MASTEROPPGAVE

M1GLU17H

Mai 2022

Elevers resonnering og argumentasjon i matematikk

En kvalitativ studie av elevers resonnering og argumentasjon i arbeidet med problemløsningsoppgaver

Students` reasoning and argumentation in mathematics

A qualitative study of students' reasoning and argumentation when working on problem-solving tasks

Masteroppgave i matematikk ved grunnskolelærerutdanningen 1-7, OsloMet.

30 sp oppgave

Markus Gjerde

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Forord

Etter fem innholdsrike og morsomme år på lærerstudiet i Oslo, kan jeg snart kalle meg ferdigutdannet lærer. Denne masteroppgaven markerer slutten på et langt og lærerikt studium på OsloMet. I forbindelse med masteroppgaven fikk jeg mulighet til å fordype meg i et tema jeg synes er interessant, og som jeg gleder meg til å dra nytte av når jeg skal undervise elever i matematikk.

Arbeidet med masteroppgaven har vært spennende, men også til tider ganske krevende. I den forbindelse vil jeg rette en stor takk til veileder Henrik Forssell for gode samtaler og tilbakemeldinger. Jeg vil også rette en spesiell takk til elevene som deltok i studien, og ikke minst læreren deres som la ting til rette og gjorde denne studien mulig. Til slutt vil jeg takke alle studievenner for fem fantastiske år i Oslo by.

Oslo/Jørpeland, mai 2022

Markus Gjerde

Sammendrag

I denne studien har jeg undersøkt hvordan grupper av elever samarbeider om å løse problemløsningsoppgaver i matematikk. Formålet med dette var undersøke elevenes resonnering og argumentasjon. Studiens forskningsspørsmål er: Hva karakteriserer elevers resonnering og argumentasjon i arbeidet med matematikkoppgaver på 7.trinn?

Dette er en kvalitativ studie som bygger på observasjoner og lydopptak av ni elever på 7.trinn, fordelt på tre grupper. Elevene arbeidet med to ulike problemløsningsoppgaver hentet fra Mattelist.no. Dette er såkalte LIST-oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde. Datamaterialet ble analysert ved hjelp av induktiv koding i tillegg til Lithners (2008) rammeverk for imitativ og kreativ resonnering, supplert med Stylianides`(2007b) kriterier for argumentering og hva som kan sees på som et gyldig matematisk bevis i skolen.

Resultatene fra analysen viser at elevene i denne casen benytter seg av flere av resonnementsformene som er beskrevet i Lithners (2008) rammeverk. Videre registrerte jeg to tilfeller der elevenes argumentering oppfyller Stylianides`(2007b) kriterier for gyldige bevis i skolen. Studien indikerer også at matematikkoppgavenes utforming, samt sosiale og sosiomatematiske normer har innvirkning på elevenes resonnering.

Nøkkelord: matematikk, imitativ og kreativ resonnering, argumentasjon, bevis.

Abstract

In this study, I have explored how groups of students work together to solve problem-solving tasks in mathematics. The purpose of this was to examine the students' reasoning and argumentation. The study's research question is: What characterizes students' reasoning and argumentation in the work with mathematics problems in 7th grade?

This is a qualitative study based on observations and audio recordings of nine students in 7th grade divided into three groups. The students worked on two different problem-solving tasks taken from Mattelist.no. These are so-called LTHC-tasks with a low threshold and high ceiling. The data material was analyzed using inductive coding in addition to Lithner's (2008) framework for imitative and creative reasoning, supplemented by Stylianides' (2007b) criteria for argumentation and what can be seen as a valid mathematical proof in school.

The results from the analysis show that the students in this case use several of the forms of reasoning described in Lithner's (2008) framework. Furthermore, I registered two cases where the students' argumentation meets Stylianides` (2007b) criteria for valid proof in school. The study also indicates that the design of the mathematics problems, as well as social and socio-mathematical norms, have an impact on the students' reasoning.

Keywords: mathematics, imitative and creative reasoning, argumentation, proof.

Innhold

Figurliste

Tabelliste

1 Innledning

Temaet for denne oppgaven er resonnering og argumentasjon i matematikk. Dette er et interessant tema som har fått mer og mer oppmerksomhet i skolen de siste årene. I den nye læreplanen LK20, er «Resonnering og argumentasjon» bestemt som et av fem kjerneelementer i matematikkopplæringen i grunnskolen (Utdanningsdirektoratet, 2019). Dette sier en del om posisjonen dette temaet nå har fått i norsk skole. Tidligere i studiet skrev jeg en FoU-oppgave som handlet om problemløsning i matematikk. I arbeidet med den, så jeg at det var en klar sammenheng mellom problemløsning og resonnering og argumentasjon. Jeg synes derfor det virket spennende og naturlig å undersøke dette temaet mer. På bakgrunn av dette, har jeg kommet frem til følgende forskningsspørsmål: Hva karakteriserer elevers resonnering og argumentasjon i arbeidet med matematikkoppgaver på 7.trinn?

Formålet med denne studien er først og fremst å tilegne meg mer kunnskap om hvordan elever resonnerer og argumenterer i matematikk, som jeg kan dra nytte av når jeg selv skal ut å undervise elever i matematikk. I tillegg er dette et relativt nytt tema i skolen, som jeg vet mange lærere har lite erfaring med. Jeg håper derfor at denne studien også kan være nyttig for andre studenter og lærere som har lyst til å utforske dette temaet mer. Jo Boaler (2016) beskriver resonnering som selve hjertet i matematikk. Hun forteller at når elever resonnerer og vurderer andres resonnementer, jobber de som ekte matematikere i tillegg til at de forbereder seg til å jobbe i en høyteknologisk verden. Arbeid med resonnering og argumentasjon gir tilgang til matematikkforståelse og bidrar til å redusere gapet mellom de elevene som forstår, og de som sliter (Boaler, 2016). Dette er altså et svært viktig tema, som jeg ønsker å finne mer ut av.

For å tilegne meg mer kunnskap om dette temaet, har jeg vært ute i feltet og observert flere elevgrupper på 7.trinn når de jobbet med problemløsningsoppgaver i matematikk. I denne studien vil det bli gjennomført en analyse av elevenes samhandlinger i arbeidet med oppgavene. Jeg kommer til å benytte meg av Lithners (2008) rammeverk for imitativ og kreativ resonnering, samt

Stylianides` (2007b) kriterier for hva argumentasjon må inneholde for å bli sett på som et gyldig bevis i skolen.

Lithner (2008) påpeker at vi ønsker at elevene skal bli flinke problemløsere, samtidig som forskning viser at det foregår mye utenatlæring på skolen. Han ser på imitativ resonnering og utenatlæring som en av hovedgrunnene til lærevansker i matematikk. Videre viser studiene hans at imitativ resonnering dominier, og at det er en mangel på kreativ resonnering.

Oppgaven er delt inn i 6 kapitler. I kapittel 2 vil jeg gjøre rede for teorien som legger grunnlaget for denne studien. I kapittel 3 redegjør jeg for valg av metode for datainnsamling, valg av matematikkoppgavene elevene arbeidet med, samt metode for analyse. Videre følger refleksjoner rundt forskningsetikk og studiens kvalitet gjennom validitet og reliabilitet. I kapittel 4 forklarer jeg hvordan jeg har gått fram i analysearbeidet, før jeg presenterer resultatene og selve analysen av datamaterialet. I kapittel 5 diskuterer jeg funn fra analysen i lys av teorien jeg presenterte i kapittel 2. I kapittel 6 vil jeg oppsummere og konkludere studien.

2 Teori og forskningslitteratur

I denne studien skal jeg se på hva som karakteriserer elever på 7. trinns resonnering og argumentasjon i arbeidet med problemløsningsoppgaver. For å besvare forskningsspørsmålet, vil jeg først definere og gjøre rede for de mest sentrale begrepene i oppgaven; resonnering, argumentasjon og bevis. Videre vil jeg redegjøre for sosiomatematiske normer og hvilken betydning det har for hvordan elever arbeider med slike matematikkoppgaver. Til slutt vil jeg presentere og gjennomgå det teoretiske rammeverket for analysen. Jeg har valgt å bruke Lithners (2008) rammeverk for imitativ og kreativ resonnering, supplert med Stylianides` (2007b) kriterier for hva som kan sees på som et gyldig matematisk bevis i skolen.

2.1 Sentrale begreper

2.1.1 Resonnering

Resonnering er et kjent begrep som har blitt mer og mer aktuelt i skolen de siste årene, og vi kan finne begrepet i flere kompetansemål i de forskjellige skolefagene. Særlig viktig er det kanskje i matematikk, da "*resonnering* og argumentasjon" har kommet inn som et eget kjerneelement i faget (Utdanningsdirektoratet, 2019). Allikevel blir begrepet "resonnering" for det meste brukt av matematikklærere uten å definere det tydelig, på bakgrunn av tanken om at det er en universell forståelse for hva resonnering betyr (Yackel and Hanna, 2003, i Lithner, 2008, s. 257).

Resonnering har riktignok blitt tydeligere definert i LK20 enn i tidligere læreplaner. Under kjerneelementet "Resonnering og argumentasjon" i den nye læreplanen i matematikk, står følgende om resonnering:

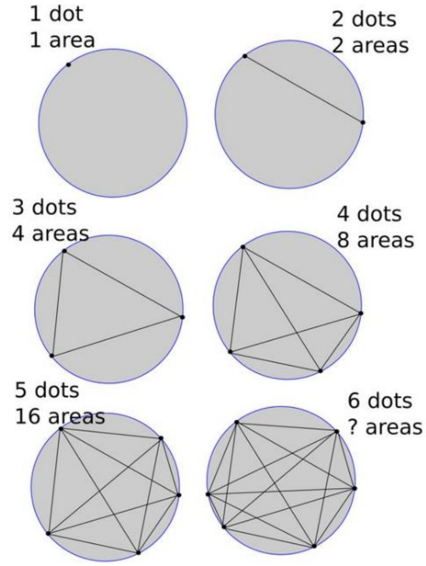
> "Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer." (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Som en kan se, er måten resonnering blir beskrevet i LK20 i tråd med Lithners (2008) definisjon på matematisk resonnering. Det er denne definisjonen jeg kommer til å bruke i denne studien. Han definerer resonnering i matematikk på denne måten:

> "…reasoning is the line of thought adopted to produce assertions and reach conclusions in task solving. It is not necessarily based on formal logic, thus not restricted to proof, and may even be incorrect as long as there are some kinds of sensible (to the reasoner) reasons backing it" (Lithner, A research framework for creative and imitative reasoning, 2008, s. 257).

Resonnering er altså tankegangen som brukes for å produsere påstander og komme til konklusjoner i oppgaveløsning. Det trenger ikke baseres på formell logikk, slik som i bevisføring, og kan til og med være feil så lenge det er noen fornuftige tanker og forklaringer bak resonneringen. Innenfor resonnering finner vi tre generelle resonneringsformer som vi benytter oss av (Hana, 2013, s. 85). Disse er deduksjon, induksjon og abduksjon. Deduksjon vil si å utlede konsekvenser fra gitte premisser. Man går fra noe allment (de gitte premissene), og utleder en spesiell konklusjon gjennom logiske slutninger. Alle matematiske bevis er deduksjoner. Et eksempel på deduktiv resonnering i matematikk kan være; Alle tall som ender med 0 eller 5 er delelig med 5. 75 ender med 5, og er derfor delelig med 5.

Ved induksjon vil en i likhet med deduksjon resonnere fra gitte premisser til en konklusjon, men her går man fra det spesielle til det generelle. En annen forskjell er at ved induksjon vil ikke resonnementet bestå av logiske slutninger, men ved å gjette seg frem til konklusjonen basert på sannsynlighet. På figur 1 til høyre har vi et godt eksempel som illustrerer problemet ved induktiv resonnering. Ved å studere de fem første sirklene, ser vi fort et mønster. For hver gang vi setter inn en ny prikk på sirkelens periferi og setter nye streker til alle de andre prikkene, ser vi at antall inndelte områder dobler seg. Siden den regelen gjelder for alle de fem første sirklene, må det jo etter all sannsynlighet gjelde for den sjette også? De aller fleste elever, og voksne for den saks skyld, vil nok umiddelbart tenke at det er 32 inndelte områder på den sjette figuren. Det viser seg derimot å være feil. Induksjon er naturlig for oss, og kan stemme i mange tilfeller, men man kan ikke komme frem til helt sikre resultat basert på induktiv resonnering (Hana, 2013, ss. 85-86).



Figur 1. Induktiv resonnering.

Ved abduksjon resonnerer en motsatt vei enn ved induksjon og deduksjon. Man starter altså med en konklusjon, og prøver å resonnere seg frem til hvilke premisser som ligger til grunn for denne konklusjonen. Abduktiv resonnering skjer når en observerer et fenomen som en prøver å finne en forklaring på. Et eksempel på dette kan være at en elev har observert at noen enkelte firkanter har like lange diagonaler. En abduktiv tilnærming til disse observasjonene vil da være å forsøke å finne ut hvilke egenskaper ved disse firkantene som gjør at de har like lange diagonaler (Hana, 2013, s. 87).

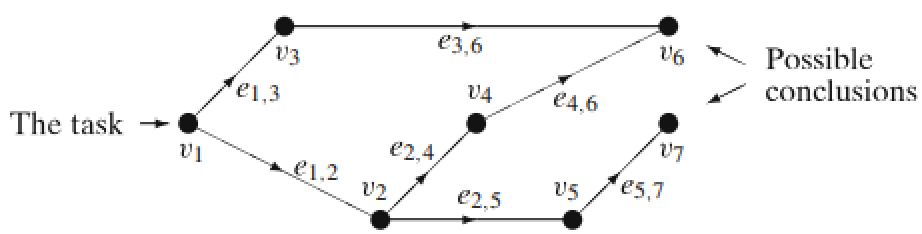
Resonnering kan enten sees på som en tankeprosess, eller som et produkt av disse tankeprosessene, eller begge deler. Det vi hovedsakelig kan se i data fra studier på mennesker som resonnerer, er atferd, hva de sier og hva de skriver ned. Altså resultater eller produkter av de tankeprosessene personen har foretatt. De underliggende tankeprosessene som ligger bak kan vi bare spekulere i (Vinner, 1997, i Lithner, 2008, s. 257). Formålet med Lithners rammeverk, i likhet med studien min, er å karakterisere data. Altså å karakterisere hvordan elevene resonnerer.

Det er umulig å analysere og karakterisere den resonneringen elevene gjør “inni hodet”. Derfor velger jeg å se på resonnering som et produkt som kommer til syne muntlig eller skriftlig, gjennom en sekvens av resonnering som starter i et møte med en matematikkoppgave og som ender i et svar.

Sekvensen av resonnering i møte med en oppgave kan struktureres i fire steg:

1. Møtet med oppgaven. Oppgaven betegnes som et problem dersom det ikke er åpenbart for eleven hvordan den skal løses.
2. Et strategivalg blir tatt. I “strategivalg” menes alt fra hvilke tilnærminger elevene har til oppgaven, hvilke prosedyrer som blir gjort og hvilke metoder som brukes (prøv og feil, gjetting, gjenkjennelse av problemet, oppdaging/utforsking osv). Strategivalget kan støttes med *prediktiv argumentasjon:* Hvorfor vil denne strategien løse oppgaven?
3. Valget er tatt og strategien blir implementert. Dette kan igjen underbygges med bekreftende argumentasjon: Hvorfor løste denne strategien oppgaven?
4. Man kommer til en konklusjon. (Lithner, A research framework for creative and imitative reasoning, 2008, s. 257).

Denne resonneringssekvensen kan illustreres med figur 2 under.



Figur 2. Oppgaveløsning som en sti i en graf, i (Lithner, 2008, s. 258).

Resonneringen som skjer i arbeid med oppgaveløsning kan representeres som en sti fra et punkt til et annet. Som vi ser i figur 1, starter stien i møtet med oppgaven, og går i ulike retninger alt etter hvilke strategier elevene velger, og ender opp i en konklusjon til slutt. De svarte punktene på figuren (v_n), representerer den momentane kunnskapen eleven har om oppgaven i akkurat det øyeblikket. Elevene gjør strategivalg som leder fra v_n til v_m. Strategiimplementeringen er representert med e_n. Strategiimplementeringen støttes av resonnering, og overgangen fra v_n til v_m fører altså til tilgang av ny kunnskap, og et steg nærmere konklusjonen (Lithner, 2008, ss. 257-258). En grundigere redegjørelse for Lithners rammeverk blir presentert i kapittel 2.4.

2.1.2 Resonnering og matematikkforståelse

NCTM`s (National Council of Teachers of Mathematics) *Principles and standards for School Mathematics (2000),* har inkludert resonnering og bevis som et eget tema i matematikkfaget, akkurat slik vi nå har gjort i den norske læreplanen (Ball & Bass, 2003). Vi kan derfor trygt si at resonnering har en sentral rolle i matematikkfaget. Ball og Bass (2003) mener at matematisk resonnering er en grunnleggende ferdighet i faget, og kommer med tre argumenter som underbygger denne påstanden:

For det første, påpeker de at konseptet "matematikkforståelse" er meningsløst uten en seriøs vektlegging av resonnement. Matematikkforståelse må med andre ord bygge på matematisk resonnering for at det skal være snakk om *forståelse*. Et eksempel på dette kan være når elever regner med desimaltall. La oss si at en elev løser denne oppgaven: 0,7 + 0,7 = 1,4. Eleven har regnet riktig, og har fått rett svar. Men vet eleven egentlig hva det står? Er 1,4 større eller mindre enn 1,25? 4 er jo mindre enn 25? Det å kunne resonnere over svaret, og å forklare *grunnen* til at et regnestykke er riktig, er viktig for matematikkforståelsen (Ball & Bass, 2003, s. 28).

For det andre, er evnen til resonnering fundamentalt for å kunne bruke matematikk. Det å kunne gjengi enkelte matematiske ideer som ren fakta, eller det å ha pugget algoritmer og prosedyrer som ren rutine er ikke tilstrekkelig for å kunne bruke matematikk fleksibelt i ulike situasjoner (Ball & Bass, 2003, s. 28). Et eksempel på dette er når førsteklassinger som har lært å bruke "er lik-tegnet" for å signalisere resultatet av en regneoperasjon mellom to tall, møter en oppgave som dette: 8 = __ + 5, og plutselig ikke vet hva de skal gjøre. Uten å resonnere over konseptet *likhet*, vil ikke elevene ha tilstrekkelig forståelse for å kunne løse slike problem.

For det tredje, er matematisk resonnering fundamentalt for å kunne rekonstruere glemt kunnskap i situasjoner der det trengs. I norsk skole er det vanlig å jobbe med ett og ett tema om gangen. Hvis elevene har hatt en periode med subtraksjon, kan det fort gå noen uker før elevene jobber med dette igjen. En elev som i utgangspunktet har lært seg å løse subtraksjonsoppgaver med loddrett oppstilling, har kanskje glemt dette til neste gang. ”Hvordan var det nå igjen? Skulle man starte foran eller bakerst?” Ved hjelp av matematisk resonnering, vil eleven kunne rekonstruere og “hente fram” igjen den glemte kunnskapen (Ball & Bass, 2003, ss. 28-29).

