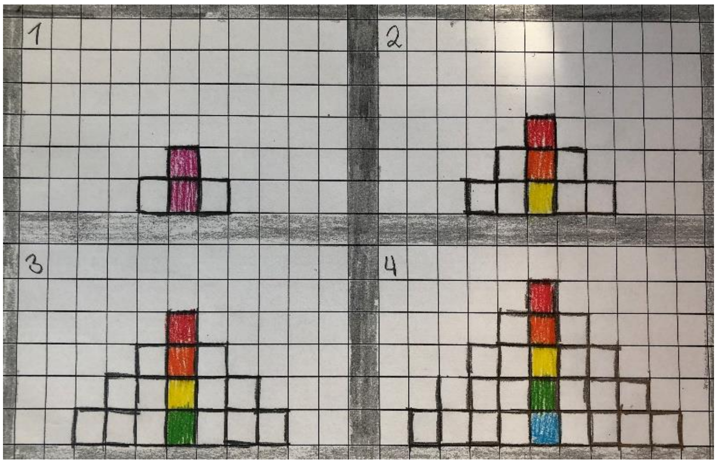
MASTEROPPGAVE

Masterstudium i skolerettet utdanningsvitenskap med fordypning i matematikk og matematikkdidaktikk

august 2020

Algebraisk tenkning på barnetrinnet



Marianne Eskeland

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Forord

I masteroppgaven min har jeg skrevet om algebraisk tenkning på barnetrinnet og om hvordan utviklingsarbeid med lærerne kan foregå. Mange lærere jeg har snakket med gjennom min tid som lærer har gitt uttrykk for at dette er et område de kan lite eller ingenting om. Selv har jeg erfart at fokus på algebraisk tenkning med de yngste elevene har gjort at læresituasjonen har blitt rikere og mer meningsfull. Innføring av ny læreplan fra høsten 2020 som legger til rette for at det skal jobbes med algebraisk tenkning i hele skoleløpet, min egen interesse for algebra og for utviklingsarbeid med lærere har gjort at dette har vært et naturlig fokus i min oppgave.

Jeg vil takke min veileder Elisabeta Iuliana Eriksen som har vært en viktig støtte underveis. Jeg er takknemlig for at du har delt av din solide fagkunnskap, og for hvordan du har hjulpet meg med å rydde opp og holde fokus gjennom hele prosessen.

Jeg vil også takke ledelsen ved Slemmestad barneskole som har innvilget studiepermisjon og også godkjent min søknad om å få støtte til studiet. Jeg er takknemlig for at dere ser verdien i at lærere som jobber med de yngste barna også trenger faglig tyngde, og at de som er interessert og motivert også må få muligheten til å studere selv etter å ha oppnådd 30 studiepoeng i faget.

Takk til Lena og Geir som har stilt opp til intervjuer og latt meg observere undervisningen deres. Takk for at dere har brukt av deres tid og for at dere har latt meg følge dere i skolehverdagen.

Sammendrag

Jeg har undersøkt i hvilken grad matematikklærere på barnetrinnet er forberedt på å jobbe med algebra som et av kunnskapsområdene i matematikk i den nye læreplanen som innføres høsten 2020. Dette har jeg gjort ved å gjennomføre en spørreundersøkelse blant 22 lærere som underviser i matematikk ved fire forskjellige barneskoler. Lærerne ble spurt om å foreslå oppgaver som kan brukes i algebraundervisningen, og de foreslår i hovedsak oppgaver som handler om å løse likninger. Dette sammenfaller med det tradisjonelle synet på algebra, mens det står i motsetning til det forskning sier om hvordan algebra bør introduseres. Lærerne synes det er vanskelig å forklare begrepene strukturer, mønstre og relasjoner, som brukes for å beskrive algebra i læreplanen. Flere lærere forstår begrepene annerledes enn slik de brukes i faglitteraturen om tidlig algebra.

Det er nytt for mange lærere på barnetrinnet at algebraisk tenkning skal være en del av matematikken allerede fra 1. trinn, i tillegg blir en del lærere engstelige når de hører ordet «algebra». Jeg ønsket derfor også å undersøke hvordan man gjennom aksjonsforskning kan gjøre et utviklingsarbeid med lærere for å sette i gang en prosess der lærerne får jobbet med å utvikle undervisningen i klasserommet slik at det legges til rette for algebraisk tenkning i matematikktimene. Ut i fra funn i spørreundersøkelsen, intervjuer, observasjoner av undervisning, og anbefalinger i forskningslitteraturen, har jeg veiledet to lærere mens de gjennomfører undervisningsopplegg i tidlig algebra. Ut ifra utfordringer lærerne støtte på utarbeidet jeg en oversikt over tiltak lærerne kunne ta fatt i, og lærerne gjennomførte en ny runde med undervisning.

Ut i fra funnene jeg har gjort og anbefalinger i forskningslitteraturen har jeg sammenfattet tiltak som kan hjelpe lærerne med å legge til rette for algebraisk tenkning. Dette er en komplisert og sammensatt prosess. Lærerne må få mer fagkunnskap om algebra og undervisningskunnskap i algebra, de sosiomatematiske normene i klasserommet må endres dersom de ikke allerede støtter opp om problemløsningsorientert matematikkundervisning. Spesielt er det nødvendig å jobbe med å utvikle den matematiske samtalen i klasserommet og at lærerne trener seg opp i å forstå hvordan elevene deres tenker. Fordi undervisning er en kulturell aktivitet vil det være et omfattende arbeid som må gjøres dersom lærerne skal få til en varig endring av undervisningen.

Summary

I have investigated the extent to which mathematics teachers in primary school are prepared to work with algebra as one of the areas of knowledge in mathematics in the new curriculum that will be introduced in Norway the autumn of 2020. I have done this by conducting a survey among 22 teachers who teach mathematics at four different primary schools. The teachers were asked to suggest tasks that could be used when teaching algebra, and they mainly suggest tasks that are about solving equations. This coincides with the traditional view of algebra, but it is not what research says about how algebra should be introduced. Teachers find it difficult to explain the concepts of structures, patterns and relationships, which are used to describe algebra in the curriculum. Several teachers interpret the concepts differently than how they are used in the literature about algebra in the early years.

The fact that algebraic thinking should be a part of mathematics from the first year of primary school is new to many teachers, in addition to that some teachers become insecure when they hear the word «algebra». Because of that I also wanted to investigate how one through action research can work with teachers to start a process where the teachers get to work on developing the teaching in the classroom so that it facilitates algebraic thinking in mathematics lessons. Based on findings in the survey, interviews, observations of teaching, and recommendations in the literature, I have supervised two teachers while they were teaching early algebra. Based on the challenges the teachers faced, I prepared an overview of actions the teachers could take, and the teachers carried out a new round of teaching.

Based on the findings I have made and recommendations in the literature, I have summarized actions that can help teachers facilitate algebraic thinking. This is a complicated and complex process. Teachers need more knowledge about algebra and how to teach it, the sosiomathematic norms in the classroom must change if they do not already support problem-solving mathematics teaching. In particular, it is necessary to work on developing the mathematical conversation in the classroom, and that teachers train themselves in understanding how their students think. Because teaching is a cultural activity, there will be extensive work that must be done if the teachers are to attain a lasting change in the teaching.

Innhold

Innledning

1.1 Bakgrunn for studiet

Norske elever har på internasjonale tester svake resultater i algebra på ungdomstrinnet, og det kan være naturlig å tenke at lite fokus på algebra på barnetrinnet kan være en av årsakene til dette (Tønnesen & Haugstulen, 2016). Balasundaram (2017) undersøkte i sin masterstudie hva som kan være årsaken til at elever som går på videregående skole synes algebra er vanskelig. Studien viste at elevene hadde misoppfatninger fra tidligere skolegang. Misoppfatningene stammer fra aritmetikkundervisningen fra barnetrinnet og fra algebraundervisningen på ungdomstrinnet. Årsakene til disse misoppfatningene skyldes at elevene ikke har erfaring med å generalisere regler og metoder i aritmetikken.

I den nye læreplanen (Fagfornyelsen) som skal innføres på barnetrinnet ved skolestart 2020 er det lagt til rette for at elevene skal jobbe med algebra fra 1. trinn. I gjeldende læreplan kommer algebra først inn som kunnskapsområde fra 5. trinn. Selv om det finnes lærere som jobber med algebraisk tenkning med de yngste elevene, er min erfaring at det ikke er uvanlig at lærere på barnetrinnet uttrykker engstelse for algebra eller selv uttrykker at de kan lite om emnet. Jeg har alltid likt algebra og har de siste årene opplevd at mitt stadig større fokus på algebraisk tenkning på barnetrinnet har gjort at både jeg og elevene mine liker faget enda bedre. Elevene tilnærmer seg faget på en annen måte, de opplever at de forstår mer, får til mer og uttrykker i større grad glede for faget.

Forskning viser at lærernes tilrettelegging er avgjørende for å få til algebraisk tenkning i klasserommet (Hunter, Anthony & Burghes, 2018; Kaput, Carraher & Blanton, 2008). Derfor ønsker jeg å studere lærernes oppfatninger og undersøke i hvilken grad de klarer å legge om undervisningen sin slik at det blir større fokus på algebraisk tenkning i matematikkundervisningen. Gjennom arbeidet med masteroppgaven ønsker jeg å finne ut hvordan lærerne oppfatter læreplanen sin beskrivelse av algebra, hvordan lærerne tar tak i den nye utfordringen det er å planlegge og gjennomføre undervisning i algebra, og hva slags utfordringer de møter på underveis.

Min problemstilling er:

Hvordan håndterer lærere på barnetrinnet omleggingen til mer algebraisk tenkning i matematikkundervisningen?

Jeg gjør først rede for de teoretiske perspektivene som er mitt utgangspunkt for å undersøke denne problemstillingen. Etter at jeg har avklart begrepene som jeg bruker i studien vil jeg spesifisere nærmere hvordan jeg operasjonaliserer problemstillingen gjennom tre forskningsspørsmål.

2 Teoretisk bakgrunn

For å kunne undersøke problemstillingen bruker jeg teoridelen til å gå i gjennom faglitteratur som omhandler algebraundervisning på barnetrinnet. Jeg går også i gjennom teori om utviklingsarbeid med lærere og andre faktorer som kan påvirke hvordan det legges til rette for algebraisk tenkning i klasserommet.

2.1 Hva er algebra?

Siden Al-Khowarizmis tid (det niende århundret) har algebra vært oppfattet som kunnskapen om å løse ligninger. I vår tid er det også dette de fleste forbinder med algebra (Kieran, 2004). Men på 1980-tallet begynte noen reformorienterte forskere å tenke nytt om hva som var kjernen i algebra, og å se på hvordan algebra kan introduseres tidligere slik at algebra kunne bli tilgjengelig for flere elever. Oppgaven min er skrevet i lys av den forskningen på tidlig algebra som har kommet som et resultat av denne nytenkningen.

Men hva er algebra? Algebra er så mye mer enn å løse likninger og regne med «bokstaver for tall». «Only by expanding our views of algebra can we hope to integrate mathematics across all grades and all topics» (Kaput, 2008, s. 8). Det finnes mange forskjellige definisjoner og beskrivelser av hva algebra og tidlig algebra er. Jeg har som mange andre valgt å ta utgangspunkt i Kaput sin beskrivelse (2008). Kaput beskriver to kjerneaspekter i algebraisk tenkning. For det første er det en mental aktivitet der man på en strukturert måte formulerer generaliseringer av mønstre. Det andre aspektet går på algebra som et matematisk system man kan tenke med og bruke til å representere generaliseringer. Innholdsmessig kommer disse to aspektene til uttrykk i klasserommet gjennom generalisert aritmetikk, funksjonstenkning og som algebraisk modellering

Tidlig algebra er ikke det samme som algebra tidlig. Tidlig algebra kan sees på som en tilnærming til undervisning og læring i matematikk i de emnene som allerede eksisterer i matematikkfaget på barnetrinnet. Tidlig algebra er en del av aritmetikken og generalisering innenfor alle matematiske områder. Algebraen trenger derfor ikke nødvendigvis å introduseres som et eget emne, men den skal gjennomsyre aritmetikken og andre matematiske emner og gi elevene en dypere forståelse (M. Blanton et al., 2018; D. W. Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008). Kieran, Pang, Schifter og Ng (2016) mener at målet med tidlig algebra er å legge til rette for en måte å tenke på i matematikk, å se etter ting som gjentar seg og formulere, teste og bevise hypoteser. Malara og Navarra (2018) ser tidlig algebra som en resultat av en lang prosess som har foregått siden 1960 tallet. Dette knytter de til et skifte i synet på hvordan matematikk læres, fra passiv læring av fakta til læring gjennom problemløsning og utforskning.

Begrepene *tidlig algebra* og *algebraisk tenkning* brukes om hverandre. Jeg velger å bruke *algebraisk tenkning* der algebra trekkes inn i emner det allikevel jobbes med og dermed beskriver algebra som en tenkemåte, og *tidlig algebra* når læreren spesielt har planlagt å jobbe med et område innenfor algebra, for eksempel funksjonstenkning.

Radford (2018) skisserer to hovedproblemstillinger som omhandler tidlig algebra. Den første er om så unge elever virkelig kan starte å lære algebra, den andre er hvorvidt elevene vil møte færre utfordringer med algebra i senere skolegang dersom de starter tidligere med algebra. Tradisjonelt har det vært en vanlig oppfatning at elevene må ha en grunnleggende forståelse for aritmetikken før de kan lære algebra. Dette har vært til hinder for å innlemme algebra i læreplanene for de yngste barna (Radford, 2018). Fra slutten av 1980-tallet begynte flere utdanningsforskere å undre seg over om algebra kunne bli tilgjengelig for flere dersom noen sentrale elementer av algebra ble introdusert tidligere for elevene (Kieran, 2004). Blanton et al (2018) fant gjennom en studie ut at elever på barnetrinnet kan delta i aktiviteter som forutsetter algebraisk tenkning. Studien viste også at elevene fikk en varig effekt av å jobbe med algebra. «Such results suggest that when students experience a broad, sustained approach to early algebra instruction, they are better positioned for success in algebra in middle grades» (M. Blanton et al., 2018, s. 43) Elevene gikk i 3. klasse i USA, og resultatene deres ble målt opp mot en kontrollgruppe.

Men det kan lett bli til at vi egentlig snakker om matematisk tenkning eller bare tenkning, hva må til for at tenkningen skal være algebraisk? Radford (2010) foreslår at vi kan kalle det algebraisk tenkning dersom tre forhold er oppfylt. For det første må vi ha å gjøre med ubestemte størrelser, for det andre må disse størrelsene representeres på måter som har blitt utviklet og som andre kan kjenne igjen. I tillegg må de ubestemte størrelsene bli håndtert på en analytisk måte, som om de var kjente størrelser. Dette betyr for eksempel at Radford mener at det ikke kan kalles algebraisk tenkning dersom elevene kommer frem til riktig algebraisk formel for figurtall gjennom prøving og feiling. Radford bemerker også at man i tidlig algebra ikke nødvendigvis må starte med å representere de ubestemte størrelsene med bokstaver, men at elevene kan bruke egne benevninger.

2.1.1.1 Innholdsperspektiv på tidlig algebra

Ut i fra Kaput (2008) sitt innholdsperspektiv på algebra: generalisert aritmetikk, funksjonstenkning og algebraisk modellering, har Blanton et al (2015) identifisert fem hovedområder i tidlig algebra. Jeg har oversatt og laget en tabell som også viser eksempler, se tabell nummer 1.

Tabell 1: Innholdsperspektiv på tidlig algebra

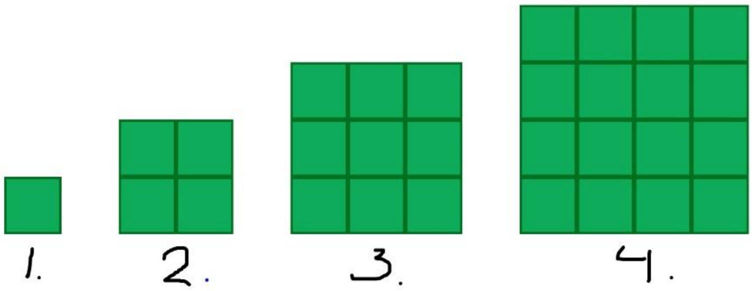
HOVEDOMRÅDE:	**FORKLARING:**	**EKSEMPLER:**
Likeverdighet Uttrykk Ligninger Ulikheter	Relasjonell forståelse for likhetstegnet Representere og argumentere med symbolske uttrykk Beskrive sammenhenger mellom to generaliserte uttrykk	Relasjonell forståelse for likhetstegnet Sammenligne størrelsen på to uttrykk uten å regne de ut hver for seg.
Generalisert aritmetikk	Generalisere sammenhenger: -tallenes egenskaper -regnemetoder	Forklare hvorfor summen av to oddetall blir et partall Oppdage den kommutative lov
Funksjonstenkning	Generalisere forholdet mellom to størrelser som endrer seg sammen Representere forholdet med språk, symbolsk, tabeller og grafer	Se på hvordan figurtall øker Hva er sammenhengen mellom antall hester og antall hestesko?
Variabelbegrepet	Et symbol som viser til en ubestemt størrelse som kan variere	Sidelengden i et kvadrat Antall hester som skal bli skodd Mengden godteri i en lukket boks
Proporsjonalitet	To størrelser som har et konstant forhold	Kjempen var fire ganger så høy som et menneske

Disse hovedområdene overlapper hverandre, spesielt er det viktig å legge merke til at variabelbegrepet vil brukes i de andre områdene. En annen inndeling av algebra når det gjelder innhold kan vi finne hos Kieran et al (2016), de deler inn i to hovedområder, generalisert aritmetikk og funksjoner. De andre konseptene innenfor algebraisk tenkning, som variabler og uttrykk, plasserer de innunder disse to hovedområdene. Videre har jeg valgt å se spesielt på hva funksjonstenkning kan være på barnetrinnet, da det er dette området innenfor algebra som i størst grad er en del av analysen som jeg har gjort i studien min.

2.1.1.1.1 Funksjonstenkning

Temaet funksjoner omtales noen ganger som et eget område i matematikk, mens i noen sammenhenger omtales det som et område som ligger under algebra. Dette skyldes at det finnes funksjoner som ikke er algebraiske, for eksempel hvordan en temperatur endrer seg. Dette kapittelet er begrenset til den type funksjoner som er mest aktuelle i tidlig algebra, nemlig sammenhenger mellom to størrelser som ender seg sammen på en måte som kan uttrykkes gjennom et algebraisk uttrykk. En slik funksjon tilordner til hver verdi av den uavhengige variabelen (x-verdi) en entydig verdi for den avhengige variabelen (y-verdi). Dersom den ene variabelen endrer seg vil den andre endre seg etter en bestemt «regel» eller funksjon. Senere i skoleløpet vil det være naturlig å jobbe med funksjoner der det er flere enn to variabler

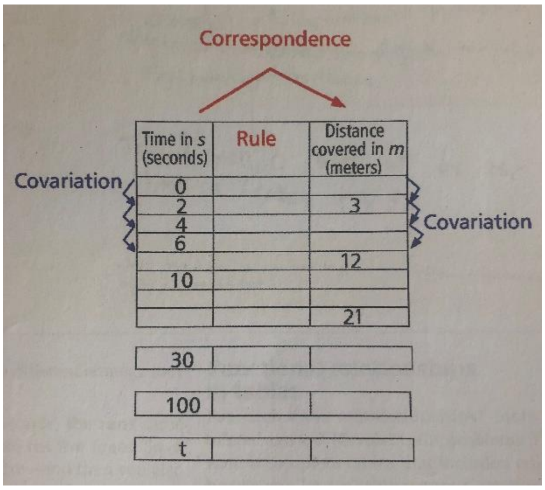
Funksjonstenkning er en prosess der man formulerer, beskriver og argumenterer med og om funksjoner (M. L. Blanton, 2008). Funksjonstenkning innebærer at elevene generaliserer sammenhengen mellom størrelsene som endrer seg sammen, at de kan representere og begrunne sammenhengene språklig, aritmetisk, algebraisk (med symboler), i tabeller og med grafer, og at de kan bruke de generaliserte representasjonene til å forstå og forutse hvordan funksjonen utvikler seg (M. L. Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey & Newman-Owens, 2015). Flere ser funksjonstenkning som en naturlig innfallsvinkel til algebraisk tenkning (M. L. Blanton & Kaput, 2005b). En grunn til at funksjonstenkning er spesielt interessant på barnetrinnet er at det kan integreres i andre temaer i matematikken, det må ikke være et tema som kommer i tillegg. Et eksempel på dette kan være temaet måling, hvor arealet av en figur kan sees på som en funksjon. For kvadrater, for eksempel, vil de to størrelsene som endrer seg sammen være sidelengden i kvadratet og arealet av kvadratet.



Figur 1: Kvadrattall

Blanton og Kaput (2005b) beskriver tre kategorier for elevers måter å se sammenhengen mellom de to variablene i en funksjon. Jeg illustrerer dette med et eksempel, funksjonen som gir sammenhengen mellom figurnummeret og antall firkanter i kvadratene, se figur 1. Den første måten kaller de *recursive patterning*, på norsk kan vi kalle dette *rekursiv tenkning*. Hvis vi jobber med figurtall så vil vi da bruke den foregående figuren til å regne ut den neste. Ulempen med denne måten å se sammenhengen på er at vi da må regne ut alle figurtallene, og vi kan ikke for eksempel finne antall elementer i figur 100 før vi har regnet ut figur 99. Den andre måten kaller de *covariational thinking*, da beskriver man hvordan de to verdiene i funksjonen endrer seg sammen. På norsk kan vi kalle dette *samvariasjon*. Dette kan for eksempel være «når x-verdien øker med en, så øker y-verdien med to». I den tredje, *correspondence relationship* beskrives den ene verdien med den andre. Når man ser sammenhengen på denne måten vil man kunne sette opp et funksjonsuttrykk (eks $y = 2x + 1$). Dette kalles også å finne en *eksplisitt formel*. Dette er grunnen til at det er ønskelig at elevene skal få til å se sammenhenger på denne måten. De vil da kunne regne ut hva y-verdien er når de vet x-verdien uten at de må regne ut alle tilfellene som kommer før i rekken. *Covariational thinking* og *correspondence relationship* kalles også for funksjontenkning fordi elever som tenker på denne måten ser at det er en sammenheng mellom variablene.

Det viser seg at elever har en tendens til å tenke rekursivt når de identifiserer og beskriver mønstre, det vil si at de fokuserer på hvordan den ene variabelen endrer seg i stedet for å se sammenhengen mellom de to variablene (Moss & McNab, 2011). Et mål for læreren må derfor være å legge til rette for funksjonstenkning. Blanton anbefaler at man lærer elevene å sette opp funksjonstabeller slik at det skal bli lettere å «se på tvers» og dermed kunne oppdage hvordan variablene endrer seg sammen (covariational thinking). Hun kaller dette for en *T-tabell* (eng: t-chart) fordi den enkelt kan lages ved at man tegner en stor T (M. L. Blanton, 2008). Denne tabellen kan utvides med en ekstra kolonne i midten for å få fokus på samvariasjon og legge til rette for at elevene klarer å finne en eksplisitt formel. Kolonnen i midten kan brukes til utregninger og forklaringer som kan beskrive sammenhengen mellom den uavhengige til den avhengige variabelen. Se for eksempel Panorkou og Maloney (2016) der figur nummer 2 er hentet fra.



Figur 2: Eksempel på utvidet T-tabell

Det er viktig at elevene kan representere funksjoner på forskjellige måter og ser sammenhenger mellom de forskjellige representasjonene, for da vil de kunne få en rikere og dypere forståelse for hva funksjoner er (M. L. Blanton & Kaput, 2005b; Brizuela & Earnest, 2008). Ut i fra hvilke forkunnskaper elevene har og hva slags funksjoner de jobber med så kan de representeres på mange måter. Elevene kan sette opp regneuttrykk (aritmetisk representasjon), de kan formulere funksjonen med et algebraisk uttrykk, de kan representere uttrykket verbalt med en muntlig eller skriftlig forklaring, de kan sette opp funksjonstabell og tegne grafen, og selve funksjonen kan ha en kontekst beskrevet med tekst eller gjengitt gjennom et bilde.

Som eksempelet i figur 1 viser så kan økende geometrisk mønstre sees som en funksjon som er representert visuelt. Den uavhengige variabelen representerer figurnummeret og kan dermed variere. Det kan være gunstig for barn å bli introdusert for algebra gjennom å studere geometriske mønstre som vokser. Dersom man starter arbeidet med algebra med å løse oppgaver der man skal finne verdien til x kan elevene få en oppfatning av at variabelen står for ett konkret tall (Boaler, 2020), og det ønsker vi å unngå. Moss og McNabb peker på tre aspekter som taler for at det kan være nyttig å jobbe med geometriske mønstre. For det første kan arbeidet med geometriske mønstre fungere som en konkret måte å jobbe med abstraksjon og generalisering. For det andre så kan arbeidet med geometriske mønstre legge til rette for at elevene kan forstå sammenhengen mellom størrelsene som er grunnlaget for funksjonene. Til slutt så vil arbeidet med geometrisk mønstre kunne hjelpe til med at elevene utvikler et språk der de bruker hypoteser og bevis når de kommuniserer hvordan de har tenkt om hvilke regler som ligger bak de geometriske mønstrene (Moss & McNab, 2011). De mener at måtene mønstrene presenteres på er avgjørende for om elevene vil ha muligheter til å tenke på et slikt nivå at de klarer å generalisere. Det er også rike muligheter for å kunne jobbe med forskjellige representasjoner når man jobber med geometriske mønstre. Figurene kan tegnes eller bygges, vi kan lage historier som beskriver hvordan de vokser, vi kan beskrive mønsteret med ord, regneuttrykk og algebraisk. Ved å få spørsmål som «hvordan vil figur 100 se ut?» blir elevene «tvunget» til å komme seg videre fra den rekursive tenkningen, det blir for tungvint å tegne alle figurene opp til nummer 99 for å finne figur 100. Elevene kan også få i oppgave å lage en «oppskrift» for hvordan en hvilken som helst figur vil se ut, på denne måten leder vi elevene mot å generalisere. Men å jobbe med figurtall har også sine begrensninger. Selve funksjonen blir kun gyldig for positive tall, den vil ikke være kontinuerlig, og det er begrensninger i forhold til konteksten rundt oppgaven (Friel & Markworth, 2009).

2.1.2 Generalisering – kjernen i algebraisk tenkning

Generalisering beskrives av mange som kjernen i algebraisk tenkning (M. Blanton et al., 2018; Strachota, Knuth & Blanton, 2018). Å generalisere er å påstå at en egenskap eller teknikk gjelder for et større sett matematiske objekter eller tilstander (D. Carraher, Martinez & Schliemann, 2008). Vanligvis vil generaliseringen gjelde for et uendelig antall tilfeller. Et eksempel kan være at elevene etter å ha løst flere liknende oppgaver oppdager at dersom man ganger et tall med null så vil man alltid få null som svar, og så klarer de å sette ord på dette. Dersom elevene selv får oppdage at summen av to oddetall alltid blir et partall så får de selv være med på å generalisere, og dette er viktig fordi de lærer seg å hente ut matematisk informasjon fra en situasjon og å trekke konklusjoner som kan generalisere et funn de har gjort (M. Blanton et al., 2018).

2.1.2.1 Fire grunnleggende praksiser i algebraisk tenkning

Ut i fra Kaput (2008) sin beskrivelse av de to kjerne-elementene i algebraisk tenkning, en mental aktivitet der man på en strukturert måte formulerer generaliseringer av mønstre og et matematisk system man kan tenke med og bruke til å representere generaliseringer, har

Blanton et al (2018) utledet fire grunnleggende praksiser som kjennetegner algebraisk tenkning:

Praksis 1 - generalisering

Praksis 2 - å representere generaliseringene

Praksis 3 - å begrunne generaliseringene

Praksis 4 - å resonnere med matematiske strukturer og sammenhenger

Den første grunnleggende praksisen er generalisering, som er beskrevet i kapittel 2.1.2.

