitene addert sammen ble 42. Da var lengden på broen 14 meter, hvis de nå skulle lage en bro med lengde 15 meter ville summen av alle plankene bli 45, og det er tre meter lenger enn plankene de har til disposisjon. Argumentet til Huzaifa tilfredsstiller alle de tre kriteriene for bevis, han bruker hensiktsmessige representasjoner ved at han kommer med et eksempel på hvorfor broen ikke kan være 15 meter. Han resonnerer rundt summen de fikk på forrige oppgave og han bruker utsagn som er aksepterte i elevgruppen; *i stad var summen 42 og 15+15+15 blir 45*.

4.3 Generelt om observasjonen

Elevene virket ivrige i arbeidet med oppgave 1. De uttrykte iveren ved å rekke opp hånda eller rope ut at de hadde endelig klart å finne riktig løsning. Helklassesamtalen ble ledet ved at læreren spurte elevene hvordan de hadde klart å finne løsningen, og hvis noe var uklart, ble elevene spurt om de kunne forklare. Et eksempel på dette er fra et utdrag fra helklassesamtale 1 i klasse y:

> **Lærer**: Hva gjorde dere?
>
> **Bjarne**: *Først fikk vi 42. Vi la sammen alle plankene, så prøvde vi å dele på 40, men det gikk ikke. Så vi tenkte det var lettere å dele på tiere, men det gikk heller ikke. Så vi prøvde oss frem med plankebitene.*
>
> **Lærer**: Så dere satt sammen plankebitene som et puslespill?
>
> **Bjarne:** *Ja.*

Læreren spør om de prøvde seg frem slik en gjør når en jobber med puslespill. Dette spørsmålet ble stilt til flere elever. Det var bare i helklassesamtale 2, etter at elevene hadde fått delt sine argumentasjoner, at læreren etterspurte bevis på om de kunne lage en bro som var lenger enn 14 meter. Det var også flere elever som lurte på om tykkelsen og bredden på plankene var like og om det hadde noe å si for oppgaven. Det var flest jenter som spurte om dette. Da læreren skulle gi elevene oppgave 2 uttrykte hun for elevene at det ikke var så farlig at de ikke fant alle kombinasjonene, men at det viktigste var at de viste hvordan de kom frem til de ulike løsningene. Dette sa hun etter at noen elever uttrykte bekymring over at de skulle finne alle løsningene.

4.4 Generelle funn om kjønn i klassene

Klasse x

I klasse X var det 24 elever med en jevn fordeling av gutter og jenter. Det var seks guttepar og seks jentepar. Det første jeg oppdaget etter å ha plassert elevsvarene fra klasse x inn i analyseskjemaet var at det bare var ett elevpar som hadde klart å føre et bevis, og det var på oppgave 1. Dette elevparet, som var jenter, hadde argumentert godt nok til at elevsvaret deres ble kategorisert som *systematisk gjennomgang*.

Jentene

På oppgave 1 var det tre jentepar som argumenterte med naiv empirisme, ett jentepar argumenterte med systematisk gjennomgang og to jentepar argumenterte feil. På oppgave 2 argumenterte de samme elevparene med lik argumentasjonsmetode som i oppgave 1. Det paret som hadde et gyldig bevis på oppgave 1 klarte ikke å finne alle mulige løsninger på oppgave 2 og ble derfor kategorisert som naiv empirisme. De to elevparene som ikke hadde klart å finne riktig løsning hadde klart å finne en eller flere plankekombinasjoner på oppgave 2 og ble derfor kategorisert som naiv empirisme.

Guttene

Hos guttene var det to elevpar som argumenterte med naiv empirisme og fire elevpar som leverte blankt på oppgave 1. På oppgave to var det fire elevpar som argumenterte med naiv empirisme og tre som leverte blankt. Hos guttene var det også ett elevpar som kom med en argumentasjon for hvorfor det ikke gikk an å lage en bro som var lenger enn 14 meter.

Klasse y

I klasse Y var det 27 elever, med seks guttepar og syv jentepar. I denne klassen var det bare to elevpar som klarte å komme med et gyldig bevis, og det var på oppgave 1.

Jentene

På oppgave 1 argumenterte alle jenteparene med naiv empirisme. På oppgave 2 leverte fire av elevparene blankt mens resten kom med et argument som blir kategorisert som naiv empirisme.

Guttene

Hos guttene var det fire elevpar som argumenterte empirisk, ett elevpar som brukte direkte regning for å bevise, ett elevpar som brukte multimodal argumentasjon for å bevise og ett elevpar som leverte blankt. På oppgave 2 argumenterte fem guttepar empirisk og ett guttepar leverte blankt. I denne klassen var det en gutt som klarte å komme med et gyldig argument for at det ikke går an å lage en bro som er lenger enn 14 meter.

Generelt

To mulige årsaker til at ingen elevpar klarte å komme med et gyldig argument på oppgave 2 kan komme av at de; 1) hadde for kort tid til å prøve å finne alle mulige løsninger, 2) brukte løsningene de fant på oppgave 1, og så derfor ikke hensikten med å prøve å finne flere løsninger. En grunn til at så mange elevsvar ble kategorisert som naiv empirisme selv om de gikk systematisk gjennom mulige løsninger på oppgave 2 kom av at de ikke hadde klart å finne alle mulige løsninger.

Generelle funn hos kjønnene

Ettersom jeg bare har datamateriale fra et lite utvalg elever kan jeg ikke utale meg noe om forskjellen i elevsvarene skyldes kjønn. Jeg vil likevel trekke frem funnene jeg kunne se i mitt datamateriale ut ifra kjønnene. De eventuelle forskjellene kan være rent tilfeldige. Dette vil jeg diskutere nærmere i diskusjonskapittelet.