I matematikk kan resonnering kan sees på som limet som holder alt sammen. Det kan brukes til å se sammenhenger og å navigere mellom de ulike temaene, prosedyrene, konseptene og løsningsmetodene. Det er gjennom resonnering at elevene kan se at alt henger sammen på en eller annen måte, og at det faktisk gir mening (National Research Council, 2001, s. 129). Matematisk resonnering handler i stor grad om det å kunne vurdere arbeidet sitt, og å kunne gi en tilstrekkelig forklaring eller begrunnelse for hvorfor det blir riktig (National Research Council, 2001, s. 130). Jo Boaler (2016) bruker litt andre ord, og ser på resonnering som hjertet i matematikken. Når elever resonnerer i matematikk og vurderer andres resonnementer, jobber de om ekte matematikere i tillegg til at de forbereder seg til å jobbe i en høyteknologisk verden. Arbeid med resonnering gir tilgang til matematikkforståelse, og bidrar til å redusere gapet mellom de elevene som forstår og de som sliter (Boaler, 2016, s. 140).

Evnen til å resonnere i matematikk kan sees i sammenheng med det Richard Skemp (1976) omtaler som relasjonell forståelse. Han deler begrepet *forståelse* i matematikk i to: instrumentell forståelse og relasjonell forståelse. Instrumentell forståelse blir beskrevet som “rules without reason”. Altså det å pugge regler, algoritmer og regnemåter på automatikk uten å egentlig forstå hva en gjør. Med relasjonell forståelse menes “knowing what to do and why”, og understreker at det er dette han anser som det å virkelig forstå matematikk (Skemp, 1976, s. 2). Resonnering og relasjonell forståelse henger altså sammen med at elevene må kunne vurdere om en løsningsmetode eller et svar er gyldig, og at de må kunne begrunne hvorfor.

2.1.3 Argumentasjon og bevis

Argumentasjon kan ha flere betydninger, alt etter hvilket fagfelt eller setting en befinner seg i. Det vil blant annet stilles ulike krav til et argument i hverdagen kontra et juridisk argument eller et matematisk argument. I denne studien vil jeg fokusere på argumentasjon i matematikk i skolen. Når vi snakker om argumentasjon i matematikkundervisning, kan det ifølge Sriraman og Umland (2020) bety to ting:

1. De matematiske argumentene som elever og lærere produserer i matematikklasserom.
2. Argumentene som forskere innen matematikkundervisning produserer angående hvordan matematikklæring skjer og effektiviteten av matematikkundervisning i ulike sammenhenger.

I denne oppgaven vil jeg forholde meg til den første tolkningen. Altså de argumentene som elevene og lærer produserer i matematikktimen på skolen.

Begrepene argumentasjon og bevis henger tett sammen, men er ikke helt sammenfallende da argumentasjon er et videre begrep enn bevis (Hana, 2013, s. 84). Argumentasjon kan blant annet i større grad benytte seg av intuisjon enn i bevis. Argumentasjon kan sees på som et verktøy som brukes til å overbevise noen om at noe er sant eller usant. Et bevis består gjerne av flere argumenter, som en logisk sekvens av implikasjoner som underbygger validiteten til et gitt utsagn (Hana, 2013, s. 84).

Det finnes mange ulike definisjoner på bevis i matematikk, men jeg velger å bruke definisjonen til Stylianides (2007b) da den er tilpasset arbeid med bevis i klasserommet. Han definerer bevis som et matematisk argument, en sammenhengende sekvens av påstander for eller mot en matematisk påstand. Denne sekvensen av påstander må inneholde disse tre egenskapene for at det skal bli sett på som et gyldig bevis i skolen:

1. Den bruker påstander som er aksepterte av klasserommet, som er sanne og tilgjengelige for klassen uten ytterligere begrunnelse;
2. Den benytter seg av resonnementsformer (argumentasjonsformer) som er gyldige og kjent for, eller er innenfor den konseptuelle rekkevidden til klasseromsfellesskapet;
3. Det kommuniseres med uttrykksformer (representasjoner) som er hensiktsmessige eller kjent for, eller er innenfor den konseptuelle rekkevidden til klasseromsfellesskapet.

Denne definisjonen av bevis bygger på fire hovedelementer ved et argument, som er viktig når en skal vurdere om argumentet kan regnes som et bevis i skolen. Disse fire elementene er *grunnlag, formulering, representasjon* og *sosial dimensjon*. Grunnlag vil si den basisen argumentet står på, som f.eks. en definisjon eller et aksiom. Formulering er hvordan argumentet utvikles eller opparbeides. Dette kan f.eks være ved induksjon eller deduksjon. Representasjon går ut på hvordan argumentet uttrykkes og formidles. Dette kan være med hverdagsspråk, algebraisk, ved hjelp av en graf eller tabell osv. Det fjerde hovedelementet, den sosiale dimensjonen, handler om hvordan argumentet utspiller seg og blir møtt av fellesskapet i den sosiale settingen det befinner seg i (Stylianides, 2007a, s. 2).

I tillegg til disse fire hovedelementene, presenterer han to veiledende prinsipp for å konseptualisere, eller begrepsliggjøre ideen om bevis i skolematematikken; prinsippet om intellektuell ærlighet (the intellectual-honesty principle) og prinsippet kontinuitet (the continuum principle). Det intellektuelle-ærlighets-prinsippet sier at ideen om bevis i skolen må være ærlig overfor matematikken som fagdisiplin i seg selv, og samtidig respektere og ha tro på elevene som lærer matematikk. To eksempler på bruken av det intellektuelle-ærlighets-prinsippet, er at (1) empiriske argument ikke kan sees på som et bevis i skolematematikken, fordi empiriske bevis ikke vil bli godtatt av matematikere som matematiske bevis. I tillegg (2) er det flere eksempler som viser at unge barn på barneskolen faktisk *kan* delta i arbeid med deduktiv resonnering og bevis (Stylianides, 2007a, s. 4). Prinsippet om kontinuitet sier at konseptualiseringen av bevis i skolen bør være lik på alle klassetrinn, slik at det er en kontinuitet, en sammenheng i hvordan elevene opplever og erfarer bevis i matematikk gjennom hele skolegangen. Elever bør ikke utvikle en oppfatning av bevis i matematikk på barneskolen som senere må avlæres eller endres.

Ifølge kontinuitetsprinsippet skal en begrepsliggjøring av bevis adressere det kontinuitetsproblemet som i dag preger elevers erfaringer med dette temaet. Tidligere har ikke elever støtt på bevis og argumentasjon i matematikk før på ungdomsskolen eller vgs, men mer og mer forskning viser at barn helt nede i grunnskolen også kan jobbe med dette temaet (Stylianides, 2007a, s. 4).

2.2 Sosiomatematiske normer

Lithner (2008) fremhever betydningen av læringsmiljøet i klasserommet og hvordan det kan påvirke hvordan elevene lærer å resonnere i matematikk. Han understreker at læring er sterkt påvirket av *muligheten* til læring. I arbeidet med problemløsningsoppgaver har elevene et individuelt ansvar i å prøve å løse problemet, men elevene kan generelt ikke lære matematikk i isolasjon. Læringsmiljøet og regler for sosial og matematisk interaksjon med de andre i klasserommet er viktig for å utvikle god matematikkforståelse (Lithner, 2008, ss. 270-273). Sosiale klasseromsnormer kan etableres der elevene forventes å begrunne deres matematiske påstander og gjøre dem tydelige for de andre i klassen. Elevene er avhengige av få muligheten til å begrunne, forklare og diskutere løsninger med andre for å trene på matematisk resonnering og forbedre matematikkforståelsen (National Research Council, 2001, s. 130).

Dette synet kommer også frem i Stylianides sin definisjon av argumentasjon og bevis i skolen, der den sosiale dimensjonen er helt sentral. Gjennomgående i definisjonen ser vi at påstander, resonnementer, og representasjoner må være gyldig, kjent for og innenfor den konseptuelle rekkevidde til *klasseromsfellesskapet*. Selve prosessen ved å akseptere et argument som et bevis, er helt avhengig av de sosiale mekanismene i det matematiske fellesskapet, altså klassen. Han anser klasseromsfellesskapet til å bestå hovedsakelig av elevene, og at læreren har en annen spesiell rolle (Stylianides, 2007b, s. 292). Læreren fungerer som en representant for klasseromsfellesskapet og for matematikken som disiplin. I følge Yackel og Cobbs (1996) analyser av sosiomatematiske normer i klasserom med fokus på utforsking og problemløsing, er læreren helt sentral for å etablere den matematiske kvaliteten i klasseromsmiljøet, og for å etablere normer for den matematiske aktiviteten til elevene (Yackel & Cobb, 1996, s. 475).

Når vi snakker om den sosiale dimensjonen ved arbeid med resonnering, argumentasjon og bevis i et klasserom, kan vi snakke om sosiale normer og sosiomatematiske normer. Sosiale normer er mer generelle normer i et klasserom, som gjelder for alle fag og ikke bare spesielt for matematikk. En sosial norm kan f.eks. være at det forventes at elevene skal forklare løsningene deres og hvordan de har tenkt (Yackel & Cobb, 1996, s. 461). Sosiale normer i et klasserom handler om hva som forventes at man gjør, sier og handler. Det handler om hva elevene forventer av læreren og medelevene, og om hva elevene forventer av seg selv. Sosiale normer i klasserommet kan f.eks. være at elevene sitter stille og følger med når andre snakker, og at man rekker opp hånda hvis man lurer på noe. Disse normene utvikles gjennom sosialt samspill mellom lærer og elever og mellom elever, og karakteriserer måten lærer og elever er sammen på i klasserommet.

Sosiomatematiske normer er de sosiale normene som er direkte knyttet til matematikkfaget (Hana, 2013, s. 132). De sosiomatematiske normene er med på å forme elevenes syn på matematikk og matematikkundervisning, hvilke verdier de har i faget, og hvordan de utvikler seg til å bli intellektuelt autonome i matematikk. For eksempel er synet på hva som kan sees på som en akseptabel matematisk forklaring og begrunnelse, en sosiomatematisk norm (Yackel & Cobb, 1996, ss. 461-462). Andre sosiomatematiske normer kan være at det å løse oppgaver raskt er synonymt med å være flink i matematikk. Det kan være hva lærer og elever ser på som verdifull matematikk, hva som er gode matematiske spørsmål og hva som er et godt matematisk svar. I likhet med sosiale normer, blir også de sosiomatematiske normene dannet i samspill mellom lærer og elever og mellom elever, der læreren naturligvis har en ekstra viktig rolle. I og med at alle klasser er forskjellige, vil også de sosiomatematiske normene variere fra klasse til klasse (Yackel & Cobb, 1996, s. 475).

2.3 Oppgavens utforming – Problemløsningsoppgave

I den nye læreplanen (LK20) blir det lagt større vekt på utforsking og problemløsing i matematikk enn tidligere læreplaner. Under kjerneelementet "Utforsking og problemløsing" står følgende:

> Utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene. Problemløsing i matematikk handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før … Problemløsing handler også om å analysere og omforme kjente og ukjente problemer, løse dem og vurdere om løsningene er gyldige (Utdanningsdirektoratet, 2019).

I arbeidet med matematikk og matematikkoppgaver, snakker Skovsmose (1998) om to typer læringsmiljøer. Han skiller mellom det å jobbe innenfor oppgaveparadigmet, og det å jobbe i et undersøkelseslandskap. I tillegg deler han selve matematikkoppgavene inn i tre kategorier. Han skiller mellom det å jobbe med "ren" matematikk, det å jobbe med en konstruert virkelighet og det å jobbe med oppgaver som har bunn i realitetens verden (Skovsmose, 1998). Se tabell 1 under.

Tabell 1. Læringsmiljøer. Oversatt figur 4 fra (Skovsmose, 1998, s.29).

	Oppgaveparadigme	Undersøkelseslandskap
Referanser til «ren» matematikk	(1)	(2)
Semi-referanser til «virkeligheten»	(3)	(4)
Reelle referanser	(5)	(6)

På tabell 1 over kan vi se at de tre oppgavetypene både kan befinne seg innenfor oppgaveparadigmet og i undersøkelseslandskapet. Han understreker imidlertid at det er ganske stor forskjell på disse to læringsmiljøene.

Med "oppgaveparadigmet" mener han den klassiske undervisningsformen der læreren gjennomgår noe på tavla, f.eks. standardalgoritmen for subtraksjon, og deretter viser noen eksempler, før elevene setter seg på plassen og regner mange lignende oppgaver. Målet ved slik undervisning er å få avklart et bestemt forhold i matematikken, slik at elevene blir i stand til å løse en bestemt type oppgaver og få korrekt svar. En annen ting som kjennetegner slike oppgaver innenfor oppgaveparadigmet er at de ofte har ett og bare ett riktig svar. Det karakteristiske med "undersøkelseslandskapet" derimot, er at oppgaven eller læreren, gjennom utfordrende spørsmål, inviterer elevene til å utforske noe (Skovsmose, 1998, ss. 28-29). Hvis læreren stiller spørsmål som "Hva hvis …?" eller "Hvorfor blir det sånn?" og elevene blir undrende og stiller seg selv de samme spørsmålene, kan man si at de befinner seg i undersøkelseslandskapet. Undersøkelseslandskapet er derimot ikke noe absolutt. Om oppgaven er innenfor undersøkelseslandskapet eller ikke avhenger av elevenes faglige nivå, alder, kjønn og interesser, i tillegg til at elevene må være motiverte for å utforske. For at oppgaven skal være innenfor undersøkelseslandskapet, kan det som Lithner (2008) påpeker, ikke være åpenbart for elevene hvordan de skal løse den (Lithner, A research framework for creative and imitative reasoning, 2008, s. 257).

Beck, Hansen, Jørgensen og Petersen (2003) peker på noen karakteristiske trekk ved undersøkende virksomhet i matematikk. Tre sentrale punkter er: 1. Det må være et faktisk problem å undersøke. 2. Problemet gir muligheter for å jobbe med flere representasjonsformer og på flere abstraksjonsnivåer. 3. Læreren legger opp til dialog, stiller spørsmål og veileder/utfordrer elevene. I rammeverket til Lithner (2008) støtter han seg på Schoenfeld (1975) sin definisjon av et matematisk problem, som sier at oppgaven må være intellektuelt vanskelig for en person. I tillegg understreker han at det stilles krav til resonnering for å kunne løse oppgaven.

NRICH, et samarbeidsprosjekt mellom fakultetene for matematikk og utdanning ved University of Cambridge, har spesialisert seg innen problemløsning og det å lære matematikk gjennom utforsking og diskusjon. De har laget en oversikt over hvilke aspekter ved matematikkoppgaver som gjør det nødvendig med resonnering. The NRICH Primary Team (2014) påpeker at resonnering trengs: **1**. Når vi møter møter en ny type utfordring for første gang. Da hjelper resonneringen oss til å gjøre nytte av tidligere kunnskap som kan være relevant for å løse den aktuelle oppgaven. **2**. Når logisk tenkning er nødvendig, for eksempel hvis en trenger å overbevise seg selv eller noen andre. **3**. Når en rekke startpunkter er mulig. Altså at det er flere måter å angripe oppgaven på. **4**. Når det finnes flere strategier for å løse et problem. **5**. Når det mangler informasjon i oppgaven. Her kreves det resonnering på tre nivå. Først må eleven finne ut at det mangler noe informasjon. Deretter må en finne ut hva det er vi trenger å vite. Til slutt må vi bruke resonnering til å hente fram eksisterende kunnskap for å finne/regne ut den manglende informasjonen. **6**. Når vi skal velge en metode eller en problemløsningsferdighet. Det kan f.eks. være det å jobbe systematisk, prøve og feile, logisk resonnering, se etter mønster, visualisere, kvalifisert gjetning osv… **7**. Når vi må evaluere og vurdere om svaret gir mening i den konteksten oppgaven er satt i. La oss si at en elev skal finne ut hvor mange busser det trengs for å frakte 54 barn hjem fra skolen. Hver buss tar 12 personer. Eleven deler 54 på 12, og finner ut at det trengs 4,5 busser. Rent matematisk er svaret riktig, men gir svaret mening i denne konteksten? **8**. Når det finnes flere enn én løsning på oppgaven. Dette gjelder også hvis oppgaven innebærer å finne alle mulige løsninger.

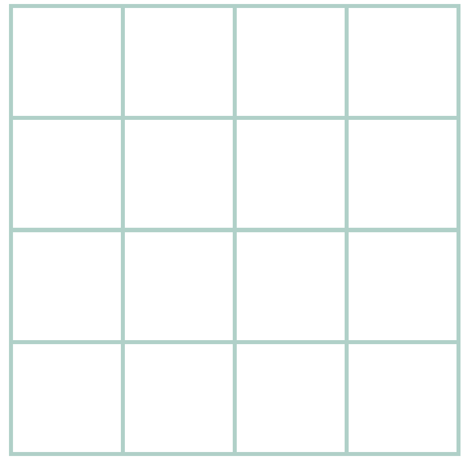
Som The NRICH Primary Team (2014) legger fram, er det ganske mange ulike måter en matematikkoppgave kan legge til rette for eller kreve resonnering for å bli løst. I tillegg til selve matematikkoppgaven, kan også læreren stille oppfølgingsspørsmål for å utfordre og få elevene til å resonnere og argumentere. Utfordringen om å resonnere og det å prøve å overbevise seg selv og andre, kan brukes på ethvert matematisk problem eller oppgave (Boaler, 2016, s. 143). Selv om oppgaven eller lærerens spørsmål fordrer til resonnering, er det ikke dermed garantert at elevene begynner å resonnere. Forskning viser at elevene er i stand til å vise resonneringsevne når tre betingelser er oppfylt: De har et tilstrekkelig kunnskapsgrunnlag, oppgaven er forståelig og motiverende, og konteksten er kjent og komfortabel for elevene (National Research Council, 2001, s. 130).

2.4 Teoretisk rammeverk for analyse

For å besvare forskningsspørsmålet "Hva karakteriserer elevers resonnering og argumentasjon i arbeidet med matematikkoppgaver på 7.trinn?", har jeg valgt å bruke Lithners (2008) rammeverk for imitativ og kreativ resonnering. Det er et teoretisk rammeverk som nettopp er laget for å karakterisere elevenes tankeprosesser som aktiveres i læringssituasjoner (Lithner, 2015). Lithner (2008) påpeker det at vi ønsker at elevene skal bli flinke problemløsere, samtidig som forskning viser at det fortsatt foregår mye utenatlæring (repetisjonslære/pugging) på skolen. Imitativ resonnering og utenatlæring er en av hovedgrunnene til lærevansker i matematikk. Rammeverket adresserer problemet med utenatlæring ved å karakterisere sentrale aspekter ved den dominerende imitative resonneringen og mangelen på kreativ resonnering i skolen, og forsøker å forklare opprinnelsen/årsaken til og konsekvensene av ulike typer resonnering.

Lithner (2008) deler resonnering inn i to hovedkategorier; imitativ resonnering (IR), og kreativ resonnering (KR). Imitativ resonnering går ut på at elevene etterligner eller bruker kunnskap og prosedyrer en har pugget og memorert fra før. I arbeidet som ligger bak dette rammeverket, har Lithner (2008) identifisert to hovedtyper av imitativ resonnering; memorert resonnering (MR) og algoritmisk resonnering (AR). Memorert resonnering oppfyller to betingelser. Den første er at strategivalget er basert på å gjenskape eller huske et komplett svar. Den andre betingelsen er at implementeringen av denne strategien kun består av å skrive den ned. Et eksempel på MR kan være at eleven har pugget et helt bevis eller en læresetning som Pytagoras` læresetning. Elever som bruker mye MR vil ofte ikke være i stand til å forklare løsningene sine, og viser dermed liten forståelse. Andre tilfeller der MR er vanlig/nyttig, er når oppgavene spør etter ren fakta som "Hvor mange cm er det i en meter?" eller definisjoner som "Hvilke egenskaper har et kvadrat?". MR er også i mange tilfeller påvirket av tidligere erfaringer, noe som kan forstyrre eller overstyre en mer matematisk tankegang. Et eksempel på dette er hvis eleven har løst mange lignende oppgaver som alle gir et tall mellom 1-9 til svar, og plutselig får et svar som er over 100. Eleven kan da tenke at svaret må være feil, istedenfor å stole på sin egen utregning.