Den andre grunnleggende praksisen er å representere generaliseringene. Elevene må få uttrykke generaliseringen de har gjort. Når elevene får øve seg på å representere generaliseringene sine legger vi til rette for at de de kan få en forståelse for at generaliseringen vil gjelde for mange tilfeller. Dette kan for eksempel gjøres med ord, symboler eller illustrasjoner.

Den tredje praksisen er at elevene begrunner generaliseringene sine. Elever på de laveste trinnene vil oftest argumentere med eksempler (se tabell 2), men forskning viser at de kan utvikle mer formelle måter å begrunne på, for eksempel gjennom å bruke tegninger og konkreter. Elever som har kompetanse på å kunne begrunne generaliseringene sine vil kunne ha fordeler når de senere skal studere mer avansert matematikk.

Den siste praksisen går ut på at elevene resonnerer videre med de generaliseringene de har oppdaget, på denne måten blir generaliseringen en del av elevenes tankeredskaper.

Et eksempel på disse fire praksisene kan være at mens elevene jobber med addisjon så generaliserer de sine observasjoner og påstår at svaret alltid blir et oddetall dersom man adderer et partall og et oddetall, mens to oddetall om blir addert alltid blir et partall. Elevene kan representere og begrunne denne generaliseringen med ord, symboler eller kanskje tegne figurer som skal representere partall og oddetall. Elevene kan resonnere videre ut i fra denne generaliseringen og for eksempel formulere påstander om hva som blir resultatet dersom man adderer tre oddetall. Dette er et eksempel på hvordan de fire grunnleggende praksisene et tett sammenbundet.

2.1.2.2 Elevers bruk av språket når de generaliserer

Det er vanskelig å uttrykke en generalisering og elevene må øve på å uttrykke generaliseringene sine med egne ord. På samme måte som de gradvis lærer seg å beherske morsmålet sitt i skolen gjennom imitasjon, prøving og feiling vil de kunne lære seg det algebraiske språket gjennom det som Cusi, Malara og Navarra (2011) kaller *algebraisk pludring* (eng. algebraic babbling). Dette er en langvarig prosess der elevene setter ord på sammenhengene de oppdager og stadig vil klare å formulere mer presise uttrykk. Et eksempel på algebraisk pludring kan være «Jeg tar tallet og det dobbelte av tallet». Disse formuleringene kan man da jobbe videre med og oversette til det mer formelle algebraiske språket ved å bruke symboler. Et første steg vil kunne være at eleven oppdager at dette er det samme som å ta tre ganger tallet, og om det er rom for å bruke symboler kan de to formuleringene «oversettes» til $n + 2n$ og $3n$. Steinweg, Akinwunmi og Lenz (2018, s. 297) har kategorisert forskjellige måter elever kan bruke språket til å generalisere. De forskjellige typene brukes gjerne om hverandre og i kombinasjoner. Jeg har oversatt oversikten i tabell 2.

Tabell 2: Oversikt over måter elevene kan bruke språket til å generalisere

Type generalisering:	**Beskrivelse:**	**Eksempel ut i fra uttrykket x^2**
Fremstille et eksempel	Eleven bruker ett eksempel og gjør det tydelig at dette er et eksempel	«Det kan for eksempel være tre ganger tre»
Ramse opp flere eksempler	Eleven ramser opp flere eksempler og viser noen ganger til at det fortsetter videre	«Det er en ganger en, to ganger to, tre ganger tre og så videre.»
Kvasi-variabler	Eleven bruker konkrete tall kombinert med et generalisert utsagn.	«Jeg ganger *alltid* tre med tre.»
Betingelsessetning	Eleven formulerer et uttrykk som innebærer en betingelse	«Hvis det er tre så ganger jeg med tre ganger tre.»
Variabler	Eleven bruker ord eller tegn som minner om en variabel	«Du må gange tallet med seg selv.»

De første fire formene for generalisering vil ikke gjelde for alle tilfeller, men kan være nyttige fordi de allikevel vil beskrive et mønster som eleven har oppdaget. Og selv om de formelt sett ikke kan kalles generaliseringer så vil de språklig sett hjelpe elevene slik at de etter hvert klarer å formulere mer formelle generaliserte utrykk. Jeg vil også legge til at det er vanlig å bruke begrepet *kvasi-variabler* når elevene lager et regneuttrykk med høye tall som de kanskje ikke vil klare å regne med (Kieran et al., 2016). Et eksempel som passer til oversikten her kunne ha vært «Jeg ganger for eksempel tusen med tusen.»

2.1.2.3 Bruk av symboler i generalisering

Selv om det ligger store muligheter i elevenes naturlige språk for å kunne uttrykke en generalisering, og det er naturlig å starte med det, kan det også være muligheter som ligger i det symbolske språket. Veldig mange forbinder algebra med manipulering av symboler. Det er ikke uvanlig at man møter på mennesker som har et problematisk forhold til x-er og y-er, eller det vi kaller symboler eller variabler. De forteller at de ikke forstod noen ting av algebraen de måtte jobbe med på skolen eller at de syntes det var veldig vanskelig. Men kan det være mulig forebygge denne engstelsen for symboler ved å introdusere dem tidligere i skoleløpet? Blanton et al (2018) erfarte at elever som hadde fått undervisning i algebra de første årene på barnetrinnet klarte å bruke symboler og forstå hvilke variabler de skulle representere. De mener at man ved å introdusere symboler for variabler tidlig vil kunne bidra til at elevene får et bedre forhold til symboler senere i skolegangen. «We argue that the early introduction of variable notation in children´s mathematical experiences can offer them opportunities to develop familiarity and fluence with this convention.» (M. Blanton et al., 2018, s. 46) Men det er viktig at bruk av symboler innføres gradvis og på en klok måte slik at elevene har forutsetninger for å kunne forstå og ta symbolene i bruk selv (D. W. Carraher et al., 2008).

2.1.2.3.1 Hvordan kan læreren legge til rette for generalisering?

Hvordan læreren legger opp undervisningen og hvilke oppgaver og utfordringer hun gir elevene vil være avgjørende for om elevene vil klare å generalisere. Ellis (2011) studerte hvordan lærere og deres elever handlet for å legge til rette for generalisering. Ut i fra analysen hun gjorde av datamaterialet sitt formulerte hun syv kategorier som beskriver handlinger eller samtaler som kan legge til rette for generaliseringer eller forbedringer av generaliseringer. Jeg har oversatt og omskrevet kategoriene i tabell 3.

Tabell 3: Handlinger som kan legge til rette for generalisering

1.Delta i generalisering i klasserommet	**a) Lage en forbindelse mellom to eller flere problem, objekter, situasjoner eller representasjoner** **b) Identifisere noe som er likt på tvers av flere tilfeller** **c) Utvide et mønster, en ide eller en sammenheng slik at det gjelder for flere tilfeller enn det man jobber med**
2.Oppmuntre andre til å generalisere	a) Be noen om å se etter sammenhenger mellom to eller flere enheter b) Få noen til å se etter mønstre og sammenhenger c) Få noen til å utvide ut over de tilfellene man jobber med d) Få noen til å formulere en verbal eller algebraisk beskrivelse av et mønster eller en regel
3.Oppmuntre til deling av en generalisering eller ide	Spørre eller oppmuntre en elev til å dele en generalisering, representasjon, løsning eller ide.
4.Dele en elev sin generalisering eller en ide	Dele en annen elev sin generalisering, ide, strategi eller representasjon med hele klassen
5.Oppmuntre til begrunnelser eller forklaringer	Oppmuntre en elev til å reflektere dypere over en generalisering eller en ide ved å etterspørre en forklaring eller en begrunnelse.
6.Bygge videre på en generalisering eller en ide	Bygge videre på en annen elev sin ide, konklusjon eller generalisering.
7.Fokusere oppmerksomheten mot matematiske sammenhenger	Lede oppmerksomheten mot noen aspekter ved et problem eller en representasjon.

2.1.3 Algebra i læreplanene

Slik beskrives algebra i den gjeldende læreplanen som brukes i skolen i dag:

> *Algebra i skolen generaliserer tallregning ved at bokstaver eller andre symboler representerer tall. Det gir anledning til å beskrive og analysere mønster og sammenhenger. Algebra benyttes også i forbindelse med hovedområdene geometri og funksjoner. (Utdanningsdirektoratet, 2013)*

Selv om «mønster» og «sammenhenger» nevnes i forbindelse med algebra, så er det tydelig at regning med bokstaver står i fokus. Dette synet på algebra er mer i tråd med det «tradisjonelle» synet på algebra, og harmonerer i mindre grad med algebraisk tenkning og arbeid med algebra med små barn. Læreplanen inneholder en oversikt over hvilke hovedområdet det skal jobbes med på de forskjellige trinnene. Algebra blir i denne planen introdusert fra 5. trinn. Læreplanen vi bruker i dag er en revidert versjon av Kunnskapsløftet som ble vedtatt i 2006 (Kunnskapsdepartementet & Utdanningsdirektoratet, 2006). Algebra ble også i 2006 introdusert fra 5. trinn. Beskrivelsen av algebra er lik den som står i læreplanen nå, men på nynorsk. Jeg finner derfor ingen vesentlige endringer når det gjelder algebra i planen fra 2006 til den vi bruker i dag.

Hvis vi går enda lengre tilbake i tid til 1997 så har også læreplanen en oversikt over «målområder», og her blir algebra introdusert fra ungdomstrinnet. Som i den gjeldende læreplanen så er «Tall og algebra» ett av områdene, og beskrives slik:

> *Det er avgjørende for utvikling av innsikt i målområdet tall og algebra at arbeidet med variabler og formler foregår i meningsfylte sammenhenger. Elevene bør få oppleve sammenhengen mellom tallregning og algebra. Et utgangspunkt på småskole- og mellomtrinnet er arbeid med mønstre og regelmessigheter og med å beskrive dette på en kort og enkel måte. Det må skapes en økt oppmerksomhet om selve variabelbegrepet og om hva formler og uttrykk kan tjene til. Temaet krever spesiell oppmerksomhet fordi det i noen grad bryter med tidligere tenkemåter. Den formelle siden ved algebraen må ha et grunnlag i arbeid med konkrete eksempler. Algebra blir et redskap til å løse problemer, et språk som kan lette tenkning og resonnement, og en kilde til å oppdage nye sammenhenger. (forskningsdepartementet, 1996)*

Så selv om algebra ikke er satt opp som målområde før på ungdomstrinnet legges det vekt på at elevene på barnetrinnet skal forberedes på algebraen de skal jobbe med senere. Elevene skal jobbe med mønstre og regelmessigheter og å beskrive disse. Det skal også være fokus på sammenhengen mellom tallregning og algebra, dette kalles «generalisert aritmetikk».

Med den nye læreplanen som innføres fra høsten 2020 er det lagt til rette for at det skal jobbes med algebraisk tenkning allerede fra 1. klasse. Det er tydelig i kjerneelementene at algebraisk tenkning skal få en større plass i den nye læreplanen, men ordet «algebra» brukes i liten grad. For denne læreplanen er det ikke blitt utarbeidet en oversikt over hvilke emner i matematikken som det skal jobbes med på hvert trinn. De forskjellige fagområdene beskrives kort som et av kjerneelementene i matematikk. Under målene for hvert trinn er det vanskeligere å få øye på at algebra er et av fagområdene elevene skal jobbe med, og spesielt på de laveste trinnene så nevnes ikke «algebra» i det hele tatt. Her må læreren ha kunnskap om hva algebra er for å klare å knytte dette til målene.

I beskrivelsen av kjerneelementene er algebra med som et av de matematiske kunnskapsområdene. Algebra på barnetrinnet beskrives slik:

> *Algebra i grunnskolen betyr å arbeide med strukturer, mønster og relasjoner. Elevene skal gjennom hele skoleløpet arbeide med algebraisk tenkemåte - om hvordan algebra er en generalisering av tallregning, om hvordan algebra kan brukes til å finne ukjente størrelser, og om hvordan algebra kan brukes til å uttrykke sammenhenger mellom størrelser. (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 16)*

I læreplanen for matematikk som ble vedtatt senere er beskrivelsen blitt kortere:

> *Algebra handlar om å utforske strukturar, mønster og relasjonar og er ein viktig føresetnad for at elevane skal kunne generalisere og modellere i matematikk. (Utdanningsdirektoratet, 2019)*

2.1.3.1 Strukturer, mønstre og relasjoner

Beskrivelsen av algebra i den nye læreplanen samsvarer i stor grad med det Kieran et al (2016) ser som kjernen for den forskningen på tidlig algebra som har vært gjort de siste årene «At the core of this resent research has been a focus mathematical relations, patterns and arithmetical structures, with detailed attention to the reasoning processes used by young students […] as they come to construct these relations, patterns, and structures – processes such as noticing, conjecturing, generalizing, representing, and justifying.» (2016, s. 10) På bakgrunn av det som fremheves om algebra i Fagfornyelsen velger jeg å se nærmere på hvordan faglitteraturen beskriver strukturer, mønstre og relasjoner i forbindelse med algebraisk tenkning.

Sett opp mot innholds-perspektivet i tidlig algebra så vil man jobbe med strukturer, mønstre og relasjoner når man jobber innenfor de forskjellige områdene i tidlig algebra. Sett opp imot de grunnleggende praksisene (se kapittel 2.1.2.1) som kjennetegner algebraisk tenkning så er strukturer, mønstre og relasjoner de matematiske egenskapene som er utgangspunktet for generaliseringsarbeidet som gjøres. Dette kan for eksempel komme til uttrykk dersom en lærer fokuserer på strukturene som ligger bak tallsystemet vårt når elevene jobber med å generalisere tallregningen.

2.1.3.1.1 Strukturer

I litteratur om algebraisk tenkning har det gjerne vært stort fokus på generalisering, mens strukturer til dels har blitt oversett (Kieran, 2018). Selv om generalisering av mange oppfattes som «kjernen» i tidlig algebra, så er strukturer også grunnleggende i både algebra og matematikkfaget. Generalisering involverer også strukturer […] «generalizing in arithmetic involves identifying the structural» (Kieran, 2018, s. 81). For å kunne generalisere må vi lete etter strukturer, men for å identifisere strukturene må vi også oppdage det generelle, derfor henger disse begrepene sammen. Mason, Stephens og Watson definerer matematisk struktur slik: […] «the identification of general properties which are instantiated in particular situations as relationships between elements» (Mason, Stephens & Watson, 2009, s. 10). Dette betyr at vi jobber med strukturer når det er en sammenheng mellom to eller flere elementer, feks mellom to forskjellige regnearter, og vi klarer å oppdage egenskapene som kan beskrive denne sammenhengen. Praktisk i klasserommet kan dette være at elevene oppdager at når vi skal addere eller multiplisere to tall så får vi det samme svaret om vi snur om på rekkefølgen på tallet, og at dette gjelder begge regneartene.

Forskning viser at elever som kjenner igjen strukturen til matematiske prosesser og representasjoner utvikler en dyp begrepsforståelse i matematikken (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Et vanlig opphav til feil som elever gjør er når de overfører strukturer fra en regneart til en annen (Schifter, 2018). Dette kan for eksempel resultere i at eleven ved subtraksjon av tosifrede tall ikke bryr seg om hvilket tall som står først fordi det ikke har noen betydning for svaret i en addisjonsoppgave. Dette gjør det også viktig at elevene får utforske og oppdage strukturene til de forskjellige regneartene. Mye tyder på det i skolen jobbes mye å huske regneprosedyrer og at det er lite fokus på de strukturelle egenskapene som skiller de forskjellige regneartene fra hverandre. Dersom elever er lite oppmerksomme på de forskjellige egenskapene til regneartene vil det være vanskeligere for dem å oppdage feil de gjør når de jobber med algebra senere i skoleløpet (Schifter, 2018). Et typisk eksempel på en feil mange elever gjør er denne: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Ved å fokusere på sammenhenger mellom forskjellige representasjoner, som diagrammer, fysiske objekter, regneuttrykk og kontekster til oppgavene vil man legge til rette for at elevene opplever regneoperasjonene som et matematisk objekt i seg selv og ikke bare operasjon (Schifter, 2018). Warren (2003, s. 123, 124) har delt inn strukturer i matematikk i fire områder med eksempler på hvordan vi kan jobbes med dette i matematikken. Jeg har oversatt de fire områdene i tabell 4. Denne oversikten kan være til hjelp for å sette fokus på arbeid med strukturer.

Tabell 4: Strukturer i matematikk

i	**Sammenheng mellom størrelser**	Er mengdene like store, eller er en mengde mindre eller større enn den andre?
ii	**Egenskaper ved regneartene**	Er prosedyren assosiativ og/eller kommutativ? Kan vi gjøre det motsatte?
iii	**Sammenhenger mellom regneartene**	Er en regneart overordnet en annen?
iv	**Sammenhenger på tvers av størrelser**	Hvis $a<b$ og $b<c$ så må $a<c$

Ved arbeid med figurtall kan vi si at elevene finner strukturen i figurtallene når de definerer et mønster som beskriver hvordan figuren vokser (Twohill, 2018). Strukturen kan for eksempel være at sidelengden i figuren øker med to elementer for hver nye figur. Det kan være lettere å oppdage strukturen dersom man tar utgangspunkt i de forskjellige figurtallene og setter opp regnestykker uten å regne ut med en gang (Kieran, 2018). Dersom man jobber med trekanttall så kan man finne verdien til de forskjellige figurene ved å summere radene (1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4...). Da er det lettere å oppdage strukturen som ligger bak utformingen av figurtallene og dermed kunne beskrive mønsteret og kanskje klare å formulere en generell formel.

2.1.3.1.2 Mønstre

Mønstre i tidlig algebra er tett knyttet opp mot strukturer fordi vi må oppdage strukturene som ligger bak for å beskrive et matematisk mønster. Når vi snakker om mønstre i tidlig algebra handler det ofte om tallrekker og figurtall. Mønstre som elever på barnetrinnet jobber med kan være repeterende mønstre (eks ABABABA), voksende mønstre (eks 2-4-6-8-) og geometriske mønstre. Mulligan og Mitchelmore definerer mønstre i matematikk slik: «A mathematical pattern may be described as any predictable regularity, usually involving numerical, spatial or logical relationships.» (Mulligan & Mitchelmore, 2009, s. 34) Det må være en «regel» eller mulig å forutsi hvordan det neste elementet i en rekke vil se ut.

2.1.3.1.3 Relasjoner

Med relasjoner i tidlig algebra så forstår jeg dette som både relasjoner/sammenhenger mellom representasjoner, relasjonell tenkning og som funksjonstenkning (relasjoner mellom to variabler som endre seg sammen). Funksjonstenkning og sammenhengen mellom representasjoner har blitt beskrevet i kapittelet om funksjonstenkning.

Relasjonell tenkning går ut på at elevene kan sammenligne verdiene til forskjellige regneuttrykk og at de utvikler en forståelse for likhetstegnet som noe som viser at regneuttrykkene på hver side av likhetstegnet har like stor verdi. Da har de utviklet en relasjonell forståelse for likhetstegnet. Det er en veldig vanlig misoppfatning blant elever at de forstår likhetstegnet som en kommando om å regne ut svaret på en regneoppgave. De har da en operasjonell forståelse av likhetstegnet (Kieran, 1981). Elever som har en operasjonell forståelse for likhetstegnet vil for eksempel kunne reagere på en oppgave av typen 5 + 7 = __ + 6 med å legge sammen alle tallene som står i oppgaven eller å regne ut hva fem pluss syv blir. En elev som har en relasjonell forståelse for likhetstegnet vil raskt kunne finne ut at det skal stå 6 på streken fordi det siste tallet på høyre side av likhetstegnet er en mindre enn det siste tallet på venstre side. Relasjonell tenkning er en viktig del av algebraisk tenkning fordi det forutsetter at elevene forstår (Carpenter, Levi, Franke & Zeringue, 2005).

2.2 Å få til endringer i klasserommet

Det må skje en grunnleggende endring dersom lærerne skal få til å integrere algebraisk tenkning i klasserommet. For å forstå hvordan disse endringene kan skje er det viktig å ta hensyn til at undervisning er en kulturell aktivitet som det vil ta tid og stor innsats å endre. Lærerne vil trenge hjelp til å få til disse endringene slik at de ikke bare tilpasser nytt innhold i timene til de arbeidsmåtene og det arbeidet de allerede gjør. Å veilede lærere som ønsker å jobbe med algebraisk tenkning i klasserommet vil kunne kreve en annen innfallsvinkel enn det som blir brukt innenfor andre matematiske emner. Det må også tas hensyn til hvilke forestillinger lærerne har om matematikk og hva som er god matematikkundervisning. De sosiomatematiske normene, felles oppfatninger av hva som er oppfattet som god matematisk aktivitet i klasserommet, må også endres dersom elevene fra før av ikke er vant til å jobbe utforskende i matematikktimene. I tillegg må lærerne ha kompetanse på algebra og arbeidsmåter som egner seg å bruke i undervisningen.

2.2.1 Undervisning er en kulturell aktivitet

Stigler og Hiebert (2009) er opptatt av hvordan vi kan få til å endre matematikkundervisningen. De har sammenlignet TIMMS-resultatene i USA, Tyskland og Japan og har sett hvordan det i Japan, som har mye bedre resultater enn USA, undervises helt annerledes enn i USA. De definerer undervisning som en kulturell aktivitet, og dette forklarer hvorfor det er så vanskelig å få til endringer i matematikkundervisningen. «Cultural scripts are learned implicitly, through observation and participation, and not by deliberate study. This differentiates cultural activities from other activities.»(2009, s. 86) Kulturelle aktiviteter læres over lang tid, gjennom observasjon og deltakelse. Det er komplekst og vanskelig å endre undervisningen som foregår i klasserommene. Lærerne er preget av den undervisningen de selv har vært utsatt for. Hele systemet må endres, klasserommet, lærerens mål og undervisningsstil, materiell og elevrollen. Men det viser seg også at lærere lett tilpasser nye metoder slik at de passer inn i deres eget «system» og dermed bare gjør overfladiske endringer, eller ikke gjør endringer i det hele tatt. Et eksempel på dette kan være at det bestemmes at læreren skal jobbe med klasseromssamtaler i matematikk. Lærerne vil kanskje tenke at det gjør de allerede, de stiller spørsmål til klassen og elevene rekker opp hånda og bytter på å svare. De gjør da kanskje mer av dette, men gjør ingen endring i undervisningen sin slik at de får til en samtale der elevene også undrer seg og diskuterer seg imellom. Det kan også være risikabelt å endre undervisningen. Dersom det gjøres overfladisk og med lite forståelse for prinsippene kan vi ende opp med dårligere resultat enn utgangspunktet. Lærerne kan misforstå intensjonene med reformene. For å få til endringer må vi jobbe systematisk og over tid. I Japan har de et system for å få til gradvis endring over tid. Gjennom «lesson study» samarbeider lærerne på en profesjonell måte for å gjøre endringer og skape gode undervisningsopplegg. Det er avgjørende at lærerne aktivt er med og driver utviklingsarbeidet. Ut i fra ideer fra Japan har Stigler og Hiebert formulert seks prinsipper for utviklingsarbeid med lærere. Endringer må skje gradvis over tid. Behold fokus på elevenes læringsmål. Det skal være fokus på undervisning (ikke på lærerne). Endringene må utvikles i klasserommet. Lærerne må være drivkraften bak endringene. Det må være et system for å dele kunnskapene.

Franke, Carpenter og Battey (2008) beskriver også hvordan det å utøve matematikk er en kulturell praksis. «These cultural practices form the basis for how students and teachers engage with the content and highlight the values, beliefs, and knowledge that teachers, students, and families bring to the mathematical work.» (Franke et al., 2008, s. 347) Lærernes verdier, oppfatninger om matematikk og kunnskap preger den undervisningen de legger til rette for. Forfatterne mener at disse kulturelle praksisene kan være nyttig utgangspunkt for utviklingsarbeid med lærere. Algebra har sine egne kulturelle praksiser. Mange oppfatter algebra som regelstyrt, dette kan vi blant annet se i det algebraiske formelspråket. Men det er også gjerne en del av den kulturelle praksisen at algebra ikke er for alle, de smarte forstår algebra. Dette er viktig å være klar over fordi lærerne kan ha en helt annet oppfatning av algebra enn de som skal veilede dem.

2.2.2 Læreres rekontekstualisering av nye kunnskapsformer

Å skulle jobbe med algebra med de yngste elevene vil oppfattes som nytt for mange lærere, og de må tilegne seg ny kunnskap og utvikle nye arbeidsmåter. Hermansen og Mausethagen (2016) har sett nærmere på hvordan lærere tilnærmer seg nye kunnskapsformer og hvordan de setter disse nye kunnskapsformene i sammenheng med sin eksisterende praksis. Denne prosessen kaller de for rekontekstualisering. Lærerne må gjøre et «oversettelsesarbeid» for at den nye kunnskapen skal kunne oppleves som relevant for dem. Hermansen og Mausethagen peker på tre grunnleggende forutsetninger for at ny kunnskap skal kunne integreres i det daglige læringsarbeidet: […] «*ny kunnskap, etablert praksis og læreres forståelse av egen rolle* må utforskes kritisk og settes inn i nye sammenhenger» (2016, s. 103). Lærere må få tid til å jobbe med å koble den nye kunnskapen til det arbeidet de gjør i klasserommet. Mausethagen og Raaen (2017) har studert lærere som har deltatt i et forskningsbasert utviklingsarbeid på egen skole. De fant at det var tre fremtredende tendenser på hvordan lærere forholdt seg til forskning. Forskningen kan oppfattes som sirkulær, det vil si at den kommer i trender eller bølger. Lærere som har jobbet i mange år vil da kunne oppleve at de kjenner igjen den «nye» ideen fra tidligere, og så må de velge om de vil kaste seg på «bølgen» denne gangen. Den andre fremtredende oppfatningen er at lærerne oppfatter at forskerne kommer med ulik og til dels motstridende kunnskap. Den siste trenden er at lærere bruker forskningen til å bekrefte egen praksis i stedet for å endre den. Disse funnene viser at lærerne er skeptiske til nye kunnskapstyper, men også at de prøver å finne mening og sammenhenger med egen praksis. Hermansen og Mausethagen (2016, s. 103) poengterer at «[…] det kreative og meningsskapende arbeidet som ligger til grunn for rekontekstualisering av kunnskap, gjør at lærere må oppfattes som kunnskaps*produsenter*, og ikke bare passive mottakere av kunnskap som innføres «utenfra».» Dette synet legger til rette for at lærere må få være aktive og kreative deltakere i utviklingsarbeid og ved innføring av nye arbeidsmåter på egen skole.

2.2.3 Hvordan forholder lærerne seg til nye læreplaner i matematikk?

I forbindelse med innføring av L97 fulgte Kleve tre matematikklærere. Hun ville undersøke hvordan lærerne tolket og implementerte læreplanen. Studien viste at læreplanen i liten grad ble implementert. Kleve fant tre nivåer av begrensende faktorer som kan forklare dette. Det første nivået går ut på hvilke oppfatninger en lærer har om matematikkundervisning og læreplanen. Disse oppfatningene vil igjen påvirke de sosiomatematiske normene i klasserommet og dermed hva læreren legger vekt på. Dersom læreren ikke har tro på den nye læreplanen og mener at hennes måte å undervise på er bedre, kan man ikke forvente at hun følger den nye læreplanen. Det andre nivået er når læreren ønsker å implementere den nye læreplanen og har et syn på matematikkundervisningen som passer med dette, men allikevel ikke ender opp med å endre undervisningen sin. Dette er fordi andre faktorer, som forventninger og krav fra elever og foreldre, eller samarbeid og praktiske forhold på arbeidsplassen gjør at læreren ikke får det til, eller får det til i liten grad. Så selv om lærerens oppfatninger og læreplanen samsvarer, så får ikke læreren til å gjøre endringsarbeidet som trengs. Det tredje nivået går ut på at læreren tror på læreplanen og forbereder timene sine ut i fra den, men så skjer det i praksis ikke noen endringer i timene. Læreren ønsker å endre undervisningspraksisen sin, men får det ikke til. Det blir for komplekst å forholde seg til den nye læreplanen, elevene og undervisningsmateriellet (Kleve, 2010). Oppsummert kan vi si at det som hindret at læreplanen ble implementert var lærernes oppfatninger om hva god matematikkundervisning er, sosiokulturelle hindringer, og at lærerens visjoner ikke lot seg overføre til klasserommet. Å jobbe med lærernes oppfatninger vil være vanskelig å håndtere, og kreve planlagt og strukturert arbeid.