Hos jentene var det ett elevpar som kom med et gyldig argument og det var tre elevpar under naiv empirisme som var på god vei til å komme med et gyldig argument. Hos guttene var det to elevpar som kom med et gyldig argument og det var fire elevpar under naiv empirisme som var på god vei til å komme med et gyldig bevis. Det vi ser her er at generelt for de to klassene var det flest guttepar som var nærmest å føre et bevis og som hadde klart å føre et bevis. I helklassesamtale 2, da elevene skulle bevise at det ikke gikk an å lage en bro som var lenger enn 14 meter, var det bare gutter som deltok i samtalen. De elevene som ikke klarte å løse oppgaven og som leverte feil svar var jenter, mens det var flere gutter enn jenter som leverte blankt fordi de hadde jobbet med konkreter. I helklassesamtale 1 var det fem jenter og tre gutter fra klasse x og syv gutter og fire jenter fra klasse y som rakk opp hånda og delte sin argumentasjon. I den andre helklassesamtalen var det tre jenter og én gutt fra klasse x og fem gutter og fire jenter fra klasse y som delte sin fremgangsmåte og argumentasjon. Det vil si at det var ni jenter og ti gutter som deltok i helklassesamtale 1 og syv jenter og seks gutter som deltok i helklassesamtale 2.

Kapittel 5: Drøfting

I begynnelsen av denne oppgaven kom jeg med en problemstilling som lød slik; *«Hvordan beviser elever på 5. trinn i matematikk?»*. Jeg kom også med tre underspørsmål som skulle snevre inn problemstillingen;

1. Hvilke argumentasjonsformer bruker elevene når de skal bevise?
2. Hvilke årsaker kan spille inn på hvordan elevene jobber med bevis?
3. Finnes det noen kjønnsforskjeller i deltakelse og mestring når elevene arbeider med bevis?

I dette avsluttende kapittelet skal jeg ved hjelp av teori drøfte det som kom frem i analysen. Jeg vil drøfte problemstillingen min i lys av de tre underspørsmålene. Jeg vil starte med å drøfte elevenes argumentasjonsformer, først generelt og så etter oppgave 1 og oppgave 2. Deretter vil jeg se på mulige årsaker til hvorfor elevene jobber med bevis slik som de gjør. Til slutt vil jeg drøfte funnene ut fra et kjønnsperspektiv.

Siden jeg bare har observert i to klasser kan jeg ikke komme med en generalisering av hvordan elever beviser eller om kjønnsforskjellene, men jeg kan se noen tendenser blant de elevene jeg har observert. Det er de tendensene jeg skal drøfte nå.

5.1 Elevenes argumentasjonsformer

Analysen av elevsvarene til de to klassene viser at de fleste elevene argumenterte empirisk, nærmere bestemt ved bruk av naiv empirisme. Det var bare noen få elevpar som klarte å komme med en gyldig argumentasjon.

Representasjonsbasert argumentasjon er gjennomgående hos de aller fleste elevene i de to klassene. Da elevene fikk oppgaven fikk de beskjed om at de skulle bevise at de hadde funnet riktig svar. Det interessante her, var at nesten alle elevene tegnet en bro over en elv da de skulle bevise at de hadde funnet riktig svar. I følge Barwise & Etchemendy (1996; Hovik & Solem, 2016) vil elever som jobber med figurbevis i større grad bli overbevist om at en antagelse er sann og stemmer. Som tidligere nevnt har Russell mfl. (2011) kommet opp med tre kriterier som må bli oppfylt for at en representasjonsbasert argumentasjon kan regnes som bevis. Mange av elevsvarene under naiv empirisme vil bare oppfylle det første kriteriet, det vil si at de har funnet en representasjon som kan representere løsningen, men at representasjonen de har valgt ikke rommer alle mulige forekomster eller viser hvorfor påstanden er sann. Ta for eksempel elevsvaret til Anna og Astrid. De hadde tegnet opp broen og delt den inn slik at de viste hvilke plankebiter som gikk sammen. Denne representasjonsmetoden går igjen hos flere elevpar. Alene vil ikke tegningen deres vise hvorfor påstanden er sann. Hvis de hadde brukt representasjonsmetoden til å gå systematisk gjennom alle mulige løsninger ville metoden rommet alle forekomster og dermed hadde Anna og Astrid kommet med et gyldig argument (Russell et al., 2011).

Ball & Bass (2003) skriver om resonnering i forhold til bevis. De sier at resonnering må være faglig riktig og at resonnering bygger på det matematiske språket ved bruk av symboler, begreper og definisjoner. Dette tolker jeg som at de mener at matematisk resonnering må være matematisk korrekt. Lithner (2008) kommer med en litt annen definisjon av resonnering. Han mener at den ikke trenger å være basert på formell logikk, men at resonneringen kan være feil så lenge den er fornuftig for den som resonnerer. For de fleste elevene som hadde en argumentasjon som ble kategorisert som naiv empirisme vil deres resonnering passe bedre inn med Lithner (2008) sin definisjon. Jeg tror at for mange av elevene virket deres resonnering fornuftig, men for oss som utenforstående kan den virke lite logisk eller forståelig. Lithner (2008) forklarer at resonnering baserer seg på fire trinn. Disse fire trinnene kan gjenkjennes i elevenes argumentasjon. Elevene har fått utdelt en oppgave som ikke har en åpenbar fremgangsmåte. De måtte derfor foreta et strategivalg. Dette kan vi se ved at elevene har brukt forskjellige metoder. Noen har brukt en systematisk gjennomgang ved bruk av lister, tegninger, direkte regning og multimodal argumentasjon og noen har brukt konkreter. Til slutt har de kommet med en konklusjon der de fant plankekombinasjonene til lengden 14 meter. Elevene har tatt ulike strategivalg, men likevel har de kommet frem til samme løsning.