Matematikkoppgaver som er vanlige i skolen, stiller normalt sett krav til utregning der det er mer hensiktsmessig å huske en algoritme, istedenfor å huske svaret (Lithner, 2008, s. 259). En algoritme er en avgrenset sekvens av instruksjoner som lar deg finne et bestemt svar for en gitt klasse av problemer (Brousseau, 1997, s. 129). Viktigheten med bruken av algoritmer ligger i at det kan forhåndsbestemmes i arbeidet med matematikkoppgaver (Lithner, 2008, s. 259). Eksempler på dette kan være når en elev skal løse en tekstoppgave, og bestemmer seg for å bruke standardalgoritmen for divisjon med tosifrede tall basert på informasjonen i oppgaven. AR oppfyller to betingelser; 1. Strategivalget til eleven er å gjenskape eller å huske en algoritme for å løse oppgaven. Eleven trenger ikke å finne på en ny løsningsmetode. 2. Den gjenstående resonneringen i implementeringen av denne strategien er triviell og enkel for elevene. Bare en slurvefeil kan hindre at eleven kommer frem til et svar (Lithner, 2008, s. 259). Lithner (2008) understreker at "algoritme" i dette rammeverket inkluderer alle forhåndsspesifiserte prosedyrer, og ikke bare rene kalkulasjoner. Et eksempel på dette er når en elev skal regne ut arealet til kvadratet til høyre på figur 3. Eleven vet at formelen for areal av et rektangel er l*b. Før eleven bruker formelen, finner han lengden og bredden ved å telle rutene. Selv om denne prosedyren i seg selv ikke er en algoritme, vil den bli kategorisert som å bruke en algoritme i dette rammeverket (Lithner, 2008, s. 259).



Figur 3. Areal av kvadrat.

Ved algoritmisk resonnering trenger man ikke nødvendigvis å ha noe særlig matematisk forståelse, så lenge man kan kjenne igjen visse oppgavetyper som man igjen vet at kan løses med en spesiell algoritme. Hovedutfordringen ved AR, er nettopp å finne en passende algoritme til oppgaven. Lithner (2008) deler AR videre inn i tre kategorier; kjent AR, avgrensende AR og veiledet AR.

<u>Kjent AR</u> er når eleven kjenner igjen noe i oppgaven som korresponderer med en viss algoritme. Valget av algoritme henger her sammen med tidligere erfaringer med øvingsoppgaver der oppbyggingen av oppgaveteksten og bruken av figurer og symbol har sammenheng med en algoritme. For eksempel kjenner kanskje eleven igjen nøkkelord i en tekstoppgave som "mer" eller "mindre", noe som henger sammen med henholdsvis addisjon og subtraksjon (Lithner, 2008,

s. 262). Kjent AR er vanlig, men egner seg ikke så godt til problemløsning, da det er en overflatisk strategi som baserer seg på tidligere erfaringer og ikke på matematiske egenskaper.

Avgrensende AR skjer når oppgaven ikke er kjent nok, og ikke passer med noe eleven har erfart tidligere. Eleven klarer ikke å umiddelbart finne en passende algoritme for å løse oppgaven. Valget av algoritme er likevel ikke tilfeldig. Eleven kan f. eks. lete etter noen ord og begreper i oppgaveteksten som *kan* ha en kobling med en algoritme. På den måten kan eleven snevre seg inn i valget av algoritme. Her vil eleven ofte ikke kunne forutse hvordan svaret blir. Eleven har derimot en viss forventning til svaret eller løsningen, f.eks. at svaret skal være et negativt tall. Hvis resultatet ikke stemmer overens med det eleven forventet, blir løsningen enkelt forkastet uten noe form for validering, og en ny algoritme blir prøvd ut. Avgrensende AR er den vanligste AR-tilnærmingen til problemløsningsoppgaver der kjent AR ikke fungerer, og det heller ikke er annen hjelp tilgjengelig (Lithner, 2008, s. 263).

Veiledet AR er når verken kjent AR eller avgrensende AR fungerer, og eleven må ty til veiledning fra en ekstern ressurs (Lithner, 2008, s. 263). Veiledningen her er enten tekst-veiledet eller person-veiledet. Ved tekst-veiledet AR prøver eleven å identifisere likheter mellom oppgaven og et eksempel, teorem, regel, definisjon eller lignende i læreboka eller en annen kilde. Finner eleven noe som tilsynelatende ser ut til å passe, blir algoritmen implementert uten noen form for validering, altså uten bekreftende argumentasjon for hvorfor den algoritmen passer. Person-veiledet AR er når en elev får hjelp til å velge strategi og algoritme av læreren eller en medelev. Heller ikke her trenger eleven å validere strategi- og algoritmevalget, da valget blir tatt av en autoritet som blir sett på som en garanti for å få riktig svar. Forskning viser at elever ofte tar imot veiledning fra medelever som er på samme faglige nivå, og som ofte er feilaktig, uten å kreve noen form for validering eller begrunnelse (Lithner, 2008, s. 265).

Kreativ matematisk resonnering (KMR) oppfyller disse tre kriteriene: 1. Det må være nyskapende. Eleven skaper en ny resonneringssekvens, en ny og original måte å løse oppgaven på, eller gjenskaper en glemt løsningsmetode. 2. Det må fremkomme argumenter som støtter opp og forklarer hvorfor strategien og strategiimplementeringen er riktig eller sannsynlig. 3.

Resonneringen og argumentene som støtter den må være matematisk forankret, i motsetning til IR, der resonneringen er mer overflatisk. KMR er ikke nødt til å være utfordrende for eleven, slik som ved problemløsning. Verdien av KMR ligger i sannsynligheten og logikken i resonneringen, mens verdien av MR og AR blir bestemt av autoriteten til kilden til den imiterte informasjonen (Lithner, 2008, s. 267). Lithner (2008) påpeker også at KMR er relativt sjeldent og at AR er dominerende.

3 Metode

For å besvare studiens forskningsspørsmål “Hva karakteriserer elevers resonnering og argumentasjon i arbeidet med matematikkoppgaver på 7.trinn?”, har jeg vært ute i feltet og observert elever i klasserommet. I følgende kapittel vil jeg gjøre rede for metoden jeg brukte for datainnsamling, forskningsdesign, utvalg av informanter, framgangsmåte, matematikkoppgavene elevene jobbet med, og metode for analyse. Til slutt vil jeg ta en gjennomgang av etiske vurderinger som har blitt tatt, samt redegjøre for studiens kvalitet gjennom validitet og reliabilitet.

3.1 Metode for datainnsamling

3.1.1 Valg av metode og forskningsdesign

Valg av metode for datainnsamling er i stor grad styrt av hva som er mest hensiktsmessig i forhold til forskningsspørsmålet til studien. I og med at jeg ønsket å studere hvordan elever på 7. trinn resonnerer og argumenterer når de jobber med matematikkoppgaver i grupper, valgte jeg å bruke observasjon, som er en kvalitativ metode. En kvalitativ tilnærming til datainnsamling er rettet mot å samle inn informasjon og data i form av ord som er med på å beskrive og forstå menneskers handlinger og meningsskaping i deres naturlige kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113).

Kvalitativ metode er også tett knyttet til forskningsdesignet jeg har valgt for å besvare forskningsspørsmålet, nemlig casestudie. Postholm og Jacobsen (2018) definerer casestudie som et forskningsdesign som er avgrenset av tid og sted, der oppmerksomheten rettes mot f.eks et individ eller en gruppe. Studien er også innenfor en klart definert kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 63). Casestudien min er avgrenset i tid da elevene arbeidet med oppgavene i omtrent én skoletime, og den er avgrenset i sted fordi alt foregikk på et arbeidsrom der elevene er vant til å jobbe med matematikk.

Casen i denne studien er en klasse på 7. trinn, der jeg har delt elevene inn i grupper på 3 elever. Jeg valgte å fokusere på 3 forskjellige grupper. Denne casestudien kan betraktes som en enkelcasestudie, da jeg som forsker går inn og forsker på én enkelt klasse, for å forstå hvordan akkurat disse elevene handler, tenker og skaper kunnskap i samarbeid med hverandre (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64). Postholm og Jacobsen (2018) påpeker at målet med en enkelcasestudie er å presentere grundige forståelser av en enkelcase. Det er ingen fasit på hvordan man gjennomfører en casestudie, men en analyse, tolkning og diskusjon skal gi leseren en forståelse av det temaet som er utforsket (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 110).

3.1.2 Observasjon

Jeg har valgt observasjon som datainnsamlingsmetode, noe som egner seg godt i denne studien, da det gir meg direkte tilgang til det som skal undersøkes (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 62). Det viktigste med observasjonen var å få med meg det elevene sa, men jeg ville også være til stede i klasse-/arbeidsrommet og se på samspillet mellom elevene. Postholm og Jacobsen (2018) understreker at observasjon er mer enn å bare se, og at man bruker alle sansene våre for å fange opp det som skjer der man observerer.

Mens jeg observerte elevene, gikk jeg rundt og noterte litt undervegs. Observasjon er en krevende øvelse, og jeg ville aldri fått med meg alt elevene sa bare ved å notere. Jeg valgte derfor å ta lydopptak av de ulike gruppene mens de arbeidet. Lydopptaker kan være til god hjelp for forskeren, spesielt når det nettopp er kommunikasjon og ordene som blir brukt som er av interesse (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 131). På denne måten kunne jeg spole fram og tilbake og høre alt flere ganger, i tillegg til å transkribere fullstendige samtaler helt ordrett.

Det finnes mange måter å gjennomføre en observasjon på, og man kan ta ulike observatørroller, alt etter hva som er målet med studien. Først og fremst gjorde jeg en åpen observasjon. Det vil si at alle deltakerne i casen visste om at de ble observert (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 68). Observatørrollen jeg hadde under selve opplegget, kalles observerende deltaker eller ikke-deltakende observatør, og er svært vanlig i observasjonsstudier (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 69). Det vil si at jeg var med på og ledet undervisningsopplegget, men at jeg i liten grad deltok i samhandlingen mellom elevene mens de arbeidet.

3.1.3 Utvalg

Utvalget startet med at jeg hørte litt rundt med flere kontakter på forskjellige skoler, for å finne en matematikklærer som ville være med på prosjektet. Til slutt var jeg så heldig at jeg fant en engasjert lærer som mer enn gjerne ville stille sin klasse til rådighet, og som i tillegg var interessert i, og hadde litt erfaring med bevis og argumentasjon i matematikk. Jeg informerte alle elevene i klassen om prosjektet og om når og hvordan vi skulle gjennomføre det.

Videre måtte jeg gjøre et utvalg av informanter blant elevene i klassen. Jeg kunne ikke velge helt fritt, da det bare var de som hadde skrevet under på samtykkeskjemaet som kunne delta. De aller fleste hadde riktignok skrevet under. Et kjennetegn på en kvalitativ metode som observasjon, er at vi prøver å få mye informasjon ut av et begrenset antall informanter (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 49). For å ikke gjøre omfanget for stort ville jeg derfor holde meg til rundt 10 personer, noe som ifølge Christoffersen og Johannessen (2012) er vanlig i studentprosjekter som dette, der tid og ressurser er begrenset. Jeg ville observere tre forskjellige grupper på tre personer. Av de elevene i klassen som var tilgjengelige, gjorde vi derfor et tilfeldig utvalg på ni personer. Kontaktlæreren deres hjalp meg med å sette sammen gruppene for å legge til rette for godt samarbeid og kommunikasjon på en best mulig måte.

3.1.4 Gjennomføring

Dalland (2017) understreker viktigheten av å presentere seg og gjøre seg kjent med feltet i forkant av observasjonen. Etter at jeg hadde sikret tilgang til felten, måtte jeg derfor opprette kontakt og skape en relasjon med elevene i klassen. Et par uker før selve observasjonen skulle skje, var jeg inne og besøkte klassen. Læreren hadde fortalt litt om meg fra før, men jeg presentert meg, fortalte elevene litt om hva jeg studerte og lot de få stille masse spørsmål om ting de lurte på. Etter dette hadde jeg en time med matematikk med klassen. På denne måten fikk jeg anledning til å bli enda bedre kjent med elevene, samtidig som de ble tryggere på å ha meg inne i klassen. I og med at det var jeg som skulle lede den timen som skulle “forskes” på og i tillegg gå rundt og observere, ville jeg at det skulle oppleves så naturlig som mulig for elevene.

I den undervisningstimen kjørte jeg et opplegg som hadde flere likhetstrekk med det opplegget jeg skulle observere og ta lydopptak av. Oppgaven er hentet fra boka “Mathematical Mindsets” av Jo Boaler (2016). Dette er en engasjerende oppgave, som er perfekt for å lære og oppmuntre elevene til matematisk resonnering (Boaler, 2016, s. 140). Elevene skulle jobbe sammen to og to, og trene på å argumentere og overbevise hverandre. Se mer utfyllende om oppgaven på figur 4 til høyre. Jeg valgte dette undervisningsopplegget da det ga meg muligheten til å gå rundt og prate med og høre på hvordan de ulike parene argumenterte og arbeidet sammen. På denne måten vil ikke selve “observasjonstimen” virke så farlig og unaturlig, da elevene nettopp har vært igjennom en lignende situasjon med meg til stede. Jeg var også innom klassen i lunsjen en annen dag, der jeg prata litt med læreren i tillegg til at jeg spilte kort og prata løst med noen av elevene. Det å bruke god tid på å gjøre seg kjent med feltet og informantene vil bidra til å kvalitetssikre observasjonen (Dalland, 2017, s. 102).

Paper Folding

Work with a partner. Take turns being the skeptic or the convincer. When you are the convincer, your job is to be convincing! Give reasons for all of your statements. Skeptics must be skeptical! Don't be easily convinced. Require reasons and justifications that make sense to you.

For each of the following problems, one person should make the shape and then be convincing. Your partner is the skeptic. When you move to the next question, switch roles.

Start with a square sheet of paper and make folds to construct a new shape. Then, explain how you know the shape you constructed has the specified area.

1. Construct a square with exactly 1/4 the area of the original square. Convince your partner that it is a square and has 1/4 of the area.

2. Construct a triangle with exactly 1/4 the area of the original square. Convince your partner that it has 1/4 of the area.

3. Construct another triangle, also with 1/4 the area, that is not congruent to the first one you constructed. Convince your partner that it has 1/4 of the area.

4. Construct a square with exactly 1/2 the area of the original square. Convince your partner that it is a square and has 1/2 of the area.

5. Construct another square, also with 1/2 the area, that is oriented differently from the one you constructed in 4. Convince your partner that it has 1/2 of the area.

Source: Adapted from Driscoll, 2007, p.90, http://heinemann.com/products/E01148.aspx

Figur 4. Undervisningsopplegg hentet fra (Boaler, 2016, s. 140).

På selve “observasjonsdagen” brukte vi ikke klasserommet, men et stort og åpent arbeidsom med store arbeidsbord. Dette er et rom elevene er vant til å bruke, enten om det er lunsj, brettspill eller andre samarbeidsoppgaver. Jeg kom litt før elevene, og rigget klart tre arbeidsbord til de tre forskjellige gruppene. Elevene hadde med seg rikelig med blanke ark og skrivesaker. Gruppene ble plassert med god avstand fra hverandre for å sikre best mulig kvalitet på lydopptakene. Jeg plasserte en mobil midt på hver av de tre arbeidsbordene, der jeg brukte en sikker app for lydopptak. Videre forklarte jeg at jeg ikke var ute etter å se hvor flinke de var i matematikk, men at jeg ville se på hvordan de samarbeidet i grupper.

Elevene skulle løse to problemløsningsoppgaver. Jeg hadde den første oppgaven oppe på storskjerm, i tillegg til at de fikk utdelt oppgavene på bordene. En på hver gruppe fikk ansvar for å lese oppgaven høyt for gruppa, slik at alle hang med. Når elevene var i gang med oppgaven, beveget jeg meg bare rundt mellom de ulike gruppene og observerte, uten å blande meg inn i arbeidet. Noen ganger, hvis f.eks. elevene mente at de hadde løst oppgaven, kunne jeg komme med oppfølgingsspørsmål som "Hvordan kan dere være sikre på at dere har rett svar? Kan dere begrunne svaret?". Etter en liten stund når alle gruppene var ferdige, tok vi en oppsummering der vi hørte litt på de ulike løsningene. Etter oppsummeringen hadde vi en 10 minutters pause, før vi kjørte det samme opplegget med den andre oppgaven.

Da vi var ferdige med begge oppgavene, rundet jeg av og takket elevene og læreren for hjelpen. Deretter gikk jeg rett hjem og satte i gang med å transkribere lydopptakene. Transkripsjonene ble oversatt til bokmål, og elevene fikk fiktive navn for å opprettholde anonymiteten. Når alt var ferdig transkribert, leste jeg igjennom noen ganger for å få en fornemmelse av datamaterialet. Jeg endte på at jeg syntes datamaterialet virket brukbart, og at jeg hadde nok stoff til analysen.

3.2 Matematikkoppgavene

I gjennomføringen av observasjonen, ble elevene gitt to matematikkoppgaver som de skulle løse i grupper. Dette var en type matematikkoppgaver som skulle legge til rette for resonnering og argumentasjon. Som vist i teoridelen kapittel 2.3, har slike oppgaver visse egenskaper og oppfyller noen kriterier. Lithner (2008) understreker at oppgaven må være et matematisk problem, altså at den må være intellektuelt vanskelig for elevene. I tillegg må det stilles krav til resonnering for å kunne løse oppgaven. For å gjøre det mulig for meg å analysere og karakterisere elevenes resonnering ved hjelp av Lithners (2008) rammeverk, ville jeg også ha oppgaver som stimulerer til samarbeid, samtaler og diskusjon mellom elevene i gruppa. Jeg ville derfor ha oppgaver som var utfordrende og motiverende og som kan løses på flere måter.

Etter en grundig gjennomgang av forskjellige oppgavebøker og internettsider, landet jeg i samråd med elevenes lærer, på to oppgaver som vi mente kunne passe både denne studien og elevene bra. De to oppgavene elevene løste hentet jeg fra Mattelist.no. Dette er en internettressurs som er utviklet i et samarbeid mellom matematikksenteret ved NTNU og NRICH ved University of Cambridge i England (Mattelist, u.d.). Oppgavene er såkalte LIST-oppgaver, som betyr at de har Lav Inngangsterskel og Stor Takhøyde. Det er altså oppgaver som det skal være lett for elevene å komme i gang med, samtidig som det er mulig å jobbe på et svært høyt matematisk nivå. Alle oppgavene på Mattelist.no er koblet til kompetansemålene i læreplanen.

I dette delkapittelet vil jeg forsøke å beskrive og klassifisere de to oppgavene elevene fikk, i lys av teorien om problemløsningsoppgaver i matematikk som jeg presenterte i kapittel 2.3.

3.2.1 Oppgave 1 – Husene i Bakkegata 9

Figur 5. Husene i Bakkegata 9 (Mattelist, u.d.)

"I Bakkegata er det ***9*** *hus ved siden av hverandre. Det bor* ***minst én person*** *i hvert hus. I to hus som ligger inntil hverandre, bor det ikke mer enn* ***seks*** *personer til sammen. Hvor mange personer kan det* ***maksimalt*** *bo i Bakkegata? A) 23 B) 25 C) 27 D) 29 E) 31"*

Oppgave 1 "Husene i Bakkegata 9" er markert med stikkordene "Kombinasjoner - Systematisk utprøving - Resonnement - Argumentasjon" på Mattelist.no, og er ment for elever på 4.-7. trinn. Dette er en tekstoppgave der elevene først må analysere den informasjonen som gis, før de går i gang med selve problemløsningen og strategivalget. Cluet i denne oppgaven er å finne ut at siden det er 9 hus, et oddetall, så er det om å gjøre å få flest antall personer i det første og det siste huset (5+1, 5+1, 5+1, 5+1, 5).