2.2.4 Faginnholdet har betydning for utviklingsarbeid med lærere

Selv om lærerne må være drivkraften bak endringer som skjer i klasserommet er det viktig at de ikke overlates til seg selv, spesielt dersom fagstoffet de skal jobbe med er annerledes enn det de er vant til fra før. Franke, Carpenter og Battey (2008) har sammenliknet utviklingsarbeid med lærere i algebraisk tenkning opp mot utviklingsarbeid basert på arbeid med heltall og regnemetoder. De opplevde at lærerne tilpasset det «nye» faginnholdet til arbeidsmåter de allerede var vant til å bruke, og disse vil ikke alltid passe når man jobber med algebraisk tenkning. «Often existing practices of teachers do not include ways of getting at student thinking, but do include many ways of getting at students´ answers and making sure students get the correct answer.» (Franke et al., 2008, s. 351) De forteller om en episode der de har jobbet med relasjonell forståelse for likhetstegnet, og lærerne og veilederne sammen laget sammen noen regneuttrykk der elevene skulle vurdere om de var sanne eller ikke (for eksempel 7 = 4 + 3) og åpne tallsetninger (for eksempel 8 + 4 = 3 + __) som de skulle jobbe med i klassene slik at elevene skal få utvikle forståelsen for likhetstegnet. Da lærerne senere jobbet videre med å planlegge undervisningen laget de oppgaveark der elevene skulle øve på å få riktige svar i slike oppgaver. De brukte ikke oppgavene til å få frem diskusjon og jobbe med forståelse, men planla undervisning slik de hadde gjort tidligere. «Here the teachers appropriated a practice that was not helpful in relation to developing algebraic thinking, particularly relational thinking.» (Franke et al., 2008, s. 351) For å hjelpe lærerne i gang med å undervise i algebra utviklet veilederne noen hjelpemidler. Sammen med lærerne skrev de forskjellige regneuttrykk på små kort. Disse kortene ble brukt både i utviklingsarbeidet med lærerne og i klasserommet. De gjorde dette for å få fokus bort fra riktig svar og over på hvordan elevene tenkte. De konkluderer med at utviklingsarbeid med lærere må legges opp ut i fra faginnholdet de skal jobbe med. Lærerne må jobbe med å identifisere hva som er det matematiske innholdet elevene skal jobbe med, diskutere hvordan undervisningen bør legges opp, og å utvikle hjelpemidler som kan være til støtte i undervisningen. For de som støtter lærerne i deres utviklingsarbeid er det viktig å hjelpe til slik at lærerne er engasjert i utforskning og forstå at elevers tenkemåte kan være et verktøy for å engasjere lærerne. I tillegg må man ha forståelse for kulturen og historien til lærergruppen.

Kieran et al (2016, s. 22) har sett på flere profesjonelle utviklingsprogram i tidlig algebra og har funnet tre hovedideer som er felles for mange av programmene. For det første så må lærerne kunne innholdet de skal undervise i. For det andre må de øve seg på å forstå hvordan elever tenker, lytte til deres ideer og lete etter relasjoner til det klassen jobber med. For det tredje må de lære seg å lede diskusjoner. De må kunne analysere elevenes ideer og klare å ta avgjørelser på hvilke ideer det er lurt å følge opp. Lærerne må lære seg å stille forskjellige typer spørsmål og gi respons slik at elevene blir interessert i fagstoffet og klarer å oppdage nye sammenhenger.

2.2.5 Hva slags kunnskap trenger læreren?

En og samme oppgave kan føre til at læreren og elevene jobber med algebraisk tenkning eller ikke. Læreren trenger kunnskap og erfaring for å kunne «løfte frem» den algebraiske tenkningen. Vi må vite hva slags kunnskap lærerne trenger slik at vi kan bruke det som utgangspunkt for utviklingsarbeid med lærerne.

Shulman har satt fokus på at lærerne har behov for kunnskap om hvordan de kan gjøre kunnskap tilgjengelig for elevene. Dette kalte han «the missing paradigm» (Shulman, 1986). Tidligere hadde det i lærerutdanningene vært fokus på ren fagkunnskap og ren pedagogikk.

Shulman delte den kunnskapen læreren trenger inn i tre områder: *fagkunnskaper* (eng: Subject Matter Content Knowledge), som er fagkunnskap og forståelse for strukturer i faget, *læreplankunnskap* (eng: Curricular Knowledge), som er kunnskap om læreplaner og undervisningsmateriell, kunnskap om andre fag, kunnskap om hva elevene har lært tidligere og hva de skal lære senere, og om fagets oppbygging. Det tredje og mest nyskapende området kalte han *fagkunnskap for undervisning* (eng: Pedagogical Content Knowledge. Dette er kunnskap om hvordan fagstoffet kan fremstilles for elevene, hvilke representasjoner, eksempler og forklaringer som læreren kan bruke for å gjøre faget forståelig for elevene. Dette er fagkunnskap kombinert med pedagogikk.

Deborah Ball, Mark Thames og Geoffrey Phelps (2008) har tatt utgangspunkt i Shulmans «Pedagogical Content Knowledge». De bruker begrepet «mathematical knowledge for teaching» om den matematiske kunnskapen læreren trenger for å gjennomføre undervisningen, på norsk kan vi kalle dette *undervisningskunnskap i matematikk*. De deler inn kunnskapen som læreren trenger i *matematikk-kunnskap* (eng: subject matter knowledge) og *matematikkdidaktisk kunnskap* (eng: pedagogical content knowledge). Matematikk-kunnskap er delt inn i tre underområder, det er allmenn matematikk-kunnskap (eng: common content knowledge) som er matematikk-kunnskap og kunnskap om matematiske arbeidsmåter, horisontkunnskap i matematikk (eng: horizon content knowledge) som er kunnskap om hva elevene har lært tidligere og hva de skal lære senere, og spesialisert matematikk-kunnskap (eng: specialized content knowledge) som er matematikk-kunnskape bare en lærer trenger. Dette kan være kunnskap om algoritmer og spesielle matematiske begreper som feks «delingsdivisjon». Matematikkdidaktisk kunnskap er også delt inn i tre områder, det er læreplankunnskap (eng: knowledge of content and curriculum) som er kunnskap om læreplaner, også på tvers av fag, kunnskap om matematikk og elever (eng: knowledge of content and students) som er kunnskap om hvordan elevene tenker og om hva de vil oppleve som vanskelig, og kunnskap om matematikk og undervisning (eng: knowledge of content and teaching) som kombinerer kunnskap om matematikk med kunnskap om undervisning. Dette området omhandler hvordan læreren kan gjøre kunnskap tilgjengelig for elevene og kan være kunnskap om forskjellige representasjonsformer, metoder, bruk av konkreter og eksempler

McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase og Senk (2012) har laget et rammeverk som beskriver hva slags kunnskap lærerne trenger for å undervise i algebra. Forfatterne beskriver hva slags typer kunnskap lærerne trenger for å undervise i algebra og hvilke undervisningspraksiser som er viktige å bruke. De har tatt utgangspunkt i (Shulman, 1986) og

Ball et al. (2008), analyse av matematikkbøker for ungdomstrinnet, intervjuer med lærere og videoopptak av undervisning. For det første må læreren ha kunnskap om skolealgebra, om det som det skal undervises i. For det andre må læreren ha kunnskap om avansert matematikk, ikke bare algebra. Og for det tredje må læreren ha undervisningskunnskap om algebra. I tillegg til å ha kunnskap om den algebraen elevene skal lære seg (fagkunnskap) må læreren ha kunnskap om hvordan elevene kan lære om algebra (fagkunnskap for undervisning). Læreren må kunne ta utgangspunkt i elevenes innspill og knytte dette til algebraen de skal jobbe med. Kunnskap om avansert matematikk (også del av fagkunnskap) er viktig fordi lærerne da kan gi elevene et godt utgangspunkt for å forstå det de skal lære senere i skoleløpet. I tillegg vil en lærer som har avansert kunnskap om matematikk ha større forutsetninger for å kunne utnytte (uventede) elevinnspill. Dette kan for eksempel være kunnskap om hva som kan telle som bevis i matematikk.

2.2.6 Lærernes oppfatninger om matematikk

Fordi det kan være vanskelig å håndtere lærere som har forestillinger om matematikkundervisning som ikke samsvarer med føringer i læreplanen kan det være nyttig å se mer på hvilke oppfatning lærerne har om matematikk, hva som ligger bak hvilke oppfatninger lærerne har, og hvilke faktorer som kan være avgjørende for at lærerne endrer sine oppfatninger. Følelser lærerne har opplevd når de selv har lært matematikk tar de med seg videre, og disse følelsene påvirker hvordan lærerne oppfatter matematikken (Philipp, 2007). Lærernes forestillinger om matematikk påvirker hvordan de legger opp undervisningen (Ernest, 1989; Shilling-Traina & Stylianides, 2013). Ernest (1989) studerte hvilke oppfatninger lærere hadde om matematikk og delte disse oppfatningene inn i tre kategorier. Disse kategoriene kan også sees på som nivåer for hvor utviklet læreren sin filosofi over undervisning er. Det «laveste» nivået kalte han instrumentelt syn (eng: the instrumentalist view), lærerne som hadde denne forestillingen så på matematikk som et fag der man lærer seg enkeltstående fakta, regler og ferdigheter. Lærerens rolle blir å vise og instruere og hun benytter seg av ferdige oppgaver fremfor å utvikle undervisningsopplegg selv. Et eksempel på dette kan være lærere som følger læreboka og legger opp til at den brukes fra første til siste side uten å finne noe særlig læremateriell fra andre kilder. Det neste nivået, det platonske synet (eng: the platonist view), beskriver oppfatningen til lærere som mener at matematikk oppdages, elevene trenger en helhetlig forståelse og å se sammenhenger og strukturer i faget. Lærerens rolle blir da å forklare. Læreren tar gjerne utgangspunkt i lærebok og ferdige opplegg, men legger til andre aktiviteter også. Det tredje nivået kalte han probemløsnings-syn (eng: the problem-solving view). Lærerne som hadde denne oppfatningen så på matematikk som en prosess der man utforsker for å oppnå stadig ny kunnskap. Hvordan oppgavene kan løses er mer interessant enn hva svaret er. Lærerens rolle blir å legge til rette for dette. Læreren og skolen utarbeider undervisningsopplegg som passer til det som er målet med undervisningen. Men det er ikke alltid samsvar mellom lærerens forestillinger og lærerens klasseromspraksis. Ernest (1989) fant to hovedårsaker til dette. For det første er det den sosiale påvirkningen fra samfunnet rundt læreren, dette kan være fra foreldre, elever, kollegaer eller overordnede. Læreplan og andre føringer ovenfra vil også bidra til denne påvirkningen. Denne sosiale effekten er så stor at lærere som jobber på samme skole men har forskjellig forestillinger ofte utvikler lignende klasseromspraksis. Den andre årsaken er i hvilken grad læreren er bevisst sine oppfatninger og i hvilken grad læreren reflekterer over sin undervisningspraksis. Dersom læreren er bevisst sine oppfatninger vil hun kunne jobbe for å få samsvar mellom sine forestillinger og klasseromspraksisen. Læreren må også vite om de forskjellige forestillingene om matematikk dersom det skal være noe håp om at hun endrer forestilling og «klatrer opp» i nivåene.

Men lærernes praksis samsvarer ikke alltid med den oppfatningen av matematikk som de selv uttrykker at de har. For eksempel oppdaget Cros Francis at lærere som hadde en oppfatning av at elevene ville forstå matematiske ideer ved å utforske selv la frem oppgavene og hjalp elevene på en slik måte at de kognitive kravene ble lavere (Cross Francis, 2015). Lærere kan også for eksempel være problemløsningsorientert men ikke selv ha tro på at hun klarer å undervise på den måten og ende opp med å undervise ut i fra et instrumentelt syn. Så det å utforske hvilke oppfatninger lærere har om matematikk er omfattende og sammensatt. Forskning viser at lærerstudenters forestilling om matematikk oftest er instrumentalistisk eller for noen platonsk og et resultat av den undervisningen de selv ble utsatt for da de gikk på skolen. (Shilling-Traina & Stylianides, 2013) De er opptatt av å bruke riktig metode, å huske prosedyrer og å få riktig svar. Instrumentelt og platonsk syn blir ofte kalt for et tradisjonelt syn på undervisning fordi de begge legger vekt på overføring av kunnskap. (Shilling-Traina & Stylianides, 2013) Shilling-Traina og Stylianides har gjennomført en studie blant lærerstudenter som tok et matematikk-kurs. Kurset hadde blant annet som mål at studentene orienterte seg mot et syn på matematikk som noe som blir praktisert, det vil si at de har en forestilling om matematikk som samsvarer med «the problem-solving-view». Forskerne undersøkte i hvilken grad studentene endret sine forestillinger om matematikk og hvilke faktorer som kunne legge til rette for at studentene endret sine forestillinger. De brukte i hovedsak tre grep for å legge til rette for at studentene skulle utfordre sin oppfatning om matematikk. De valgte ut aktiviteter som hadde som mål å lede studentenes oppmerksomhet mot deres forståelse eller oppfatning av et matematisk emne eller en ide. Slike aktiviteter har blitt kalt for «conceptual awareness pillars» (Stylianides & Stylianides, 2009) Oppgavene ble brukt med mål om å oppnå en kognitiv konflikt og dermed en endring i studentenes oppfatninger. De hadde også fokus på lærerutdanneren sin rolle. Lærerutdanneren valgte ut aktiviteter som la til rette for et fokus på å lære matematikk gjennom problemløsning og veiledet også studentene med dette som formål. Oppgavene studentene jobbet med var lagt opp slik at de lærte matematikk samtidig som de fikk innta en lærers perspektiv på matematikken. Dette la også til rette for at de fikk utfordret sin oppfatning av matematikk. Forskerne konkluderte med at kurset hadde muligheter til å påvirke lærerstudentene til å endre sin oppfatning av matematikk mot et problemløsnings-syn. Men mange hadde robuste tradisjonelle syn som det var vanskelig å få gjort noe med i løpet av dette kurset. Det er også usikkert hvorvidt de studentene som endret oppfatning vil beholde den nye oppfatningen over tid.

2.2.7 Læreres oppfatning av algebra

Det er nytt for mange lærere at de skal jobbe med algebraisk tenkning allerede fra første trinn, og det kan være naturlig å undre seg over om lærerne på barnetrinnet har nok kunnskap og kompetanse til å klare å integrere algebraisk tenkning i matematikkundervisningen. Hvilken oppfatning lærerne har av algebra vil også være avgjørende for hvordan læreren legger opp undervisningen. Stephens (2008) gjennomførte en undersøkelse av lærerstudenter for å finne ut av hvilken oppfatning de hadde av algebra. Hun fant at studentene oppfattet algebra som et emne i matematikken som var dominert av symboler og symbolmanipulering. Studentene skulle vurdere flere oppgaver og brukte fravær eller tilstedeværelse av symboler og bokstaver som kriterium for å vurdere om en oppgave var algebraisk. Glassmeyer og Edwards (2016) gjennomførte en studie med 19 lærere som underviste de siste årene på barnetrinnet. Disse lærerne deltok i et utviklingsarbeid over to uker og ble også fulgt opp to måneder etter at utviklingsarbeidet var over. Studien viste at lærerne hadde en snever forståelse for algebra. De oppfattet algebra som et område i matematikken med oppgaver som hadde ett svar og en løsningsmetode. «Their thinking of algebraic reasoning required only procedural knowledge and did not include generalization or functional thinking» (s 102). De fleste lærerne som var med i studien koblet algebraisk tenkning til symbolmanipulering. Etter å ha begynt å lese seg opp uttrykte lærerne en mer omfattende oppfatning av algebraisk tenkning. De begynte også å inkludere generalisering og funksjonstenkning som en del av algebraisk tenkning. Men to måneder etter utviklingsarbeidet viste det seg at mange av lærerne ikke lenger tenkte på generalisering og funksjonstenkning som en del av algebraisk tenkning. Studien viser at vi kan endre lærernes oppfatning av algebra, men det må gjøres et mer omfattende eller annerledes arbeid for å gi en mer varig effekt. Franke, Carpenter og Battey (2008) erfarte at lærere selv blir overrasket over hvor mye algebraisk tenkning de er i stand til å gjennomføre. Men mange lærere er usikre og opplever ikke at de er faglig sterke i matematikk. Noen lærere frykter også algebra og tror at de aldri vil klare å bli gode i det. Engstelsen for algebra, som en del lærere opplever, kjenner de ikke igjen fra utviklingsarbeid i andre områder i matematikken. Blanton og Kaput (2005a) opplever at de fleste lærerne på barnetrinnet har liten erfaring med algebraisk tenkning. Lærerne bruker arbeidsmåter som de selv ble utsatt for som elever og disse egner seg ikke til å få frem algebraisk tenkning. Det som anses som «god» undervisning i matematikk har i stor grad endret seg de siste årtiene, og denne endringen kan vi også finne igjen i læreplanene, men ikke nødvendigvis i klasserommene.

2.2.8 Sosiomatematiske normer

Lærerens oppfatning om matematikk og av algebra vil påvirke hva det legges vekt på i undervisningen og dermed være med og forme de sosiomatematiske normene i klassen. Sosiomatematiske normer handler om hva som er oppfattet som god matematisk aktivitet i klasserommet. Dette er normer i klasserommet som kun gjelder matematikken. Eksempler på dette kan være hva som er den felles oppfatningen i klassen av hva som teller som et matematisk bevis, hva som må til for at løsningene skal oppfattes som forskjellige, og hva som kjennetegner en elegant matematisk løsning. Yackel og Cobb beskriver dette som «...normative aspects of mathematics discussions specific to students` mathematical activity.» (Yackel & Cobb, 1996, s. 461). Dette ser de i motsetning til sosiale normer som vil gjelde i klassen uansett fag. Et eksempel på dette kan være at det er forventet at elevene forklarer hvordan de har tenkt da de løste en oppgave. Dersom det bare gjelder i matematikktimene er det en sosiomatematisk norm, men dersom det i alle fag forventes at elevene forklarer hvordan de har tenkt er det en sosial norm. Klassen «eier» de sosiomatematiske normene sammen, men det er læreren som må legge til rette for hvilke normer klassen skal ha sammen. Dette kan hun for eksempel legge til rette for gjennom hvordan hun stiller spørsmål, hva hun legger vekt på i en oppsummering og hvilke elevløsninger som velges ut. Elever vil for eksempel gjøre en innsats for å finne nye måter å løse en oppgave på dersom læreren legger vekt på å finne forskjellige løsningsmetoder. Læreren må derfor bruke klassesamtalene til å legge til rette for at de ønskede sosiomatematiske normene utvikles og opprettholdes.

Læreren kan legge til rette for algebraisk tenkning i klasserommet ved å etablere sosiomatematiske normer som støtter opp under at det å fremsette hypoteser, begrunne og generalisere er viktig for å tilegne seg kunnskap i matematikk. Kaput, Blanton og Moreno skriver dette om sosiomatematiske normer og funksjonstening: «Classrooms in which children`s functional thinking can thrive are those in which the teacher has established sosio-mathematic norms of conjecturing, arguing, and generalizing in purposeful ways, where the arguments are taken seriously by students as ways of building reliable knowledge." (Kaput, Blanton & Moreno, 2008, s. 41). For å få til en klasseromskultur der de sosiomatematiske normene legger til rette for algebraisk tenkning er det derfor viktig at elevene lærer seg å formulere hypoteser, argumentere og begrunne. Elevene må øve seg på å bruke språket sitt til å dele, men også å lytte til hverandres innspill. Dette kan læreren jobbe systematisk med ved å jobbe med å utvikle klasseromssamtalene i matematikk og å planlegge hvordan klasseromssamtalene skal bygges opp ut i fra elevenes innspill og strategier knyttet opp imot det faglige fokuset.

2.2.9 Klasseromsamtaler i matematikk

At lærere bruker tid på klassesamtale med elevene er viktig for utvikling av elevenes algebraiske tenkning. Kieran et al (2016, s. 22) har også som et av flere holdepunkter for planlegging av utviklingsarbeid med lærere at lærerne må lære seg hvordan de kan styre matematiske diskusjoner i klasserommet.

Det har de siste årene blitt større fokus på klasseromsamtalen i matematikk i Norge. Matematikksenteret har det som et av sine satsningsområder, og flere lærere lærer om dette når de tar videreutdanning matematikk. Det er viktig at elevene får delta i matematiske samtaler fordi de da også lærer seg å lytte til andre, lærer seg å stille spørsmål og å reflektere over egne forståelse (Kazemi & Hintz, 2014). Dersom elever får delta i matematiske samtaler vil dette kunne bidra til at de opplever at matematikken blir meningsfull (Wæge & Nosrati, 2018). Wæge og Nosrati mener at det ikke bør være noe mål å øke mengden samtaler i klasserommet, men å øke kvaliteten på samtalene som foregår. Dette kan være utfordrende for lærerne, og mange vil trenge å øve seg på dette. Kazemi og Hintz (2014) har utarbeidet fire prinsipper som skal være til hjelp for lærere som ønsker å utvikle ferdighetene sine i å styre en matematisk klassesamtale. For det første så må læreren ha et matematisk mål som da også vil styre hvordan samtalen ledes og hva læreren legger vekt på. For det andre må elevene vite hva som skal deles og hvordan det skal deles. Elevene må rett og slett øve seg på hvordan de deler ideer og forslag til løsninger i matematikken. For det tredje må læreren bruke strategier for å hjelpe elevene til å lære seg hvordan de kan følge med på hverandres ideer og matematikken som diskuteres. Det handler om å få med hele klassen i samtalen, i motsetning til den «tradisjonelle» matematikktimen det læreren vanligvis stiller spørsmål og enkeltelever svarer. Læreren må jobbe mot en dynamikk der hele klassen diskuterer sammen. Til slutt må læreren sørge for at elevene vet at alle elever må være med på å skape mening i matematikken, og at elevenes ideer er verdifulle. Spesielt er det viktig at læreren reagerer på en god måte når elevene gjøre feil og at det jobbes med å endre oppfatninger som at det å være god i matematikk er det samme som å være rask og å få riktig svar med en gang.

For å hjelpe lærerne i arbeidet med å styre en helklassesamtale i matematikk har Kazemi og Hintz utformet «samtaletrekk». Dette har de gjort etter en ide av Chapin, O'Connor og Anderson (2009). Samtaletrekkene er helt konkrete forslag til hvordan lærerne kan styre klasseromsamtalen. Både lærere og elever kan bruke oversikten til å få ideer til hvordan de kan delta i klassesamtalen. Jeg har oversatt oversikten til Kazemi og Hintz (tabell 6).

Samtaletrekket «gjenta» kan brukes dersom det er vanskelig å forstå noe en elev har sagt, læreren gjentar det eleven sa. «Repetere» er en utvidelse av det forrige samtaletrekket, her ber læreren en elev i klassen om å gjenta det en annen elev har sagt. Elevene får mer tid til å tenke over det som har blitt sagt og flere elever blir inkludert i samtalen. «Resonnere» går ut på at elevene må gjøre seg opp en mening om det en annen elev har sagt. «Tilføye» går ut på at læreren inviterer med de andre elevene i diskusjonene ved å spørre om de har noe å legge til det som allerede har blitt sagt. Samtaletrekket «vente» går rett og slett ut på at læreren er stille og lar elevene få god nok tid til å tenke seg om. Av erfaring kan dette være vanskelig for lærerne å få til. Etter at et spørsmål er stilt får ofte en elev raskt ordet, og flere elever har kanskje ikke fått tid til å tenke seg om eller rekke opp hånda. Læreren kan for eksempel venne seg til å telle til ti inni seg før hun gir ordet til en av elevene. De to siste samtaletrekkene har Kazemi og Hintz lagt til utgangspunktet fra Chapin mfl. «Snu og snakk» betyr at elevene får tid til å diskutere med læringspartneren sin eller den/de hun sitter ved siden av. Læreren kan gå rundt og lytte til samtalene og planlegge hvem hun vil gi ordet til når hele klassen skal snakke sammen. Alle elevene får mulighet til å dele ideene sine, og det kan være lettere å ta ordet i hele klassen etterpå. Ved å bruke samtaletrekket «endre» gir læreren elevene muligheten til å revurdere tenkningen sin etter å ha hørt innspill fra andre i klassen. Lærere som ønsker å bruke samtaletrekk i undervisningen sin kan legge til rette for at læreren selv og elevene får øve på de forskjellige samtaletrekkene. Etter hvert vil de kunne bli mer og mer automatisert og læreren kan legge fokus på forskjellige samtaletrekk ut i fra hva hun ønsker å oppnå med undervisningen.

Tabell 5: Oversikt over samtaletrekk

GJENTA **«Så du sier at….»**	• Repeter noe eller alt en elev har sagt, og spør eleven om du har oppfattet riktig • Brukes for å avklare eller fremheve en ide
REPETERE **«Kan du gjenta det hun sa med dine egne ord?»**	• Be en elev om å gjenta det en annen elev har sagt • Brukes for å omformulere elevers utsagn og sette fokus på interessante ideer
RESONNERE **«Er du enig eller ikke? Hvorfor?»** **«Hvorfor gir det mening?»**	• Etter at elevene har fått tid til å fordøye et utsagn bør de få mulighet til å sammenligne med sine egne ideer • Det er viktig at elevene får engasjere seg i hverandres ideer
TILFØYE **«Vil noen tilføye noe til dette?»**	• Utfordre elevene og inviter dem til å delta i samtalen • Elevene får muligheten til å avklare sin egen forståelse
VENTE **«Bruk den tiden du trenger til å tenke»**	• Gi elevene nok tid til å tenke • Bli enige om et tegn elevene viser når de er ferdige med å tenke
SNU OG SNAKK **«Snu deg og snakk med sidemannen»**	• Elevene snakker sammen om hvordan de forstår en problemstilling • Læreren kan sirkulere rundt og planlegge hvilke elever som skal spørres i plenum • Dette gjør at flere elever vil kunne bidra i klassesamtalen, og at alle får satt ord på tankene sine
ENDRE **«Har noen endret mening?»** **«Vil du ombestemme deg?»**	• Elevene må få mulighet til å revurdere og endre tenkingen sin etter å ha hørt andres innspill

2.2.10 Fem praksiser

Et hinder for lærere som ønsker å endre på undervisningsstilen sin og legge opp til mer undersøkende og elevaktiv undervisning er at de er usikre på om elevene vil lære det som står på planen, eller at lærerne er usikre på om de vil klare å forstå hva elevene tenker og klare å gi tilbakemeldinger (Smith & Stein, 2011). Smith og Stein har utviklet *Fem praksiser (eng: Five practices)* for å hjelpe lærerne slik at de kan være forberedt på ulike elevinnspill og dermed kan ha en viss kontroll over hva som vil skje i timene. De fem praksisene er nyttige for å kunne planlegge hvordan læreren kan legge opp klassesamtaler i matematikk.