5.1.1 Oppgave 1

Som vi så i analysen av elevsvarene og observasjonen var det flest elever som argumenterte ved hjelp av naiv empirisme. Det som kjennetegner elevsvarene som ble kategorisert som naiv empirisme, er at de brukte få eller ingen eksempler på hvorfor plankekombinasjonene til lengden 14 meter var den riktige løsningen på oppgave 1. De elevene under denne kategorien, som også kom med et argument i helklassesamtalen, argumenterte ved bruk av naiv empirisme; «vi bare prøvde» og «vi brukte alle plankene». I følge Stylianides (2009) har elever vanskeligheter med å skille mellom bevis og empirisk argumentasjon. Dette kan komme av de sosiomatematiske normene i klasserommet. De sier noe om hva som telles som et gyldig matematisk argument og hva som er matematisk akseptabelt av forklaringer og begrunnelser i klasserommet (Yackel & Cobb, 1996). Ved å bruke kriteriene for bevis laget av Stylianides (2007) vil en kunne forhindre empirisk argumentasjon som bevis.

Russell mfl. (2011) skriver om fire typiske nivåer hos elever som arbeider med argumentasjon og bevis. Nivå tre og fire sammenfaller med Stylianides kriterier for bevis. Dette kan vi se ved å sammenlikne elevsvarene som blir kategorisert som naiv empirisme i forhold til de fire nivåene. Elevene begrunner ved hjelp av konkrete eksempler, altså at de kommer med én eller flere eksempler for å vise at de har funnet riktig kombinasjon, og dette sammenfaller med nivå to i Russells mfl.(2011) fire typiske nivåer. De elevsvarene som har blitt kategorisert som bevis gjennom Stylianides kriterier sammenfaller også med Russell mfl. (2011) sine nivåer. Ta for eksempel Hakim og Huzaifa sitt bevis. De kommer med en matematisk resonnering basert på tegninger og de bruker regnelovene for å finne lengden på broen. En kan diskutere om nivå fire ikke hører til med elevers bevis på barneskolen, men jeg tenker at Hakim og Huzaifa sitt bevis også passer inn under dette nivået. De beviser at den totale lengden på broen må være 14 meter ved at de setter opp en liste over mulige lengder ganget med tre. Da er det bare med lengden 14 meter at alle plankene kan brukes. Når de setter opp en slik liste mener jeg at de bruker regnelovene for å bevise at de har funnet riktig lengde. Likevel må de også bruke en visuell representasjon for å vise hvilke plankebiter som hører sammen for å lage lengden på broen. Dermed mener jeg at deres argumentasjon passer inn med både nivå tre og fire (Russell et al., 2011). Dette er som sagt min tolkning av nivåene.

5.1.2 Oppgave 2

På oppgave 2 var det ingen elever som klarte å komme med et gyldig bevis. De fleste elevene klarte bare å finne mellom én til tre mulige løsninger. Det kan være flere grunner til dette. Den første kan være at de hadde for dårlig tid til å jobbe med oppgaven. På en annen side burde elevene klare å løse oppgaven ganske raskt hvis de hadde jobbet systematisk på oppgave 1. Det var flere elevpar som hadde kommet med to eller flere lengdekombinasjoner på oppgave 1, og en skulle trodd at det da var flere som hadde klart å finne alle mulige kombinasjoner på oppgave 2. Her kommer den andre grunnen til syne. Det kan virke som at de elevene som allerede hadde funnet noen av løsningene på oppgave 1, ikke så hensikten med å finne flere løsninger. Dette kan komme av at oppgaven kanskje ikke ble formulert på en måte som kommuniserte at elevene skulle finne alle mulige løsninger. Hvis det siste er tilfellet kan det komme av misforståelser mellom lærer og meg selv som forsker om mine forventninger av respons til elevene. Det at læreren kommuniserte ovenfor elevene at de ikke trengte å finne alle kombinasjonene til oppgave 2 viser også til at læreren kanskje ikke har oppfattet hensikten med bevisoppgaver. Læreren kan ha sagt dette for at de elevene som ikke ville klart å finne alle kombinasjonene ikke skulle føle at de ikke mestret oppgaven. Dette strider mot hensikten med bevisoppgaver. Hensikten er ikke at de bare skal vise fremgangsmåten, men at de skal argumentere for at de har funnet de eneste riktige løsningene.

5.2 Mulige årsaker til hvorfor elevene argumenterer slik de gjør

Jeg har allerede kommentert noen årsaker til hvorfor elevene argumenterer slik de gjør. I dette delkapittelet skal jeg drøfte lærerens rolle i elevenes arbeid, og hvorfor deres kunnskap om bevis kan gjøre at så mange elever beviser ved hjelp av naiv empirisme.

Stylianides & Ball (2008) skriver om hvor viktig lærerens rolle er for elever som jobber med bevis. Lærerens syn på hva som er nødvendig av svar når en skal bevise smitter over på elevene. Det vil si at kunnskapen læreren har om bevis er veldig viktig for å kunne fremme elevenes argumentasjon. I begge helklassesamtalene var læreren bare ute etter å høre argumentasjonen til elevene. Hun kunne be dem om å forklare nærmere hvis de ikke uttrykte seg godt nok, men hun jobbet ikke mer med elevenes argumentasjon slik at de kunne kommet med en gyldig argumentasjon. Læreren legger ikke opp til at elevene får mulighet til å utvikle og forbedre svarene sine (Shahrill, 2013). Stylianides (2007) kom opp med en modell som kan vise når elevenes argumentasjon går fra det grunnleggende argumentet til det påfølgende argumentet, og om elevenes argument beveger seg over terskelen for bevis. I denne fasen er det viktig at læreren fungerer som en stillasbygger og hjelper elevene med må utvikle beviset sitt. Ta for eksempel argumentasjonen til Ivar og Ian. I helklassesamtalen til oppgave 1 sa de; «vi prøvde på 11 men det gikk ikke. Så prøvde vi 13. Men med 14 funka det.». Her kunne læreren forsøkt å få elevene til å forklare hvorfor det ikke funket med de to første lengdene de hadde prøvd. Kanskje læreren kunne fått elevene til å selv forklare at med de andre kombinasjonene så ville det alltid bli en planke til overs. Som Shahrill (2013) skriver burde lærere oppmuntre elevene til å delta i helklassesamtaler, og det vil jeg si at denne læreren klarte. Hun var interessert i å få flest elever til å delta og dele sine fremgangsmåter i helklassesamtalen. Dette kan ha gjort at hun hadde mindre fokus på å få elevene til å utdype og utvikle svarene sine.