Oppgaven inviterer elevene til utforsking ved at det ikke er en åpenbar måte å angripe oppgaven på. Elevene må også resonnere og kunne argumentere for at de har funnet den løsningen som gir maksimalt antall personer. Et typisk spørsmål fra læreren kan være "Hvordan vet dere at dere har funnet det maksimale antall personer? Kan du begrunne det?" Vi kan derfor plassere oppgaven i kategori 4 i Skovsmoses (1998) tabell for matematikkoppgaver (tabell 1). Oppgaven er innenfor undersøkelseslandskapet, i tillegg til at den har semi-referanser til virkeligheten, altså at det er en konstruert virkelighet. Det at oppgaven er utformet som en slags plakat med tegninger, kan også bidra til å motivere elevene for utforsking. Oppgaven passer også med Beck et al. (2003) sin beskrivelse av undersøkende virksomhet i matematikk. Oppgaven er et problem som må undersøkes, den gir mulighet for å jobbe med flere representasjonsformer og på flere abstraksjonsnivåer, samt at den legger opp til dialog og diskusjon mellom elevene.

Oppgaven inneholder også flere aspekter som ifølge The NRICH Primary Team (2014) gjør det nødvendig for elevene å resonnere. Oppgaven var en ny type utfordring som elevene ikke hadde møtt på før. Logisk tenking viste seg å være nødvendig, da elevene måtte forklare og overbevise hverandre. En rekke startpunkter var mulig, i tillegg til at den kan løses på flere måter og ved bruk av flere forskjellige problemløsningsferdigheter. Elevene måtte også evaluere om svaret ga mening i forhold til svaralternativene.

3.2.2 Oppgave 2 – En stabel med sjiraffer

Figur 6. En stabel med sjiraffer (Mattelist, u.d.).

"Flyet er 9000 - 12 500 m over bakken. ***Sjiraffen*** *er det høyeste dyret som lever på jorden nå. Tenk hvis sjiraffer kunne balansere oppå* ***hodene*** *til* ***hverandre****! Hvor* *mange* *sjiraffer måtte balansert oppå hverandre hvis de som sitter* ***i flyet*** *skulle sett den* ***øverste?*** *På grunn av vekten på alle sjiraffene, vil sjirafftårnet synke med 1cm per sjiraff."*

Oppgave 2 “En stabel med sjiraffer” er markert med stikkordene “Modellering - Multiplikasjon - Divisjon” på Mattelist.no. Jeg diskuterte denne oppgaven litt med elevenes lærer, og vi var enige at denne oppgaven var interessant, men at den kanskje var litt for enkel for mange 7. klassinger. For å tilpasse oppgaven til den aktuelle klassen, valgte vi å øke vanskelighetsgraden litt ved å legge til en ekstra komponent til oppgaven. Vi la til den siste setningen under bildet (*“På grunn av vekten på alle sjiraffene, vil sjirafftårnet synke med 1cm per sjiraff”*) for å øke oppgavens kompleksitet som igjen stiller større krav til problemløsning og resonnering.

I likhet med oppgave 1, er også denne oppgaven en tekstoppgave utformet som en slags plakat med tegninger som kan virke inspirerende og motiverende. Elevene må vurdere den informasjonen som gis, hva som er relevant og hvordan informasjonen skal brukes. Videre må de identifisere hvilke matematiske egenskaper som er knyttet til oppgaven. Oppgaven kan f.eks. løses med multiplikasjon ved å multiplisere høyden til sjiraffene sammen slik at man får 9000 meter. Eller så kan man løse den ved å dividere høyden til flyet (9000m) med giraffens høyde (5m), og deretter finne ut hvor mange cm tårnet synker. Senere i analysen av elevsvarene vil vi også se at noen løste oppgaven ved å betrakte sjiraffens høyde til å være 4,99m istedenfor 5m. Det er altså ikke åpenbart hvordan man skal løse denne oppgaven. Den kan løses ved bruk av flere forskjellige strategier og med ulike representasjonsformer. Det at elevene kan se ulike måter å løse oppgaven på, gir potensial for diskusjon, resonnering og argumentering. Oppgaven er innenfor undersøkelseslandskapet, i tillegg til at den har semi-referanser til virkeligheten. Vi kan derfor trygt plassere den i kategori 4 i Skovsmoses (1998) tabell for matematikkoppgaver (tabell 1).

Også denne oppgaven inneholder flere aspekter, som ifølge The NRICH Primary Team (2014), krever at elevene må resonnere. Oppgaven er en ny utfordring som krever at elevene må gjøre nytte av gammel kunnskap som kan være relevant for å løse oppgaven. Elevene må også gjøre et strategivalg, da det er en rekke forskjellige måter å angripe oppgaven på. Det kreves også en del resonnering for å vurdere all informasjonen som gis, finne ut hva som mangler av informasjon, og å finne ut hvordan man finner dette. Vi vil også se i analysen at elevene flere ganger må vurdere om løsningene og svaret gir mening.

3.3 Analysemetode

Som Nilssen (2012) påpeker, er kvalitativ forskning både en strukturert og systematisk prosess, samtidig som det er en intuitiv og kreativ prosess. Det er ingen oppskrift eller fasit på hvordan man analyserer kvalitativ data. Når jeg skulle gå i gang med analysen av datamaterialet, printet jeg ut transkripsjonene og bare leste igjennom flere ganger. For å prøve å skaffe meg en helhetlig overskrift og en første forståelse, noterte jeg ned alt jeg tenkte og bet meg merke i undervegs. Det er naturligvis vanskelig å være helt objektiv her, da alt jeg gjør er farget av teorien, erfaringer, tidligere kunnskap og tanker jeg har gjort meg (Nilssen, 2012, s. 68). Analysen startet egentlig med en gang jeg var på forskningsfeltet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 145).

Videre brukte jeg en induktiv tilnærming for å prøve å skape mening, se mønster og redusere datamaterialet. Jeg benyttet meg av åpen koding, som vil si å identifisere og sette navn på viktige mønstre i materialet ved hjelp av koder (Nilssen, 2012, s. 82). Disse kodene ble konstruert av meg undervegs i gjennomgangen av transkripsjonene, og forteller meg i grove trekk hva de ulike delene av materialet handler om. I denne fasen prøvde jeg å lage koder uavhengig av teorien. Neste steg i analyseprosessen var å finne en sammenheng mellom kodene, og sette de sammen i ulike kategorier. I kategoriseringsfasen kommer teorien mer frem, da målet er å sitte igjen med noen få kategorier som kan bidra til å svare på forskningsspørsmålet ((Nilssen, 2012, s. 85). Kategoriene blir gjort rede for i analysedelen (Kap. 4).

I tillegg til åpen induktiv koding, benytter jeg meg også av et teoretisk rammeverk i analysen, som er en deduktiv metode. Jeg bruker Lithners (2008) rammeverk for imitativ og kreativ resonnering, samt Stylianides` (2007b) kriterier for hva som kan sees på som et gyldig matematisk bevis i skolen. Kategoriene jeg lagde vil derfor være relevante i forhold til rammeverket, teorien og forskningsspørsmålet i studien. Kategoriene fikk hver sin farge, slik at jeg kunne markere hele sekvenser i transkripsjonen der en kategori var fremtredende. På den måten fikk jeg en bedre oversikt over materialet, noe som hjalp meg å se sammenhenger mellom empirien og det teoretiske rammeverket.

3.4 Forskningsetikk

I dette forskningsarbeidet har jeg fulgt de etiske retningslinjene som er gitt av Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH). Dette er et uavhengig og rådgivende organ, som jobber med å fremme fri, god og forsvarlig forskning. Forskningsetikken bidrar til å konstituere og sikre god vitenskapelig praksis (Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, 2021).

Deltakerne i dette prosjektet er barn som er under myndighetsalder, og har derfor redusert samtykkekompetanse. Når jeg skulle fortelle klassen om prosjektet, fokuserte jeg derfor på å være veldig tydelig. Både jeg og læreren deres var også nøye med å få fram at dette var helt frivillig, og at de kunne trekke seg når som helst hvis de ikke ville være med allikevel. I tillegg til samtykke fra elevene selv, måtte jeg også få godkjent samtykke fra en av elevenes foresatte. Alle fikk tildelt et samtykkeskjema med all nødvendig informasjon som de skulle ta med hjem og få underskrift på. Her stod det litt informasjon om prosjektet, at det var frivillig, hvordan personopplysninger og data blir behandlet, og hvilke rettigheter deltakerne har (se vedlegg 1).

I og med at jeg skulle ta lydopptak av elevene, som regnes som en personopplysning da stemmene kan identifiseres, måtte jeg sende inn søknad om dette til NSD. NSD står for "Norsk senter for forskningsdata" og sørger for at data om mennesker og samfunn kan hentes inn, bearbeides, lagres og deles trygt og lovlig (Norsk senter for forskningsdata, u.d.). Denne søknaden fikk jeg godkjent. For å sikre at personopplysninger ikke kommer på avveie, ble lydopptakene tatt opp på mobilen ved bruk av mobilappen Nettskjema-diktafon, som er utviklet av Universitetet i Oslo. Dette er en sikker app som er godkjent for forskning av OsloMet. Lydopptakene blir kryptert umiddelbart og sendt til Nettskjema, som er en sikker nettside der en kan lytte på opptakene (Universitetet i Oslo, 22).

Forvaltningsloven sier at all informasjon som kan tilbakeføres til enkeltpersoner er taushetsbelagt (Christoffersen & Johannessen, 2012). Elevene ble informert om at lydopptakene ville bli transkribert og anonymisert ved at de fikk andre navn, og at opptakene vil bli slettet etter prosjektslutt. Det fremkommer heller ingen informasjon om læreren som var med, eller skolen vi var på. Det er kun meg, elevene i den aktuelle klassen og noen ansatte på skolen som vet hvem som har deltatt i dette forskningsprosjektet.

Jeg vil naturligvis forsøke å behandle dataen og gjengi resultatene i forskningen så fullstendig og riktig som mulig. Av takknemlighet og respekt, vil jeg også følge det etiske prinsippet om å unngå å sette deltakerne i et dårlig lys. Som forsker, går ansvarligheten min overfor forskningsdeltakerne foran studiens målsetninger (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 251). Deltakerne har også rett til innsikt i forskningens resultater. Når masteroppgaven er ferdig, kommer jeg derfor til å sende den til læreren som var med. Da har også læreren anledning til å videreformidle resultatene til elevene som deltok hvis h*n vil eller hvis elevene spør.

3.5 Validitet og reliabilitet

3.5.1 Validitet

Validitet handler om hvor gyldige dataene i studien er. Det går på om teori, funn og resultater har relevans i forhold til forskningsspørsmålet, og hvilken dekning forskeren har for å gjøre tolkninger og trekke konklusjoner (Postholm & Jacobsen, 2016, s. 126). I teoridelen har jeg gjort en grundig gjennomgang av de sentrale begrepene, resonnering, argumentasjon og bevis, som igjen henger nøye sammen med det teoretiske rammeverket jeg brukte i analysen av datamaterialet. Jeg mener derfor at forskningsspørsmålet og studien generelt står på et godt teoretisk fundament.

Når det gjelder metode for datainnsamling, gjorde jeg en grundig vurdering etter hva som egner seg best for å besvare forskningsspørsmålet. Jeg ønsket som kjent å se på hvordan elever resonnerer og argumenterer i arbeidet med matematikkoppgaver, og valgte derfor observasjon som datainnsamlingsmetode da det gir meg direkte tilgang til det som skal undersøkes (se Kap. 3.1.2). Jeg valgte å observere tre ulike grupper, slik at jeg fikk et større utvalg og et bredere datamateriale, som igjen betyr at jeg får bedre dekning for å gjøre tolkninger og trekke konklusjoner. Matematikkoppgavene som elevene fikk, vil også være relevante for studiens resultater. Jeg brukte derfor god tid på å finne gode oppgaver, som skulle stimulere til resonnering og argumentasjon. Oppgavene er grundig gjort rede for i kapittel 3.2. Det er viktig å få fram at hvis jeg hadde brukt noen andre oppgaver, ville jeg også fått helt andre resultater.

I og med at jeg har gjort en casestudie, vil kunnskapen som produseres i denne forskningen hovedsakelig være lokal kunnskap, altså kunnskap som er avgrenset til den casen jeg undersøkte (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64). Studien har derfor sterk intern validitet, da kunnskapen vil være svært interessant og relevant for akkurat denne klassen. Om denne kunnskapen er relevant for andre klasser er derimot et annet spørsmål. En kvalitativ studie som dette kan aldri gjennomføres helt likt i en annen klasse (Nilssen, 2012, s. 141). Det vil være andre elever, en annen lærer og andre omstendigheter som påvirker gjennomføringen. Kunnskapen jeg får ut av denne casen kan dermed ikke direkte overføres til en annen case. Vi kan derfor si at den eksterne validiteten er noe svak.

3.5.2 Reliabilitet

Reliabilitet handler om hvor pålitelige studiens funn og resultater er, og går hovedsakelig på hvordan forskningen er gjennomført og hvordan dataen er samlet inn (Postholm & Jacobsen, 2016, s. 126). En måte å teste en studies reliabilitet på, kan være å gjennomføre studien på nytt, og se om en får likt resultat. Det er som nevnt mer eller mindre umulig i kvalitativ forskning. I stedet kan jeg heller reflektere over min egen påvirkning på resultatet, i tillegg til å gjøre forskningsprosessen synlig slik at leseren også kan vurdere og reflektere over forskningens reliabilitet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 224).

I en forskningssituasjon og analyseprosess prøver jeg naturligvis å være så objektiv som mulig, men det er ikke til å komme unna at forskeren påvirker situasjonen på en eller annen måte (Nilssen, 2012, s. 31). Når vi er ute og observerer, vil vi enten vi vil eller ei, gjøre tolkninger og analyser som er farget av den teorien vi har lest, formålet med studien og tidligere erfaringer og kunnskap. Det vil si at en annen forsker sannsynligvis hadde tolket datamaterialet på en annen måte og trukket andre konklusjoner enn meg.

I kvalitative observasjonsstudier som denne, er “forskereffekten” særlig relevant. Det handler om at oppførselen og handlingene til elevene kan bli påvirket av at det er en forsker som observerer dem, som igjen vil påvirke resultatene. For å gjøre forskereffekten minst mulig, har jeg gjort flere forebyggende grep. Jeg var innom klassen og presenterte meg og ga dem all nødvendig informasjon om opplegget, og var tydelig på at det var helt frivillig deltakelse. For å bli enda bedre kjent med elevene, gjennomførte jeg også en undervisningstime i matematikk der vi hadde fokus på samarbeid og argumentering. På den måten fikk jeg muligheten til å gå rundt å prate og se hvordan elevene jobbet med matematikk. Formålet med denne timen var å bryte en barriere, slik at det ikke skulle virke så unaturlig at jeg var i klasserommet den dagen jeg skulle observere. Dette vil bidra til å styrke studiens reliabilitet.

En annen faktor som kan påvirke studiens resultater og reliabilitet, er bruken av lydopptaker. På en måte er det en styrke, da lydopptakene gjør meg i stand til å gjengi nøyaktige transkripsjoner av samtalene mellom elevene. På en annen side kan lydopptakeren kanskje virke litt “skummel”, noe som kan hindre elevene i å prate, diskutere og argumentere sånn som de vanligvis ville gjort i en naturlig setting. I hvor stor grad elevene ble påvirket av hele situasjonen er imidlertid umulig å fastslå (Dalland, 2017).

4 Analyse

I følgende kapittel presenterer jeg resultatene og analysen av tre elevgruppers resonnering og argumentasjon i arbeidet med problemløsningsoppgaver i matematikk. Gruppe 1 gjorde bare Husoppgaven, gruppe 2 gjorde både Husoppgaven og Sjiraffoppgaven, mens gruppe 3 bare gjorde Sjiraffoppgaven. Gruppe 1 og 2 løste Husoppgaven på overraskende lik måte, noe som førte til få interessante forskjeller å diskutere. Av plass og tidsmessige årsaker, har jeg derfor valgt å bare presentere analysen av gruppe 1 sitt arbeid med denne oppgaven. I tillegg presenterer jeg analyse av gruppe 2 og gruppe 3 sitt arbeid med Sjiraffoppgaven.

Jeg går igjennom oppgave for oppgave fra start til slutt der jeg tar for meg relevante sekvenser i transkripsjonen. Sekvensene blir presentert kronologisk for å få en bedre sammenheng i problemløsningen, argumenteringen og resonneringen til elevene. I tillegg til kategoriene, kommer jeg til å bruke begreper fra Lithners (2008) rammeverk for imitativ og kreativ resonnering, samt begreper fra Stylianides (2007b) for å karakterisere elevenes resonnering og argumentering i arbeidet med matematikkoppgavene. I tillegg vil jeg også ta for meg det sosiale aspektet i resonneringen og argumenteringen, som er sentralt i de teoretiske rammeverkene jeg bruker. Her støtter jeg meg på Yackel & Cobb (1996), der jeg peker på noen sosiale og sosiomatematiske normer som virker å være gjeldene i de ulike gruppene.

Kategoriene jeg kom fram til er utregning, forklaring, verifisering og sosial bekreftelse. «Utregning»-kategorien består av kodene «foreslår algoritme», «bruker algoritme» og «prosedyre». Med det mener jeg de gangene elevene kommer med et forslag til en algoritme som kan løse oppgaven, når de gjør utregninger og beregninger eller tar i bruk forhåndsspesifiserte prosedyrer som i Lithners (2008) rammeverk er innenfor algoritmedefinisjonen (se Kap. 2.4).

«Forklaring»-kategorien består av kodene «oppklaring» og «forklarer». Denne kategorien inneholder de gangene elevene hjelper hverandre med uklarheter og kommer med egne tanker som de forklarer til gruppen.

«Verifisering» er satt sammen av kodene «argumentering med ord» og «argumentering med å vise utregning». Denne kategorien markerer de gangene elevene argumenterer for at løsningene eller førslagene deres er riktige. Denne argumenteringen kan komme i form av språk, i form av utregninger eller begge deler.

Den siste kategorien er «Sosial bekreftelse». Den har sammenheng med «verifisering», da den handler om at elevene gir uttrykk for at de bekrefter eller godtar argumentene til den som forklarer og argumenterer for løsningsmetoden sin.

4.1 Gruppe 1. Oppgave 1: Husoppgaven

I dette delkapittelet presenterer jeg resultatet av gruppe 1 sitt arbeid med husoppgaven, samt min analyse av elevgruppens resonnering og argumentering. Jeg kommer til å dele transkripsjonen inn i episoder og presentere dem i kronologisk rekkefølge, for å skape oversikt slik at det blir enklere å se en sammenheng i elevenes resonnering og argumentering.

4.1.1 Episode 1

Linje 1 starter med det første som blir sagt etter at oppgaveteksten er presentert.

1- Erik: Er ikke det litt enkelt? Blir det ikke bare sånn, sånn, sånn (skriver et 3-tall over alle husene). 27.

2- Lise: Hæ?

3- Anders: Hæ?
4- Erik: Eeh... Hva er liksom problemet? Jeg skjønner ikke.

5- Lise: Hvordan skjønte du at det blir 27?

6- Anders: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. Det blir 27 stk til sammen ja.

7- Lise: Åja. Men hvordan skjønte du den så fort?

8- Lise: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. Det blir 27 ja. Men hva hvis vi prøver alle da?