Tabell 6: Fem praksiser

1.Forutse	Tenk på forhånd ut hvilke metoder elevene vil bruke for å løse oppgaven
2.Overblikk	Følg med på hvilke strategier elevene bruker når de jobber
3.Utvelging	Velg ut de elevsvarene du vil bruke i oppsummeringen
4.Rekkefølge	Planlegg i hvilken rekkefølge du vil vise frem elevenes løsninger
5. Sammenhenger	Fokuser på matematiske sammenhenger og knytt løsningene til de matematiske ideene du vil ha fokus på

Når læreren skal forutse forskjellige elevløsninger vil hun prøve å løse det matematiske problemet på så mange måter som mulig. Det er også nyttig å forutse hvilke feilsvar elevene kan komme med, og dermed være forberedt på hvordan det er lurt å respondere på disse. Mens elevene jobber med oppgaven de har fått går læreren rundt og overvåker hvordan de jobber for å få et overblikk over de forskjellige strategiene som brukes. Læreren stiller også spørsmål til elevene for å synliggjøre og avklare hvordan elevene tenker. Ut ifra hva som er det matematiske målet med timen velger læreren ut hvilke løsninger som skal presenteres for alle elevene. Læreren må også avgjøre i hvilke rekkefølge løsningene skal presenteres. Kanskje det kan være lurt å starte med den løsningen flest har brukt, eller å starte med et feilsvar slik at misoppfatninger kan bli oppklart først. Det kan også være en ide å starte med en veldig konkret løsning og så gå videre til mer abstrakte og sofistikerte løsningsmetoder mot slutten av gjennomgangen. Det er viktig at læreren stiller kritiske spørsmål underveis og ber elevene om å begrunne hvorfor løsningsmetoden til eleven fungerer, dette kan bidra til å belyse de matematiske ideene læreren vil ha fokus på. Læreren må også hjelpe elevene med å oppdage sammenhengene mellom de forskjellige løsningsmetodene og sammenhenger mellom løsningene elevene har brukt og matematikken de skal jobbe med.

2.3 Forskningsspørsmål

Ut i fra problemstillingen som er utgangspunkt for studien, *Hvordan håndterer lærere på barnetrinnet omleggingen til mer algebraisk tenkning i matematikkundervisningen,* har jeg formulert tre forskningsspørsmål. Jeg gjør dette for å avgrense problemstillingen og for å ha et fokus for hvordan innsamlet data skal analyseres.

1. Hvilket syn på matematikkundervisning har lærerne?
2. Hvilken forståelse har lærerne av tidlig algebra?
3. Hva er utfordringene til lærere som prøver å legge til rette for mer algebraisk tenkning i undervisningen?

3 Metode

3.1 Kvalitativ forskning

I kvalitativ forskning forholder man seg til ord i større grad enn til det som kan telles opp (Bryman, 2016). Bryman peker i tillegg til dette på tre kjennetegn for kvalitativ forskning. For det første er det et induktivt syn på forholdet mellom teori og undersøkelser, teorien utformes med utgangspunkt undersøkelsene. For det andre er det fokus på å forstå den sosiale verden gjennom hvordan deltakerne i verden tolker det som skjer. Og til sist så er det et konstruktivistisk syn på kunnskap, de sosiale konvensjonene er et resultat av samspillet mellom individer.

Selve forskningsprosessen består av seks faser (Bryman, 2016). Først formulerer forskeren forskningsspørsmål. Deretter velges aktuelle informanter, og data samles inn. Etter datainnsamlingen tolkes datamaterialet, og konsepter og teori utarbeides, til slutt formuleres funn og konklusjoner. Innimellom disse fasene er det naturlig at man må gå litt frem og tilbake, kanskje man under tolkningsarbeidet finner ut at det er behov for å samle inn mer data, og det vil ofte være behov for å omformulere forskningsspørsmålene underveis.

3.2 Grounded theory

Grounded theory (GT) er en mye brukt kvalitativ forskningsmetode der man lager teorier om fenomener i utdanning. I utdanningsforskning er det mange som er inspirert av GT, men ikke alle som selv mener at de har brukt GT følger metoden fullt og helt. Gjennom GT lager forskeren en teori som kan forklare det som foregår (Taber, 2009). Teorien formuleres på bakgrunn av funn forskeren gjør. Når jeg bruker begrepet *teori* så tenker jeg på det Bryman

(2016, s. 18) mener er den mest vanlige forståelsen for teori, en forklaring på observerte regelmessigheter.

Teoriene lages på grunnlag av data som forskeren samler inn. Men GT må være noe mer enn en metode som bunner i empirisk forskning fordi det i studier av utdanning alltid vil være funn som kommer fra innsamlet data. «The key point is that not just the findings, but also the concepts used in a GT, are said to derive from the analysis of the data, rather than being drawn from previous literature» (Taber, 2009, s. 141) Forskeren som bruker denne metoden starter derfor med datainnsamling, og så bestemmer funnene veien videre. Metoden har derfor ikke et ferdig design fordi avgjørelser må tas underveis i prosessen. Forskeren begynner å analysere så snart datainnsamlingen er i gang, og ut i fra disse analysene tar forskeren avgjørelser om videre datainnsamling. Dette kalles «theoretical sampling» fordi avgjørelser om datainnsamling tas på bakgrunn av teorien som er under utvikling (Taber, 2009). Analysen starter med åpen koding som bryter ned data til håndterbare deler. Ut i fra funnene i analysen formulerer forskeren koder. Dette kan for eksempel være at forskeren ut i fra informantenes svar definerer forskjellige kategorier svarene vil kunne høre inn under. Etter at kodene har blitt laget må innsamlet data studeres igjen for å undersøke om de nye kodene fungerer, eventuelt om de fungerer bedre enn tidligere koder som har vært testet ut. Deretter kan det komme en ny runder med ytterligere tilpasninger av kodene for å sikre at det er klart hvilke koder de innsamlede dataene hører inn under. Dette foregår helt til forskeren mener at nye datainnsamling vil kunne føre til flere endringer i kodene, dette kalles «theoretical saturation» (Bryman, 2016). Funnene som gjøres etter kodingen av data vil avgjøre hva forskeren bør gjøre videre. Forskeren vil gjerne lete etter noe som utmerker seg eller gjentar seg. Dette kan for eksempel være at det kan virke som lærerne i en studie tilfeldig velger ut hvilke elever som får komme frem og fortelle om hvordan de har løst en matteoppgave. På bakgrunn av dette kan forskeren planlegge et intervju av lærerne og formulere spørsmål som kan avklare hva som ligger bak valget av elever som plukkes ut. Forskeren har kanskje på bakgrunn av observasjon i klasserommet formulert koder for hvilke elever som velges ut, og etter intervjuet koder forskeren det nye datamaterialet med de samme kodene, og gjør endringer i kodene om det er behov. Dette gjør at det ikke er mulig å ha en klar plan før undersøkelsen starter, designet på datainnsamlingen vil utvikle seg etter hvert som forskeren gjør funn. Gangen fra åpne koder til en ferdig formulert teori blir kort fortalt som i figur 3.

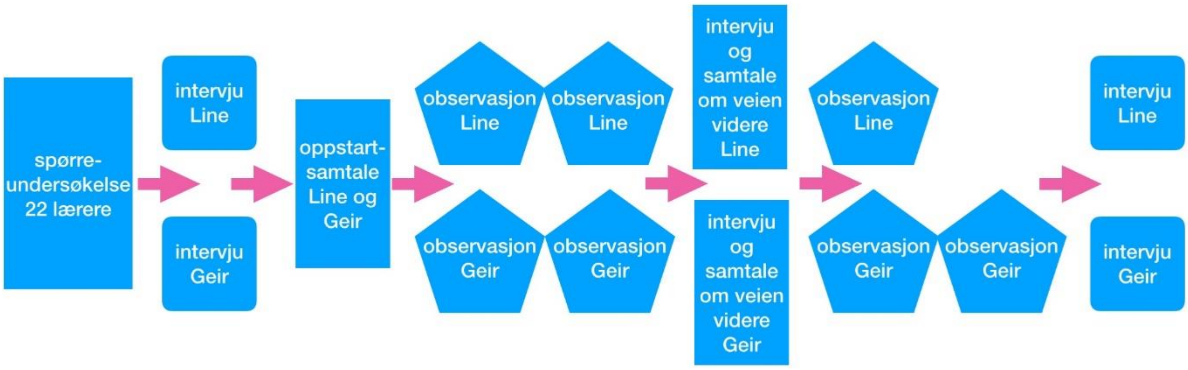
Åpne koder → kategorier → tema → teori

Figur 3: Grounded theory

GT er en omfattende forskningsmetode, og mange vil være inspirert av eller «låne» elementer fra metoden fremfor å bruke den fullt ut. Taber (2009) peker på to hovedutfordringer ved at studenter bruker denne metoden. For det første må man i et studie forholde seg til en ganske streng tidsfrist. Dette står i motsetning til GT som forutsetter at forskeren får så mye tid som nødvendig til å gjennomføre analysen ut i fra funn som gjøres underveis. Den andre utfordringen er at studenter ofte vil måtte sette seg inn i en del litteratur før selve datainnsamlingen starter. Dette kan medføre at studenten har med seg en førforståelse og forskjellige oppfatninger, og dette vil kunne påvirke datainnsamlingen slik at ikke all teori som konstrueres nødvendigvis bunner i innsamlet data. Dette kan for eksempel være at studenten har lest om anbefalinger for hvordan man kan hjelpe lærere med å utvikle kompetanse i å undervise i tidlig algebra, som for eksempel at det er viktig å jobbe med den matematiske klassesamtalen. Studenten vil da kanskje være ekstra oppmerksom på klassesamtalen ved observasjon av undervisning. Jeg vil påstå at min studie er inspirert av GT fordi jeg ut i fra datainnsamlingen undersøker hva utfordringene til lærerne er.

3.3 Forskningsdesign/plan for prosjektet

Jeg startet med en spørreundersøkelse blant flere lærere som underviser i matematikk. Ut ifra funnene i spørreundersøkelsen valgte jeg ut to lærere som ble spurt om å være med videre i undersøkelsen. Overordnet metode har vært aksjonsforskning, og jeg har intervjuet lærerne og observert undervisning i klasserommene. Jeg valgte å starte med en spørreundersøkelse fordi jeg da kunne få med flere lærere i undersøkelsen min, og ha større grunnlag til å kunne komme med forslag til hvordan lærerne kan få hjelp til å implementere den nye læreplanen når det gjelder algebra. Spørreundersøkelsen ble også brukt for å rekruttere lærere som kunne være interessert i å være med videre i undersøkelsen. Jeg opplevde tidlig i prosessen at de to lærerne som jeg fulgte opp videre hadde lite erfaring med undervisning i tidlig algebra, og de hadde ikke begynt å sette seg inn i den nye læreplanen i matematikk. Men de var veldig åpne for å få hjelp på veien og ideer til hvordan de kunne undervise. Dette gjorde at jeg endte opp med å teste ut aksjonsforskning med disse to lærerne, da kunne jeg veilede og støtte dem underveis. I figur 4 har jeg laget en oversikt som viser rekkefølgen på datainnsamlingen i studien.



Figur 4: Oversikt over datainnsamlingen i min studie

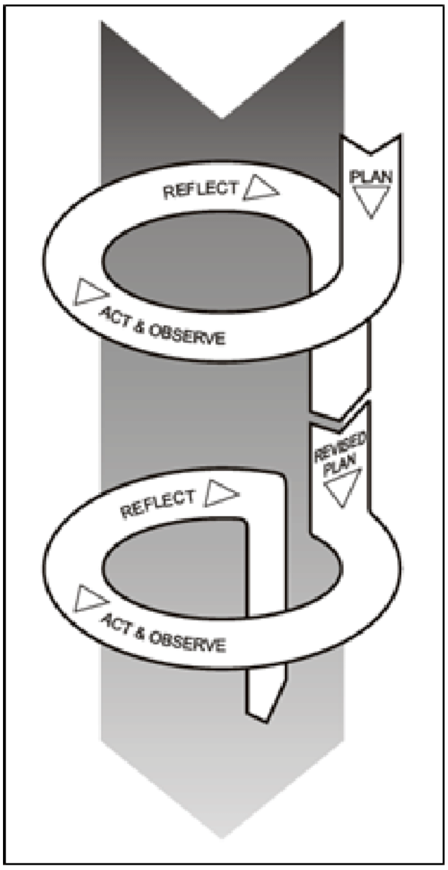
Der jeg har satt inn piler har jeg foretatt noen første analyser. Jeg har også gjort en fullstendig analyse til slutt.

3.4 Aksjonsforskning

«'School-based educational action research' is the process whereby practitioners deliberate on and respond to school-based problems.» (Wilson, 2017, s. 99) Wilson beskriver aksjonsforskning som en metode som er «for» utdanning, i motsetning til forskningsmetoder som handler om utdanning. Lærerne skal være reflektert over og engasjert i prosessen, og være med på å utvikle egen praksis. Det kan handle om å endre fagplaner, endre undervisningspraksis eller å få til sosiale endringer. I min studie så vil jeg undersøke i hvilken grad vi får til å starte et endringsarbeid slik at lærerne blir vant til å integrere algebraisk tenkning i klasserommet, jeg har derfor fokus på å endre undervisningspraksis.

Det er ulike meninger om hvorvidt aksjonsforskning kan kalles forskning (Wilson, 2017). «Educational research in the form of action research can improve the common-sense conceptualization of practice, and help practitioners to formulate a theory of classroom action to improve their own situation; whereas research on education conceptualizes classrooms from a 'scientific' research perspective» (2017, s. 102) Wilson mener at aksjonsforskning derfor vil fremstå som mer relevant for en praktiserende lærer, i tillegg vil denne typen forskning kunne ha større påvirkning på det som foregår i klasserommet enn mer teoretisk forskning. Aksjonsforskning er en kontinuerlig lærings- og refleksjonsprosess der man ønsker å få til en endring (Tiller, 2006). Lærere kan drive aksjonsforskning på egen hånd, men forskningen foregår gjerne i et samarbeid mellom lærere og forskere. Av forskeren kreves det at hun klarer å gå inn i en dialog med lærerne og bruke tid på å oppnå en relasjon med dem. Forskeren må også takle å være tett oppå de hun samarbeider med. I tillegg kreves det kunnskap om skolen, og forskeren må ha et blikk for både det lærerne forstår og det de ikke forstår. Man må ha et overblikk over hele situasjonen (2006). Tiller mener at lærerne ofte vil kunne ha en vente-og-se-holdning i starten og kanskje være litt skeptiske overfor forskeren. Derfor er det viktig at forskeren klarer å legge frem nytten av arbeidet som skal gjøres og at lærerne får god nok tid til å prøve ut selv.

3.4.1 Fasene i aksjonsforskning



Figur 5: Fasene i aksjonsforskning

Aller først må deltakerne identifisere et problem og formulere et forskningsspørsmål som de ønsker å undersøke. Deretter må det legges en plan. Ut i fra planen settes undervisningen i gang og de som er med i prosjektet må observere hvordan det går og samle inn data. Deretter kommer refleksjonsfasen der innsamlet data analyseres. Dersom problemet ikke er løst lages en ny plan for arbeidet videre. Gjennom prosessen så langt har man kanskje også oppdaget mer som det må jobbes med og man ønsker kanskje å endre forskningsspørsmålet sitt. Ut i fra dette lages en ny plan, og prosessen fortsetter så lenge man føler at det er behov for det. Det er denne stadige omformuleringen av problemet og planene som testes ut som karakteriserer aksjonsforskningen (Se figur 5. Man jobber seg videre gjennom fasene (eller nedover i spiralen i figuren) så lenge man opplever at det er behov for å revidere planene og teste på nytt (Wilson, 2017).

Tabell 7: Oversikt over fasene i aksjonsforskningen i min studie

Fase i aksjonsforskningen	**Beskrivelse av fasene**	**Hva jeg gjorde**
(Forarbeid)	Innhenting av informasjon, formulering av forskningsspørsmål	Gjennomførte spørreundersøkelse, Oppstarts-intervju med lærerne hver for seg Oppstartsmøte med begge lærerne
Legge en plan	Planlegge hva lærerne vil jobbe med	Første analyse av spørreundersøkelsen og oppstarts-intervjuene

		Ga lærerne litt teoribakgrunn og ideer til hva de kunne jobbe med
Gjennomføre planen (undervisning) og observasjon	Første runde med undervisning, hver lærer gjennomførte to undervisningstimer	Klasseroms-observasjon
Refleksjon	Refleksjon sammen med lærerne	Transkriberte og gikk gjennom notater fra observasjonene Intervju med lærerne hver for seg
Revidert plan	Planlegge neste runde med undervisning	Lagde oversikt over utfordringene lærerne har støtt på og knyttet disse til forslag for hvordan lærerne kan ta tak i utfordringene
Gjennomføring av revidert plan	Andre runde med undervisning, den ene læreren gjennomførte en time, den andre læreren gjennomførte to timer	Klasseroms-observasjon
Refleksjon	Intervju med lærerne	Transkriberte og gikk gjennom notater fra observasjonene Intervju med hver lærer hver for seg
Revidert plan	Hva vil lærerne jobbe med videre Hva slags hjelp trenger lærerne videre	Ut i fra timene jeg observerte, de siste intervjuene og innspill fra lærerne sammenfatter jeg forslag til videre utviklingsarbeid

3.5 Min bakgrunn og rolle

Jeg er selv lærer og har en god del erfaring med å kurse og veilede lærere og kollegaer. Mitt største interesseområde er algebraundervisning med de yngste elevene. Det ble naturlig at jeg i tillegg til å innta en forskerrolle også veiledet de to lærerne som var med i hele studien. De ga uttrykk for at de trengte hjelp og at de ønsket å bruke muligheten når jeg var hos dem til å få hjelp. Dette så jeg som et godt utgangspunkt for aksjonsforskning. Lærerne fikk en del materiell av meg som ville kunne tilsvare lærerveiledninger, og de fikk mulighet til å ta kontakt med meg dersom de trengte hjelpe med planleggingen.

3.6 Utvalg

Jeg har benyttet meg av et «bekvemmelighetsutvalg», dette betyr at jeg er innenfor det som kalles «ikke-sannsynlighetsutvalg». «Convenience samples are based on whoever just happens to be available at a particular moment or accidentally walking by […]» (Nardi, 2018, s. 126) Jeg forsøkte først å sende ut invitasjon til et stort antall skoler i en kommune, men jeg fikk veldig få svar. Jeg ble derfor nødt til å bruke kontaktene mine for å få med flere lærere i undersøkelsen. Funnene mine kan derfor ikke generaliseres, men jeg kan si noe om de lærerne som har vært med i undersøkelsen. Til sammen 22 lærere fra fire forskjellige barneskoler deltok i spørreundersøkelsen. Jeg spurte to lærere som jobbet på samme trinn på samme skole og de kunne tenke seg å bli med videre i studien. De to lærerne, Geir og Line, ga uttrykk for at de hadde lite erfaring med å undervise de yngste elevene i algebra, og at de ville være med i undersøkelsen fordi de ønsket å gjøre en endring på undervisningen slik at de ville klare å integrere algebraisk tenkning. Jeg syntes det var interessant at de to lærerne hadde veldig ulik bakgrunn. Den ene læreren er veldig fersk som lærer og hadde ingen formell utdanning i matematikk etter videregående skole, mens den andre læreren har flere års erfaring og godt med vekttall i matematikk og matematikkdidaktikk.

3.7 Datainnsamling

Datamaterialet ble hentet inn gjennom en spørreundersøkelse, en rekke intervjuer og en rekke klasseroms-observasjoner. Jeg går nærmere inn på hver av disse datainnsamlingsmetodene og hvilke forskningsspørsmål de er knyttet opp imot i tabell 9 nedenfor.

Tabell 8: Oversikt over datainnsamling og forskningsspørsmål

Spørreundersøkelse	2.Hvilken forståelse har lærerne av algebraisk tenkning?
Intervju 0 (oppstarts-intervju)	1.Hvilket syn på matematikkundervisning har lærerne? 2.Hvilken forståelse har lærerne av algebraisk tenkning?
Observasjon 1 og 2 + intervju 1	3.Hva er utfordringene til lærere som prøver å legge til rette for mer algebraisk tenkning i undervisningen?
Observasjon 3 og 4 + intervju 2	3.Hva er utfordringene til lærere som prøver å legge til rette for mer algebraisk tenkning i undervisningen?

3.7.1 Spørreundersøkelse

Jeg valgte å starte med en spørreundersøkelse som kunne si meg noe om hvilken forståelse lærerne på barnetrinnet har av algebra. Dette var en del av datainnsamlingen som skulle hjelpe meg med å få svar på forskningsspørsmål 2 (hvilken forståelse lærerne har av algebra). Jeg gjennomførte undersøkelsen på papir fordi lærerne også skulle skissere undervisningsopplegg, og det kan være vanskelig å få til i en digital undersøkelse. Lærerne kan for eksempel ha behov for å tegne. Jeg risikerte heller ikke at informasjon kunne komme på avveie på

Internett. I tillegg så jeg for meg, spesielt etter at jeg gjennomførte en pilotundersøkelse, at det lett kan ende med at lærerne velger å ikke svare på undersøkelsen fordi de oppfatter emnet algebra som vanskelig, eller fordi de synes det er vanskelig å svare på spørreundersøkelsen. Dette er hovedårsaken til at jeg valgte å være til stede da lærerne fylte ut undersøkelsen. Flere trengte også noen motiverende ord, og noen trengte å få oppklart noen av spørsmålene. Jeg var også opptatt av at lærerne skulle fylle ut spørreundersøkelsen i den rekkefølgen den var satt opp slik at matrisespørsmålet som kom til slutt ikke skulle kunne påvirke hvordan de svarte på de åpne spørsmålene. I tillegg var det nyttig for meg å være til stede for å få kontakt med lærere som kunne som være interessert i å være med videre.

Til slutt i undersøkelsen hadde jeg et matrisespørsmål, dette er en type spørsmål der flere utsagn samles og informantene krysser av for i hvor stor grad utsagnene passer for dem. For å prøve å unngå at lærerne gjetter på matrisespørsmålet i undersøkelsen passet jeg på at det ikke var et «midt-alternativ», i min undersøkelse ble det mest naturlig å ha fire svaralternativer. I tillegg er det viktig at det er mulig å krysse av på «vet ikke», dette også for å prøve å unngå at lærerne gjetter. Jeg satt også av plass til å komme med utfyllende kommentarer dersom noen ønsket det.

Spørreundersøkelsen har mange «åpne» spørsmål. Bryman har sett på fordeler og ulemper med åpne spørsmål (Bryman, 2016). Jeg har sammenfattet de jeg opplever som mest aktuelle for min studie her. Det er en fordel at informantene kan svare med egne ord og ikke må forholde seg til gitte kategorier. I tillegg så kan det dukke opp svaralternativer som forskeren ikke har tenkt på. Jeg valgte å ha flere åpne spørsmål fordi jeg i størst mulig grad ville unngå at svaralternativene skulle påvirke lærerne. Jeg var interessert i hva lærerne umiddelbart tenkte på når de skulle beskrive algebra-undervisning. Jeg ønsket også å unngå gjetting i størst mulig grad. Ulemper med åpne spørsmål er at det tar lang tid for forskeren å registrere svarene. Det må også legges et arbeid i å lage koder for de forskjellige svarene som dukker opp. Det krever også mer mentalt av informantene å svare på åpne spørsmål og det vil kunne ta lengre tid å svare.

Spørsmålene utformet jeg med utgangspunkt i forskningsspørsmålene og hva en spørreundersøkelse egner seg til å finne ut av. En spørreundersøkelse vil ikke kunne si meg noe om hva som faktisk skjer i klasserommet, men jeg kan få vite noe om hva lærerne tenker og hva de oppgir at de gjør. Jeg har med et åpent spørsmål der jeg ber lærerne om å komme med ideer til oppgaver som kan egne seg i algebraundervisning på barnetrinnet. Så kommer det nye åpne spørsmål der lærerne skal skrive sin oppfatning av de forskjellige begrepene som brukes i beskrivelsen av algebra som fagområde slik det er beskrevet i kjerneelementene i matematikk. Fordi jeg har en mistanke om at lærere ofte jobber med algebra uten å være klar over det har jeg en side med matrisespørsmål med korte beskrivelser av aktiviteter som kan være algebraiske. Her skulle lærerne krysse av hvor ofte eller om de aldri bruker denne typen aktiviteter. Lærerne får også til slutt mulighet til å komme med innspill om hva slags hjelp de kan tenke seg for å øke sin kompetanse på algebraundervisning. Hele spørreundersøkelsen er vedlagt (vedlegg 3)

Som en del av piloteringen svarte jeg selv på spørreskjemaet jeg hadde utarbeidet. Dette gjorde jeg for å sjekke tidsbruk og gjøre små endringer som hvor mye plass som var satt av til å skrive. Deretter fikk jeg komme til en gruppe lærere som tok videreutdanning. Jeg delte ut spørreskjemaet og en side med informasjon (vedlegg 2). Jeg var spesielt interessert i hvor lang tid de brukte, om de forstod hva jeg spurte om, og om det føltes overkommelig å svare på spørreskjemaet. Det var ikke mange som leverte inn spørreskjemaet. Jeg fikk inn noen utfylte eksemplarer, og noen tilbakemeldinger fra noen av de som ikke rakk å svare. Etter den siste runden med pilotering endret jeg på noen formuleringer og alternativer og jeg tok bort noen åpne spørsmål.

3.7.2 Observasjon

Jeg har observert flere undervisningstimer i klassene til lærerne som er med i studien. Observasjonene analyserer jeg for å finne svar på forskningsspørsmål 3 (hva som er utfordringen til lærerne). Data ble samlet inn ved at lærerne hadde en liten lydopptaker festet på seg. Jeg ønsket å ha lydopptakeren på læreren fordi jeg hovedsakelig skulle observere læreren. I tillegg gjorde jeg noen notater av det som ikke ville komme med på lydopptakeren, dette kunne være handlinger læreren gjorde eller utsagn fra elever som snakket lavt. Jeg tok også bilder av tavlen og av elevarbeider. Bildene nummererte jeg etter hvert i notatene mine slik at jeg ville kunne klare å koble de til de riktige situasjonene. Jeg observerte to undervisningstimer i hver klasse etter at vi hadde hatt de første oppstartsamtalene. Etter at vi hadde hatt en ny runde med samtaler rundt muligheter og utfordringer og jeg hadde oppsummert arbeidet med noen utfordringer som lærerne skulle jobbe ut ifra hadde jeg en ny runde der jeg observerte en time i den ene klassen og to timer i den andre klassen. Jeg valgte å være en delvis deltakende observatør. Dette er den vanligste forskerrollen i feltarbeid, forskeren deltar i den sosiale sammenhengen men ikke i de aktivitetene som informantene bedriver (Fangen, 2010). I utgangspunktet ville jeg ikke påvirke undervisningen til læreren mens jeg var der, samtidig ville det vært unaturlig om jeg ikke hadde snakket med noen av elevene underveis. Overfor elevene ble jeg presentert som en som forsket på matematikkundervisning. Jeg gjorde småting som å hjelpe elever med å finne bøker i skuffen. Jeg spurte elevene før jeg tok bilde av arbeidene deres, og jeg svarte på spørsmål de stilte meg. Noen få ganger stilte jeg spørsmål til elevene for å oppklare ting jeg lurte på, for eksempel hvis jeg ikke klarte å tolke det de hadde skrevet. Det kan for noen barn bli en litt usikker situasjon når det kommer en fremmed person inn, så jeg følte det som mest naturlig å være en de kunne snakke med, samtidig som jeg var opptatt av at det var læreren som skulle ha undervisningen. Jeg lot det derfor være opp til elevene om de ville ta kontakt med meg. Jeg tok feltnotater først og fremst for å fange opp hvordan lærerne legger til rette for generalisering, men også for å fange opp andre momenter jeg tolket som kritiske for tilretteleggingen for algebraisk tenkning og som kan bidra til å gi svar på forskningsspørsmål 3 (hva er utfordringene til lærerne).

3.7.3 Intervju

Jeg har valgt å bruke semistrukturerte intervjuer med utgangspunkt i en intervjuguide med kategorier og underspørsmål (vedlegg 4). I oppstarts-intervjuet søkte jeg å finne svar på forskningsspørsmål 1 (hvilket syn på matematikkundervisning har lærerne). Det var også et mål for meg å oppnå en relasjon med lærerne og, sammen med funn fra spørreundersøkelsen, få et inntrykk av lærernes forhold til algebra og hva lærerne kunne ha behov for å jobbe med videre. I tillegg ville jeg undersøke om de hadde noen oppfatninger om den nye læreplanen i matematikk. Noen eksempler på spørsmål lærerne fikk var: «Hvordan vil du beskrive deg som matematikklærer?» «Hva tenker du når du hører ordet algebra?» «Hvorfor valgte dere disse oppgavene?» Et semistrukturert intervju er en planlagt men fleksibel samtale der målet er å samle beskrivelser av informantens verden (Kvale, Brinkmann, Anderssen & Rygge, 2015).