Som nevnt tidligere finnes det tre faser av overbevisning når elever jobber med bevis (Stacey et al., 1982). De skal overbevise seg selv om at de har funnet riktig svar, så må de overbevise en venn og til slutt, for at argumentasjonen skal telle som bevis, må en klare å overbevise en fiende. Hvis vi ser på måten flere av elevene argumenterer på i helklassesamtalen ser vi at de bruker en argumentasjonsmetode som virker godkjent av læreren og medelevene. Læreren etterspør ikke en argumentasjon som beviser hvorfor akkurat lengden 14 meter var riktig. Det virket som at læreren var mer ute etter at alle elevene skulle få mulighet til å dele sin argumentasjon enn å hjelpe elevene med å komme med en gyldig argumentasjon. En slik holdning fra læreren kan være én grunn til at det var så mange elever som argumenterte ved hjelp av naiv empirisme. Argumentasjonen til elevene ser også ut til å overbevise medelevene. Dette kan ha noe å gjøre med at alle elevene har jobbet godt med samme oppgave, og at de derfor ikke trenger like mye overbevisning. I dette tilfellet skulle læreren ha spilt rollen som *fiende* slik at elevene fikk mulighet til å spisse argumentasjonen sin. Samtidig mener Stacey mfl. (1982) at elever burde lære seg å være sin egen fiende når de jobber med bevis. Dette er en god egenskap å ha hvis en skal lage et godt nok bevis. Igjen så er det læreren som må hjelpe elevene med å utvikle denne egenskapen.

En annen grunn til at så mange elever kommer med en empirisk argumentasjon kan være fordi de ikke ser behov for å komme med en sterkere argumentasjon. En grunn til dette kan være at de er vant med at få gode enkelteksempler holder som svar. Dette kan være relatert til de sosiomatematiske normene i klasserommet (Yackel & Cobb, 1996). De sosiomatematiske normene blir utarbeidet i samarbeid mellom lærer og elever og det kan derfor virke som at læreren ikke har nok kunnskap om bevis. Som Stylianides & Ball (2008) skriver kan en ikke forvente at elevene vil klare å komme med et bevis hvis lærerne ikke har god nok forståelse for hva bevis er. Deres kunnskap om bevis vil kunne smitte over på elevene, og hvis læreren tenker at noen få velvalgte eksempler er bra nok når en skal bevise, vil også elevene tenke det. Derfor kan dette være grunnen til at så mange av elevene i klasse x og y argumenterte ved hjelp av naiv empirisme. Det at læreren ikke etterspurte en mer spisset argumentasjon vil også være avgjørende for hva elevene tenker er godkjent som svar.

Stylianides & Ball (2008) snakker også om tre forskjellige elementer av kunnskap lærere burde kunne om bevis. Det første elementet handler om at læreren må kunne kjenne igjen de tre kriteriene for bevis (Stylianides, 2007) hos argumentene til elevene. I tilfellene der elevene kom med empirisk argumentasjon burde læreren sett hvilke deler av argumentasjonen som kunne bli bygget videre på slik at argumentet tilfredsstilte de tre kriteriene for bevis. Det andre elementet handler om kunnskapen om det matematiske språket og hvilken rolle den spiller i arbeidet med bevis. Mange av elevene hadde et muntlig språk da de skulle argumentere og de brukte få matematiske begreper. Lærerens evne til å se rollen til det matematiske språket vil kunne hjelpe de elevene som kun argumenterte ved bruk av muntlig språk til å bruke et språk som vil kunne gi et mer spisset og matematisk korrekt argument. Det siste elementet handler om evnen til å skille mellom empiriske og deduktive argumentasjonsformer. Hvis læreren hadde vært oppmerksom på dette kunne hun hjulpet elevene med å presisere språket sitt, og hun ville sett at flere av elevenes argumentasjon var empiriske.

I helklassesamtale 2, da elevene skulle bevise at de ikke kunne lage en bro som var lenger enn 14 meter var læreren litt mer involvert i samtalen, og hun prøvde å få elevene til å forklare hvorfor påstanden deres var riktig. I denne samtalen kan en også se et godt eksempel på at *det grunnleggende argumentet* utviklet seg til at det *påfølgende argumentet* kom seg over terskelen for bevis. Dette kan vi se i samtalen mellom læreren, Ivar og Huzaifa. Det grunnleggende argumentet i denne samtalen var Ivar sitt argument; «nei, det er ikke mulig.». Det *påfølgende argumentet* som Huzaifa kom med flyttet argumentet fra ugyldig til gyldig; «i stad brukte vi alle og i stad var summen 42. Og $15 + 15 + 15$ blir 45.». I denne samtalen var læreren mer interessert i å få elevene til å forklare hvorfor det ikke gikk an å lage en bro som er lenger enn 14 meter. Dette gjorde hun ved å spørre «hvorfor ikke det?». Ved å stille dette spørsmålet får hun elevene til å omformulere argumentet slik at det forklarer bedre hvorfor deres påstand stemmer. Som vi ser fra utdraget av samtalen så var det Ivar som opprinnelig svarte på spørsmålet om det gikk an å lage en lenger bro, men siden læreren ikke stilte spørsmålet direkte til Ivar kunne Huzaifa bli med i samtalen (Shahrill, 2013).