9- Erik: Men hvis det er 3 i hvert hus, så blir det 6 der, 6 der, 6, der 6.. (Setter ring rundt to og to hus). Og da blir det 27.

Erik kommer umiddelbart med et løsningsforslag, og formoder at svaret på oppgaven er 27. Han tegner et 3-tall over alle husene, og konkluderer med at det da blir 27 personer der til sammen. Både Lise og Anders sier "Hæ?" (Linje 2 og 3) spørrende, og etterlyser en forklaring. Allerede her ser vi et eksempel på en sosial norm i denne klassen, eller i hvert fall mellom disse elevene, der de forventer en forklaring til løsningsforslaget til Erik (Yackel & Cobb, 1996).

Før Erik rekker å forklare, ser det ut til at Anders forstår hvordan Erik har tenkt (Linje 6), og Lise like etter (Linje 8). Begge to synger 3-gangen med en innøvd melodi. Videre følger Erik opp med en utdypende forklaring til løsningen (Linje 9). Ut ifra dette, tolker jeg det som at Erik har forstått premissene i oppgaven, funnet ut at det kan bo maks seks personer i to hus inntil hverandre og konkludert med at det blir tre personer i hvert hus. Han har med det identifisert to nøkkeltall i oppgaven; antall hus, og antall personer i hvert hus. Med det kjenner han en passende algoritme til oppgaven, multiplikasjon, og forsøker å verifisere svaret sitt ved vise til at $3 \times 9 = 27$. Dette kan karakteriseres som kjent algoritmisk resonnering (AR) (Lithner, 2008). I tillegg til at tallene passer innenfor oppgavens premisser, og at selve utregningen er riktig, er 27 også et av svaralternativene. Detter er også sannsynligvis med på å forsterke begrunnelsen for at svaret er 27.

4.1.2 Episode 2

8- Lise: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. Det blir 27 ja. Men hva hvis vi prøver alle da?

9- Erik: Men hvis det er 3 i hvert hus, så blir det 6 der, 6 der, 6, der 6.. (Setter ring rundt to og to hus). Og da blir det 27.

10- Anders: Ja akkurat. Men hva var det du mente, Lise? (Ref. hennes spørsmål). Da blir det 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3

11- Lise: Åja. 3 i hvert hus liksom?

12- Anders og Erik: Ja.

13- Lise: Åh jaaa. Og hvis du ganger 3 med 9 så får du 27.

14- Erik: Ja nettopp.

15- Lise: Ok, vi tror det er 27. Fordi det kunne vel ikke gått med noen av de andre?

16- Erik og Anders: Hæ?

17- Lise: Ok, vi må hente Markus. Så vi tror altså at det er maks 27 personer, på grunn av at hvis du tar 3x9 så får du 27.

I linje 8 ser vi at Lise spør: “Men hva hvis vi prøver alle da?”. Spørsmålet blir først oversett av Erik, men Anders spør hva hun mente (Line 10), før han følger opp med en forklaring på at det er tre personer i hvert hus. Fra linje 11 - 15, ser vi at Lise blir med på tankegangen til guttene. I dette utdraget ser vi at elevene prøver å verifisere løsningsmetoden, og komme til en konklusjon. De kommer opp med et argument (Linje 13) for at 27 er riktig svar, noe som virker å være akseptert av det sosiale fellesskapet, og dermed sett på som et gyldig argument (Stylianides, 2007b). Argumentet er derimot bare delvis akseptert, fordi Lise spør på ny (Linje 15): ”Fordi det kunne ikke gått med noen av de andre?”. Det er tydelig at Lise har et forslag om at oppgaven kan løses på en annen måte. Begge guttene svarer “Hæ?” på spørsmålet (Linje 16). Etter dette virker det som om Lise gir litt opp, og går tilbake til argumentet om at det må være $3 \times 9 = 27$ (Linje 17). Her vil jeg påstå at vi ser et nytt eksempel på en sosiomatematisk norm som kan gjelde for denne gruppen. Erik var veldig rask med å komme med et løsningsforslag, som han igjen forklarte og fikk støtte fra av Anders. Det kan tolkes som at det å være rask i matematikk blir sett på som det samme som å være flink, som igjen fører til at Lise ikke “tør” å komme med et motargument og foreslå en annen løsning (Yackel & Cobb, 1996).

Som Lithner (2008) påpeker i definisjonen på resonnering, trenger ikke resonnering å baseres på formell logikk, og kan til og med være feil så lenge det er noen fornuftige tanker og forklaringer bak. Resonneringen til Erik som vi ser her i episode 1 og 2 er et eksempel på akkurat dette. Han kommer med en påstand, som han videre forklarer og begrunner. Selv om løsningen hans ikke gir korrekt svar, virker argumentene og forklaringen fornuftig, og medelevene blir overbevist (inntil videre).

4.1.3 Episode 3

18- Anders: Men de må jo ha tatt 9 hus med vilje.

19- Lise: Ja, men se nå. Da er det jo ikke, da er det jo ikke…

20- Erik: Bakkegata… Hmm de kunne jo ikke fått mer.

21- Lise: Fordi det kunne vel ikke gått med noen av de andre? (Tegner 2 og 4 på annethvert hus).

22- Anders: Da hadde det vært 6. Altså vi kan jo ikke ha et høyere tall. Det hadde vært 6, der og 6 der… Det må jo være 27.

23- Sven (lærer): Har dere kommet fram til noe?

24- Anders: Ja, det blir 27.

25- Sven: Ok. Lag en begrunnelse på hvorfor det blir 27. Jeg har fått flere nemlig.

26- Erik: Når det er 3 i alle, så blir det 6 der, 6, der 6, der 6 der og 6 der. Altså 27.

27- Sven: Jeg er enig i at det blir 27. Men hva med de andre løsningene der da? (Peker på der de har skrevet 4 og 2 annenhver).

28- Erik: Det må være 3 og 3. Eller det er det samme om det er 4 og 2 eller 5 og 1. Det blir uansett ikke mer, fordi det fortsatt er 6 og 6.

29- Sven: Ja okei. Jeg tror jeg ville studert de ulike løsningene litt mer.

I linje 18 ser vi plutselig at Anders også begynner å tvile. Da kaster Lise seg på igjen, og først i linje 21 kommer hun med sitt forslag da hun begynner å tegne inn 4 og 2 på husene istedenfor 3 og 3. I linje 22 ser vi at Anders igjen påstår at det ikke kan være høyere enn 27, og argumenter med at 4 og 2 også blir 6 til sammen, slik som 3 og 3. I Linje 23 ser vi at læreren spør om de har kommet fram til et svar, og om de kan begrunne svaret. I linje 26 og 28 ser vi at Erik også bruker argumentene om at det er det samme om det er 3 og 3, 4 og 2 eller 5 og 1. Det blir uansett 6. Her ser vi at de gjennomgående bruker den samme prosedyren som de brukte når de valgte 3 og 3 personer i hvert hus. De fortsetter å telle 6 og 6 sammen, og tenker at det uansett vil gi det samme svaret. Dette kan karakteriseres som kjent AR (Lithner, 2008). Videre blir de oppfordret til å undersøke litt videre.

4.1.4 Episode 4

30- Lise: Hvis det bor 5 der og 1 der, blir det fortsatt 6. Det blir fortsatt det samme svaret eller? 27?

31- Erik: Javel. Så 5, 1, 5, 1 ,5 ,1 ,5, 1, 5.

32- Anders: Det blir akkurat det samme.

33- Erik: Det blir 6, 6, 6, 6, 5... 29

34- Anders: Vent litt. Hva mener du?

35- Erik: Hvis du teller to og to hus, så blir det 6 i de fire første, så blir det 5 i det siste. Og da blir det plutselig 29.

I dette utdraget ser vi at Erik går vekk fra konklusjonen om at svaret ble 27, og tester ut med nye tall (Linje 31). De bruker i utgangspunktet den samme strategien nå som de gjorde til å begynne med, ved at de skriver opp tallene på hvert hus (5, 1, 5, 1 osv.). Forskjellen nå er at tallene ikke er like (3, 3, 3…), noe som gjør at de ikke bare kan bruke samme algoritme som sist, da de tok 9×3. Dette fører til at de heller adderer alle sammen (Linje 33-35). På den måten finner de ut at to og to hus har 6 personer til sammen, men at det siste står alene og har 5.

Hvis vi ser for oss figur 2 (kap. 2.1.1, s. 4), kan vi si at gruppen nå har kommet til et vendepunkt i resonneringssekvensen. De har nå tilegnet seg en ny kunnskap om oppgaven, og er dermed et steg nærmere en konklusjon (Lithner, 2008).

4.1.5 Episode 5

36- Lise: Ok. Hvordan vet vi at det ikke er mer da?

37- Anders: Du plusser femmerne.

38- Erik: Se. Du har 5 der, 1 der, 5 der, 1 der, 5 der, 1 der, 5 der, 1 der så 5 der.

39- Anders: Det blir 5x5 pluss 4. Det begynner på 5 og slutter på 5, siden 9 er et oddetall.

40- Lise: Åjaa nå skjønner jeg det.

41- Erik og Anders: Ja.

42- Erik: Det må være 5 og 1. Det kan ikke være 6 og 0 siden det må være 1 i alle.

43- Lise og Anders: Ja, stemmer.

44- Erik: Ja. Siden det begynner og slutter på 5. Da blir den telt en gang mer enn de med 1 i.

45- Anders: Så det er om å gjøre å ha størst antall på de husene som er oddetall.

46- Erik og Lise. Ja.

47- Lise: Så hvis det hadde vært et partall så hadde det vært det samme.

48- Erik: Ja. Det må bli 29 som er maks.

De har nå kommet fram til at det kan være 29 personer til sammen i de 9 husene. I linje 36 stiller Lise et viktig spørsmål, som får gruppa til å produsere en rekke argumenter for at det må være riktig svar (Linje 37-47). I linje 39 ser vi at Anders påpeker en viktig faktor, nemlig at det er 9 hus, som er et oddetall, og at derfor både begynner og slutter på 5. Videre følger Erik opp med at det ikke kan være 6 og 0, siden det må være 1 i alle hus (Linje 42). I linje 44 og 45 kommer de avgjørende argumentene, der de sier at antall personer i det første og det siste huset blir telt en gang mer, og at det derfor er om å gjøre å ha størst antall personer på de husene som er oddetall. Gjennom hele denne sekvensen blir argumentene fulgt opp med en bekreftelse fra de andre på at de er enige (Linje 40, 41, 43, 46 og 48). Med dette konkluderer de med at det maksimalt kan bo 29 personer i Bakkegata 9.

Vi ser et tydelig tegn på at denne gruppen benytter seg av deduktiv resonnering, slik som matematikere gjør når de utleder matematiske bevis. De går fra noe allment (de gitte premissene i oppgaven), og utleder en spesiell konklusjon gjennom logiske slutninger (Hana, 2013). Vi ser også at denne sekvensen med deduktiv resonnering/argumentering passer med Stylianides` (2007b) definisjon av bevis; *et matematisk argument, en sammenhengende sekvens av påstander for eller mot en matematisk påstand.* Men for at det skal kunne karakteriseres som et bevis i skolen, må det også oppfylle tre kriterier (se kap. 2.1.3, s. 8). Elevene her bruker påstander som blir aksepterte av gruppa (1), de benytter seg av gyldig argumentasjonsform som er innenfor den konseptuelle rekkevidden til elevene i gruppa (2), og de bruker uttrykksformer og representasjoner som er hensiktsmessige og som elevene forstår (3). På bakgrunn av dette, kan vi konkludere med at de matematiske argumentene som elevene fremsetter i den siste sekvensen (episode 5), kan sees på som et gyldig bevis i skolen (Stylianides, 2007b).

4.2 Gruppe 2. Oppgave 2: Sjiraffoppgaven

I dette delkapittelet presenterer jeg resultatet av gruppe 2 sitt arbeid med sjiraffoppgaven, samt min analyse av elevgruppens resonnering og argumentering. Transkripsjonen blir delt inn i episoder, der jeg presenterer de mest interessante sekvensene i elevenes samtale. Episodene blir presentert i kronologisk rekkefølge, for å skape oversikt slik at det blir enklere å se en sammenheng i elevenes resonnering og argumentering.

4.2.1 Episode 6

Linje 91 starter med det første som blir sagt etter at oppgaveteksten er presentert.

91- Egil: Ok. Hvor høyt går flyet opp?

92- Marius: 9000 meter.

93- Siri: Da er det vel 5x9000.

94- Egil: 5x9000?

95- Marius: Kan vi ikke bare ta 9000?

96- Egil: Jo, men det er jo hvor høyt flyet er. 5x9000 er jo kjempehøyt. Er jo nesten oppe i verdensrommet da.

97- Marius: Ja, da er du på 45000 meter.

Innledningsvis (Linje 91 - 93) ser vi at de starter med å identifisere viktig informasjon i oppgaven. De presiserer at flyet er 9000 meter over bakken, før Siri foreslår regnestykket 5×9000, som tyder på at de har forstått at det er høyden til sjiraffen (5m) og høyden til flyet (9000m) som er sentral her. Når de har identifisert to nøkkeltall, ser vi at Siri umiddelbart forsøker å få disse tallene til å passe med en algoritme, og foreslår å løse oppgaven med algoritmen for multiplikasjon. Antageligvis har hun erfaringer med lignende oppgaver som kan løses med multiplikasjon fra tidligere. “Husoppgaven” som de jobbet med rett før denne, sitter nok også friskt i minne, der flere av elevene var innom multiplikasjon. Resonneringen til Siri kan dermed karakteriseres som kjent AR (Lithner, 2008). Som Lithner (2008) understreker, egner ikke kjent AR seg godt til problemløsning, da det er en overflatisk strategi som baserer seg på tidligere erfaringer og ikke på matematiske egenskaper (se kap. 2.4, s. 16).

Fra linje 94 - 97 ser vi at Egil stiller seg spørrende til Siri sitt forslag, før han igjen presiserer at 9000 er høyden til flyet. Han argumenterer mot dette forslaget med å forklare at 5×9000 blir altfor høyt. Marius bekrefter dette, og følger opp med at det da blir 45000 meter.

4.2.2 Episode 7

101- Marius: Du må ta 5x1000.

102- Egil: Hvis du skulle hatt 9000 sjiraffer, så måtte alle vært 1 meter. Men nå blir det jo 5 ganger så mye. 5x9 er jo 45. Da ville det vært 45000 meter over bakken. Så da bommer du med sånn… masse.

103- Marius: 1900 giraffer.

104- Egil: Ja, men de synker med 1cm per sjiraff. Det blir 1 meter per hundre.

105- Marius: Så da må du ta minus … Eh..

106- Egil: Sånn 19 meter.

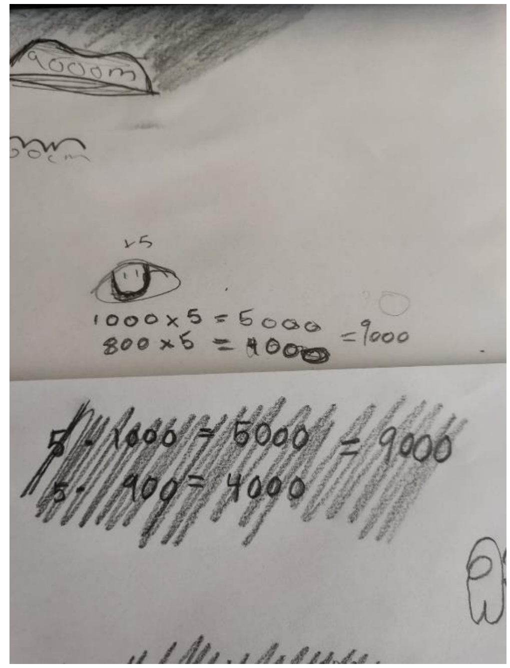
107- Siri: Men hvordan kom du fram til 1900 sjiraffer?

108- Marius: Jeg tok først 1000x5 som blir 5000. 1000 sjiraffer blir 5000 meter. Så tok jeg 900x5 som blir 4000. Da er vi oppe på 9000 meter.

109- Egil: Men blir ikke 900x5 4500?

110- Marius: Åja jo, det må være 800x5. Da blir det 1800 sjiraffer.

I linje 102 ser vi at Egil begrunner argumentet sitt om at 5×9000 må være feil enda tydeligere. Marius foreslår en ny strategi for å løse oppgaven, der han sier at de må ta 5×1000 (Linje 101). Mens Egil begrunner argumentet sitt (Linje 102), gjør Marius noen utregninger på et ark, før han peker på arket og sier at det må være 1900 sjiraffer. På arket har han skrevet opp regnestykkene 5×1000 og 5×900, lagt svarene sammen og fått 1900 (se figur 7). I Linje 107 ser vi at Siri spør hvordan han kom fram til 1900 sjiraffer, og forventer at Marius forklarer/begrunner løsningsforslaget sitt. Vi ser at dette tilsynelatende er en sosiomatematisk norm som også gjelder for denne gruppen, slik som i gruppe 1 (Kap. 4.1.1, s. 31) (Yackel & Cobb, 1996).



Figur 7. Marius sin utregning.

I linje 108-110 ser vi at han forklarer og begrunner løsningen sin steg for steg. Egil skyter inn at 900×5 blir 4500, og ikke 4000. Marius bekrefter innspillet til Egil, og de finner ut at det isteden må være 800×5, slik at det blir 1800 sjiraffer. Marius har funnet en ny måte å løse oppgaven på, som skiller seg fra den Siri foreslo først. Strategien hans er å finne ut hva man må gange 5 med for å få 9000. Han bruker metoden "bridging through 10" (her går han innom 1000 istedenfor 10, men prinsippet er det samme), som er en metode der han deler opp større tall for å gjøre utregningen enklere. Han tar først 5×1000 og får 5000, før han deretter finner ut hvor mye han mangler for å komme opp til 9000. Han viser at han har en relasjonell tallforståelse, som igjen henger nøye sammen med evnen til matematisk resonnering, ved at han forklarer hva han har gjort, og hvorfor det blir sånn (Skemp, 1976). Resonneringen hans er matematisk forankret da han bruker tall og utregninger som er korrekte og gir mening, i motsetning til imitativ resonnering, der resonneringen er mer overflatisk. Oppsummert, kan vi karakterisere resonneringen til Marius i episode 7 som kreativ matematisk resonnering (KMR) (Lithner, 2008).

1 linje 104, ser vi at Egil sier "ja", noe som tyder på at han tilsynelatende er enig og aksepterer løsningsforslaget til Marius, før Siri spør om han kan forklare. Dette skjer riktignok rett før de

finner ut at det må være 1800 og ikke 1900, men selve løsningsmetoden virker de å være enige om. Videre påpeker Egil at sjirafftårnet synker med 1cm per sjiraff (Linje 104), noe som blir 1 meter per hundre sjiraffer. Han finner kjapt ut at dette blir 19m (Linje 106). Resonneringen til Egil her et typisk eksempel på effektiv bruk av memorert resonnering (MR) (Lithner, 2008). Han har pugget/memorert at det er 100cm i 1m, og trenger ikke gjøre noe særlig utregning for å finne ut at det synker med 19m.

Hvis vi ser for oss figur 2 (kap. 2.1.1, s. 4), kan vi se at elevene i har kommet til to vendepunkter i resonneringssekvensen (Lithner, 2008). De startet i møte med oppgaven, før de implementerte en strategi som ga dem informasjonen om at de trengte 1800 sjiraffer for å komme opp til flyet på 9000m. Denne nye informasjonen brukte de videre til å finne ut at tårnet synker med 19m (de justerer seg senere til 18m). De har nå kommet enda et steg nærmere konklusjonen, og må implementere en ny strategi for å finne veien videre.

4.2.3 Episode 8

111- Siri: Kan vi ikke ta 10 000 - 1000? Da får vi 9000.