Etter observasjonene brukte jeg intervju 1 og 2 for å oppklare hendelser som skjedde i undervisningen og etterspørre lærernes refleksjoner på noen av valgene de gjorde underveis i undervisningen. Jeg var også interessert i hvorfor lærerne valgte ut oppgavene de brukte, hvilket potensiale de så i oppgavene. I tillegg ville jeg prøve å finne ut noe om hvorfor de veiledet elevene som de gjorde, og hva som var lærernes begrunnelser bak hvordan de la opp oppsummeringssamtalene. Jeg ville også undersøke hvordan lærerne så for seg at veien videre ville gå, og om de hadde ønsker og forslag til hva de trengte hjelp med videre.

3.7.4 Datareduksjon

Når det gjelder observasjonene har jeg valgt å se spesielt på hvordan lærerne legger til rette for algebraisk tenkning i klassesamtalene. Jeg har observert til sammen syv undervisningstimer, og alle timene har blitt transkribert. Siden jeg har hatt fokus på lærerne har jeg gått i dybden på hvordan de har veiledet elevene og hvordan de har lagt opp klassesamtalene. Jeg har derfor ikke analysert forskjellig metoder og strategier elevene har brukt i nærmere. Jeg har valgt ut episoder fra undervisningen som handler om generalisering og som igjen kan si meg noe om hvilke utfordringer lærerne har når de prøver å legge til rette for generalisering og dermed også algebraisk tenkning. I tillegg har jeg vært på utkikk etter andre momenter som jeg opplevde var relevante for forskningsspørsmål 3 (hvilke utfordringer lærerne har).

Jeg har plukket ut sekvenser og utsagn fra intervjuene som kan være med på å belyse hvilken oppfatning lærerne har av algebraisk tenkning og av matematikk. Jeg har også brukt intervjuene for å belyse valg lærerne har tatt underveis i undervisningen.

I spørreundersøkelsen har jeg i liten grad tatt hensyn til hvilken bakgrunn lærerne har fordi jeg har for lite utvalg til å kunne si noe om det er noen generelle tendenser ut i fra utdanningsbakgrunn og erfaring. Jeg har valgt ut noen av spørsmålene fra spørreundersøkelsen som jeg går igjennom i analysen. Jeg omtaler ikke alle spørsmålene i spørreundersøkelsen, årsaken til det er at beskrivelsen av algebra i læreplanen endret seg mens jeg gjennomførte spørreundersøkelsen og at jeg i noen grad har endret fokus i undersøkelsen min underveis. Jeg har analysert hvilke forslag lærerne skisserer når det gjelder algebraundervisning og hvordan lærerne tolker begrepene strukturer, mønster og relasjoner. I tillegg har sett nærmere på hvilke ønsker lærerne har for å få hjelp til å utvikle kompetansen sin på algebraundervisning.

3.8 Analyse av data

3.8.1 Analyse av spørreundersøkelsen

Jeg har analysert forslagene lærerne har kommet med opp imot innholds-perspektivet til tidlig algebra (likeverdighet/uttrykk/likninger/ulikheter, generalisert aritmetikk, funksjonstenkning, variabelbegrepet, proporsjonalitet) (M. L. Blanton, Stephens, et al., 2015) som er beskrevet i tabell 1 i kapittel 2.1.1.1. Hvordan lærerne har tolket begrepene strukturer, mønster og relasjoner, som er tatt fra læreplanen, har jeg analysert opp imot hvordan faglitteraturen beskriver disse begrepene. Gjennomgang av disse begrepene er i kapittel 2.1.3.1.

3.8.2 Analyse av observasjonene

Analysen av observasjonene ble gjort i to faser. Fordi generalisering anses som kjernen i algebraisk tenkning har jeg valgt å ha hovedfokus på i hvilken grad lærerne har lagt til rette for generalisering i klasserommet, og har da tatt utgangspunkt i Ellis (2011) sitt rammeverk med syv kategorier for hvordan læreren (og elevene) kan handle for å legge til rette for generalisering. De syv kategoriene er å delta i generalisering, å oppmuntre andre til å generalisere, å oppmuntre til deling av en generalisering, å dele en elev sin generalisering, å oppmuntre til begrunnelser eller forklaringer, å bygge videre på en generalisering og å fokusere på matematiske sammenhenger. Rammeverket er presentert i tabell 3 i kapittel 2.1.2. Jeg har sett gjennom innsamlet data for å se etter sekvenser der læreren og elevene var engasjert i generalisering. I tillegg har jeg brukt åpen koding for å analysere situasjoner der lærerne trenger hjelp slik som jeg har beskrevet gangen i utvikling av koder i kapittelet om Grounded theory.

3.8.3 Analyse av intervjuene

Jeg har analysert oppstarts-intervjuene for å finne ut av hva slags oppfatning (eng: beliefs) lærerne har om matematikkundervisning og om hva algebra er. Jeg har tatt utgangspunkt i synene som er beskrevet i kapittel 2.2.6, instrumentalistisk syn, platonsk syn og problemløsnings-syn. Jeg har tatt utgangspunkt i hva lærerne selv sier om sitt syn på matematikkundervisning. Jeg har også brukt intervjuene som jeg gjennomførte etter undervisningen (sammen med funn i observasjonene) for å avdekke hvilke utfordringer lærerne har når de legger til rette for algebraisk tenkning i klasserommet.

3.9 Validitet og reliabilitet

Validitet handler om hvor godt man klarer å måle det man undersøker, om instrumentene man bruker er egnet til det vi ønsker å måle (Nardi, 2018). Jeg kan bare si noe om lærerne som er med i studien. Jeg har ikke nok svar i spørreundersøkelsen til å kunne generalisere funnene mine, i tillegg så har ikke skolene som var med i undersøkelsen blitt tilfeldig utvalgt. Selv om det bare er to lærere som er med i hoveddelen av studien min, og jeg dermed ikke kan påstå at jeg har funnet ut noe om hvordan matematikklærere i Norge generelt vil kunne møte utfordringen med å integrere mer algebra i matematikkundervisningen, så kan studien min være nyttig som et utgangspunkt for de som skal veilede lærere som skal implementere den nye læreplanen og hjelpe lærere med å integrere algebraisk tenkning i undervisningen.

For å øke validiteten så valgte jeg å være til stede da lærerne fylte ut spørreskjemaet og dermed kunne oppklare misforståelser og svare på spørsmål for alle lærerne. Dersom jeg bare hadde delt ut spørreskjemaet og latt lærerne fylle ut på egenhånd så ville jeg ikke kunne vite om de hadde fått hjelp av noen, diskutert med noen eller søkt seg opp på nettet. Jeg valgte også, på det første intervjuet, å ta opp noen elementer fra spørreskjemaet til de to lærerne jeg fulgte opp videre, dette også for å styrke validiteten.

Reliabilitet beskriver nøyaktigheten og stabiliteten i innsamlet data (Befring, 2015). Upresise og lite objektive datainnsamlingsmetoder kan svekke reliabiliteten. Jeg brukte lydopptak da jeg observerte undervisningen for å styrke reliabiliteten, ideelt skulle det ha vært filmet for å prøve å unngå tolkninger. Det er veldig vanskelig å få med seg alt som skjer i klasserommet, jeg må notere hva elevene sier i tilfelle lydopptaket ikke er godt nok (mange elever snakker veldig lavt), og prøve å få med mest mulig av bevegelser som peking og blikk. Jeg tok bilder av tavlen som lærer skrev på og av elevarbeidene til elevene som ble veiledet av læreren. Jeg lagde meg et system med nummerering av bilder slik at jeg kunne ta notater og henvise til bildene.

3.10 Etiske betraktninger

De to lærerne som jeg har fulgt opp tett i studien har fått godt med informasjon, både muntlig, på epost og skriftlig. De har hele tiden hatt mulighet til å trekke seg når som helst i studien. I tillegg var det flere lærere som deltok ved å fylle ut spørreskjemaet. Disse lærerne fikk ikke selv velge om de skulle være til stede da jeg tok kontakt med ledelsen ved skolen og fikk lov til å komme da lærerne hadde fellestid. Jeg foreslo på forhånd at dersom det var noen lærere som var til stede i fellestiden og som ikke ønsket å være med i studien så kunne de fylle ut spørreskjemaet, men la vær å levere til meg. På denne måten ville de få mulighet til å være med på å starte å reflektere over algebra og ny læreplan i matematikk, men selv velge om de ville være med i studien. Jeg informerte også om dette da jeg kom på skolene, og sa at jeg ikke forventet at alle leverte inn spørreskjemaet til meg. Lærerne fikk også velge om de ville være anonyme eller om de ville skrive navnet sitt til slutt i skjemaet. Jeg hadde med muligheten for å delta med navn fordi jeg ønsket å følge opp noen av disse lærerne videre. Lærerne som skrev navn på spørreskjemaet fylte også ut samtykkeerklæring. Selv om jeg primært skulle ha fokus på lærerne i observasjonene ville også elevenes stemme bli tatt opp med lydopptakeren. Jeg sendte derfor ut samtykkeerklæring til foresatte slik at de kunne reservere seg. Dersom det var elever til stede der foresatte ikke hadde samtykket, så hadde jeg planlagt at lydopptakeren skulle skrus av dersom de tok ordet i timen. Dette trengte jeg ikke å ta hensyn til da alle foresatte samtykket. Jeg ønsket ikke at elevene skulle tas ut av timen, dette for å unngå at de skulle gå glipp av den undervisningen som var planlagt. På samtykkeerklæringen til foresatte så valgte jeg også å be om samtykke til å ta bilde av elevenes skriftlige arbeider. Fordi jeg ville ha mulighet til å bruke disse bildene videre syntes jeg det var mest fornuftig å spørre foresatte om dette. Jeg spurte også elevene før jeg tok bilde av arbeidene deres, for å vise at jeg satt pris på det de hadde gjort. Mange ga uttrykk for at de likte å bli sett og flere kom for å spørre om jeg kunne ta bilde av det de hadde gjort.

I spørreundersøkelsen var det frivillig for lærerne å skrive navnet sitt, og de som skrev på navn gjorde dette på siste side i spørreundersøkelsen. Jeg kunne dermed fjerne dette arket fra selve spørreundersøkelsen og lagde en kode til hver lærer. Oversikten over hvilke koder som hørte til hvilke lærere oppbevarte jeg innelåst og atskilt fra resten av materialet. Jeg har brukt pseudonymer på både lærere og elever. I tillegg velger jeg å ikke beskrive lærernes utdanningsbakgrunn detaljert da jeg ser for meg at det da vil kunne være mulig å finne ut av hvilke lærere dette er. Noen elever skrev navn på arkene de skrev på, jeg passet da på å ikke få med navnene da jeg tok bildene. På noen få bilder var dette ikke mulig å få til, da tok jeg bort navnet i etterkant.

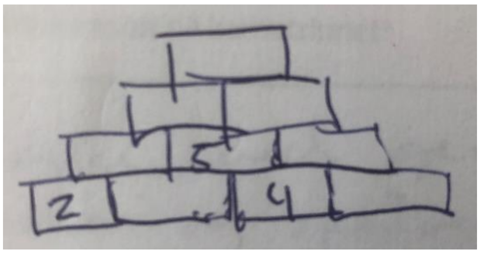
Det ble en lang prosess å få godkjenning av NSD. Opprinnelig ønsket jeg meg å filme i klasserommene. For en uerfaren forsker er det ikke lett å få med alle detaljer som skjer i klasserommet, i tillegg så kan det være små detaljer som avgjør om det foregår algebraisk tenkning eller ikke. Den samme oppgaven kan ende opp med algebraisk tenkning eller ikke avhengig av hva læreren legger vekt på, legger merke til og hvordan elevenes innspill følges opp. I tillegg så ønsket jeg å intervjue lærere i grupper og da så jeg for meg at det ville kunne være vanskelig å skille de forskjellige lærerne fra hverandre dersom jeg bare brukte lydopptak. Etter noen runder med NSD der jeg prøvde å forklare dette valgte jeg selv å gjøre endringer i studien min og starte med en skriftlig spørreundersøkelse der jeg ikke ville være avhengig av å filme for å sikre reliabiliteten. Jeg ville også minimere risikoen for at noe kom på avveie siden lærerne skrev på ark og ikke leverte på nett. Da jeg søkte til NSD var det fortsatt litt usikkert hvor studien min ville ende fordi jeg ønsket å se hva jeg fikk ut av spørreundersøkelsen først, men jeg så for meg at det både ville kunne være aktuelt med intervju av lærere og observasjon i klasserom. Som et minimum for å sikre reliabiliteten ønsket jeg å mulighet til å ta lydopptak i klasserommet og av intervjuene, og dette fikk jeg godkjent.

4 Analyse og funn

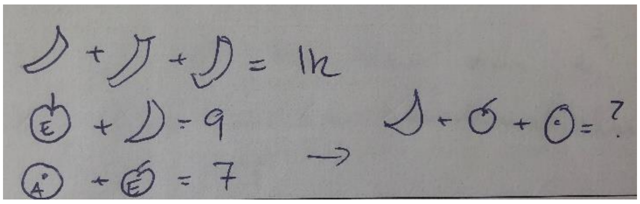
4.1 Funn fra spørreundersøkelsen

Jeg analyserer svarene på tre av spørsmålene i spørreundersøkelsen, lærernes ideer til undervisningsopplegg, hvordan de tolker begrepene som brukes om algebra i læreplanen og hvilke innspill de har til hvordan de kan få hjelp med utvikle kompetanse i algebraundervisning.

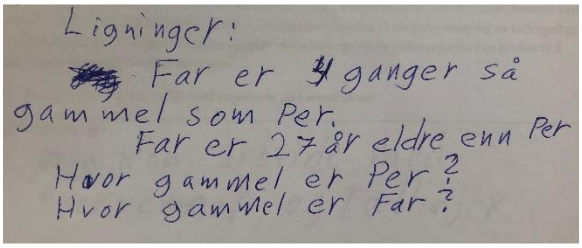
4.1.1 Lærernes ideer til algebraundervisning – funn fra undersøkelsen



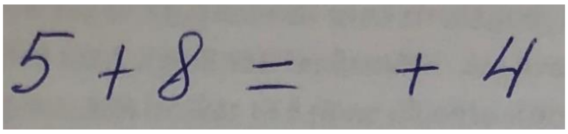
Figur 8: Tallpyramide



Figur 9: "Likning" med figurer

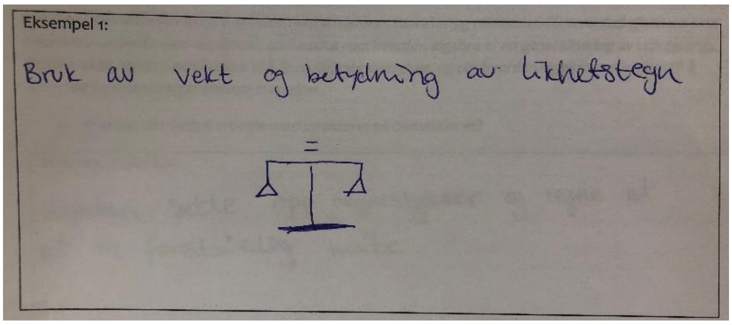


Figur 7: eksempel på tekstoppgave



Figur 6: Eksempel på "åpen tallsetning"

De 22 lærerne som svarte på undersøkelsen ble bedt om å skissere tre forskjellige oppgaver de kunne tenke seg å bruke når de underviser i algebra på barnetrinnet. 20 av lærerne har svart på dette spørsmålet. Selv om de fleste svarer så er det flere som ikke klarer å komme med tre forslag, og noen av lærerne har forskjellige varianter av samme oppgave i alle forslagene sine. Den mest fremtredende tendensen i forslagene til lærerne var at de oppga eksempler som handlet om å løse likninger. 17 av 22 lærere oppga forskjellige typer likninger. Noen la de frem som tekstoppgaver (for eksempel, se figur 7) og noen formulerte de som åpne tallsetninger (for eksempel, se figur 6), men også likninger av typen x+5=7. Geir har foreslått å jobbe med tallpyramider (figur 8) og en type likninger som gjerne sirkulerer i sosiale medier, der de ukjente størrelsene som elevene skal regne seg frem til er representert med figurer (figur 9). Mange av lærerne hadde likninger eller åpne tallsetninger i alle sine tre forslag. Dette funnet om likningenes fremtredende plass i lærernes eksempler stemmer overens med det tradisjonelle synet på algebra, at algebra handler om å løse likninger og finne en ukjent størrelse (Kieran, 2004). I likninger står «den ukjente» for en ukjent størrelse som man kan regne seg frem til, mens vi i tidlig algebra stort sett jobber med variabelbegrepet der den ukjente (x) står for en størrelse som kan ha forskjellige verdier. Ut i fra Blanton et al (2015) sin oversikt over områder i tidlig algebra så plasserer jeg lærernes forslag som går på forskjellige varianter av likninger i den første kategorien (likeverdighet, uttrykk, likninger, ulikheter). Til denne kategorien tilhører også relasjonell forståelse for likhetstegnet, og det ble nevnt av kun en lærer. Hun ville jobbe med å knytte likhetstegnet til bruk av skålvekt (se figur 10).



Figur 10: Likhetstegnet og balansevekt

Fem lærere hadde ideer som kan plasseres i kategorien funksjonstenkning. Det var to lærere som foreslo å jobbe med tallrekker og to lærere som foreslo å jobbe med figurtall. De fleste lærerne beskrev ikke nærmere hvordan de ville jobbe med tallrekker eller figurtall, men jeg vil legge til at det er en forutsetning at elevene får jobbe med å lete etter mønstre som kan beskrive hvordan tallene i tallrekkene eller figurtallene endrer seg for at vi kan kalle dette funksjonstenkning. Geir skriver at han på de siste trinnene på barnetrinnet lar elevene prøve å lage formler for hvordan figurtall utvikler seg. En av lærerne som foreslo å jobbe med figurtall beskrev en oppgave som kalles «Rammeproblemet». Dette er et mye brukt opplegg som også er godt beskrevet i faglitteraturen. Oppgaven går ut på at elevene skal finne måter de kan regne ut antall ruter i rammen på et kvadrat som består av små kvadrater. Elevene skal så finne en generell regel for hvordan de kan regne ut antallet ruter i rammen på når sidelengden i kvadratet endrer seg. Dette er en oppgave som brukes mye i videreutdanning og i matematikkstudier i lærerutdanningen, og den er av den typen oppgaver som kan fungere som *conceptual awareness pillars* (Stylianides & Stylianides, 2009) for lærerstudenter og lærere. En oppgave av denne typen kan føre til en kognitiv konflikt og dermed en endring i lærerens eller lærerstudentens oppfatning av hvordan man kan jobbe med algebra. Det er også en lærer som foreslår en oppgave der elevene får oppgitt et antall hestesko og så skal finne ut hvor mange hester som kan bli skodd. Med litt velvilje tenker jeg at denne oppgaven også kan plasseres under kategorien funksjonstenkning. Dersom vi endrer oppgaven litt og regner med forskjellige antall hestesko og også ser etter og prøver å sette ord på sammenhengen mellom antall hestesko og antall hester så vil denne oppgaven kunne plasseres under kategorien funksjonstenkning. Dette innspillet kan fungere som et godt utgangspunkt for utviklingsarbeid videre med lærere, med litt veiledning vil man kunne hjelpe læreren eller lærerne med å planlegge denne oppgaven for elevene slik at den vil kunne legge til rette for algebraisk tenkning.

Tre av lærerne har foreslått oppgaver som knyttes til formler i geometri. Et eksempel på en slik oppgave er s+s+s=3s (omkretsen til en likesidet trekant). Disse oppgavene vil jeg plassere under kategorien variabelbegrepet, det sidelengden (s) er den ubestemte størrelsen.

Det er ingen av lærerne som har foreslått oppgaver innenfor generalisert aritmetikk eller proporsjonalitet. Det er også to lærere som ikke har klart å komme med noen forslag. Fire lærere har foreslått oppgaver som ikke har med algebra å gjøre. Eksempler på dette er å jobbe med begreper som for eksempel høy og lav, å jobbe med tallinje og å sortere etter størrelse. Det kan hende at disse lærerne ville kunne ha klart å integrere algebraisk tenkning i arbeidet med disse oppgavene, men i utgangspunktet kan de ikke knyttes til algebra eller algebraisk tenkning å gjøre slik oppgavene er presentert av lærerne.

4.1.2 Strukturer, mønstre og relasjoner

I spørreskjemaet ble lærerne bedt om å forklare hva som legges i begrepene strukturer, mønstre og relasjoner. Jeg benytter her beskrivelsen av disse begrepene i faglitteraturen slik de er beskrevet i kapittel 2.1.3.1.

Som faglitteraturen påpeker er strukturer og mønstre tett sammenbundet. Strukturene beskriver mønsteret. Mange av lærerne mener at strukturer og mønstre er det samme. Noen klarer ikke å skille noen av de tre begrepene fra hverandre. De aller fleste har kommet med en forklaring på hva mønstre er, mens åtte lærere ikke har svart på hva strukturer og relasjoner er. Mange lærere uttrykte at dette var den vanskeligste delen av spørreskjemaet. En mulig forklaring på dette kan være at begrepene strukturer og relasjoner kanskje i liten grad brukes i matematikktimene på barnetrinnet, og kanskje lærerne heller ikke bruker dem når de diskuterer matematikk seg imellom. I tillegg så bruker mange begrepene strukturer, mønstre og relasjoner i hverdagen, men da ofte i en annen betydning enn det vi tenker på når vi bruker disse begrepene i matematikktimene. Flere lærere spurte meg om jeg tenkte på relasjoner mellom lærer og elev når de skulle svare på spørsmålet om relasjoner.

Line, den ene læreren som jeg har fulgt videre i studien min fortalte meg senere at hun brukte begrepet strukturer i hverdagen, men at hun ikke hadde tenkt på dette i forhold til matematikk: «Å lage struktur er jo å ordne ting og på en måte ha et mønster. Jeg tenker på struktur i hverdagen, du ordner hverdagen og lager et mønster i det.» Da hun svarte på spørreundersøkelsen så knyttet hun det å arbeide med strukturer til sortering. Flere lærere knytter struktur til å systematisere eller sortere, til å lære metoder, og noen nevner helt konkrete oppgaver som å jobbe med diagrammer, tiervenner, tallinjer. Ingen av disse innspillene klarer jeg å knytte til definisjonen til Mason, Stephens og Watson (2009), nemlig å identifisere egenskaper som kan si noe om sammenhengen mellom elementer og som gjelder i bestemte situasjoner. Men selv om lærerne er usikre på hva strukturer i matematikk kan være så kommer flere med interessante forslag. En lærer skriver: «undersøke hvordan tallene henger sammen i en tallrekke». Dette innspillet kan vi knytte til Warren sitt første område for hvordan man kan jobbe med strukturer, å se forhold mellom størrelser. Dersom elevene klarer å oppdage hvordan tallene henger sammen i en tallrekke så har de oppdaget hvilke strukturer som ligger bak mønsteret i tallrekken. Geir skriver: «å undersøke hvordan matematikken er bygd opp.» Dette kan knyttes til Warren sitt andre område, egenskaper ved regneartene, men også til strukturene som ligger bak tallsystemet. En annen lærer skriver:

> *Strukturer er med å systematisere kunnskap og hjelpe til med forståelse som etter hvert kan anvendes i nye oppgaver. Det hjelper også barna å se sammenhenger. Eks: 1+9=10, 2+8=10, 3+7=10. Øker den ene faktoren så reduseres den neste.*

Dette innspillet vil jeg også knytte til Warren sin første kategori, forhold mellom størrelser, men også til egenskaper til addisjon som regneart. En av lærerne som var usikker på hva begrepet struktur egentlig betyr skriver at han måtte google ordet struktur, han fikk da opp: «hvordan gjenstander og handlinger er bygd opp». Ut i fra dette skriver han: «Det er viktig at elevene skjønner hvordan matematikken er bygget opp. Hvordan det er mulig å skape et system og sammenheng i det man arbeider med.» Dette er nok et eksempel på at ordet struktur kanskje i liten grad brukes av matematikklærere på barnetrinnet.

Flere lærere forbinder mønster med å systematisere kunnskap og se sammenhenger og å se etter noe som gjentas. En del lærere kommer med konkrete forslag til hvordan elevene kan jobbe med å lage repeterende mønster. Dette samsvarer med hvordan faglitteraturen definerer arbeid med mønster. En lærer foreslår å jobbe med programmering med løkker. Flere nevner å finne mønster i gangetabellen. En lærer skriver: «Å arbeide med mønstre kan bety å finne ulike mønstre i matematiske utregninger. Man kan finne et mønster som gjør det enklere å finne et svar (eks gangetabellen).» Dette utsagnet knytter jeg til arbeid med strukturer og å se forhold mellom størrelser. Dette er et eksempel på at det er vanskelig å skille begrepene mønstre og strukturer fra hverandre. Geir knytter også mønstre til gangetabellen. Men han knytter også mønstre til geometri (symmetri og speilvending). Line knytter mønster til et kortspill med figurer hun har brukt med elevene, og til å gjenkjenne og fortsette et mønster når de tegner.

Når det gjelder relasjoner kommer det også en del forskjellige forslag. Flere gir uttrykk for at de er usikre på hva som menes med dette. En lærer skriver om relativisme. Noen lærere mener det kan ha med tallforståelse å gjøre, noen tenker på plassverdisystemet, en lærer nevner tallvenner og partall og oddetall. Kart og målestokk nevnes som eksempel. Flere nevner også her å systematisere og se sammenhenger. Sammenhenger mellom regneartene nevnes av flere. Geir skriver at relasjoner handler om sammenhengen mellom pluss og minus og mellom multiplikasjon og divisjon. En lærer skriver at det har å gjøre med å se at tall, bokstaver eller mønster kan ha samme verdi. En lærer skriver «for eksempel relasjoner mellom antall hestesko og antall hester». Dette eksempelet vil jeg her også knytte til funksjonstenkning der antall hester og antall hestesko representerer de to variablene i funksjonsuttrykket (antall hestesko er det samme som fire ganger antall hester, $y = 4x$). Det var ingen andre lærere som viste til funksjonstenkning da de svarte på denne oppgaven.

4.1.3 Hvilke ønsker har lærerne til hvordan de kan få hjelp til å utvikle kompetansen sin?

Halvparten av lærerne svarte på dette spørsmålet. To av lærerne ønsket seg at det blir satt av tid til å oppdatere seg både på algebraundervisning og den nye læreplanen. En lærer ønsket å få vite mer om hva elevene trenger å kunne når de starter på ungdomstrinnet. En lærer ønsket seg flere timer til matematikkundervisning: «Det er for liten tid til både utforskende arbeid, samtaler, å introdusere temaer og øve på oppgaver.» Den samme læreren skriver også at hun trenger å få større bevissthet om algebra på barnetrinnet. Hun har jobbet som lærer i to år og har en mastergrad i realfagsdidaktikk. Jeg snakket med henne etter at hun hadde fylt ut undersøkelsen og hun fortalte meg at hun syntes det var vanskelig å svare på undersøkelsen. Selv om hun har flere år med studier bak seg så var det vanskelig for henne å svare på spørsmål om hvordan man kunne undervise i algebra på barnetrinnet. Hun er usikker på flere av begrepene som brukes om algebra i den nye læreplanen og klarer bare å komme på eksempler som har med likninger å gjøre når hun selv skal skissere ideer til hvordan man kan jobbe med algebra. Dette er bare en lærer, men jeg tenker at det kan være en viktig påminnelse om at det å jobbe med algebra på barnetrinnet er nytt for mange og at det er viktig å hjelpe lærerne med å skape koblinger mellom den teorien de har lært og det praktiske som skal skje i klasserommet. Flere nevner at de vil lære seg metoder som kan hjelpe elevene med å utvikle algebraisk tenkning, en lærer nevner spesielt at han ønsker å lære noe om hvordan man kan starte med algebra på 1. trinn. En lærer vil gjerne være med på utvikle opplegg selv. En lærer vil ha hjelp til å finne nettsider og apper som kan brukes. Til slutt er det en lærer som ønsker å få vite mer om hva som legges i de ulike begrepene som brukes om algebra i læreplanen.