5.2.1 Lærerens kunnskap om oppgaven

Stylianides & Ball (2008) skriver om kunnskapen læreren må ha når de skal få elevene til å jobbe med bevis. Denne kunnskapen kaller de for situasjonsbevis. Det vil si kunnskapen om når en aktivitet kan brukes til å bevise. De har kategorisert oppgavetyper etter hva oppgaven er ute etter å bevise, om den har en eller flere svar og om en skal bekrefte eller avkrefte en påstand. Oppgaven elevene fikk i denne studien vil falle under to av kategoriene, «ett svar» og «mange, men endelige svar». Oppgave 1 faller inn under kategorien der en bare har én løsning. Elevene skal bevise at de har funnet den riktige kombinasjonen av plankebiter. Oppgaven vil falle under å verifisere at alle plankene blir brukt når en lager en bro som er 14 meter lang. En vil ikke kunne komme med en generalisering på denne oppgaven, men en kan klare å bevise riktig kombinasjon ved bruk av ulike typer systematisk gjennomgang. Oppgave 2 vil falle under kategorien *mange, men endelige svar*.

Lærerens kunnskap om situasjonsbevis kommer tydeligere frem i helklassesamtale 2 der elevene skulle bevise at den lengste broen de kunne lage var 14 meter. Dette tenker jeg kan komme av at det å bevise at det ikke går an å lage en lenger bro kan virke mer hensiktsmessig enn å bevise at en har funnet riktig kombinasjon.

5.3 Kjønnsforskjeller

Selv om jeg ikke fant noen store kjønnsforskjeller, vil jeg likevel se på de ulike delene ut ifra et teoretisk perspektiv.

Mine funn viser at det var flest gutter som kom med et bevis eller som var på vei til å komme med en gyldig argumentasjon. I følge Paechter (2002) er jenter mer interessert i å forstå hvorfor og hvordan en regner, og siden en av hovedgrunnene til å arbeide med bevis er at bevis skaper en dypere forståelse for matematikk (Stylianides, 2009), ville en trodd at det var flere jenter som ville kommet med et gyldig argument. Boaler (1994) mener derimot at kontekstoppgaver kan skape problemer for jenter siden de kan være mer opptatt av rammene rundt oppgaven. Dette kan vi se i svaret til Kari og Kaja, og Jannike og Jana. De kan ha tenkt at det å måle plankekonkretene var hensiktsmessig for å finne løsningen. For Jannike og Jana kan dette ha skapt et større hinder for dem i og med at de ikke klarte å finne en løsning. Samtidig var det flere jentepar som lurte på om alle plankene var like brede og like tykke. Dette kan vise til at de vurderer om oppgaveteksten utelater informasjon som de mener burde være til stede for at de skal klare å løse oppgaven.

Samuelsson og Samuelsson (2016) skriver om at jenter ikke er like involvert eller ikke så ofte tar del i muntlig aktivitet i undervisningen som gutter, men i følge deltakelsen i de to helklassesamtalene så er det så og si lik deltakelse hos de to kjønnene. Samtidig var det flest gutter som tok kontakt og spurte om hjelp mens de arbeidet med bevisoppgaven noe Samuelsson og Samuelsson (2016) mener kan ha noe med lærerens holdninger til gutter og jenter. De mener at lærere ser på jenter som mer selvgående, og dermed ikke trenger like mye hjelp mens gutter trenger mer kontakt for å holde dem fokusert på oppgaven. Dermed er kanskje guttene mer vant med å ta og få kontakt med voksene i undervisningen enn jentene. Dette kan jo selvfølgelig også komme av at det var spennende å få besøk av en som skulle observere dem og bruke svarene deres i en studie.

Kapittel 6: Avslutning

Min studie har som hensikt å belyse hvordan elever beviser på 5. trinn i matematikk, hvilke argumentasjonsformer de bruker, mulige årsaker til hvorfor de argumenterer slik de gjør og se om det var noen kjønnsforskjeller i mestring og deltakelse i arbeid med bevis. I denne studien oppdaget jeg også hvor viktig læreren som stillasbygger er i arbeid med bevis. De fleste av elevene argumenterte ved hjelp av naiv empirisme. De hadde altså funnet riktig løsning, men de forklarte ikke hvorfor deres løsning var det eneste riktige svaret. Jeg tror at flere elever ville ha klart å komme med et gyldig bevis hvis læreren hadde fungert mer som en stillasbygger og veiledet elevene til å spisse sin argumentasjon slik at den ble gyldig. Som læreren sa under observasjonen hadde hun ikke så mye kunnskap om bevis på barneskolen og dette kan også være en av årsakene til at så mange elever ikke klarte å komme med et gyldig bevis. De aller fleste elevene tegnet opp broen de skulle lage over en elv for å illustrere at de hadde funnet riktig løsning, dette kan tyde på at de anser representasjoner som mer overbevisende som bevis. Likevel var det flere elever som valgte en litt annen tilnærming i tillegg til broen som representasjon. De satt opp lister, valgtrær eller fant lengden på broen ved hjelp av direkte regning. Noen av disse elevene klarte å komme med et gyldig argument, og flere av dem var på god vei. Studien viser også hvor viktig det er å kommunisere klart og tydelig hva oppgaven er ute etter slik at det ikke oppstår misforståelser mellom lærer og elev.

Studien min viser ingen signifikant forskjell i deltakelse hos jentene og guttene i de to klassene, men jeg kan se noen tendenser i at det var flere gutter enn jenter som var på vei til å føre et bevis eller som kom med et gyldig bevis. Samtidig er ikke denne forskjellen veldig stor og det kan være en tilfeldighet at det var flere gutter som var på vei til å komme med et bevis.