112- Siri: Vi kan tenke at det er 1000 sjiraffer da? Kan vi ikke? Fordi hvis vi tar minus ett tusen, så er det tusen sjiraffer, og alle går ned med 1cm. Og hvis de gjør det, så blir det 9000.

113- Egil og Marius: hmmm…

114- Siri: Hvis vi har nok sjiraffer til at vi kan ta minus ett tusen, siden alle går ned 1cm, så blir det jo 9000 hvis vi har 10 000 sjiraffer.

Det virker ikke helt som om Siri henger med på løsningsmetoden og forklaringen til Marius. Etter at han har forklart henne, svarer hun med følgende: "Kan vi ikke ta 10 000 - 1000? Da får vi 9000" (Linje 111). Marius sitt resonnement og forklaring er tilsynelatende ikke innenfor den konseptuelle rekkevidden til Siri, noe som betyr at de matematiske argumentene hans ikke kan sees på som bevis i skolen ifølge Stylianides` (2007) kriterier. Det at hun foreslår en ny algoritme, 10 000 - 1000, er et tydelig tegn på avgrensende AR (Lithner, 2008). Den første algoritmen hun prøvde (Linje 93) fungerte ikke og ble forkastet, og hun kan snevre seg inn i valget av algoritme. Hun har forstått at sjirafftårnet skal bli 9000m høyt og at tårnet synker med 1cm per sjiraff, og prøver på ny å sette disse tallene inn i en enkel algoritme for å løse oppgaven. Ved bruk av avgrensende AR, er det vanlig at eleven leter etter et nøkkelord i oppgaven som har sammenheng med en algoritme. Ordet "synker" korresponderer med "minus", noe som kan forklare hvorfor hun foreslår 10 000 - 1000.

I denne oppgaven er det mye informasjon og ulike størrelser å holde styr på. Du har høyden til sjiraffene, høyden til flyet, antall sjiraffer, at tårnet synker med 1cm per sjiraff og hvor mange cm det er i 1m. Siri foreslår i linje 114 at hvis de bare har nok sjiraffer til at tårnet synker med 1000, så blir tårnet 9000m hvis de har 10 000 sjiraffer. Jeg kan forstå tankegangen hennes, men det er tydelig at hun blander antall sjiraffer og høyden på sjirafftårnet. Det ser ut som hun har glemt ut at sjiraffen er 5m, og heller tenker at den er 1m. I tillegg bommer hun litt på hvor mange cm det er i en meter. Man må ha 100 000 sjiraffer for at tårnet skal synke med 1000. Detter er også noe guttene påpeker etterpå. Resonneringen som Siri viser i linje 112 og 114, er tilsynelatende nytenkende og dermed også til dels kreativ. Resonneringen hennes oppfyller derimot ikke kriteriene om at det må fremkomme argumenter som støtter opp og forklarer hvorfor strategiimplementeringen er riktig. Resonneringen og argumentene er heller ikke matematisk forankret. Det kan derfor ikke dette kategoriseres som KMR (Lithner, 2008).

Etter dette følger det en lang sekvens der Egil og Marius forklarer hvorfor denne metoden ikke fungerer (Linje 115-137) (Se vedlegg). I linje 138 kan vi se at det går opp for henne hvorfor det blir feil, da hun svarer "Ahaa… Stemmer…".

4.2.4 Episode 9

> **143- Marius:** Nei tok bare først uten at de sank. Og da trenger vi 1800 giraffer for å komme opp til 9000.
>
> **144- Egil:** Å sånn ja.
>
> **145- Marius:** Du kan også ta 9000 meter og dele på 5, så får du 1800 sjiraffer.
>
> **146- Egil:** Åja, kult. Da må vi trekke fra 1cm per sjiraff nå. Vi må ta vekk 1800cm.
>
> **147- Marius:** Ja. Hvor mange meter er 1800cm?
>
> **148- Egil:** Vi må dele på 100. 18 meter.
>
> **149- Marius:** Så tårnet synker med 18 meter da. 1800 minus 18 da.

Etter å ha brukt en del tid på å forklare hvorfor 10 000 - 1000 ikke blir rett, ser vi at de går tilbake til Marius sin løsning for å jobbe videre med den (Linje 143). I Linje 145 ser vi at Marius har oppdaget at de også kan ta 9000m og dele på 5m for å få antall sjiraffer. Han viser at han har skjønt at multiplikasjon og divisjon er inverse regneoperasjoner, og viser med det relasjonell forståelse (Skemp, 1976). Det at han fikk det samme svaret, 1800, da han brukte motsatt regneoperasjon kan fungere som et argument for at det er riktig.

Videre går de i gang med neste fase av problemløsningen. De må trekke fra 1cm per sjiraff. Marius spør hvor mange meter 1800cm er (Linje 147). Egil svarer ganske kjapt av man må dele på 100, og at det blir 18m (Linje 148). Egil har tidligere vist at han brukte memorert resonnering da han forklarte at det er 100cm i en meter. Her viser han at han også har relasjonell forståelse. Han viser at han har kontroll på hvordan man regner om fra cm til meter, og hvorfor man deler på 100.

Videre foreslår Marius at man nå må ta 1800 - 18, siden tårnet synker med 18m. Tidligere viste Marius at han brukte kreativ matematisk resonnering til å komme fram til at man trengte 1800 sjiraffer. Men resonneringen han viser i linje 149 kan karakteriseres som kjent AR (Lithner, 2008). Han gjenkjenner ordet “synker”, som igjen henger sammen med subtraksjon. Dette eksempelet illustrerer, som Lithner (2008) sier, at kjent algoritmisk resonnering er en overflatisk strategi. Det stilles krav til resonnering når en skal evaluere og vurdere om et svar gir mening (The NRICH Primary Team, 2014). Her ser vi at Marius ikke har tatt seg tid til å evaluere dette forslaget. For det første er 1800 antall sjiraffer, som betyr at de først må gjøre 18m om til antall sjiraffer (ca. 4). For det andre må man addere dette tallet, og ikke subtrahere. Tårnet synker, og derfor trenger man flere sjiraffer.

4.2.5 Episode 10

150- Siri: Vi må vel finne ut hvor mange sjiraffer 18 meter er først.

151- Marius: Åja, selvfølgelig.

152- Egil: Ja, skal vi se. 5, 10, 15, 20. Fire sjiraffer blir 20 meter, så ca. 4 sjiraffer da.

153- Siri: Ja, vi kan jo ikke dele en sjiraff.

154- Marius: Ja vi må runde opp til 4 sjiraffer. Det blir bare 4.

155- Siri og Egil: Ja.

156- Egil: Så da synker tårnet med 4 sjiraffer.

157- Marius: 1800 - 4 da?

158- Siri: Ja det må vel bli det? …. Eller vent. Da blir det jo færre giraffer? Vi må vel ha flere?

159- Marius: Åjaa, ja. Vi må plusse. 1800 + 4 da.

160- Egil: Ja faktisk. Så da blir det 1804 sjiraffer.

161- Siri og Marius: Ja, 1804.

I dette utdraget ser vi at Siri igjen er mer delaktig etter at Marius og Egil har stått for mesteparten av diskusjonen og forklaringa en stund. I linje 150 ser vi at hun har evaluert løsningsforslaget da hun påpeker at de først må finne ut hvor mange sjiraffer 18m er. Litt senere ser vi at hun igjen viser god forståelse og evne til matematisk resonnering ved at hun får fram at de trenger flere sjiraffer, og dermed må addere istedenfor å subtrahere (Linje 158). Det at Siri fortsatt tør å komme med innspill og forslag til løsninger etter at hun innledningsvis hadde feil, er et tegn på en sosial norm i gruppa som sier at det ikke er farlig eller flaut å ta feil (Yackel & Cobb, 1996).

I Linje 152-154 ser vi at de sammen finner ut hvor mange sjiraffer 18m blir. De runder opp til 4 sjiraffer, siden de ikke kan dele en sjiraff slik som man kan med tall, som Siri påpeker. Det at de evaluerer og vurderer om svaret gir mening i denne konteksten, vitner om god evne til matematisk resonnering (The NRICH Primary Team, 2014).

I Linje 157 ser vi igjen at Marius foreslår å bruke subtraksjon (1800-4), som er tydelig tegn på kjent AR (Litnher, 2008). Til slutt ser vi at argumentet til Siri om at når tårnet synker, trenger de flere sjiraffer, blir akseptert av resten av gruppa. De konkluderer til slutt med at man trenger 1804 sjiraffer for å komme opp til flyet på 9000m.

4.3 Gruppe 3. Oppgave 2: Sjiraffoppgaven

I dette delkapittelet presenterer jeg resultatet av gruppe 3 sitt arbeid med sjiraffoppgaven, samt min analyse av elevgruppens resonnering og argumentering. Transkripsjonen blir delt inn i episoder, der jeg presenterer de mest interessante sekvensene i elevenes samtale. Episodene blir presentert i kronologisk rekkefølge, for å skape oversikt slik at det blir enklere å se en sammenheng i elevenes resonnering og argumentering.

4.3.1 Episode 11

Linje 162 starter med det første som blir sagt etter at oppgaveteksten er presentert.

162- Ulrik: Er det 12? 1250 meter? nei 12 500 meter.

163- Nils: Trenger vi ikke bare 4 stk da?

164- Tom: Nei, det er flere enn det.

165- Ulrik: I følge her så trenger vi bare en sjiraff (ref bilde).

166- Tom: Nei, flyet er 9000-12500 meter over bakken.

167- Ulrik: Aaaah. Flyet er 9000 meter over bakken, og det er… En sjiraff er 5. Hva må vi gange med 5 for å få 9 eller 12?

168- Tom: Så synker en sjiraff med 1cm.

Helt i starten av problemløsningen prøver de å få en oversikt, og klargjøre hvilke tall som er sentrale. I Linje 166 og 167 ser vi at Ulrik og Tom presiserer at flyet er 9000-12500m over bakken, og at en sjiraff er 5m. Etter at de har identifisert de to nøkkeltallene, foreslår Ulrik (Linje 167) umiddelbart at de må finne ut hva de må gange med 5 for å få 9 eller 12. Her antar jeg at han mener 9000 og 12500. Det kan se ut som om han har vært borti en lignende oppgave før, da han ganske kjapt kommer opp med en algoritme som vil løse oppgaven (delvis). Dette kan dermed karakteriseres som kjent AR (Lithner, 2008).

Tom følger opp med at sjiraffene også synker 1cm. Han har ingenting å si på løsningsforslaget til Ulrik, noe som kan tyde på at han er enig. De har nå kommet fram til en måte å regne det ut på, i tillegg til at de har informasjonen om at sjirafftårnet synker med 1cm per sjiraff. De har altså nå kommet til et vendepunkt i resonneringssekvensen, og må finne veien videre fram til en konklusjon (Lithner, 2008) (se figur 2, kap. 2.1.1, s. 4).

4.3.2 Episode 12

175- Tom: Ulrik? Er 5x500 2500?

176- Ulrik: Men det går jo ned 1cm.

177- Nils og Tom: Åjaaa.

178- Ulrik: Men da er jo sjiraffen 4,9.

179- Tom: Er det 1cm?

180- Ulrik: 1cm er vel 100, nei 1000 meter.

181- Tom: Hvor mange cm er det i en meter?

182- Nils: 100.

183- Ulrik og Tom: 100, ja.

184- Tom: Da blir det 99. En sjiraff er 4,99 meter.

185- Nils: Ok.

186- Ulrik: Ok, så hvis en sjiraff er 4,99 meter og vi skal få 9000.

I Linje 175 ser vi at Tom implementerer strategien som Ulrik foreslo i starten, nemlig å finne ut hva man må gange med 5 for å få 9000 eller 12500. Det kan se ut som han bruker prøv og feil metoden. Før Tom får kommet noe videre med utforskingen, skyter Ulrik inn at man må huske at sjiraffen synker med 1cm. Både Nils og Tom svarer bekreftende (Linje 177). Etter dette kommer Ulrik med en ny og original måte å løse oppgaven på, da han sier at man heller kan tenke at sjiraffen er 4,9m istedenfor 5 (Linje 178). Videre ser vi at de vurderer og diskuterer om det blir riktig, noe som viser evne til matematisk resonnering (The NRICH Primary Team, 2014). I Linje 181 spør Tom hvor mange cm det er i en meter. Nils svarer raskt 100. Dette er et tegn på MR, da han bare "gjenforteller fakta" som han har lært tidligere (Lithner, 2008). De andre i gruppa er enige med Nils, og de kommer fram til at sjiraffen da må være 4,99cm. Her viser gruppa god tallforståelse og at de har kontroll på desimaltall og omgjøring fra cm til m. Dette er et tegn på relasjonell forståelse (Skemp, 1976).

Forslaget til Ulrik, om at sjiraffen kan betraktes som 4,99m er en original og ganske smart måte, som gjør at de slipper å finne ut hvor mye tårnet synker for så å finne ut hvor mange flere sjiraffer de trenger. Han bruker informasjonen i oppgaven på en kreativ måte, og viser at det blir matematisk riktig. På dette grunnlaget kan vi karakterisere dette som KMR (Lithner, 2008).

4.3.3 Episode 13

193- Ulrik: Dette blir veldig vanskelig, fordi en sjiraff er 4,99.

194- Tom: 12500 delt på 4,99. Oi. Har vi kalkulator?

195- Ulrik: Nei..

196- Tom: Eeh, vi tar 12500 delt på 5 da. Det blir 2500.

197- Nils: Hva er 2500?

198- Tom: Det er det du må gange med for å få 12500 siden en sjiraff er 5 meter.

199- Nils: Shit, Tom!

200- Tom: 2500 sjiraffer da. Så må vi ta 2500cm vekk også.

201- Ulrik: Hva sa du nå?

202- Tom: Vi fant ut vi må ha 2500 sjiraffer. Men tårnet synker jo med 1cm per sjiraff, så vi må ta vekk 2500cm.

203- Ulrik: Ja, Stemmer.

I linje 193 uttrykker Ulrik at det blir vanskeligere å regne med 4,99 istedenfor 5. Tom svarer med å foreslå regnestykket $12500 \div 4{,}99$, og gir et bekreftende "oi", på at det ble noe vanskelig. Her har han valgt at flyets høyde er 12500m, og ikke 9000, som fortsatt er innenfor oppgavens kriterier. Tidligere så vi at Ulrik foreslo å bruke multiplikasjon for å finne hva man må gange 5 med for å få høyden til flyet. Her viser Tom at man også kan løse det ved å bruke divisjonsalgoritmen. Han har forstått hvordan divisjon og multiplikasjon henger sammen, og viser med det relasjonell forståelse (Skemp, 1976). Siden de ikke har kalkulator, foreslår han at de endrer strategi og bruker 5 isteden for 4,99 som gjør utregningen mindre komplisert. Da finner han raskt ut ved hjelp av divisjon, at svaret blir 2500. Dette er en regneoperasjon som virker triviell for han, og som han kjenner fra før. Dette kan karakteriseres som kjent AR (Lithner, 2008).

Nils følger opp med å spørre hva tallet 2500 er (Linje 197). Her gikk det ganske fort, slik at hverken Nils eller Ulrik hang helt med. Tom forklarer derfor hva han har funnet ut (Linje 198 og

200). Her se vi nok en gang et eksempel på en sosial norm som gjelder i denne klassen (Yackel & Cobb, 1996). Det forventes at løsningsforslag og utregninger skal forklares. I Linje 199 og 203 svarer Nils og Ulrik bekreftende, som tyder på at de er enige og aksepterer forklaringen til Tom.

4.3.4 Episode 14

204- Nils: Hvor mange meter blir det da?

205- Ulrik: Det er 250 meter.

206- Tom: Nei, det er 25…25.

207- Ulrik: Ja..

208- Tom: Så da synker tårnet med 25 meter.

209- Nils og Ulrik: ja

210- Tom: Da trenger vi 5 sjiraffer til da.

211- Ulrik: Det blir ikke 2500-25 da? 2475.

212- Tom: Nei for 2500 er jo antall sjiraffer. Og 25 meter er det samme som 5 sjiraffer på en måte.

213- Ulrik: Åjaa. Så vi trenger 5 sjiraffer til? Det blir ikke minus?

214- Tom: Ja for tårnet synker jo med 5 sjiraffer, så vi trenger 5 til for å komme opp til flyet.

215- Ulrik: Ja, sånn ja. Pluss 5 da.

216- Tom: Ja

217- Nils: Ja. 2505 da.

Etter å ha endret strategi til å bruke 5m istedenfor 4,99m, fant de ut at de trenger 2500 sjiraffer oppå hverandre for å komme opp til flyet. Så fant de videre ut at tårnet synker med 1cm per sjiraff, som her blir 2500cm til sammen (se episode 13). Neste steg i resonneringssekvensen blir å finne ut hvor mange meter det blir, og videre hvor mange sjiraffer de trenger ekstra. I linje 204 spør Nils hvor mange meter 2500cm blir. De har tidligere konstatert at det er 100cm i 1m. Ulrik svarer at det blir 250m (Linje 205), før Tom korrigerer ham og sier at det er 25m. Ulrik regner ut dette i hodet, men det er tydelig at han tar i bruk divisjon for å komme fram til svaret. Han bruker i utgangspunktet riktig algoritme som han vet at passer, men det som kan se ut som en slurvefeil gjør at svaret blir feil. Dette kan karakteriseres som kjent AR (Lithner, 2008). Han er kjapp til å godta at det blir 25, og gruppen er enige om at tårnet da synker med 25m (Linje 207 - 209).

Når de har blitt enige om at tårnet synker med 25m, foreslår Ulrik å ta 2500-25 for å finne svaret (Linje 211). Her går han i samme fellen som Marius i gruppe 2 gjorde (se kap. 4.2.5 Episode 10, s. 42). Jeg tolker det som at han baserer valget av algoritme på at ordet "synker" henger sammen med subtraksjon, som jo virker ganske naturlig. Denne type resonnering kan vi dermed karakterisere som kjent AR (Lithner, 2008). Dette eksempelet illustrerer "faren" med imitativ resonnering ganske godt. Han støtter seg på tidligere erfaringer og stoler på algoritmen, uten å gjøre en skikkelig vurdering på om det gir mening i denne konteksten.

Tom avviser forslaget til Ulrik, og kommer med to gode argumenter på hvorfor det ikke blir 2500-25. I linje 112 argumenterer han: "Nei for 2500 er jo antall sjiraffer. Og 25 meter er det samme som 5 sjiraffer på en måte". Videre følger han opp i linje 114: "Ja for tårnet synker jo med 5 sjiraffer, så vi trenger 5 til for å komme opp til flyet". Han argumenterer på en ryddig og god måte, som gjør at Ulrik og Nils gir uttrykk for at de forstår og er enige. Med dette kommer de fram til at siden tårnet synker med 25m, trenger de 5 ekstra sjiraffer. De konkluderer altså med at svaret er 2505.

4.3.5 Episode 15

218- Tom: Ja. Kan vi teste om det blir riktig på kalkulator på mobilen? (Spør meg).

219- Meg: Ja, kjør på.

220- Ulrik: Ja, da kan vi teste med 4,99.

221- Tom: Ja, det var det jeg tenkte.

222- Tom: Ta 12500 meter delt på 4,99.

223- Ulrik: 2505 komma null ett eller annet.

224- Tom: Da fikk vi riktig da!

235- Nils: Ja shit!

Helt til slutt spør de om de kan bruke kalkulator for å sjekke om svaret de fikk stemmer med den strategien de planla innledningsvis. De slår inn $12500 \div 4{,}99$ på kalkulatoren og får $2505{,}01\ldots$ De har dermed løst oppgaven på to forskjellige måter og fått samme svar, som er et sterkt argument for at de har løst oppgaven riktig.