Ut i fra svarene til lærerne har jeg identifisert tre koder, de går delvis i hverandre. Noen av innspillene handler om *tidsbruk*, lærerne har behov for at det blir satt av tid til utviklingsarbeid og planlegging av undervisning. Flere av lærerne har behov for mer *kunnskap* om undervisningsmetoder og begreper som brukes i læreplanen. Noen av innspillene knytter jeg til at lærerne ønsker *å opparbeide seg en erfaring* gjennom å være med på utvikle undervisningsopplegg. Noen av innspillene vil gå under flere å kodene. Lærerne som ønsker tid til å oppdatere seg etterspør for eksempel både tid og kunnskap.

4.1.4 Oppsummering av funn i spørreundersøkelsen

Lærerne gir uttrykk for at det er vanskelig å gi eksempler på forskjellige oppgaver man kan jobbe med på barnetrinnet. Hovedvekten av forslagene fra lærerne knyttes til å jobbe med likninger. Line klarer ikke å foreslå noen oppgaver. Geir foreslår tre forskjellige oppgaver, to av oppgavene tolker jeg som varianter av likninger, den tredje oppgaven plasserer jeg under funksjonstenkning og arbeid med generalisering av figurtall. Lærerne synes også begrepene som brukes i læreplanen for å beskrive algebra, strukturer, mønstre og relasjoner, er vanskelige å forklare og skille fra hverandre. Forklaringene til lærerne samsvarer ikke alltid med hvordan begrepene blir brukt i faglitteraturen. Ønskene lærerne har for hvordan de kan få hjelpe til å utvikle kompetansen sin i tidlig algebra går på at de trenger mer kunnskap, at de trenger tid til få denne kunnskapen, lage undervisningsopplegg og nok tid til selve matematikkundervisningen. Noen av lærerne ønsker også å opparbeide seg en erfaring gjennom å være med på å utvikle undervisningsopplegg.

4.2 Funn fra oppstarts-intervjuene

4.2.1 Lærernes bakgrunn

Geir og Line jobber på en stor tradisjonell skole med vanlige klasserom, ringeklokke og det som hører til. De underviser på 3. trinn og har hver sin klasse i matematikk. Line er kontaktlærer i klassen hun underviser i, mens Geir ikke er kontaktlærer dette skoleåret. Han jobber noe redusert fordi han har startet på et masterstudie der han fordyper seg i matematikk og matematikkdidaktikk. Geir har jobbet som lærer i flere år. Han har tatt videreutdanning i matematikk og har til sammen 60 studiepoeng i faget. Line har jobbet som lærer i tre år og har undervist i matematikk de to siste årene. Hun er utdannet i kunstfag og har tatt flere studier etter det, blant annet PPU. Hun har ingen utdanning i matematikk. Lærerne på trinnet planlegger ikke timene sammen, og jobber for tiden med litt forskjellige temaer i matematikken. De har jobbet mye med brøk det siste halvåret og har ikke begynt å se på eller å tilpasse undervisningen til den nye læreplanen som blir gjeldende fra neste skoleår. Geir gir de andre lærerne en del ideer til oppgaver de kan gjennomføre, dette er ofte oppgaver av typen rike oppgaver (oppgaver med lav inngangsterskel, men som oppleves som en utfordring og kan løses med forskjellige løsningsstrategier). De bruker Radius som læreverk, og har lisens på «Mattemesteren» (et digitalt matematikkprogram).

4.2.2 Lærernes syn på matematikkundervisning

Jeg bruker data fra oppstarts-intervjuene til å belyse forskningsspørsmål 1 (hvilket syn på matematikkundervisning lærerne har) og forskningsspørsmål 2 (hvilken forståelse lærerne har av algebraisk tenkning).

4.2.2.1 Lines syn på matematikkundervisning

> *En ting som er viktig, men også utfordrende for meg, og som jeg jobber mye med, er å forklare ting på en god måte. Jeg prøver også å være bevisst på at jeg ikke prater for mye, men at de får prøve seg selv. Det er viktig for meg å forstå hvorfor de ikke forstår. Hvor ligger misforståelsene og hva er nøkkelen for at de skal kunne forstå.*

Line er veldig opptatt av at elevene skal forstå. Hun mener at noe må pugges, sånn som gangetabellen, men at det er viktig at de forstår den. Dette kobler jeg til det platonske synet på matematikkundervisning der matematikk oppfattes som noe som oppdages og lærerens oppgave er å forklare (Ernest, 1989). Hun forteller at hun hele tiden har fokus på å være motiverende og oppmuntrende. Hun vil at de skal få kjenne på følelsen av å få det til, men også at de opplever at man må gjøre feil for å lære. Dette er en erfaring hun har med seg fra kunstskolen. «Hvis du er redd for å gjøre feil så blir du fullstendig blokkert og kommer ikke videre». Hun synes det er viktig å analysere hvorfor det ble feil. Dette utsagnet går mer i retning av et problemløsning-syn på matematikk (Ernest, 1989), å se på matematikk som en prosess der man utforsker for å oppnå stadig ny kunnskap.

> *Det er kjempespennende, men veldig utfordrende å undervise i matematikk. Jeg føler meg litt som Wallace og Grommit som sitter på toget og kaster ut skinner mens toget kjører. Jeg må prøve å ligge noen skritt foran og forstå det på nytt før jeg må lære det til barna. Jeg kjenner jo at jeg har mange begrensninger.*

Hun forteller at matematikk er det faget hun liker best å undervise i, men synes det er problematisk at hun føler at hun må holde seg til læreboka. Hun føler at hun ikke har nok kunnskap og erfaring til å jobbe annerledes. Noen ganger eksperimenterer hun litt med rike oppgaver. Hun prøver hele tiden å lære, men føler at kunnskapsnivået hennes begrenser henne, for eksempel hvis hun må komme med noen eksempler på sparket. Og noen ganger er det vanskelig å forstå hva elevene har tenkt. Hun vil veldig gjerne lære seg mer matematikk og har søkt om å få ta videreutdanning neste skoleår. Line mangler både matematikk-kunnskap og matematikkdidaktisk kunnskap (Loewenberg Ball et al., 2008), og dette gir hun tydelig uttrykk for.

Line forteller at timene ofte starter med tavleundervisning. Etterpå jobber de nesten alltid i læreboka, oftest en og en eller med læringspartner (den de sitter ved siden av). Line forteller at nivået er veldig spredt, så hun bruker mesteparten av tiden på å gå rundt og veilede og hjelpe og forklare for en og en elev. Dette kan igjen knyttes til det platonske synet på matematikkundervisning, med læreren som forklarer og legger til rette, matematikk skal forstås.

Line husker ikke noe fra algebraundervisningen da hun selv gikk på skolen. Hun syntes ikke matte var så veldig spennende og var ikke spesielt glad i faget. Men hun synes matte har vært veldig gøy etter at hun begynte å undervise selv. Oppfatningen hennes av matte før hun begynte å undervise selv var at det bare handlet om å huske formler og regler. Jeg oppfatter det derfor sånn at etter at hun har begynt å undervise i matematikk har Lines oppfatning av matematikk endret seg fra instrumentelt til en kombinasjon av platonsk og problemløsnings-orientert. Lærere som har et instrumentelt syn på matematikk kobler faget til å lære seg enkeltstående fakta, regler og ferdigheter (Ernest, 1989). Men fordi hun mangler matematikkfaglig og matematikkdidaktisk kunnskap så følger hun læreboka og ender opp med undervisning som tilsvarer et instrumentelt syn. Dette er et eksempel på at det ikke alltid er samsvar mellom lærerens oppfatning av matematikkundervisning og hvordan hun ender opp med å undervise (Cross Francis, 2015).

Når Line skal beskrive algebra så tenker hun på addisjon og subtraksjon med en ukjent. Dette samsvarer med det tradisjonelle synet på algebra (Kieran, 2004).

4.2.2.2 Geirs syn på matematikkundervisning

Geir forteller at matematikk er det faget han liker best å undervise i, i hvert fall på de lavere trinnene. Han prøver å tenke systematisk, byggestein på byggestein, og liker å ha en oversikt over hva elevene har gjort. Før hadde han ukesjekk og kategoriserte det elevene klarte og ikke klarte. Nå har de begynt å bruke det digitale programmet Mattemesteren. Der får han rask tilbakemelding på om de har lært det de skulle lære, og han sier selv at dette blir litt styrende for hvordan han legger opp undervisningen. Han prøver å fordele hvor mye tid de bruker på rike oppgaver og ferdighetstrening.

> *Jeg utvikler meg fremdeles som matematikklærer. Nå har jeg jobbet i ti år. Da jeg tok videreutdanning så var det mange sånne øyeblikk der jeg tenkte, huff da, hva har jeg holdt på med. På masterstudiet har det vært en forelesning om «å gå fra grøft til grøft», å flytte seg fra ferdighetstrening til å finne ut av alt selv, induktivt versus deduktivt, som har gjort at jeg har tenkt at jeg kanskje må legge meg en plass i mellom. Etter videreutdanningen så tenkte jeg at denne ferdighetstreningen må jeg kanskje nedprioritere litt, og at det var litt «fy fy» å vise elevene metodene. Men nå har det kommet litt inn i varmen igjen da, deduktiv metode.*

Han forteller om en prøve elevene hadde der de brukte egne metoder. En del elever brukte veldig tungvinte strategier, som å fylle et helt ark med tellestreker. Han ønsker at de skal ha fleksible metoder, men etter den prøven så ville han at de skulle få det til så han gjennomførte en undervisningstime der han viste dem hvordan de skulle sette tallene under hverandre når de skulle legge sammen flersifrede tall, og så fikk elevene en god del oppgaver på Mattemesteren som de skulle løse etterpå. Nå i ettertid så tenker han at dette var vellykket fordi så mange fikk det til. Han sier at det er sånne episoder som gjør at han liker å være lærer. Ut i fra Geir sine uttalelser så vil jeg plassere han på et instrumentelt syn (Ernest, 1989) på matematikk fordi han forteller at han viser og instruerer elevene, men jeg ser også at det er innslag fra det platonske synet fordi han tenker at han må «legge seg en plass midt i mellom», jeg tolker dette som midt i mellom å vise elevene hva de skal gjøre og å la dem finne ut av ting selv.

Så jeg er nok kanskje i en litt famlende periode nå som mattelærer, for det er så mange nye impulser gjennom studiet. Egentlig så vil jeg helst finne bevis på hva som er den beste måten å undervise på. Jeg ønsker at det skal være sånn at vi kan finne kausale sammenhenger. Men i matematikkstudiet (master) så opplever jeg at det er mye mer svevende, teacher efficacy og sånn, men det er ingen ting der jeg kan bruke rett inn i klasserommet liksom.

Geir forteller at han synes det er vanskelig å «legge seg midt i mellom» å vise elevene hva de skal gjøre og å la dem utforske selv. Han vil at elevene skal beholde fleksibiliteten, men det er vanskelig fordi han opplever at elevene har en klar formening av hva en matematikktime skal være. De vil løse oppgaver raskest mulig. Spesielt de som er flinke i matematikk er opptatt av å komme med svaret raskest mulig. Så med de rike oppgavene ønsker han å skape engasjement og få alle elevene med. Han vil at elevene får litt flere strenger å spille på slik at de kanskje kan få til å løse en oppgave som de egentlig ikke har lært å løse ennå, at de kan være litt kreative. Han forteller at før han tok videreutdanning så tenkte han veldig «deduktivt». Han viste elevene hva de skulle gjøre og lærte dem standardalgoritmene. Målet var å få de fire regneartene til å sitte. Så på mange måter starter han litt på nytt nå. Han vil gjerne få til en kultur i klassen der alle er med og er engasjerte. Men han føler at det allerede var en satt kultur før han tok over nå i 3. klasse. Når det er felles oppsummering så venter alle bare på at de flinke skal svare. Han er på leting etter gode metoder som kan gjøre at han kan få med seg flere elever.

Geir forteller at han starter timene med rike oppgaver. Eller en instruks eller ukas tall som de tar felles. Han sier det er mest for å holde kunnskap ved like. Elevene jobber alene eller i grupper etter oppstarten. Kanskje de har en økt med rike oppgaver først og så en økt med ferdighetstrening. Han forteller at han prøver å finne rike oppgaver som har en link med ferdighetstreningen, men at han ikke alltid får til det.

Når jeg spør Geir om hva han forbinder med algebra så er det første han tenker på at han er dårlig i algebra. Han forteller om episoder der han tror han har fått til oppgaver, men så har han ikke forstått det allikevel. Men han synes algebra er fasinerende.

Jeg tenker at du kan bruke algebra til å vise generelle sammenhenger innenfor matematikk. Du kan vise at disse reglene du lærer elevene stemmer ved hjelp av algebra på en måte som blir godkjent av matematikere.

Algebra på barnetrinnet mener han er å gi oppgaver som forbereder elevene på den typen tenkning de må bruke når de skal jobbe med algebra senere. Han tenker det er algebra når han gir dem en oppgave som de ikke vet hvordan de skal løse, og de må argumentere for at det er rett. Geir ser dermed tidlig algebra som en forberedelse til videre studier. Jeg knytter også Geir sin oppfatning av algebra til et problemløsning-syn på matematikk (Ernest, 1989) fordi han knytter algebra til oppgaver som ikke har bestemte løsningsmetoder og dermed må løses med egne metoder. Det at Geir tenker man kan bruke algebra til å vise generelle sammenhenger i matematikk kobler jeg til symbolbruk i algebra og det tradisjonelle synet på algebra (Kieran, 2004).

4.3 Første runde med undervisning

Jeg ser av funn i spørreundersøkelsen og gjennom intervjuene at lærerne, spesielt Line, ikke kan så mye om undervisning i algebra med de yngste elevene. Lærerne uttrykker også at de kan lite om undervisning i tidlig algebra og at de ønsker min hjelp til å komme i gang. Det ser også ut til at de har en tradisjonell oppfatning av hva algebra er, og at det dermed kan være lurt at de får presentert alternativer til å jobbe med likninger når de skal introdusere algebra for elevene. Fordi fokus på algebraisk tenkning er nytt for lærerne så er det viktig at de får tid til å koble den nye kunnskapen opp mot det arbeidet de gjør i klasserommet, de må rekontekstualisere den nye kunnskapen (Hermansen & Mausethagen, 2016). Hermansen og Mausethagen peker på at lærere må oppfattes som kunnskapsprodusenter dersom det skal være mulig å få til dette. Lærerne må få tid til å jobbe med å koble den nye kunnskapen til det arbeidet de allerede gjør i klasserommet. Derfor ser jeg det som en god metode å bruke aksjonsforskning i dette arbeidet. Lærerne skal i prosessen aktivt være med på å prøve ut nye undervisningsmetoder og reflektere etterpå. Fordi undervisning er en kulturell aktivitet (Stigler & Hiebert, 2009), og det dermed vil kunne ta tid å endre undervisningspraksisen ser jeg for meg at vi gjennom min studie bare vil kunne starte denne prosessen. Målet for lærerne sin del med aksjonsforskningen blir derfor å komme i gang med å integrere algebraisk tenkning i undervisningen.

Jeg er opptatt av at lærerne skal være aktivt med på å velge ut oppgaver de vil jobbe med sammen med elevene og dermed forhåpentligvis føle et «eieforhold» til det som skjer og dermed legge til rette for at de vil kunne oppleve seg selv som kunnskapsprodusenter. Før lærerne bestemmer seg for undervisningsopplegg har vi et felles møte der vi diskuterer hva de kan jobbe med. Jeg har med meg materiell som kan være til hjelp for lærerne videre, og bruker også dette møtet til å sette lærerne litt i gang med algebraisk tenkning og introdusere noen begreper og viktige momenter i tidlig algebra. Vi ser også på noen oppgaver sammen.

Litteratur om undervisning i tidlig algebra som jeg deler ut til lærerne:

- Tall og tanke 1 (Solem et al., 2018)
- Developing Elementary Teachers` Algebra Eyes and Ears (M. L. Blanton & Kaput, 2003)
- Hefte med oppgaver som jeg har oversatt fra Blanton (2008)

Vi ser sammen på noen av oppgavene og snakker litt om viktige momenter om tidlig algebra:

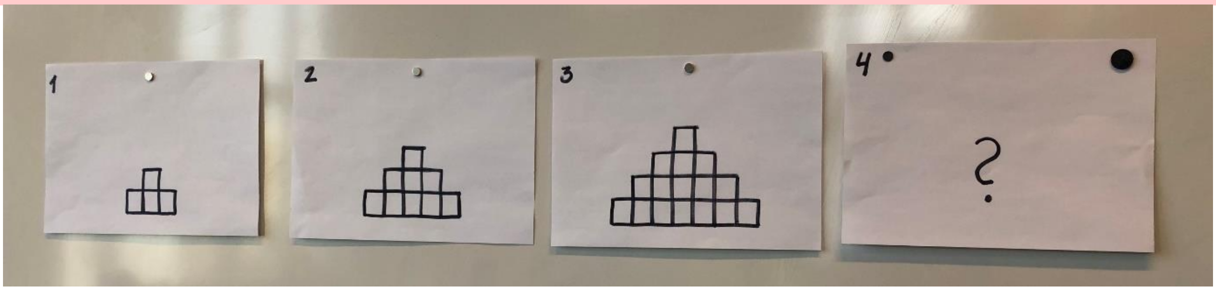
- De forskjellige områdene innenfor tidlig algebra (M. L. Blanton, Stephens, et al., 2015), variabelbegrepet, funksjonstenkning, generalisert aritmetikk, proporsjonalitet og relasjonell forståelse (likeverdighet, uttrykk, ligninger, ulikheter).
- Hva algebraisk tenkning er, forstått gjennom begrepene læreplanen bruker (strukturer, mønstre og relasjoner)
- Jeg sier litt om hvorfor det kan være lurt å starte med voksende geometriske mønstre og ubestemte størrelser, heller enn å jobbe med likninger og ukjente størrelser (som det er vanlig at lærere har hovedfokus på).
- Jeg forteller litt om «rammeproblemet» (beskrevet i kapittel 4.1.1.) som eksempel på oppgave de kan starte med. Lærerne får tenke på hvordan de selv ville løst oppgaven. De uttrykker at de er usikre på om elevene vil få til oppgaven. Jeg forteller litt om hvordan de kan tilrettelegge oppgaven og hvordan de kan lede elevene mot å generalisere
- Vi ser også på «the raindrop task» fra youcubed.org. Jeg har med meg oppgavearket og lærerne får prøve seg litt på oppgaven (vedlegg 8). Vi snakker mer om oppgaven, mulige løsninger og hvordan det er lettere å få til algebraisk tenkning dersom elevene ikke teller rutene, men lager regnestykker for å finne ut antall ruter, da kan de lettere generalisere.
- Vi snakket også litt om de forskjellige måtene elevene kan se sammenhengen mellom de to variablene i en funksjon (rekursivt, samvariasjon og korrespondanse).

I den påfølgende analysen av observasjonene av undervisningen til Line og Geir trekker jeg frem sekvenser av undervisningen som kan belyse forskningsspørsmål 3 (hvilke utfordringer lærerne har). Jeg har hovedfokus på hvordan lærerne presenterer oppgaven og hvordan de legger opp oppsummeringen. Jeg har også med noen utdrag som beskriver hvordan læreren veileder elevene underveis fordi dette også er avgjørende for hvordan læreren legger til rette for algebraisk tenkning og generalisering i klasserommet. Noen av observasjonene er beriket med refleksjoner lærerne har gjort seg i ettertid. Refleksjonene er satt i kursiv. Det som omhandler introduksjoner til oppgaver er markert med rosa bakgrunn, og oppsummeringene er markert med grønn bakgrunn.

4.3.1 The raindrop task – første time i klassen til Line

Lærerne har bestemt seg for at de vil jobbe med «the raindrop-task». De har ikke sett på beskrivelsen av oppgaven som ligger på youcubed.org, men har valgt å gjennomføre den på sin egen måte med utgangspunkt i oppgavearket (vedlegg 8). De har laget et ruteark der elevene skal tegne inn figur 1, 2, 3 og 4 (vedlegg 9). I tillegg har de laget et ruteark der elevene kan tegne de neste figurene i mønsteret (vedlegg 10). Line og Geir har hatt en liten diskusjon om hvordan de kan legge frem oppgaven for elevene, men har valgt å løse det på litt forskjellige måter.

Line presenterer oppgaven ved å henge opp en og en figur på tavla. Hun henger opp figur en og spør elevene om hva de ser. En elev svarer at hun ser en figur med fire brikker. Lærer repeterer svaret hennes og henger opp figur to.



Figur 11: Bilde av tavlen

Simen: Det er en figur med ni klosser… (tenker)… jeg må bare dobbeltsjekke

Line: Det er lurt det. Og så er det lik form, er det ikke?

Her identifiserer Line noe som er likt på tvers av flere tilfeller, formen på figuren. Dette er punkt b) under den første kategorien, «delta i generalisering i klasserommet», i Ellis (2011) sitt sin oversikt over handlinger som kan legge til rette for generalisering. Line kommer med en kommentar som henviser til at hun har gjort en generalisering når det gjelder formen på figurene.

> Gustav: Jeg tok fire pluss fire jeg
>
> Line: ja…

Line følger ikke opp dette svaret, men går videre til en annen elev som har rukket opp hånda. Det viser seg etter hvert som jeg er i klassen hennes at hun ikke pleier å si til en elev at oppgaven er løst feil.

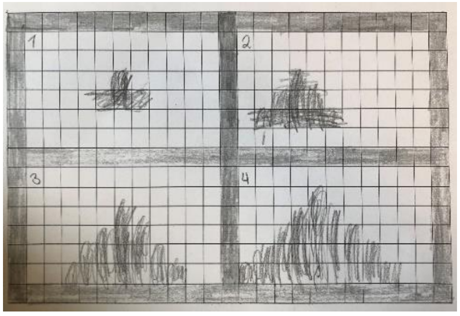
Etter at figur tre har blitt presentert forteller læreren hva de skal gjøre videre, de skal finne ut hvordan figur 4 ser ut. Figur 11 viser et bilde som er tatt etter at Line har hengt opp alle figurene. Elevene skal jobbe med læringspartneren sin og de får utdelt oppgavearkene. Line hinter om at det er et mønster i figurene. Her oppmuntrer Line elevene til å generalisere, dette er den andre kategorien i Ellis sitt rammeverk (Ellis, 2011), ved å a) be elevene se etter sammenhenger mellom to eller flere enheter og, b) få elevene til å se etter mønstre og sammenhenger.

Line tar seg god tid når hun går rundt i klasserommet og veileder elevene. Hun spør ofte hva elevene har tenkt og repeterer ofte det elevene sier. Hun virker oppriktig interessert i forklaringene til elevene. Elever som synes det er vanskelig å komme videre med oppgaven får forsiktige hint av Line, for eksempel at det kan være lurt å fargelegge brikkene i figuren.

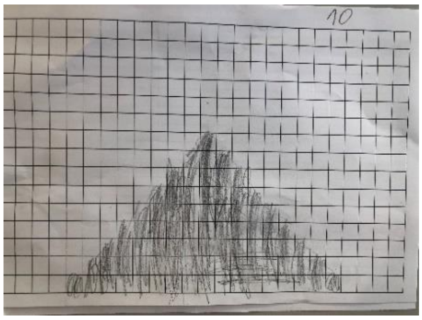
> Eirill: Det blir tre der og fem der og syv der. Det blir alltid to mer. Først kommer en, tre, fem, syv, og så kommer ni. Det neste oddetallet, det er oddetallene.

Line bekrefter at det er riktig og gir Eirill og læringspartneren i oppgave å finne figur fem. Her oppmuntrer Line til generalisering ved å c) få elevene til å utvide ut over de tilfellene man jobber med.

Flere elever har funnet ut hvordan figur fire ser ut og får i oppgave å tegne figur fem på et eget ruteark. Bård blir raskt ferdig med figur fem og Line er usikker på hva han kan gjøre videre. Jeg tipser henne om å be han finne figur ti. Bård fargelegger figur ti raskt på rutearket.



Figur 13: Oppgavearket til Bård



Figur 12: Bård har tegnet figur ti

Bård: Jeg telte i høyden (peker på midten av figuren, se figur 13). Det var fem på oppgave fire. Enern var med to, toern var med tre, treern var med fire, femmern var med seks. På oppgave ti må det være elleve.

Line: Hvordan tenkte du?

I ettertid så undrer jeg meg litt over dette spørsmålet til Line. Bård har jo allerede forklart at han går ut i fra høyden i figuren når han tegner figurene. Det kan være at hun ikke forstod hvordan eleven har tenkt og derfor trengte en videre forklaring. Men Line spør nesten alltid elevene hvordan de har tenkt, og her tolker jeg spørsmålet hennes slik at hun vil at Bård skal forklare mer om hvordan han tenkte da han løste oppgaven. I så fall oppmuntrer Line til begrunnelser eller forklaringer (kategori 5 i Ellis sitt rammeverk) ved å spørre eleven hvordan han har tenkt. Line sier selv at hun er opptatt av at elevene skal få øve seg i å sette ord på hva de tenker. Jeg ser i transkripsjonene fra timene til Line at når hun går rundt og veileder elevene starter hun veldig ofte med å spørre dem om hvordan de har tenkt.

Jeg ser at flere elever er arbeidsløse, noen sier at de er ferdige med oppgaven, noen kommer ikke videre med figurene og noen vil gjøre andre ting. Jeg opplever det som en utfordring at mange elever ikke klarer å komme i gang med oppgaven og å jobbe videre.

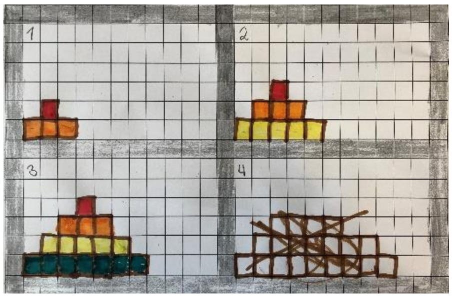
Berit har ikke kommet i gang med oppgaven og ber om hjelp. Line peker på figurene på oppgavearket og spør Berit om hvilke brikker som er nye. Her oppmuntrer Line eleven til å generalisere ved å a) be eleven se etter sammenhenger mellom to eller flere enheter.

Berit peker på brikkene nederst på figur 2.

Line: Fargelegg de som er nye, da er det lettere å se mønsteret.

Her fortsetter Line oppmuntringen til å generalisere ved at hun b) får Berit til å se etter mønstre (og sammenhenger) (Ellis, 2011). Line forteller meg etterpå at hun var litt usikker da hun ga Berit fargene. Hun tenker at de skal jo finne ut av det selv. Samtidig så hjalp tipset med å fargelegge nederste rad eleven slik at hun så mønsteret. Line sier at hun er glad for at hun ikke gjorde det med en gang, for da ser hun for seg at de ikke hadde funnet alle de forskjellige metodene. Hun er virkelig interessert i hvordan elevene tenker selv, og vil prøve å ikke påvirke det i for stor grad.

> Nina: Jeg tenkte oddetall, figur en opp dit (de nye brikkene kommer som en rad under den forrige figuren) Her borte er det fem, og så gjorde vi sånn 1,2,3,4,5,6,7, to mere! Det er et partall mere. (Teller den neste),… og så tar vi to mer (se figur 14)
>
> Line: Så det vokser med et oddetall for hver figur? Vil dere lage figur nummer fem?