6.1 Kritikk av egen studie

En svakhet ved å ikke be om å observere en klasse med en lærer som har erfaring og kunnskap med matematisk bevis på barneskolen kan være at læreren som gjennomførte dette opplegget ikke nødvendigvis hadde nok kunnskap med bevis på barneskolen. Læreren nevnte under observasjonen at hun ikke hadde erfaring om bevis på barneskolen. Dette kan være en av årsakene til at hun ikke stilte spørsmål til elevene som kunne fått dem til å spisse argumentasjonen slik at den kunne bevege seg over terskelen for bevis. Læreren sa at de to klassene var vant med å dele sin fremgangsmåte med medelever i helklassesamtaler, men at de ikke hadde vært introdusert for bevis før. Dette støtter opp om antakelsen om at læreren kanskje ikke hadde så mye kunnskap om bevis fra før av. En annen årsak kan være at jeg ikke var tydelig nok om hva jeg ønsket at hun skulle få frem i helklassesamtalen. Sett i sammenheng med manglende kunnskap om bevis og dårlig informering fra min side kan dette være grunnen til at så mange elever ikke klarte å komme med en gyldig argumentasjon. Jeg skulle vært klarere om hva jeg forventet av læreren i helklassesamtalen, men hadde jeg gitt for mye veiledning ville kanskje ikke studien ha vært like autentisk. Da hadde kanskje ikke studien vist hvor stor betydning læreren har i arbeid med bevis og at lærere kanskje ikke har den kunnskapen som trengs for å hjelpe elevene til å komme med et gyldig bevis.

6.2 Tanker om videre forskning

Problemstillingen i denne studien var såpass vid at jeg måtte ha med noen underspørsmål for å begrense oppgaven. En av underkategoriene kom i etterkant av analysen da jeg så hvor viktig læreren er i arbeid med bevis. Underspørsmålet omhandler årsaker til hvorfor elevene argumentere slik som de gjør, og analysen satte søkelys på hvor viktig lærerens kunnskap om bevis er. Derfor tenker jeg at det kunne vært interessant å se mer på lærerens rolle i bevisaktiviteter. Det ville vært spesielt interessant å se om elevene argumenterer forskjellig med tanke på kunnskapen læreren har om bevis. Et forslag til hvordan dette kunne blitt undersøkt er å observere lærere som har mye kunnskap og erfaring om bevis på barneskolen og sammenliknet elevenes argumentasjon med klassen til en lærer som ikke har så mye erfaring eller kunnskap om bevis.

I og med at jeg ikke kunne se noen forskjeller mellom jenter og gutter i arbeid med bevis kunne det vært interessant å endre metode for å sammenlikne prestasjon og deltakelse i arbeid med ulike oppgavetyper. For eksempel se på prestasjon og deltakelse i arbeid med tradisjonelle matematikkoppgaver kontra prestasjon og deltakelse i arbeid med bevisoppgaver.

Litteraturliste

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Chapter VII: Making Believe: The Collective Construction of Public Mathematical Knowledge in the Elementary Classroom. *Teachers College Record*, *102*(7), 193-224.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In *A research companion to principals and standards for school mathematics* (pp. 27-44).

Barwise, J., & Etchemendy, J. (1996). Visual information and valid reasoning. In *Logical Reasoning with Diagrams*. Oxford University Press.

Boaler, J. (1994). When do girls prefer football to fashion? An analysis of female underachievement in relation to 'realistic'mathematic contexts. *British educational research journal*, *20*(5), 551-564.

Boaler, J., & Brodie, K. (2004). The importance, nature and impact of teacher questions. *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *26*(2), 774-782. https://www.pmena.org/proceedings/

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational studies in mathematics*, *75*(1), 89-105.

Brodie, K. (2010). Pressing dilemmas: meaning-making and justification in mathematics teaching. *Journal of curriculum studies*, *42*(1), 27-50.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt forlag.

Dalland, C., Bjørnestad, E., & Andersson-Bakken, E. (2021). Observasjon som metode i barnehage- og klasseromsforskning. In C. Dalland & E. Andersson-Bakken (Eds.), *Metoder i klasseromsforskning*. Universitetsforlaget.

Else-Quest, N. M., Hyde, J. S., & Linn, M. C. (2010). Cross-national patterns of gender differences in mathematics: a meta-analysis. *Psychological bulletin*, *136*(1), 103.

Hovik, E. K., & Solem, I. H. (2016). Bevis og generalisering i skolen - utfordringer og muligheter. In B. Kleve (Ed.), *Undervisningskunnskap i matematikk*. Cappelen Damm akademisk.

Johannessen, A., Christoffersen, L., & Tufte, P. A. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg. ed.). Abstrakt.

Jones, K., & Herbst, P. (2012). Proof, proving, and teacher-student interaction: Theories and contexts. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 261-277). Springer, Dordrecht.

Kleve, B., & Ånestad, G. (2016). Læringspartner og sosiomatematiske normer som potensial for elevers læring. In B. Kleve & E. K. Hovik (Eds.), *Undervisningskunnskap i matematikk*. Cappelen Damm akademisk.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational studies in mathematics*, *67*(3), 255-276.

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational studies in mathematics*, *60*(1), 95-124.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for research in mathematics education*, *20*(1), 41-51.