Gjennomgående i arbeidet med denne problemløsningsoppgaven, har de forklart og argumentert for løsningsforslagene og metodene de har brukt. Spesielt i de siste tre sekvensene ser vi at Tom kommer med en rekke gode argumenter for at det de gjør er riktig. Påstandene han kommer med blir akseptert av de andre i gruppa, han argumenterer og forklarer slik at de andre forstår, og han bruker et hensiktsmessig språk i tillegg til å vise utregning. Denne sekvensen med påstander oppfyller Stylianides` (2007b) kriterier, og vi kan dermed se på dette som et gyldig bevis i skolen.

5 Diskusjon

I analysen har jeg gjort funn som indikerer bruk av flere av Lithners (2008) resonneringsformer blant de tre elevgruppene. Vi kan se flere eksempler på både imitativ og kreativ resonnering, i tillegg til et par sekvenser med argumentering som kan bli sett på som et gyldig bevis i skolen. I dette kapittelet vil jeg diskutere funnene mine i lys av teorien som ble presentert i kapittel 2. Først skal jeg diskutere de to matematikkoppgavene elevene fikk, og hvilke sammenhenger de kan ha med elevenes resonnering og argumentasjon. Deretter vil jeg diskutere de sosiale og sosiomatematiske normene, og se på hvilken betydning de kan ha hatt for arbeidet med problemløsningsoppgavene.

5.1 Sammenhenger mellom oppgavene og elevenes resonnering og argumentasjon

I tabell 2 nedenfor, har jeg laget en oversikt over resultatene av analysen. Tabellen viser hvordan de ulike gruppene har resonnert i arbeidet med de to matematikkoppgavene. Ut ifra disse resultatene kan vi se noen fremtredende sammenhenger mellom de ulike resonneringsformene og de to oppgavene.

Tabell 2. Oversikt over funn fra analysen.

Resonneringsform / Bevis	Gruppe 1 Husoppgaven	Gruppe 2 Sjiraffoppgaven	Gruppe 3 Sjiraffoppgaven
MR		1 tilfelle	1 tilfelle
Kjent AR	2 tilfeller	3 tilfeller	4 tilfeller
Avgrensende AR		1 tilfelle	
Veiledet AR			
KMR		1 tilfelle 1 delvis	1 tilfelle
Bevis	1 tilfelle		1 tilfelle

I gruppe 1 sitt arbeid med Husoppgaven, ser vi at de ved to tilfeller benyttet seg av den imitative resonneringsformen *kjent AR*. Ingen av de andre resonneringsformene i Lithners (2008) rammeverk ble identifisert i gruppe 1. På en annen side kan vi se at argumenteringen deres oppfyller Stylianides` (2007b) tre kriterier for hva som kan sees på som et gyldig bevis i skolen.

I arbeidet til gruppe 2 og 3 som begge løste Sjiraffoppgaven, ser vi en mye større variasjon i bruk av de ulike resonneringsformene i Lithners (2008) rammeverk. Vi ser tilfeller av MR, kjent AR, avgrensende AR og KMR, samt et tilfelle av argumentasjon som kan bli sett på som et gyldig bevis ifølge Stylianides` (2007b) kriterier. Den eneneste resonneringsformen som ikke har blitt identifisert i denne studien er veiledet AR.

Ut ifra resultatene fra tabellen, ser vi altså at det er en klar forskjell i elevenes resonnering i arbeidet med de to ulike oppgavene. Dette kan det være flere årsaker til. Først og fremst, kan vi se på oppgavenes utforming og hvordan de kan ha påvirket elevenes resonnering. Jeg brukte mye tid på å finne to gode oppgaver som skulle legge til rette for resonnering og argumentering. Som vist i kapittel 3.2.1 og 3.2.2, stimulerer begge oppgavene til undring og undersøkelse og kan plasseres i kategori 4 i Skovsmoses (1998) tabell for matematikkoppgaver. Begge oppgavene inneholdt også flere av de samme aspektene som ifølge The NRICH Primary Team (2014) gjør det nødvendig for elevene å resonnere. Begge oppgavene har flere «entry points», begge kan løses på flere forskjellige måter, ved bruk av forskjellige metoder og med forskjellige representasjonsformer. Det at oppgavene er såpass åpne og legger til rette for forskjellige måter å resonnere på, kan være en av grunnene til den variasjonen vi ser i tabell 2.

Jeg har vist at oppgavene har noen likheter, men kanskje enda mer interessant er det å se på ulikheter mellom oppgavene. Mattelist.no har «tagget» oppgavene med ulike stikkord (se kapittel 3.2.1 og 3.2.2), noe som indikerer at de har litt ulike egenskaper. Den tilsynelatende største forskjellen mellom oppgavene er at Husoppgaven i større grad handler om kombinatorikk og logisk tenkning, der «hovedpoenget» er å kunne begrunne og argumentere for at en har funnet den eneste riktige løsningen. Den stiller med andre ord større krav til en skikkelig konklusjon enn den andre oppgaven. Det kan også være grunnen til at elevenes argumenter med husoppgaven kan bli sett på som et gyldig bevis i skolen, selv om det bare er registrert to tilfeller med kjent algoritmisk resonnering i denne gruppens arbeid. Husoppgaven inneholder heller ikke mange forskjellige faktorer som krever avanserte regneoperasjoner.

Mattelist.no har også tagget husoppgaven med «systematisk utprøving», som er en veldig nærliggende strategi å bruke når man skal løse oppgaver som har med kombinatorikk å gjøre. Dette kan vi også se igjen i denne studien, da flere av elevene prøvde seg frem med forskjellige tall (3 og 3, 4 og 2, 5 og 1). Det er godt mulig at en slik oppgave legger litt føringer på hvilke strategier elevene bruker, som igjen fører til en fattigere diskusjon med færre påstander og forslag til løsninger. Dette kan være med på å forklare hvorfor jeg bare registrerte én av Lithners (2008) resonneringsformer i arbeidet med denne oppgaven.

Sjiraffoppgaven kan vi derimot se at har litt andre egenskaper. Den har blitt tagget med stikkordene «modellering», «multiplikasjon» og «divisjon». I tillegg la vi til en ekstra komponent ved at sjirafftårnet synker med 1cm per sjiraff. I forhold til Husoppgaven, inneholder Sjiraffoppgaven flere biter med informasjon som må sorteres og sees i sammenheng med hverandre. Først må de finne sammenhengen mellom flyets høyde og sjiraffens høyde. Deretter må de finne ut hvor mange cm tårnet synker med. Videre må de gjøre om fra cm til m, før de må gjøre meter om til antall sjiraffer. Denne oppgaven består altså av flere steg som krever flere regneoperasjoner, og som stiller større krav til relasjonell tallforståelse. Gjennomgående i prosessen må elevene hele tiden begrunne hva de gjør, og hvorfor det blir riktig. Jeg anser Sjiraffoppgaven som noe vanskeligere enn Husoppgaven, da den er mer kompleks. Dette kan være en av grunnene til at vi ser en mye større variasjon i bruk av resonneringsformene fra Lithners (2008) rammeverk. Som illustrert i tabell 2, er begge tilfellene av kreativ matematisk resonnering registrert i arbeid med sjiraffoppgaven. Det kan skyldes at oppgavens kompleksitet åpner for mer nyskapende og originale løsningsforslag, som er et av kriteriene i KMR (se kapittel 2.4).

Jeg har nå sammenlignet de to problemløsningsoppgavene elevene fikk, og diskutert hvordan likheter og ulikheter mellom dem kan forklare de forskjellene vi ser i elevenes resonnering og argumentering. En annen faktor som kan forklare variasjonen i bruk av resonneringsformer mellom de to oppgavene, er sammensetningene av de tre elevgruppene, og elevenes faglige nivå. Som Boaler (2016) understreker, er resonnering selve hjertet i matematikken. Resonnering binder alt sammen, og brukes for å navigere mellom ulike temaer og prosedyrer og til å vurdere sitt eget og andres arbeid. Resonnering henger med andre ord nøye sammen med matematikkforståelse. Alle elevene er på ulikt matematisk nivå, noe som vil si at elevene også har ulik evne til matematisk resonnering og argumentering. Det kan derfor tenkes at gruppesammensetningene kan påvirke hvilke resonneringsformer vi ser. Homogene grupper med relativt like elever som er på samme matematiske nivå, vil kanskje ikke ha like rike diskusjoner med flere forskjellige løsningsforslag og resonnementer som heterogene elevgrupper der spredningen er større. Dette kan også være en mulig årsak til at vi ser bruk av flere resonneringsformer i gruppe 2 og 3 enn i gruppe 1.

5.2 Sosiale aspekter i arbeidet med problemløsningsoppgavene

Både Lithner (2008) og Stylianides (2007b) fremhever viktigheten av de sosiale aspektene ved resonnering, argumentasjon og bevis. Lithner (2008) påpeker at læringsmiljøet spiller en stor rolle for hvordan elever lærer å resonnere i matematikk. Man kan ikke sitte og lære matematisk resonnering ved å bare løse problemløsningsoppgaver på egenhånd. Dette støttes også av National Research Council (2001) som mener at man er avhengig av et felleskap med gode sosiale og sosiomatematiske normer for å trene på resonnering og utvikle god matematikkforståelse. I Stylianides` (2007b) definisjon av argumentasjon og bevis i skolen, ser vi at en er avhengig av at alle påstander, resonnementer og representasjoner blir godkjent og akseptert av klasseromsfellesskapet for å være gyldig. I følge Yackel og Cobb (1996), er den matematiske kvaliteten i timene avhengig av at det er godt etablerte sosiomatematiske normer i klassen.

I analysen av de ulike elevgruppenes arbeid med oppgavene, registrerte jeg flere tilfeller der sosiale aspekter og sosiomatematiske normer kan se ut til å ha spilt en rolle for hvordan elevene resonnerte og kom fram til løsningene sine. En sosiomatematisk norm som så ut til å gjelde for alle gruppene, var at elevene forventet at en påstand eller et løsningsforslag skulle forklares og begrunnes til de andre. Dette så vi eksempler på i gruppe 1 (episode1), i gruppe 2 (episode 7) og i gruppe 3 (episode 13). I episode 10 i gruppe 2, så vi også et eksempel der den ene eleven etter å ha presentert noen løsningsforslag som har vist seg å være feil eller blitt nedstemt av de andre på gruppa, fortsetter å komme med forslag og bidrag til løsninger. Det er tydelig at det er lov å komme med forslag uten å være 100% sikker, og at det ikke er flaut å ta feil i denne gruppa. Det er ikke registrert lignende tilfeller i de andre gruppene, så det er vanskelig å si om dette er en norm som gjelder for hele klassen, eller om den bare gjelder innad i denne gruppa.

Poenget mitt her er at disse sosiomatematiske normene tilsynelatende virker å være viktige for elevenes resonnering og fremdrift i problemløsningen. Vi ser flere eksempler i dette datamaterialet der elever blir bedt om å forklare, slik at alle elevene på gruppen henger med på tankegangen til den som forklarer. På den måten får alle elevene en mulighet til å vurdere forklaringen og eventuelt akseptere eller forkaste den. Når de andre elevene henger med på og aksepterer et resonnement, har de da kommet fram til ny kunnskap i oppgaven. Det betyr at alle kan bruke den nye informasjonen og fortsette problemløsningen. På den måten skaper det framdrift i arbeidet. Når elevene jobber på denne måten, jobber de som ekte matematikere, noe som ifølge Boaler (2016) gir elevene tilgang til matematikkforståelse og bidrar til å redusere gapet mellom de elevene som forstår og de som sliter i matematikk. En svakhet med bruken av dette rammeverket, som er viktig å nevne, er at det kan være vanskelig å vurdere om en medelev virkelig har forstått og henger med på det de andre forklarer. Hva elevene faktisk tenker inni hodene sine, kan vi ikke si så mye om. Vi kan ikke gjøre annet enn å prøve å tolke det de faktisk sier og gjør.

Tabell 2 viser en utstrakt bruk av algoritmisk resonnering i alle tre gruppene. Som Lithner (2008) påpeker i rammeverket sitt, trenger man ikke nødvendigvis å ha noe særlig matematisk forståelse ved bruk av denne resonneringsformen. Allikevel ser vi at når elevene blir bedt om å forklare og begrunne forslagene sine, viser de evne til matematisk resonnering og matematikkforståelse. Dette understreker viktigheten av etableringen av gode sosiomatematiske normer.

I tillegg til bruk av ulike resonneringsformer, viser tabell 2 at det også er registrer to tilfeller, henholdsvis i gruppe 1 og i gruppe 2, der elevenes argumentasjon kan bli sett på som et gyldig bevis ifølge Stylianides` (2007b) kriterier. Vi kan trekke frem argumenteringssekvensen som utspilte seg i gruppe 1 sitt arbeid med Husoppgaven som spesielt bra. Her ser vi tydelige tegn til deduktiv argumentering, slik som matematikere gjør når de utleder matematiske bevis. Her ser vi et eksempel på bruk av det Stylianides (2007a) kaller «Det intellektuelle-ærlighets-prinsippet» (se Kap. 2.1.3). Dette bekrefter Stylianides` (2007a) påstand om at elever på barneskolen faktisk *kan* delta i matematisk arbeid med deduktiv resonnering og bevis.

6 Konklusjon – Avslutning

I denne studien har jeg undersøkt hva som karakteriserer elevers resonnering og argumentasjon i arbeidet med matematikkoppgaver på 7.trinn. Resultatene fra analysen viser at elevene i denne casen benytter seg av flere av Lithners (2008) resonnementsformer. Jeg har registrert tilfeller av memorert resonnering, kjent algoritmisk resonnering, begrensende algoritmisk resonnering og kreativ matematisk resonnering. Det er ingen registrerte tilfeller av veiledet algoritmisk resonnering. Vi ser altså en god variasjon i elevenes resonneringsformer. Oversikten over bruken av de ulike resonneringsformene i tabell 2, viser til sammen 12 registrerte tilfeller av imitativ resonnering, og 2 registrerte tilfeller av kreativ resonnering. Disse funnene sammenfaller med Lithners (2008) beskrivelse av situasjonen i dagens skole, der imitativ resonnering er dominerende. Videre ser vi i tabell 2, at det er registrert to tilfeller av sekvenser med argumenter som kan sees på som et gyldig bevis i skolen, ifølge Stylianides` (2007b) kriterier. Dette bekrefter Stylianides` (2007a) påstand om at elever på barneskolen faktisk *kan* delta i matematisk arbeid med deduktiv resonnering og bevis.

I diskusjonskapittelet diskuterte jeg funnene opp mot teorien jeg presenterte i kapittel 2. Først diskuterte jeg sammenhenger mellom de to matematikkoppgavene og elevenes resonnering. Deretter så jeg på hvordan de sosiale og sosiomatematiske normene kan ha hatt betydning for elevenes arbeid med disse oppgavene. De to problemløsningsoppgavene har ulike egenskaper, ulik vanskelighetsgrad og stiller ulike krav til resonnering. Dette ser vi også igjen i fordelingen av de ulike resonneringsformene mellom Husoppgaven og Sjiraffoppgaven (se tabell 2). Videre så vi tegn på noen sosiomatematiske normer som virket gjeldene i disse gruppene. Når en elev kom med en påstand eller et løsningsforslag, forventet de andre elevene en begrunnelse. Dette førte til at elevene hele tiden måtte forklare hva de tenkte, og hvorfor den måten var riktig (eller feil). Jeg konkluderer derfor med at imitativ resonnering var den dominerende resonneringsformen innad i disse tre elevgruppene på 7.trinn, men at de likevel viste matematisk forståelse.

Som jeg har vist, har matematikkoppgavens utforming betydning for hvordan elevene resonnerer. Med andre ord, hadde jeg kanskje fått helt andre resultater og en annen konklusjon hvis elevene fikk andre oppgaver. I og med at dette er en kvalitativ studie av en enkelcase, er ikke disse funnene representative for resten av landets 7.klassinger. Funnene vil riktignok være interessante for denne aktuelle klassen, men for å kunne si noe generelt om elevers resonnering og argumentasjon på 7.trinn, kreves en større studie.

Referanser

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, ss. 27-44.

Beck, H., Hansen, H., Jørgensen, A., & Petersen, L. Ø. (2003). *Matematik i læreruddannelsen - Teori og praksis - en fagdidaktik.* (P. Bollerslev, Red.) Gyldendal.

Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets: Unleashing studens`s potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching.* San Francisco: Jossey-Bass.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt Forlag.

Dalland, O. (2017). *Metode og oppgaveskriving* (6. utg.). Gyldendal.

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. (2021, Desember 16). *Forskningsetikk.no*. Hentet fra Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora: https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Hana, G. M. (2013). *Matematiske byggesteiner.* Bergen: Caspar Forlag.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in mathematics*(67), ss. 255-276.

Lithner, J. (2015). Learning Mathematics by Creative or Imitative Reasoning. I S. J. Cho (Red.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (ss. 487-506). Springer.

Mattelist. (u.d.). *Mattelist.no*. Hentet Mai 8, 2022 fra Om Mattelist: https://www.mattelist.no/artikkel/om-mattelist

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics.* (J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell, Red.) Washington: National Academy Press.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren.* Oslo: Universitetsforlaget.

Norsk senter for forskningsdata. (u.d.). *nsd.no*. Hentet fra Om NSD - Norsk senter for forskningsdata: https://www.nsd.no/om-nsd-norsk-senter-for-forskningsdata/

Postholm, M., & Jacobsen, D. (2016). *Læreren med forskerblikk - Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter* . Oslo: Cappelen Damm.

Postholm, M., & Jacobsen, D. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*(77(1)), ss. 20-26.

Skovsmose, O. (1998). Undersøgelseslandskaber. I T. Dalvang, & V. Rohde (Red.), *Matematik for alle* (ss. 24-37). Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS).

Sriraman, B., & Umland, K. (2020). Argumentation in Mathematics Education. *Encyclopedia of mathematics education*, ss. 63-66.

Stylianides, A. J. (2007a). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*(65), ss. 1-20.

Stylianides, A. J. (2007b). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*(38), ss. 289-321.

The NRICH Primary Team. (2014). *Reasoning: Identifying Opportunities*. Hentet fra nrich.maths.org: https://nrich.maths.org/10990

Universitetet i Oslo. (22, Mai 5). *uio.no*. Hentet fra Nettskjema diktafon-app: https://www.uio.no/tjenester/it/adm-app/nettskjema/hjelp/diktafon.html

Utdanningsdirektoratet. (2019, November 15). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Hentet fra Kjerneelementer: https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*(27), ss. 458-477.

Vedlegg

Vedlegg 1: Samtykkeskjema

Vedlegg 2: Transkripsjon

Vedlegg 1 – Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Bevis og argumentasjon i matematikk på mellomtrinnet"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever på mellomtrinnet arbeider med resonnering, bevis og argumentasjon i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

I dette forskningsprosjektet vil vi undersøke hvordan elever på mellomtrinnet arbeider med resonnering, bevis og argumentasjon i matematikk. Vi ønsker å se på hvordan elever i grupper på 3-4 sammen resonnerer og argumenterer i arbeidet med en matematikkoppgave.

Dette prosjektet er en masteroppgave ved lærerutdanningen på OsloMet.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Markus Gjerde, lærerstudent på OsloMet, er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Jeg spør deg om å være med, fordi du er elev på mellomtrinnet.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du har lyst å delta i forskningsprosjektet, vil du være med i en matematikktime sammen med andre i klassen din. Jeg kommer til å være til stede i klasserommet og observere. Jeg vil ta lydopptak av en eller to grupper, slik at det blir lettere for meg å få med meg samarbeidet og samtalene i gruppene. Alt vil selvfølgelig være helt anonymt.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du vil delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Det betyr at det er lov å ombestemme seg, og det er helt i orden. All informasjon om deg vil da bli slettet. Det går helt fint hvis du ikke vil delta eller om du først sier «ja» og så «nei».