Figur 14: Nina sine figurer

Her deltar Line og elevene i generalisering i klasserommet (kategori 1) ved b) å identifisere noe som er likt på tvers av flere tilfeller (Ellis, 2011). Nina ser den forrige figuren i rekka innebygd i den neste figuren, og Line hjelper henne med å sette ord på at figurene vokser med et oddetall.

Det er på tide med en oppsummering. Til sammen syv par og treer-grupper får komme opp og fortelle hva de har gjort. Line velger ut blant de som rekker opp hånda, og alle som har lyst får lov til å komme opp og fortelle. Line må flere ganger be elevene følge med. Noen elever hører ikke hva som blir sagt foran ved tavla og sier dette ut i klassen. Line er opptatt med å samtale med de elevene som forklarer for klassen, men noen ganger stopper hun opp og ber elevene følge med. Jeg opplever at det er utfordrende for Line å få alle elevene til å følge med og få faglig utbytte av oppsummeringen. Line ber elevene fortelle hvordan de tenkte. Noen av elevene visste ikke helt hva de skulle si da de kom opp til tavla, disse har jeg ikke tatt med i analysen. Jeg har plukket ut noen episoder som jeg mener er beskrivende for hvordan oppsummeringen foregikk.

> Elin: Jeg tenkte at 4+4 er jo åtte, og 8+8 er jo 16, og 16+16 er 32, og så tenkte jeg at 32 +32 er 64

Line: Ja, så du telte hvor mange det var her, eller hvordan tenkte du?

Elin: Jeg telte alle først, men så fikk jeg ikke se helt, for jeg satt bakerst her, jeg trodde det var tre, men så var det fire, og så så jeg det var åtte, og så så jeg at det var 16 og da tenkte jeg at man plusser det samme tallet, da plussa jeg 32 og 32 og det er 64 og da trodde jeg at svaret var 64.

Line: Så du dobla. Ok, skjønner, takk for at dere ville dele med oss.

Jeg snakket med Line om denne episoden etterpå. Line forteller at hun er veldig opptatt av det emosjonelle aspektet. Det er grunnen til at hun ikke vil velge ut noen få elever og løsninger på oppgaven som skal presenteres for klassen. Hun vil at alle skal få slippe til i oppsummeringen. Hun har også en elev i klassen som tidligere har blitt straffet om han løste en oppgave feil. Eleven blir lett engstelig og derfor er hun veldig forsiktig med å si i fra dersom en elev har løst en oppgave feil. Jeg opplever at det er en utfordring at Line ikke tar tak i feil som elevene har gjort.

Milla: Vi tenkte sånn at siden på første så er det to-rad (peker på figuren), og på den andre så er det tre-rad, og på den tredje er det fire-rad, da tenkte vi at på nummer fire skal det bli fem-rad

Line: Er det den midterste her dere mener

Milla: Nei vi telte sånn, sånn og sånn (peker på de vannrette radene)

Line: Hvor mange rader det skal være?

Milla: Ja og da må det bli fem her. Så da vi hadde gjort nummer fire så tenkte vi det samme som femmern

Line: Ja ikke sant, så dere tenkte at her er det to rader (peker på figur en), her er det tre rader (peker på figur to), her er det fire rader (peker på figur tre) og her er det fem rader (peker på figur fire)

Milla: Ja, og da er det seks rader på fem

Her opplever jeg at elevene har generalisert ved at de har funnet ut at figurene alltid har en rad mer en figurnummeret. Men det blir ikke satt ord på dette hverken av elever eller læreren. Ut i fra Steinweg, Akinwunmi og Lenz (2018) sin oversikt over hvordan elevene kan bruke språket til å generalisere så er disse elevene på det andre nivået, «ramse opp flere eksempler».

Her går læreren glipp av en mulighet til å legge til rette for generalisering. Dette kunne hun for eksempel ha gjort ved å oppmuntre elevene til å generalisere, kategori to i Ellis sitt rammeverk ved å få elevene til å c) utvide ut over de tilfellene man jobber med og d) formulere en verbal beskrivelse av et mønster eller en regel. Men Line har liten erfaring med å styre slike oppsummeringer og opplever det som utfordrende at hun mangler kunnskap. Det er mye som skjer samtidig og vanskelig for en som ikke har erfaring å utnytte slike elevinnspill på sparket. Dette utdraget viser at det er utfordrende å styre en oppsummeringssamtale og lede fokuset mot det faglige målet for timen.

> Eirill: Vi tenkte assa oddetall, at, em… (ser etter arket sitt). Vi tenkte sånn at her så ser du at hele tiden er det sånn at her er det tre og så blir det en to tre, fire, fem. Det er alltid to her (peker på sidene av figuren). Og så blir det syv
>
> Line: Det blir tre og fem og så syv
>
> Eirill: Og så på fire så blir det ni
>
> Line: Ja, for det er det neste oddetallet
>
> Eirill: Og da tenkte vi sånn at da går vi opp her, en, det blir to mer, tre blir fem, og så teller vi her, en, så blir det tre.
>
> Line: Ja så hvis det er sånn tre, fem, så blir det syv, ni, var det det?
>
> Eirill: Ja, og så går det lengre opp,
>
> Gunnar: Når det er den her sin tur (peker på figur tre) så teller vi to mer enn det er her, 1,2,3,4,5, da teller vi mer så blir det syv over her
>
> Eirill: Her så er det tre, da blir det fire opp

Disse elevene har både generalisert hvor lang den nederste raden figuren blir, og hvor høy figuren blir. Her er det igjen et eksempel på en episode der elever deler en generalisering, men læreren ikke følger opp funnene deres videre.

Etter timen sier jeg til Line at jeg synes det kan være veldig interessant å jobbe videre med oppgaven og la elevene regne ut hvor mange firkanter i hver figur. Line virker litt usikker. Vi snakker litt om å regne ut antall firkanter i figuren. Jeg forteller om hvordan det kan hjelpe til med generaliseringen, å sette ord på hvordan de regner ut hvor mange brikker det er i en figur. Line er bekymret for at mange vil falle av, at det blir for vanskelig. Hun sier at selv om mange har vært på villspor i dag, så har allikevel alle klart å gjøre noe. Line er bekymret for arbeidskapasiteten til flere av elevene.

4.3.2 The raindrop task – første time i klassen til Geir

Geir forteller elevene at de skal få en litt spesiell oppgave som de skal jobbe med denne timen. Han sier at det er en grubleoppgave, så elevene må tenke litt for å prøve å finne en løsning på den. Geir viser oppgavearket på tavla med prosjektor (vedlegg 8).

> Geir: Og da kaller vi det her for figur en, den er figur to, og den er figur tre. Vi tenker oss at den starter her, dette er steg en og så vokser den på en måte (figur to), og så vokser den igjen her (figur tre). Og så skal vi finne ut om det er noe system. Hva skjer når den går fra figur en til figur to, og fra figur to til figur tre. Og så etter hvert kan vi tenke på hva som skjer når den går til figur fire og figur fem. Og hvordan ser den ut når det er figur 100, ikke sant. Til å begynne med så skal dere få ark med figurene på, og så skal dere prøve å finne ut, ut i fra de tre figurene, hvordan er det den vokser. Dere kan fargelegge hvis dere vil det, skrive tall kan dere gjøre, alt som kan hjelpe dere med å finne et system.

I introduksjonen til oppgaven oppmuntrer Geir til generalisering (kategori 2 i Ellis sitt rammeverk) ved å a) be elevene om å se etter sammenhenger mellom to eller flere enheter (Ellis, 2011). Geir forteller at figuren vokser, dette kan legge til rette for at elevene leter etter de nye brikkene neste figur i det geometriske mønsteret får, og dermed legge til rette for rekursiv tenkning.

Geir deler ut arkene (vedlegg 8 og 9) og går rundt for å hjelpe elevene. Han sier ofte «det var lurt» til elever som er i gang med å fargelegge for eksempel. Flere elever er litt usikre på hva de egentlig skal gjøre eller vil ha tilbakemelding på om de er på rett spor. Etter at elevene er i gang med å jobbe gir Geir beskjed til alle elevene at de som vil fargelegge figurene ikke skal fargelegge tilfeldig. De skal fargelegge på en måte som hjelper dem med å se systemet i hvordan figuren vokser. Han sier også at de skal rekke opp hånda slik at han kan hjelpe dem som vil fargelegge. Her fortsetter Geir oppmuntringen til generalisering ved å b) få elevene til å se etter mønstre og sammenhenger. Jeg opplever at det er en utfordring også hos Geir at mange elever sitter og venter på hjelp og ikke helt vet hvordan de skal komme i gang med oppgaven.

Astrid: Den vokser to for hver gang. Se der er det tre og fem og der er den syv. (peker på nederste linje på figurene)

Geir: Ja, hvordan kan du vise det?

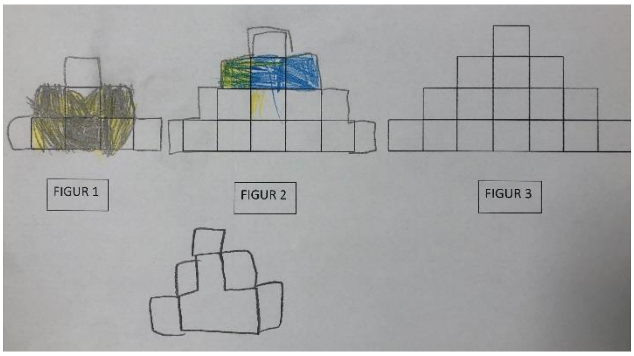
Astrid: Jeg vet ikke.

Geir: Du kan jo fargelegge for å vise det. Eller du kan skrive hvor mange firkanter som blir plusset på fra den rekka der til den rekka der og se om du kommer noen vei. Du kan jo tenke litt på det og se hva du får lyst til å prøve på. Velg en av de eller prøv noe annet.

Geir oppmuntrer Astrid til å begrunne generaliseringen sin, dette er kategori fem i Ellis sitt rammeverk (2011).

Geir: Hva er det du har gjort her da? Du har tegnet på nye ruter her.

Eilert: Det er bare for å se at disse to her er like. Dette her er jo den første man får, hvis man tar en på der og en på der og en på der så får man den neste. Og så kan vi fortsette og fortsette helt til fire.



Figur 15: Arket til Eilert

Geir: Ja, se om dere klarer det da, å finne ut hvor mange ruter det må være i nummer fire.

Da jeg overhørte denne samtalen så fikk jeg inntrykk av at Geir ble litt overrasket over det eleven hadde gjort, han hadde nok ikke sett for seg denne måten å jobbe med oppgaven på. Den første kommentaren kan ga Eilert kan oppfattes som en tilbakemelding om at eleven har gjort noe feil. Geir spør eleven hva han har gjort, men svarer også for han (han har tegnet på nye ruter). I introduksjonen til oppgaven så oppfordrer Geir elevene til å se etter hvordan figuren vokser, så det kan være det elevene prøver å finne svar på ved å tegne på nye ruter. Jeg opplever her at Geir møter på en utfordring ved at han ikke er forberedt på forskjellige måter elever kan løse oppgaven på.

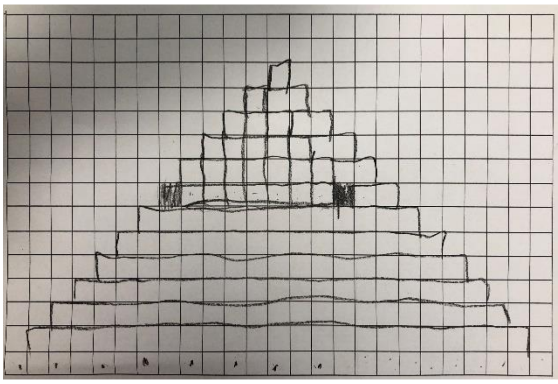
Kasper sliter med å komme i gang. Geir spør han hvordan figur fire ser ut.

> Kasper: Skal det bli plussa?
>
> Geir: Ja den vokser jo sånn her, se figur en ser sånn ut og så figur to ser plutselig sånn ut, det er mange flere ruter, og figur tre har enda flere ruter.
>
> Geir: Så hvordan vokser den, hva er det som vil skje fra figur en til figur to, fra figur to til tre og hva er det som vil skje fra figur tre til fire?

Her gjentar Geir oppmuntringen til generalisering fra introduksjonen til oppgaven i starten av timen. Han oppmuntrer til generalisering gjennom c) å få eleven til å utvide ut over de tilfellene man jobber med, å finne figur fire, og a) se etter sammenhenger mellom to elle flere enheter (Ellis, 2011).

Kriss fant raskt figur fire og har fått i oppgave av Geir å finne figur nummer 20. Geir oppmuntrer til generalisering ved å c) få eleven til å utvide ut over de tilfellene man jobber med (Ellis, 2011). Kriss bruker ruteark (figur 16). Det tar ikke lang tid før Kriss roper ut:

> Kriss: Geir, Geir, den aller nederste blir nok til figur nummer 12! Geir, figur nummer 20 går ikke!
>
> Geir: Kriss, du må vente litt. Det fins en figur 20 også, men det er ikke plass til den på arket. Så da må du prøve å løse den på en annen måte, med å regne.
>
> Kriss: Huff, å nei.



Figur 16: Kriss prøver å tegne figur 20

Her er det igjen en elev som gjør noe annet enn det læreren ser for seg. Jeg spør Geir etter timen om hva han tenker om denne episoden. Eleven har funnet ut hva som er den største figuren som kan tegnes på rutearket. Kan han ha oppdaget noe generelt om den nederste linjen i figuren som kan brukes til å generalisere? Geir sier at han ikke fikk helt tak på hvordan eleven hadde tenkt. Jeg spør også om det eleven kom fram til kunne vært interessant å ta frem i oppsummeringen til slutt. Geir forteller at han har erfaring med at eleven «tar mye plass» og at det kan være litt risikabelt å ta han frem fordi han da ikke vet hvordan det ender. Geir har ikke jobbet noe særlig med algebra med elever på de laveste trinnene på barnetrinnet, og har kanskje ikke jobbet seg opp nok erfaring til å klare å forstå hvordan elevene tenker og klare å bruke elevinnspillene videre. Lærere må øve seg på å forstå hvordan elever tenker og å knytte dette til det klassen jobber med (Kieran et al., 2016). Dette opplever jeg som en ny utfordring, å forstå hvordan elevene tenker.

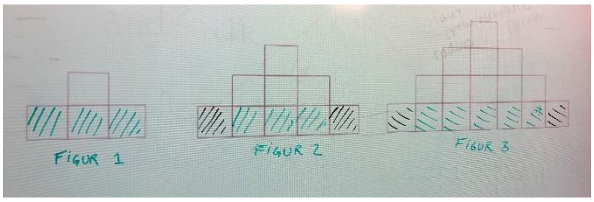
Det er tid for en oppsummering og Geir spør klassen først om det er noen som har oppdaget noe mønster.

Kriss: (roper ut) Den vokser med to om gangen! (blir hysjet på av de voksne, får beskjed om å rekke opp hånda)

Sanda får ordet. Hun forklarer mens hun viser frem arket sitt. Mange gir uttrykk for at de ikke klarer å se arket hennes. Flere elever holder på med andre ting som å tegne.

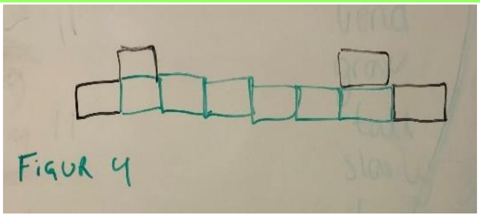
Sandra: Jeg har tenkt på en måte her foran så er det ni (peker på nederste rad på figur fire), og på den neste så er det ni i midten og så er det en på hver side.

Geir: Så Sandra så på den nederste linjen på de figurene her og hvordan den forandret seg etter hvert. Og når den startet her så hun at det var tre ruter her (fargelegger de tre rutene i midten på nederste rad på figur to på bildet på tavla, se figur 17), og så kan vi tenke oss at de tre rutene var her og så vokste den med to ruter her (fargelegger med en annen farge) og det samme fra figur to til figur tre. Så har vi de fem rutene her (peker) de kan vi tenke oss er med til figur tre, og så kommer de to rutene der (fargelegger i annen farge) Sandra har oppdaget det mønsteret her og brukt det til å finne figur nummer fire. Sandra hvordan lagde du figur fire?



Figur 17: bilde av tavla

Sandra: Jeg tok den nederste på figur tre og så la jeg til to (lærer tegner nederste rad på figur fire, se figur 18)



Figur 18: Bilde av tavla

Geir: Hvordan fortsatte du oppover?

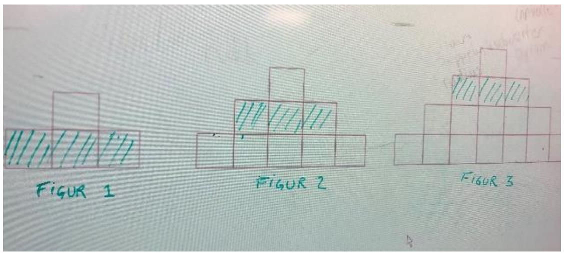
Sandra: Jeg tenkte at jeg lagde på en måte en trapp.

Geir: Resten av figuren gir seg på en måte selv. Man kan klare å tegne resten av figuren ved å se på mønsteret på den forrige.

Geir: Var det noen som gjorde det på en annen måte, som så noen andre mønstre, eller gjorde alle det sånn?

Mange bekrefter at de gjorde det sånn, men Milde rekker opp hånda.

Geir: Milde tenkte litt annerledes, hun tenkte at den nederst linja her den gikk opp hit på figur to og så gikk den opp hit på figur tre. (læreren viser på tavla, se figur 18) Hva gjorde du da når du skulle tegne figur fire?



Figur 19: Bilde av tavla

I oppsummeringen deltar Geir og elevene i generalisering (kategori 1) ved å identifisere noe som er likt på tvers av flere tilfeller (Ellis, 2011). Elevene kommer med et innspill og Geir tar på seg å forklare og tegne hva de har tenkt. Det er stort sett Geir som har ordet i oppsummeringen. Jeg opplever at dette kan være en ny utfordring, at det hovedsakelig er læreren som har ordet i oppsummeringen og at elevene i liten grad får satt ord på hvordan de har tenkt. Samtidig har Geir et faglig fokus i oppsummeringen som kan hjelpe elevene med å se sammenhenger. Han bygger videre på en generalisering eller en ide fra elevene (kategori 6 i Ellis sitt rammeverk) (2011)

4.3.3 Voksende plante – andre time hos Line

Line har lett på nettet etter oppgaver med figurtall som hun tror elevene kan få til. Hun fant en oppgave hun likte som handler om en plante som vokser.

Timen starter med at Line og elevene snakker sammen om hva de gjorde i forrige time («the raindrop task»). Line spør elevene hva de husker fra oppgaven. De snakker om selve oppgaven og at de fant mange forskjellige måter å løse oppgaven på. Line poengterer at de så etter mønstre.

Line: Det er en litt lik oppgave som dere skal få nå, men den er ikke helt den samme. Dere skal få jobbe med læringspartnerne deres. Den ser sånn ut (holder opp arket, vedlegg 11) Men på den oppgaven her er det litt av det samme. Her står det at en plante vokser hver dag sånn som dere ser på de bildene her (hun holder opp oppgavearket og peker). Hvor mange blader har planten på de ulike dagene som er satt opp i skjemaet? Se på dag en, hvor mange blader er det på dag en, og så skal dere skrive under her. Her skriver dere hvor mange blader det er, ikke sant, her tegner dere bladene, og her kan dere skrive hvordan dere kan regne det ut. Og så er det dag en her, dag to her, dag tre der, dag fire der, dag ti der, dag 100 der.

> Elev: Er det ikke noe dag 1000?
>
> Line: Nei, men det er en dag n.
>
> Elev: Hva er dag n?
>
> Line: Ja hva er dag n?

Forskjellige elever bryter ut med forslag til svar: Er det dag ni? ti? dag null? Når planten er ferdig med å vokse? Er det dag 90? Er det år?

> Line: Nei. Jeg synes der er litt vanskelig å forklare selv hva det er. Det er på en måte, det kan på en måte være alt dere sier nå, det kan være alle dager.
>
> Noen: Hæ..
>
> Elev: Det kan være 5000.
>
> Line: Hvis vi tenker at vi kan skrive den n-en der i stedet for tallet på dagen.
>
> Elever: Hæ?
>
> Line: For det er hemmelig, hvis vi sier at tallet på dagen er hemmelig så kan vi skrive n isteden.
>
> Line: Skal vi prøve først å begynne på de her, så trenger dere ikke å tenke så mye på denne ennå (dag n). Så kan dere begynne med dag fire, dag 10, kanskje til og med dag 100. Husker dere forrige oppgave, det var mange forskjellige måter man kunne gjøre det på. Så her kan dere prøve ut og tenke litt selv hvordan vi skal gjøre det.
>
> *Jeg følte litt også at når n ble dratt inn så fungerte den mer som en distraksjon. Jeg tror kanskje at den ikke burde ha vært med fra starten av. Det kunne ha vært en ekstraoppgave. Eller jeg kunne ha delt oppgaven inn i tre deler, del en, to og tre. Men det kommer an på hva man vil med oppgaven.*

Som Blanton et al (2018) argumenter for så kan det være hensiktsmessig at elever introduseres for symboler som skal representere variabler tidlig i skoleløpet slik at de blir kjent med bruken av symboler og dermed ikke opplever engstelse når de møter på symboler senere. Man kan se for seg at elevene nå fikk et første møte med symboler i algebra og at de ved gjentatte møter vil bli fortrolige med å bruke symboler. Noen av elevene syntes det hørtes litt spennende ut at man kan regne med en «n», men flere ga også uttrykk for at de følte seg forvirret. Derfor er det viktig å ha tenkt gjennom hvordan og når man introduserer variablene, spesielt om elevene selv har følt på et behov å navngi i varierende størrelse (D. Carraher et al., 2008).

Timen er preget av at mange elever rekker opp hånda og venter på hjelp. Flere går rundt i klasserommet og noen går til læreren for å spørre om hjelp slik at hun blir forstyrret mens hun veileder andre elever. Line avbryter noen ganger seg selv og ber elever om å gå tilbake til plassen sin eller å sette seg ned og tegne mens de venter på hjelp. Hun blir lenge hos de som trenger hjelp. Line sier selv etterpå at hun følte timen «raknet», hun klarte ikke å veilede elevene og samtidig passe på at alle jobbet. Hun vil ikke si for mye i innledningen (for eksempel be elevene om å fargelegge) fordi hun er opptatt av at de skal få løse oppgaven på sin egen måte. Her ser jeg igjen at det er utfordrende å få alle elevene i gang med oppgaven og å holde driven videre. Utfordringen knytter jeg til hvordan oppgaven ble presentert og hvordan læreren bruker tiden sin når hun går rundt og veileder elevene. Alle elevene klarer å tegne riktig antall blader på dag fire, men veldig mange ser ikke «hoppet» som kommer fra dag fire til dag ti. Line opplever dette når hun går rundt og veileder elevene. Noen ganger stiller hun en rekke spørsmål for å prøve å få elevene til å oppdage «hoppet» fra dag fire til dag ti, men etter hvert lar hun flere av elevene jobbe videre med det de tror stå på oppgavearket.

> *Her kunne jeg kanskje vært tydeligere på å vise at det skjer en endring. Det er jo en ting vi har jobbet med, men som de trenger å øve mer på, å lese oppgaven. Men du har på en måte det visuelle mønsteret, så det hoppet (fra dag fire til dag ti) er ikke visualisert.*

På oppgavearket er det satt av plass nederst til at de skal regne ut hvor mange blader planten som vokser har hver dag. Flere er usikre på hva de skal skrive her, og dette utløser lange samtaler med læreren der hun prøver å lede dem på rett vei.

Vi snakker etter timen om at det var mange som ikke fikk med seg «hoppet» fra dag fire til dag ti. Line mener det både handler om at de var slitne og at oppgaven var mindre visuell enn sist. I tillegg så har hun også tidligere opplevd at mange slurver når de skal gjøre en oppgave og ikke alltid leser oppgaveteksten. Jeg spør om det kan ha noe med måten oppgaven ble presentert på. I forrige time presenterte hun en og en figur, nå fikk de hele oppgavearket samlet. Line hadde lyst til å prøve en annen måte å presentere oppgaven på, det er derfor hun ikke gjorde det på samme måte som sist. Dette ser jeg i sammenheng med Moss og McNabb (2011) som mener at måtene mønstrene presenteres på er avgjørende for om elevene vil ha muligheter til å tenke på et slikt nivå at de klarer å generalisere. En faktor her er konteksten, har noen av elevene noen gang opplevd at en plante har vokst på denne måten, eller fulgt med på hvordan en plante vokser? Jeg ser på oppgavearket at oppgavene ikke er presentert som figurtall, dette er en funksjonsoppgave, men den tar ikke utgangspunkt i geometriske figurer. Dette ser jeg som et eksempel på at det kan være utfordrende for lærerne å finne oppgaver elevene skal jobbe med når de mangler kunnskap i faget.

Juanita og Magnus har ikke oppdaget «hoppet» fra dag fire til dag ti, men kommer på sporet etter en samtale med Line. Deretter stiller Line spørsmål til elevene for å få dem til å reflektere over hvordan de regner seg fra dag 10 til 20 blader.

> Line: Så hvis det hadde vært dag fem så hadde det vært ti, men dette er jo dag ti.
>
> Juanita: 20
>
> Line: Ja hvordan har du tenkt da?
>
> Juanita: Jeg bare doblet det, men er det riktig?
>
> Magnus: Jeg tenker også 20.
>
> Line: Du tror også det er 20 på dag 10?
>
> Magnus: Det må bli 20
>
> Line: Men hva doblet du?
>
> Juanita: Det var ti, og da doblet jeg til 20.

Line tenker litt

> Juanita: Så det er ikke 20?
>
> Line: Det har jeg ikke sagt. Kan du forklare hvorfor det blir 20? For du dobla, var det den du dobla? (peker på dag ti)
>
> Juanita: Ja
>
> Line: Men hvorfor tenkte du at det var riktig å doble den?

Juanita: eh.. for den, jeg bare..

Line: Jeg sier ikke at det er feil, men klarer du å tenke hvorfor du dobla den?

Juanita: Det er fordi du sa at, det er bare det jeg trodde

Line: Jeg synes du skal skrive det du tror, jeg skal ikke si noe om hva som er riktig eller feil. For det kan være mange forskjellige ting også, det kan være mange måter å gjøre det på

Selv om man kanskje i liten grad kan påstå at det foregikk generaliseringer i denne sekvensen så prøver Line oppmuntre elevene til å generalisere ved d) å formulere en verbal beskrivelse av et mønster eller en regel. Elevene sier at de dobler, men de klarer ikke å sette ord på hva eller hvorfor de dobler. Det kan også virke som om Line sine spørsmål forvirrer elevene mer enn de hjelper dem. Da jeg snakker med Line etter timen så har hun reflektert over hva som skjedde da hun gikk rundt og veiledet elevene.

En ting som jeg la merke til var da jeg spurte «hvordan har du tenkt her?», så tolker de det som at det ikke er riktig. For når vi gjør oppgaver i boka, hvis de har riktig så sier jeg: ja det er riktig. Hvis det er feil så spør jeg sånn: «hvordan har du tenkt her», så nå tror jeg de har lært sånn at hvis jeg spør hvordan de har tenkt så betyr det at de har feil, så jeg lurer på om det forvirrer dem.

Dette kan tyde på at elevene kobler det at læreren spør hva de har tenkt til at de har tenkt feil. Elevene blir usikre når læreren flere ganger spør hva de har tenkt og spør dem stadig nye spørsmål. Line sier selv at hun synes det er viktig at elevene får satt ord på hva de tenker og får øve seg på å forklare. Men det kan virke som om det ikke er en sosiomatematisk norm i klassen at det er en god ting å forklare hva man har tenkt. Line sier også selv at hun pleier å si at «det er riktig», og ikke spørre mer dersom elevene har klart å løse en oppgave. For de fleste elever vil det være ønskelig å klare å løse en oppgave, og da vil det kanskje ikke oppleves så positivt å få stadig nye spørsmål av læreren om hvordan man har tenkt og ikke et positivt svar på at oppgaven er løst riktig som de er vant til. Jeg opplever derfor at det er en utfordring i klassen til Line at de sosiomatematiske normene kan være til hinder for algebraisk tenkning.