Paechter, C. (2002). Gender, reason and emotion in secondary mathematics classrooms. In P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching*. RoutledgeFalmer.
Pedersen, B. B., Pedersen, P. I., & Skoogh, L. (2006). *Abakus : matematikk for barnetrinnet : Abakus for sjuende trinn Grunnbok 7A* (2. oppl. ed.). Aschehoug.
Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). *Connecting arithmetic to algebra : strategies for building algebraic thinking in the elementary grades*. Heinemann.
Samuelsson, M., & Samuelsson, J. (2016). Gender differences in boys' and girls' perception of teaching and learning mathematics. *Open Review of Educational Research*, *3*(1), 18-34.
Sewasew, D., Schroeders, U., Schiefer, I. M., Weirich, S., & Artelt, C. (2018). Development of sex differences in math achievement, self-concept, and interest from grade 5 to 7. *Contemporary Educational Psychology*, *54*, 55-65.
Shahrill, M. (2013). Review of effective teacher questioning in mathematics classrooms. *International Journal of Humanities and Social Science*, *3*(17), 224-231.
Silverman, D. (2001). *Doing qualitative research: A practical handbook*. Sage Publications
Skott, J. (2018). *Matematik for lærerstuderende : Delta 2.0 Fagdidaktik, 1.-10. klasse* (2. udg. ed.). Samfundslitteratur.
Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (1982). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.
Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *38*(3), 289-321. https://doi.org/10.2307/30034869
Stylianides, A. J. (2009). BREAKING THE EQUATION. *Mathematics Teaching*(213), 9.
Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of mathematics teacher education*, *11*(4), 307-332.
Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the Transition from Empirical Arguments to Proof. *Journal for research in mathematics education*, *40*(3), 314-352. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0314
Svendsen, S. (2020). *Bevisets stilling i matemtaikkundervisningen*. Retrieved 03.05 from https://www.utdanningsnytt.no/fagartikkel-matematikk/bevisets-stilling-i-matematikkundervisningen/239369
Utdanningsdirektoratet. (2019a). *Fagets relevans og sentrale verdier*. (MAT01-05). udir.no Retrieved from https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/fagets-relevans-og-verdier?lang=nob
Utdanningsdirektoratet. (2019b). *Grunnleggende ferdigheter*. (MAT01-05). udir.no Retrieved from https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/grunnleggende-ferdigheter?lang=nob
Utdanningsdirektoratet. (2019c). *Kjerneelement*. (MAT01-05). udir.no Retrieved from https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer
Utdanningsdirektoratet. (2021). *Analyse av nasjonale prøver for 5. trinn 2021*. udir.no Retrieved from https://www.udir.no/tall-og-forskning/statistikk/statistikk-grunnskole/analyser/analyse-av-nasjonale-prover-for-5.-trinn-2021/#
Valenta, A., & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *14*(3).
Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *27*(4), 458-477. https://doi.org/10.2307/749877

Øgreid, A. K. (2021). Elevtekster som empirisk materiale i kvalitative studier. In C. Dalland & E. Andersson-Bakken (Eds.), *Metoder i klasseromsforskning : forskningsdesign, datainnsamling og analyse*. Universitetsforlaget.

Vedlegg 1: Informasjonsbrev til foresatte

Informasjonsbrev til foresatte om forskningsprosjektet «Bevisføring og kjønn i matematikk»

Jeg er en student som går på grunnskolelærerutdanningen 1-7 på OsloMet. Jeg skal skrive en masteroppgave i matematikkdidaktikk og vil i den sammenheng gjennomføre en observasjon i klassen som barnet ditt går i fredag 4. mars.

Formålet med prosjektet er å undersøke hvordan elever beviser på mellomtrinnet i matematikk. Jeg er også interessert i om det er noen kjønnsforskjeller i deltakelse i klasseromssamtalen. Dette vil jeg gjennomføre ved å observere en time med læreren der elevene skal jobbe med oppgaver innenfor bevisføring. Jeg vil deretter samle inn elevsvarene på ark. I tillegg til dette vil jeg også skrive ned noen muntlige elevsvar for å få ytterlige innsikt i tankegangen bak svarene. Jeg er ikke interessert i den enkelte elev og vil derfor bare be elevene skrive hvilket kjønn de har på arket sitt. Arkene de får utdelt vil være nummerert slik at jeg kan koble det de sier muntlig med det skriftlige arbeidet uten at jeg noterer ned noen navn. I etterkant av observasjonen vil jeg skrive elevsvarene på nytt slik at elevene ikke blir gjenkjent gjennom håndskrift.

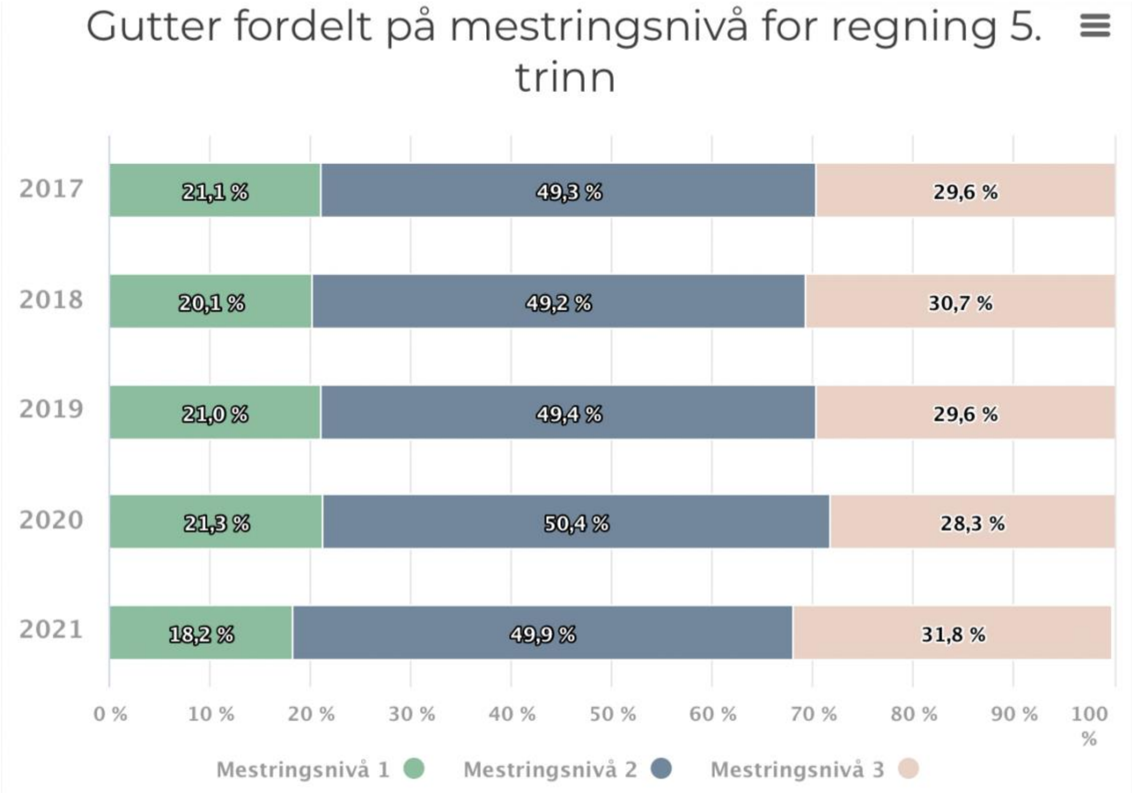
Alt av opplysninger vil bli anonymisert, og jeg vil på ingen tidspunkt skrive ned noen personopplysninger som kan knyttes til ditt barn.