Dette prosjektet vil sannsynligvis foregå i en matematikktime. De som ikke vil være med, følger bare vanlig undervisning.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Jeg vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Jeg vil ikke dele din informasjon med andre. Det er bare forsker (Markus Gjerde) som har tilgang til informasjonen.
Jeg passer på at ingen kan få tak i informasjonen som vi samler inn om deg.
Jeg lagrer all informasjon på en sikker datamaskin.
Jeg sletter lydopptak fra observasjonen når jeg har fått skrevet ned det jeg trenger.
Jeg passer på at ingen kan kjenne deg igjen når jeg skriver masteroppgaven. Jeg vil for eksempel finne opp et annet navn når jeg skriver om deg.
Jeg følger loven om personvern.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Jeg er ferdig med forskningsprosjektet 28.06.2022.
Da vil vi passe på at all informasjon om deg er slettet.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler informasjon om deg bare hvis du sier at det er greit og du skriver under på samtykkeskjemaet.

På oppdrag fra OsloMet har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, kan du ta kontakt med Markus Gjerde, tlf. 45851048.

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen
Markus Gjerde

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet ”Bevis og argumentasjon i matematikk på mellomtrinnet”, og har fått anledning til å stille spørsmål.

Jeg samtykker til at (navn på elev):____ kan

- ☐ delta i dette prosjektet
- ☐ delta i observasjon med lydopptak

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av foresatt, dato)

Vedlegg 2 – Transkripsjon av observasjon

Husoppgaven. Gruppe 1

1- Erik: Er ikke det litt enkelt? Blir det ikke bare sånn, sånn, sånn (skriver et 3-tall over alle husene). 27.
2- Lise: Hæ?
3- Anders: Hæ?
4- Erik: Eeh... Hva er liksom problemet? Jeg skjønner ikke.
5- Lise: Hvordan skjønte du at det blir 27?
6- Anders: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. Det blir 27 stk til sammen ja.
7- Lise: Åja. Men hvordan skjønte du den så fort?
8- Lise: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. Det blir 27 ja. Men hva hvis vi prøver alle da?
9- Erik: Men hvis det er 3 i hvert hus, så blir det 6 der, 6 der, 6, der 6.. (Setter ring rundt to og to hus). Og da blir det 27.
10- Anders: Ja akkurat. Men hva var det du mente, Lise? (Ref. hennes spørsmål). Da blir det 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
11- Lise: Åja. 3 i hvert hus liksom?
12- Anders og Erik: Ja.
13- Lise: Åh jaaa. Og hvis du ganger 3 med 9 så får du 27.
14- Erik: Ja nettopp.
15- Lise: Ok, vi tror det er 27. Fordi det kunne vel ikke gått med noen av de andre?
16- Erik og Anders: Hæ?
17- Lise: Ok, vi må hente Markus. Så vi tror altså at det er maks 27 personer, på grunn av at hvis du tar 3x9 så får du 27.
18- Anders: Men de må jo ha tatt 9 hus med vilje.
19- Lise: Ja, men se nå. Da er det jo ikke, da er det jo ikke…
20- Erik: Bakkegata… Hmm de kunne jo ikke fått mer.
21- Lise: Fordi det kunne vel ikke gått med noen av de andre? (Tegner 2 og 4 på annethvert hus).
22- Anders: Da hadde det vært 6. Altså vi kan jo ikke ha et høyere tall. Det hadde vært 6, der og 6 der… Det må jo være 27.
23- Sven (lærer): Har dere kommet fram til noe?
24- Anders: Ja, det blir 27.
25- Sven: Ok. Lag en begrunnelse på hvorfor det blir 27. Jeg har fått flere nemlig.
26- Erik: Når det er 3 i alle, så blir det 6 der, 6, der 6, der 6 der og 6 der. Altså 27.
27- Sven: Jeg er enig i at det blir 27. Men hva med de andre løsningene der da? (Peker på der de har skrevet 4 og 2 annenhver).
28- Erik: Det må være 3 og 3. Eller det er det samme om det er 4 og 2 eller 5 og 1. Det blir uansett ikke mer, fordi det fortsatt er 6 og 6.
29- Sven: Ja okei. Jeg tror jeg ville studert de ulike løsningene litt mer.
30- Lise: Hvis det bor 5 der og 1 der, blir det fortsatt 6. Det blir fortsatt det samme svaret, 27.

31- Erik: Ja vel. Så 5, 1, 5, 1 ,5 ,1 ,5, 1, 5.
32- Anders: Det blir akkurat det samme.
33- Erik: Det blir 6, 6, 6, 6, 5. 29
34- Anders: Vent litt. Hva mener du?
35- Erik: Hvis du teller to og to hus, så blir det 6 i de fire første, så blir det 5 i det siste. Og da blir det plutselig 29.
36- Lise: Ok. Hvordan vet vi at det ikke er mer da? Jeg bare skjønner det ikke helt.
37- Anders: Du plusser femmerne.
38- Erik: Se. Du har 5 der, 1 der, 5 der, 1 der, 5 der, 1 der, 5 der, 1 der så 5 der.
39- Anders: Det blir 5x5 pluss 4. Det begynner på 5 og slutter på 5, siden 9 er et oddetall.
40- Lise: Åjaa nå skjønner jeg det.
41- Erik og Anders: Ja.
42- Erik: Det må være 5 og 1. Det kan ikke være 6 og 0 siden det må være 1 i alle.
43- Lise og Anders: Ja, stemmer.
44- Erik: Ja. Siden det begynner og slutter på 5. Da blir den telt en gang mer enn de med 1 i.
45- Anders: Så det er om å gjøre å ha størst antall på de husene som er oddetall.
46- Erik og Lise. Ja.
47- Lise: Så hvis det hadde vært et partall så hadde det vært det samme.
48- Erik: Ja. Det må bli 29 som er maks.

Husoppgaven. Gruppe 2.

49- Siri: Hmm ok. Hva med 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3
50- Marius: Du kan bare skrive 3 på alle.
51- Siri: Men hva om jeg ikke vil ha 3 i alle?
52- Egil: Vi skal jo prøve å finne det maksimale. 3 og 2 blir jo 5, men vi kan jo ha 6 til sammen.
53- Marius: Hvor mange kan vi maksimalt ha?
54- Egil: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. Det er 27.
55- Egil: Hvor lang tid brukte vi på denne? 2 minutt?
56- Marius: ja hehehe.
57- Egil: Kan vi ha andre måter? f.eks. 3, 4, 3, 4. Nei det blir 7 ja.
58- Siri: Kan vi ikke ha 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5
59- Egil: Men det blir jo fortsatt 6 til sammen. Blir ikke det akkurat det samme?
60- Siri: Jo. Det er liksom det som er meninga, bare at det blir andre tall.
61- Egil: Hmm. 6, 12, 18, 24, 29. Nei, hæ. Nå ble det 29.
62- Marius: Når vi hadde 3 i alle ble det 27.
63- Siri: Prøv med 4 og 2 da.
64- Marius: Ja men det er jo… Det er jo et hus.
65- Egil: Ja men i to hus til sammen skal det ikke være mer enn 6.
66- Marius: Åja, stemmer. Jeg trodde det var i et hus.

67- Siri: Ja, da kan vi ha 4 og 2.
68- Egil: Ja, prøv det.
69- Siri: Da blir det 5x4 og 4x2. Altså 2, 4, 6… Nei gjør det du, Egil.
70- Egil: 6, 12, 18, 24, pluss 4. 28. Da blir det 28. Men det er ikke det høyeste som går.
71- Siri: Nei det høyeste er 29.
72- Meg: Ok. Er dere sikre på at dere har funnet det maksimale nå? Hvorfor ble det ikke det samme svaret på de ulike løsningene deres?
73- Egil: Jeg vet ikke.
74- Marius: Men om vi har 3 og 3 eller 5 og 1, så blir det jo 6 til sammen.
75- Egil: Hvor mange hus er det? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Det er 9 hus.
76- Siri: 5. Det er 5. Eeh. 1, 2, 3, 4, 5. Det er jo 5 hus som har 5. Det blir 25.
77- Egil: Ja det er 5 hus som har 5, og 4 hus som har 1. Det blir 4.
78- Siri: Jeg tror det er det som er det høyeste, fordi det er fire hus som har 1, og det blir 4. Så er det fem hus som har 5, og det blir 25, også det pluss 4 blir 29. Da blir det 29.
79- Egil: Da blir det 5 og 1.
80- Marius: Ja, det var smart. Hvordan vet vi at dette er maks?
81- Siri: Se. Hvis vi bytter da, og begynner på 1. 1, 5, 1, 5 osv. Så blir det en mindre med 5.
82- Egil: Ja, da hadde det blitt 25. Nei… Jo 25.
83- Egil: Så fordi det er et oddetall. 9 er et oddetall. Og 3 fem ganger er lavere enn 5 fem ganger. Så må det bli det høyeste.
84- Marius: tre?
85- Egil: Ja, vi får mer om vi har 5 personer i de 5 husene, enn om vi har f.eks. 3.
86- Marius: Åjaa sånn ja.
87- Siri: Ja vi må ha flest mulig folk i de 5 husene, siden det begynner og slutter på 5.
88- Marius: Ja jeg skjønner.
89- Egil: Da må 29 være det høyeste.
90- Marius og Siri: Ja.

Sjiraffoppgaven. Gruppe 2.

Jente leser oppgaven høyt for gruppa
91- Egil: Ok. Hvor høyt går flyet opp?
92- Marius: 9000 meter.
93- Siri: Da er det vel 5x9000.
94- Egil: 5x9000?
95- Marius: Kan vi ikke bare ta 9000?
96- Egil: Jo, men det er jo hvor høyt flyet er. 5x9000 er jo kjempehøyt. Er jo nesten oppe i verdensrommet da.
97- Marius: Ja, da er du på 45000 meter.
98- Siri: 5 meter. En sjiraff er 5 meter
99- Egil: Ja, og 9000 sjiraffer blir jo 45000 meter over bakken.

100- Siri: Flyet er 9000 meter over bakken.
101- Marius: Du må ta 5x1000.
102- Egil: Hvis du skulle hatt 9000 sjiraffer, så måtte alle vært 1 meter. Men nå blir det jo 5 ganger så mye. 5x9 er jo 45. Da ville det vært 45000 meter over bakken. Så da bommer du med sånn… Masse.
103- Marius: 1900 giraffer.
104- Egil: Ja men de synker med 1cm per sjiraff. Det blir 1 meter per hundre.
105- Marius: Så da må du ta minus… Eh..
106- Egil: Sånn 19 meter.
107- Siri: Men hvordan kom du fram til 1900 sjiraffer?
108- Marius: Jeg tok først 1000x5 som blir 5000. 1000 sjiraffer blir 5000 meter. Så tok jeg 900x5 som blir 4000. Da er vi oppe på 9000 meter.
109- Egil: Men blir ikke 900x5 4500?
110- Marius: Åja jo, det må være 800x5. Da blir det 1800 sjiraffer.
111- Siri: Kan vi ikke ta 10 000 - 1000? Da får vi 9000.
112- Siri: Vi kan tenke at det er 1000 sjiraffer da? Kan vi ikke? Fordi hvis vi tar minus ett tusen, så er det tusen sjiraffer, og alle går ned med 1cm. Og hvis de gjør det, så blir det 9000.
113- Egil og Marius: hmmm…
114- Siri: Hvis vi har nok sjiraffer til at vi kan ta minus ett tusen, siden alle går ned 1cm, så blir det jo 9000 hvis vi har 10 000 sjiraffer.
115- Siri: Kan vi ha 1000 sjiraffer?
116- Egil: 1000 sjiraffer? Da får du 4990 meter. Vi skal jo opp til 9000 meter.
117- Marius: Ja, så vi må ha nesten det dobbelte.
118- Siri: Ok. 5 meter. 5 meter gange 2.
119- Egil: Det blir 10.
120- Siri: Ja det blir 10 000.
121- Egil: Ja.
122- Siri: Og 10 000 minus 1000, for at de går jo ned. De går jo ned, ehm. De går jo ned 1cm per sjiraff.
123- Egil: Mhmm
124- Siri: At det blir ett tusen cm de går ned, og da blir det jo 9000 meter. Og det er jo 9000 meter over bakken.
125- Egil: Vent to sekund, jeg skal bare regne ut noe….
126- Egil: Nei. Det blir 10 meter, ikke 1000 meter.
127- Marius: Ja det var det jeg og sa. Du må jo ha 100 000cm for å gå ned 1000 meter..
128- Marius: Hva er det du har gjort, Siri? Jeg tok bare 5 meter gange 1800, så får du 9000.
129- Siri: Fordi 10000 - 1000 blir jo 9000 meter over bakken, men jeg vet ikke hvor mange sjiraffer man trenger.
130- Marius: Det er jo det jeg har regna ut. Sjiraffen er 5 meter. Ganger du det med 1800, så får du 9000 meter. Vi trenger altså 1800 sjiraffer for å komme opp til flyet.
131- Sven: Men det synker jo litt, gjør det ikke det?

132- Siri: Ja det er derfor jeg tar minus 1000 meter.
133- Egil: Det er 100.
134- Siri: Hvorfor er det 100?
135- Egil: Fordi det synker jo med 1 meter per hundrede sjiraff. Og hvis du har 10 000 sjiraffer, så synker den bare med 100 meter. Ikke 1000 meter.
136- Siri: åååja. Så hva blir svaret her da, hvis vi har 10 000 sjiraffer?
137- Egil: 9900.
138- Siri: Ahaa.. Stemmer….
139- Marius: Så hvis du tar 1800x5.
140- Egil: Får du 9100 da?
141- Marius: 9000. Hmm. Har jeg gjort noe feil?
142- Egil: Åja, du har ikke trukket fra 1cm?
143- Marius: Nei tok bare først uten at de sank. Og da trenger vi 1800 giraffer for å komme opp til 9000.
144- Egil: Å sånn ja.
145- Marius: Du kan også ta 9000 meter og dele på 5, så får du 1800 sjiraffer.
146- Egil: Åja, kult. Da må vi trekke fra 1cm per sjiraff nå. Vi må ta vekk 1800cm.
147- Marius: Ja. Hvor mange meter er 1800cm?
148- Egil: Vi må dele på 100. 18 meter.
149- Marius: Så tårnet synker med 18 meter da. 1800 minus 18 da.
150- Siri: Vi må vel finne ut hvor mange sjiraffer 18 meter er først.
151- Marius: Åja, selvfølgelig.
152- Egil: Ja, skal vi se. 5, 10, 15, 20. Fire sjiraffer blir 20 meter, så ca 4 sjiraffer da.
153- Siri: Ja, vi kan jo ikke dele en sjiraff.
154- Marius: Ja vi må runde opp til 4 sjiraffer. Det blir bare 4.
155- Siri og Egil: Ja.
156- Egil: Så da synker tårnet med 4 sjiraffer.
157- Marius: 1800 - 4 da?
158- Siri: Ja det må vel bli det? …. Eller vent. Da blir det jo færre giraffer? Vi må vel ha flere?
159- Marius: Åjaa, ja. Vi må plusse. 1800 + 4 da.
160- Egil: Ja faktisk. Så da blir det 1804 sjiraffer.
161- Siri og Marius: Ja, 1804.

Sjiraffoppgaven. Gruppe 3.

162- Ulrik: Er det 12? 1250 meter? nei 12 500 meter.
163- Nils: Trenger vi ikke bare 4 stk da?
164- Tom: Nei, det er flere enn det.
165- Ulrik: I følge her så trenger vi bare en sjiraff (ref bilde).
166- Tom: Nei, flyet er 9000-12500 meter over bakken.
167- Ulrik: Aaaah. Flyet er 9000 meter over bakken, og det er… En sjiraff er 5. Hva må vi gange med 5 for å få 9 eller 12?

168- Tom: Så synker en sjiraff med 1cm.
169- Nils: Ja. 5x2 så har vi to sjiraffer.
170- Ulrik: Da er det 10.
171- Nils: Da er det 10m og vi skal ha 9000.
172- Ulrik: Så da trenger vi 50 giraffer. Nei 500 sjiraffer.
173- Tom: 5x100 er 500.
174- Nils: Du klarer jo å se når 4 sjiraffer er oppå hodet til hverandre. Er ikke det opp til flyet?
175- Tom: Ulrik? Er 5x500 2500?
176- Ulrik: Men det går jo ned 1cm.
177- Nils og Tom: Åjaaa.
178- Ulrik: Men da er jo sjiraffen 4,9.
179- Tom: Er det 1cm?
180- Ulrik: 1cm er vel 100, nei 1000 meter.
181- Tom: Hvor mange cm er det i en meter?
182- Nils: 100.
183- Ulrik og Tom: 100, ja.
184- Tom: Da blir det 99. En sjiraff er 4,99 meter.
185- Nils: Ok.
186- Ulrik: Ok, så hvis en sjiraff er 4,99 meter og vi skal få 9000.
187- Nils: Gang den med 2 da.
188- Ulrik: Gange med 2? Det blir ikke så mye.
189- Nils: Hmmmm. Gang den med 3 da!?
190- Ulrik: Det kan vi også gjøre, men det tror jeg heller ikke gir svaret.
191- Tom: Det blir jo bare 15 meter, eller rundt 15 meter. Flyet er jo 12500 meter over bakken.
192- Nils: Åjaa, det er høyt ja. Å helsikke.
193- Ulrik: Dette blir veldig vanskelig, fordi en sjiraff er 4,99.
194- Tom: 12500 delt på 4,99. Oi. Har vi kalkulator?
195- Ulrik: Nei..
196- Tom: Eeh, vi tar 12500 delt på 5 da. Det blir 2500.
197- Nils: Hva er 2500?
198- Tom: Det er det du må gange med for å få 12500 siden en sjiraff er 5 meter.
199- Nils: Shit, Tom!
200- Tom: 2500 sjiraffer da. Så må vi ta 2500cm vekk også.
201- Ulrik: Hva sa du nå?
202- Tom: Vi fant ut vi må ha 2500 sjiraffer. Men tårnet synker jo med 1cm per sjiraff, så vi må ta vekk 2500cm.
203- Ulrik: Ja, Stemmer.
204- Nils: Hvor mange meter blir det da?
205- Ulrik: Det er 250 meter.
206- Tom: Nei, det er 25…25.
207- Ulrik: Ja..

208- Tom: Så da synker tårnet med 25 meter.
209- Nils og Ulrik: ja
210- Tom: Da trenger vi 5 sjiraffer til da.
211- Ulrik: Det blir ikke 2500-25 da? 2475.
212- Tom: Nei for 2500 er jo antall sjiraffer. Og 25 meter er det samme som 5 sjiraffer på en måte.
213- Ulrik: Åjaa. Så vi trenger 5 sjiraffer til? Det blir ikke minus?
214- Tom: Ja for tårnet synker jo med 5 sjiraffer, så vi trenger 5 til for å komme opp til flyet.
215- Ulrik: Ja, sånn ja. Pluss 5 da.
216- Tom: Ja
217- Nils: Ja. 2505 da.
218- Tom: Ja. Kan vi teste om det blir riktig på kalkulator på mobilen? (Spør meg).
219- Meg: Ja, kjør på.
220- Ulrik: Ja, da kan vi teste med 4,99.
221- Tom: Ja, det var det jeg tenkte.
222- Tom: Ta 12500 meter delt på 4,99.
223- Ulrik: 2505 komma null ett eller annet.
224- Tom: Da fikk vi riktig da!
235- Nils: Ja shit!