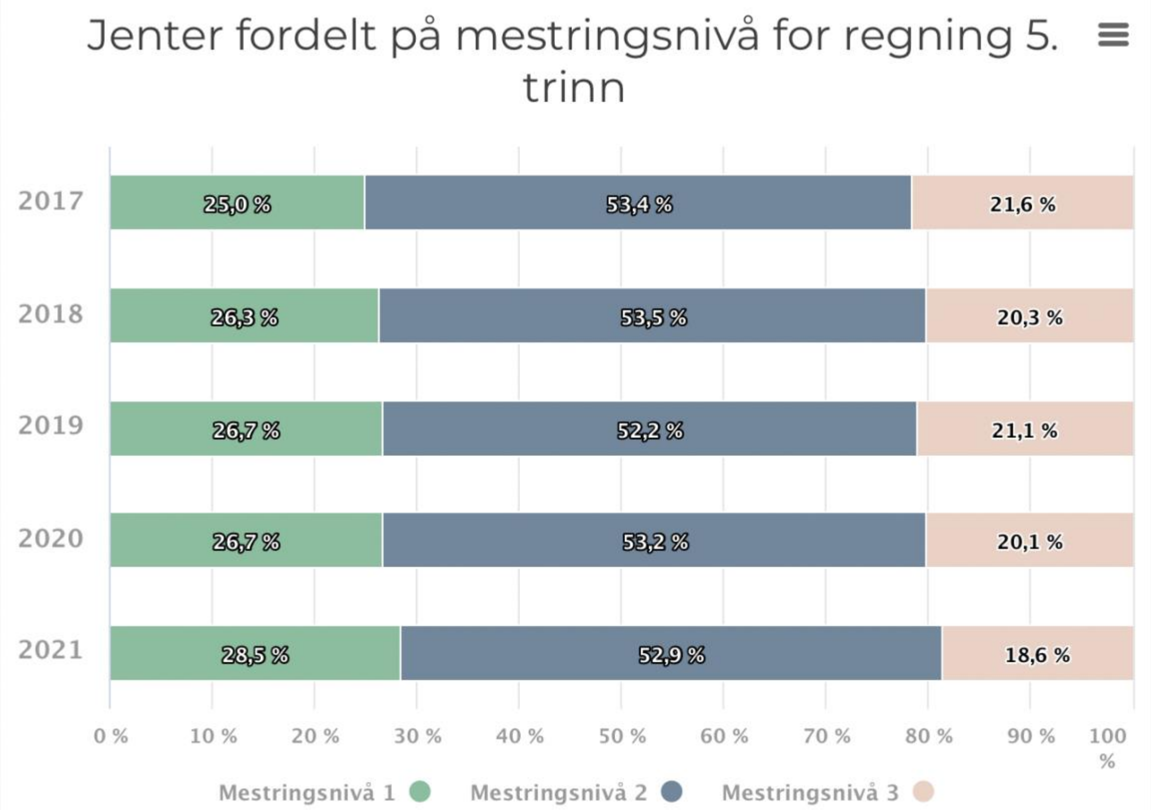
Med vennlig hilsen

Ellen Konstanse Hovik	Guro Hetty Askeland
(Prosjektansvarlig/veileder OsloMet)	(Student)

Vedlegg 2: Mestringsnivå nasjonale prøver

Hentet fra Utdanningsdirektoratet (2021)





Vedlegg 3: Analyseskjema

	Empirisk Argumentasjon		Systematisk gjennomgang				Konkreter	Feil
	Naiv empirisme	Avgjørende eksperiment	Systematisk gjennomgang	Direkte regning	Multimodal argumentasjon	Muntlig		
X Oppg. 1	Jente 12.0 & 12.1 Jente 5.0 & 5.1 Jente 6.0 & 6.1 Gutt 7.0 & 7.1 Gutt 2.0 & 2.1		Jente 1.0 & 1.1				Gutt 4.0 & 4.1 Gutt 8.0 & 8.1 Gutt 9.0 &9.1 Gutt 10.0 & 10.1	Jente 3.0 & 3.1 Jente 11.0 & 11.1
X Oppg. 2	Jente 12.0 & 12.1 Jente 5.0 & 5.1 Jente 6.0 & 6.1 Gutt 2.0 & 2.1 Gutt 4.0 & 4.1 Gutt 10.0 & 10.1 Jente 1.0 & 1.1					Gutt 2.0 & 2.1 (15m oppgave)	Gutt 7.0 & 7.1 Gutt 8.0 & 8.1 Gutt 9.0 & 9.1 Jente 11.0 & 11.1 Jente 3.0 & 3.1	
Y Oppg. 1	Gutt 3.0 & 3.1 Gutt 1.0 & 1.1 Gutt 5.0 & 5.1 Jente 7.0 & 7.1 Jente 8.0 & 8.1 Jente 9.0 & 9.1 Jente 10.0 & 10.1 Jente 11.0 & 11.1 Jente 12.0 & 12.1 Jente 13.0 & 13.1			Gutt 4.0 & 4.1	Gutt 2.0 & 2.1		Jente 8.0 & 8.1 Jente 13.0 & 13.1 Gutt 6	
Y Oppg. 2	Gutt 1.0 & 1.1 Gutt 2.0 & 2.1 Gutt 3.0 & 3.1 Gutt 4.0 & 4.1 Jente 10.0 & 10.1 Jente 11.0 & 11.1 Jente 12.0 & 12.1					Gutt 4 (15m oppgave)	Gutt 5.0 & 5.1 Gutt 6 Jente 9.0 & 9.1 Jente 7.0 & 7.1 Jente 8.0 & 8.1 Jente 13.0 & 13.1	