Gunnar og Jens har fylt ut oppgavearket, men har ikke skrevet noen utregninger nederst på arket.

Line: Hvordan har dere tenkt?

Jens: Vi har tenkt to-gangen.

Jens: To, fire, seks, åtte, men der er det dag ti da.

Line: Kunne dere klart å skrive utregningen der, hvordan man regner det ut. Så hvis dere har tenkt to-gangen, da blir det liksom, hva skal man skrive der? (peker på nederste rad) Det blir sånn to ganger, eller hva i to-gangen blir det her

Jens: En ganger to

Line: Ja, kan dere skrive det her? Og så fylle inn på de andre også

Gunnar: Det her er to ganger to er det ikke?

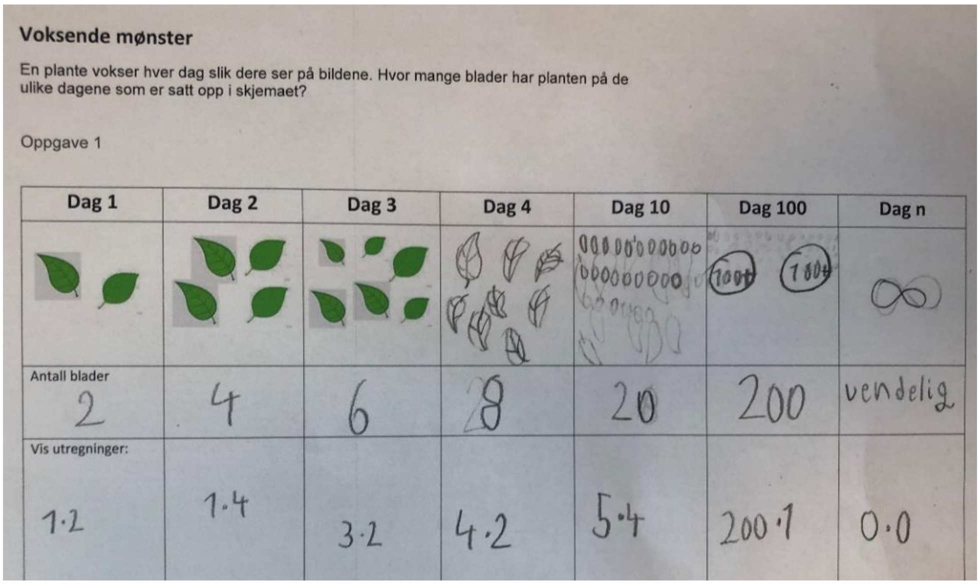
Line: Skriv det som dere tenker, det dere tror blir riktig

Litt senere kommer Line tilbake til guttene igjen. Hun studerer arket og leser høyt det de har skrevet (en ganger to, en ganger fire, tre ganger to, fire ganger to, fem ganger fire, 200 ganger en, se figur)

Line: Hvordan tenkte dere da? Hvor kom de tallene fra?

Jens: For eksempel hvis man tar fem ganger en det blir alltid det tallet som er foran, så 200 ganger en må bli 200.

Vi har ikke hatt så mye rike oppgaver. Så det å knytte regneuttrykket til det man gjør eller dagligtalen har vi jobbet lite med. Elevene så mønsteret i dag, men med en gang de skulle lage et regneuttrykk…, de så ikke den broa der liksom.



Figur 20: Arket til Jens og Gunnar

Det er flere elever som i likhet med disse guttene har skrevet regnestykker som ikke stemmer overens med konteksten i oppgaven (en plante som får to nye blader hver dag). Line opplevde selv at det var flere som hadde tenkt ganging. Men da de skulle skrive det som gangestykke så klarte de det ikke.

> *Jeg tror de kom fram til svaret ved å bruke ganging, men da de skulle skrive det ned så klarte de det ikke, så da skrev de bare et stykke som fikk det som svar. Det er jo ikke feil heller.*

Jeg tenker at det kunne vært interessant å undersøke videre om elevene har forstått hva multiplikasjon er. Har elevene bare oppdaget at tallene (2,4,6,8…) er fra to-gangen, eller har de oppdaget at antall blader er det dobbelte av nummeret på dagen? Dersom elevene tilfeldig har oppdaget at de finner igjen tall fra to-gangen kan vi ikke kalle dette algebraisk tenkning, ifølge kravene til Radford. Elevene jobber med en ubestemt størrelse og de representerer den på sin måte, men de håndterer ikke de ubestemte størrelsene analytisk. Dersom elevene skal klare å generalisere må de se sammenhengen mellom variablene i funksjonen, dvs mellom nummeret på dagen (den uavhengige variabelen) og hvor mange blader det er den dagen (den avhengige variabelen) og da må de oppdage at det alltid er dobbelt så mange blader som nummeret på dagen. Her ser jeg at det er en utfordring at elevene sliter med å se sammenhengen mellom nummeret på dagen og hvordan de kan regne ut antall blader planten da har.

Timen er snart slutt og Line prøver å få oppmerksomheten til alle elevene slik at de kan ha en kort oppsummering mens elevene sitter ved pultene sine.

> Elena: Jeg tenkte å doble det, så da dobla jeg alle bladene, og dobla 100, og da ble jo det 200, og da tegna jeg 200 blader
>
> Line: Hmm, så du har brukt dobling for å finne dag 4, dag 10 og dag 100. Er det andre som har lyst til å fortelle hvordan de har tenkt? Guri?
>
> Guri: Jeg tenkte at man bare kunne bruke 2-gangen.
>
> Line: Ja, to-gangen
>
> Line: Så da har vi brukt dobling og to-gangen. Milla?

Milla: Jeg tenkte på to-gangen litt, bare at vi hopper over en i midten, to, hopper over tre, fire, hopper over fem, seks, hopper over syv, åtte hopper over ni, elleve, tolv, tretten, og så blir det 14

Line: Så da har du brukt partall kanskje?

Milla: Ja

Line: Så det er partall, to-gangen, dobling. Da ser vi at det er veldig mange måter å gjøre det på, og alle måtene er jo egentlig riktig, så det er ikke sånn feil, det er mange forskjellige riktige svar.

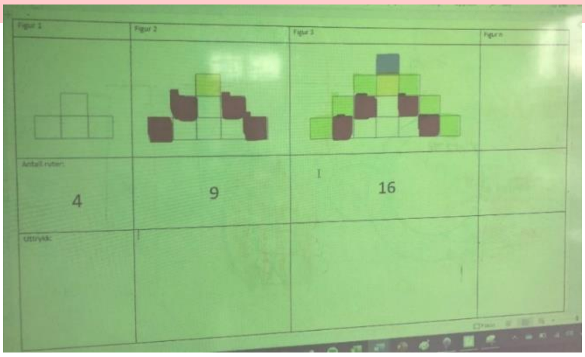
Line oppsummerer de tre forskjellige måtene elevene har beskrevet tallene de har kommet frem til. Hun sier at måtene er forskjellige, men bruker ikke tid på å bemerke sammenhengen mellom disse tre måtene å se oppgaven på. Denne oppsummeringen blir brukt til å la elevene få dele med klassen og sette ord på hva de har kommet frem til, men det gjøres i liten grad generaliseringer, læreren oppfordrer heller ikke elevene til å generalisere. Jeg ser at det kan være en utfordring hos Line at oppsummeringen hovedsakelig brukes til sosiale formål heller enn faglige mål.

4.3.4 Voksende plante – andre time hos Geir

I en kort samtale med meg før timen forklarer Geir hvorfor han valgte å ikke trekke inn utregninger i forrige time. Han har også reflektert litt over hvordan den første oppgaven fungerte som oppstart.

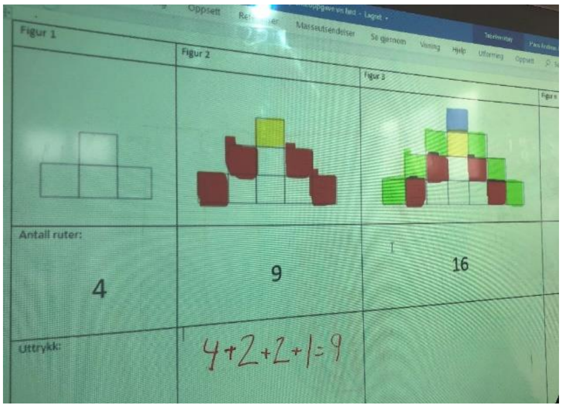
> *Jeg planlegger å bruke den oppgaven vi hadde sist som et springbrett inn i denne oppgaven her. Det ble så kompliserte uttrykk hvis vi skulle tatt utgangspunkt i det mønsteret de fant. Det ble sånn rekursiv formel, forrige figur, pluss to på hver linje, pluss en, da tror jeg hadde mista manga. Det hadde vært bedre å hatt et litt mer komplisert figurtall i dag og hatt det enkle (med bladene) første time, det som vi skal ha i dag. Matematikken er enkel, og så kan vi heller bruke energien på å prøve å få til uttrykket.*

Geir starter timen med å vise løsningen på forrige oppgave (the raindrop task) på tavla. Han har fargelagt de «nye» brikkene på figur to og figur tre slik at det skal være lettere å se hvordan figuren vokser. Han har brukt det samme skjemaet som brukes på oppgavene elevene får i dag. Se figur 20.



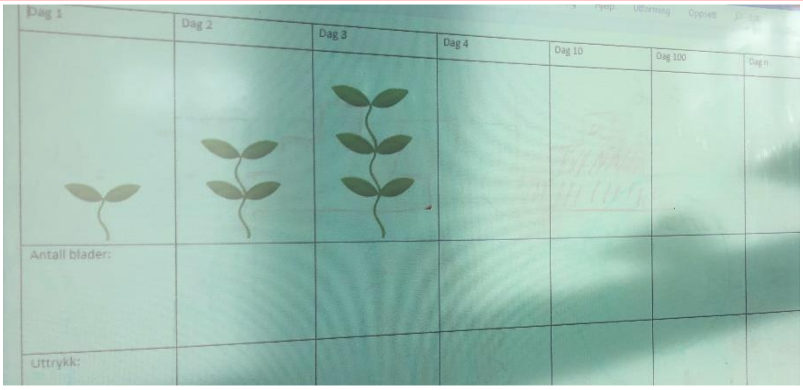
Figur 21: Bilde av tavlen

Geir starter med å si litt om oppgaven de jobbet med i forrige time og at de i dag skal prøve å bruke matematikk for å si noe om hvordan figuren forandrer seg. Det utvikler seg etter hvert til å bli en ganske lang introduksjon der Geir stort sett har ordet, men spør elevene om innspill til hvordan man kan sette opp et regnestykker for å finne ut hvor mange ruter det er i hver figur. Han får et innspill som ikke passer helt til måten han har fargelagt de «nye» rutene på i figuren, men klarer ved hjelp av flere elever å komme frem til en måte å sette opp regnestykkene på (se bilde fra tavla, figur 23).

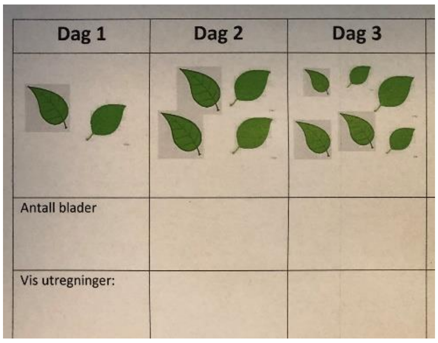


Figur 24: Bilde av tavlen med utregning

Geir viser frem den nye oppgaven på tavla (figur 22). Han bruker den samme oppgaven som Line, men har satt inn andre figurer som skal illustrere hvor mange blader planten har hver dag. Han har også skrevet «uttrykk» der det stod «vis utregninger» på Line sitt ark. Se figur 21 for et utsnitt av oppgavearket til Line.



Figur 23: Bilde av tavlen med den nye oppgaven



Figur 22: Utsnitt av Line sitt oppgaveark

> Geir: Dere skal få denne oppgaven snart. Hvor mange blader planten får er øverst her, og så prøver vi å vise med matematikk nederst i ruten her, hvordan den planten vokser. Og så må vi legge merke til at det er dag 1, dag 2, dag 3 og dag 4, og så plutselig hopper den til dag 10, så hopper den til dag 100, og til slutt så står det «dag n».
>
> Elev: Hva betyr det?
>
> Geir: Det betyr at til slutt så skal vi lage noe ved hjelp av matematikk, en formel som vi kan bruke til å finne ut hvor mange blader planten har på en hvilken som helst dag. Men den trenger dere ikke å tenke så mye på.

Janne har tegnet planten og skrevet hvor mange blader det er på de forskjellige dagene.

Geir: Det er greit. Her nede da? (peker på den nederste raden på arket) Hvordan tenker du på en måte når du går fra den planten her til den planten der, kan du vise det med et regnestykke?

Jente: Jeg tenkte to-gangen, helt bort her.

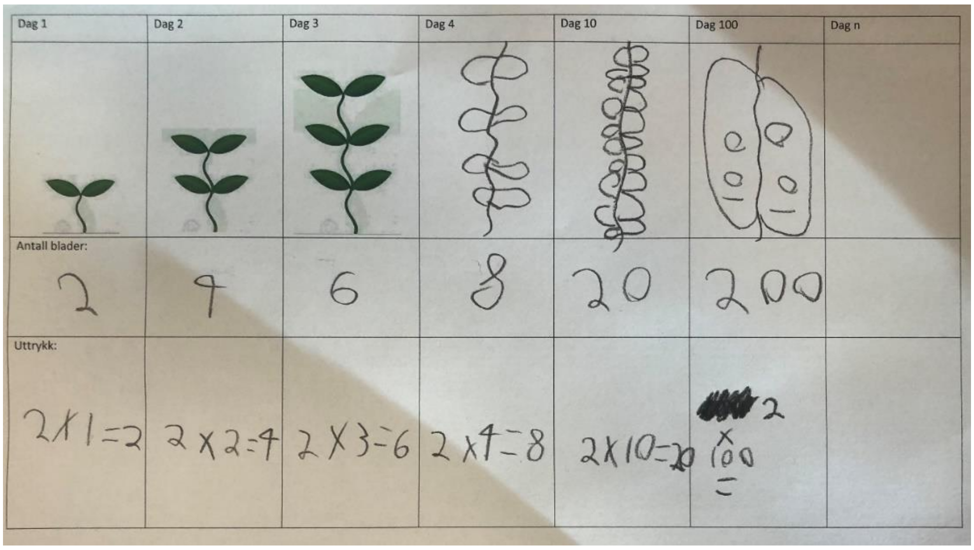
Geir: Da skriver du det her nede da. Det tallet du ganger med, kan vi finne igjen det noe sted? Er her det to ganger en, to ganger to, kan vi finne igjen det noe sted?

Janne peker på bladene på dag en.

Geir: Ja, og her ganger du med to, er en noe sted her oppover her?

Janne peker på «dag 1».

Geir: Veldig bra, skriv ferdig den rekka der (figur 25 viser arket til Janne når «rekka» er skrevet ferdig)



Figur 25: Oppgavearket til Janne

Her oppmuntrer Geir til generalisering ved at han d) får eleven til å formulere en verbal regel for hvordan mønsteret utvikler seg.

Adrian: Jeg skjønner ikke, det der går på to-gangen, det vet jeg. Men jeg er usikker på om det der er to ganger ti eller noe annet. Og jeg prøver å regne ut, men det gir like mye mening i begge. Jeg synes det er veldig vanskelig

Geir: Vi kan se her da, her har du to, hva måtte du gange med to her for å få så mange blader

Adrian: En

Geir: Da skriver du en ganger to, for du sier at du bruker to-gangen, du ganger to. skriv det regnestykket, en ganger to er lik to

Adrian: To, og to ganger to

Geir: Riktig, og sånn er du egentlig veldig nær å finne en formel som kan brukes på en hvilket som helst dag

Adrian: Jeg vet at det går på to-gangen, men jeg er usikker på om det er ti eller 20 blader der

Geir: Her har du ganga med en for å få to ikke sant? Hvor finner du tallet en?

Adrian: Der

Geir: Og her har du ganga med to, hvor finner du det tallet?

Adrian: Der

Geir: Og her har du ganga med tre, hvor finner du det tallet?

Adrian: Her

Geir: Så det kan du gjøre her også ikke sant?

Her veileder Geir eleven til å lage gangestykker der han ganger med to for å få tallene han har skrevet i skjemaet. Eleven sier i starten at han vet det går på to-gangen, men at han er usikker på hva han skal gange to med. Geir hjelper han med dette, men har eleven forstått hvorfor han skal gange to med de forskjellige tallene? I starten av oppsummeringen tar Geir tak i dette og skaper sammen med elevene relasjoner mellom utregningene, planten som vokser og nummeret på dagen.

Det er tid for oppsummering og Geir spør om noen vil fortelle hva de tenkte, hvordan de startet å løse oppgaven. Geir oppmuntrer elevene til å dele generaliseringene sine, dette er kategori 3 i Ellis sitt rammeverk (2011).

Marte: På treeren skrev jeg 3+3=6

Geir: Hvor hentet du tre fra da?

Marte: Bladene på den ene siden.

Geir: Ikke sant, den treeren her kommer fra de bladene her (ringer rundt de tre bladene til venstre) og den treeren her kommer fra den siden her (ringer rundt de tre bladene til høyre og skriver 3+3)

Geir: Er det en annen plass vi kan finne tre?

Even: Dag tre

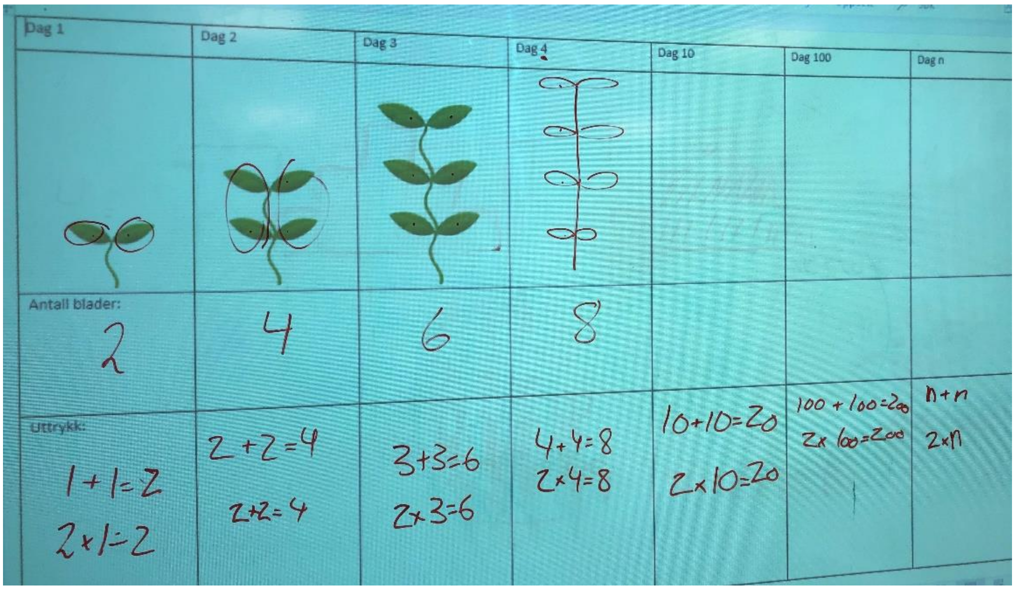
Geir: Dag tre ja (peker på tavla)

Geir: Kan vi bruke denne måten å regne på på dag fire?

Even: 4+4

Geir: Fire pluss fire er lik åtte, og her også vil det fungere 2+2 =4, og her også vil det fungere, 1+1.

I dialog med elevene skriver Geir på skjemaet som er på tavlen (figur 26) både addisjons-uttrykkene og etter hvert også multiplikasjons-uttrykkene. Geir snakker det meste av tiden. Han peker flere ganger på sammenhengen mellom nummeret på dagen, bladene og regneuttrykket. Geir bygger videre på elevene sine generaliseringer og ideer, dette er kategori 6 i Ellis sitt rammeverk (2011).



Figur 26: Bilde av tavlen etter oppsummeringen

Geir: Og hvis vi da tenker på den siste her, dag n. Akkurat som det står dag en, to, osv, så står det dag n her. Det tallet som står her oppe er enten brukt til å plusse eller gange.

Så hvis vi bruker det tallet her oppe så har vi plutselig en formel som vi kan bruke til å regne med

Elev utbryter: To pluss n

Geir: Vi kan bruke n til å finne ut hvor mange blader det er for hvilken som helst dag. Så hvis vi hadde tatt dag 8, så hadde det blitt 8+8 eller 2 ganger åtte hvis vi brukte gangeformelen.

I ettertid så sier Geir at han ikke burde hatt med «n» i oppgaven i dag, at det ble for komplisert og for tidlig for elevene å bli introdusert for symboler. Dette stemmer overens med Carraher et al (2008) som mener at symboler må innføres gradvis og klokt slik at elevene kan forstå og selv klare å ta i bruk symbolene. I timen til Geir ble variabelen «n» introdusert uten at elevene selv hadde opplevd et behov for å navngi en ukjent/varierende størrelse.

4.3.5 Funn etter første runde med undervisning

Jeg har analysert intervju 2 som jeg hadde med begge lærerne etter at de hadde gjennomført de to første undervisningstimene, og koblet dette opp imot mine funn i observasjonene av timene.

Når det gjelder å legge til rette for generalisering i klasserommet så ser jeg av transkripsjonene at både Line og Geir i hovedsak bruker kategori nummer 2, å oppmuntre andre til å generalisere (Ellis, 2011). Dette gjør de både mens de introduserer oppgavene og når de går rundt og veileder. Noen ganger deltar også lærerne i generalisering (kategori 1). Lærerne oppmuntrer også elevene til å dele det de har gjort når det er oppsummering, i den grad de klarer å knytte dette til generalisering kan noen av disse oppmuntringene knyttes til kategori 3 i Ellis sitt rammeverk. Jeg har observert noen få tilfeller hos begge lærerne der de oppmuntrer til begrunnelser eller forklaringer (kategori 5). Mens Line bruker oppsummeringene til å la elevene få fortelle hva de har gjort har Geir i større grad fokus på generalisering ved at han deler elever sine generaliseringer eller ideer (kategori 4) og at han bygger videre på en generalisering eller en ide (kategori 6) (Ellis, 2011). Dette kan både knyttes til lærernes oppfatning av algebraundervisning, men også til deres kunnskap om algebra.

Ut i fra samtalene jeg hadde med lærerne etter undervisningen og ut ifra hva jeg la merke til da jeg gikk i gjennom notater fra timene og transkripsjonene så formulerte jeg fem utfordringer som lærerne støtte på i timene de underviste i algebra. Jeg lagde en oversikt over disse utfordringene og knyttet disse til grep som lærerne kunne ta fatt i for å jobbe med disse utfordringene. De to første utfordringene er et resultat av den åpne kodingen som gikk på utfordringer som ikke er direkte knyttet til generalisering. De tre neste går på funksjonstenkning og generalisering. Lærerne fikk presentert disse og i tillegg mine innspill til hvordan de kunne jobbe med disse (se tabell 9). Jeg valgte å presentere disse utfordringene for lærerne og la det være opp til dem hvilke de ville ta tak i. Dette fordi jeg oppfatter lærerne som kunnskapsprodusenter (Hermansen & Mausethagen, 2016).

4.3.5.1 Utfordring 1: Elevene kommer raskt i gang og opplever «flyt» mens de jobber:

Det var gjennomgående i timene, og spesielt i timene til Line at mange elever slet med å forstå og komme i gang med oppgavene. Mange elever ventet lenge på hjelp, og lærerne rakk ikke innom alle i løpet av timen. I tillegg ble flere elever arbeidsløse dersom de raskt ble ferdige med oppgavene. Hos Line fikk de ofte gjøre andre ting, som å tegne, mens hos Geir fikk de nye oppgaver i stedet for å få muligheten til å fordype seg i oppgaven de opprinnelig holdt på med.

Geir ønsker ta tak i dette ved å finne oppgaver som elevene i klassen kan få til, og som bygger videre på det de har jobbet med til nå. Han vil fortsette med oppgaver som likner på de elevene har løst til nå, og så ha noen vanskeligere oppgaver i bakhånd til de som har klart å løse oppgavene.

> *Jeg skal prøve å ikke gjøre så mye nytt neste gang, og prøve å få med flere. Det er mye bra som foregår når jeg går rundt, samtidig blir det fort urolig. Så jeg må jobbe med å få dem til å sitte rolig og få dem til å bli værende i oppgaven.*

Jeg foreslår for lærerne at de ser på hvordan de introduserer oppgaven for elevene. I tillegg så foreslår jeg at de ser på selve oppgaven de gir til elevene, hvordan den er formulert, og vurdere å presentere T-tabellen (M. L. Blanton, 2008) for elevene slik at de lærer seg å bruke et verktøy som kan hjelpe dem med å holde oversikt over variablene de jobber med.

4.3.5.2 Utfordring 2: Elevene følger med og får faglig utbytte av oppsummeringen:

Mange elever gjorde andre ting og det var tydelig at flere ikke fulgte med da læreren ledet oppsummeringen i slutten av timen. Noen elever sa at de ikke hørte det som ble sagt eller at de ikke så hva som stod på oppgaveark som ble vist frem. Spesielt i klassen til Line er det mange elever som ikke følger med når det er oppsummering på slutten av timen. Jeg foreslår at lærere tar ideer fra «Fem praksiser» (Smith & Stein, 2011) slik at de får hjelp til å strukturere oppsummeringen og holde faglig fokus på det som er målet med timen. Bruk av samtaletrekk (Kazemi & Hintz, 2014) kan også hjelpe til med å engasjere flere av elevene, da må de være fokusert og klare for å gjenta hva en elev sier, kanskje det blir mer interessant for dem også. Jeg foreslo at de også velger ut noen elevløsninger som det fokuseres på slik at oppsummeringen ikke tar så lang tid.

Det Line ser som den største utfordringen med «Fem praksiser» er «utvelging» og «rekkefølge», hun tenker at det forutsetter kunnskap og erfaring. Fordi hun ikke har et trenet blikk så opplever hun at det er vanskelig å få oversikt.

4.3.5.3 Utfordring 3: Elevene ser sammenhengen mellom de to variablene

Denne utfordringen henger i stor grad sammen med den neste. Men det er viktig at elevene først oppdager sammenhengen mellom de to variablene og deretter klarer å bruke den uavhengige variabelen til å regne ut den avhengige variabelen. I oppgavearket som elevene fikk i 2. time da de jobbet med planten som fikk to nye blader hver dag så var bladene tegnet på de tre første dagene allerede, og elevene skulle bare tegne blader til dag fire før de skulle «hoppe» til dag ti og tegne antall blader der. Det kan være at elevene fikk for liten erfaring med mønsteret i oppgaven til å klare å se sammenhengen.

Jeg opplevde at tabellen som ble brukt på oppgavearket elevene fikk forvirret dem. Jeg foreslår at lærerne bruker en utvidet T-tabell slik at det blir lettere for elevene å se sammenhengen mellom de to variablene.

4.3.5.4 Utfordring 4: Elevene ser sammenhengen mellom figurtallene og hvordan vi kan regne ut antall brikker i figuren

I den andre timen da elevene skulle regne ut hvor mange blader planten som vokste hadde hver dag var det mange elever som «fant på» tilfeldige regnestykker som fikk det svaret de var ute etter. Det var få elever som oppdaget korrespondansen (eng: *correspondence relationship)* mellom variablene og som så hvordan de kunne bruke figurtallene (den uavhengige variabelen) til å regne ut hvor mange blader (den avhengige variabelen) det ville bli på de forskjellige dagene. I oppgavearket som elevene fikk i den andre timen der de skulle finne hvor mange blader planten hadde hver dag så var det først satt av en rad til å tegne bladene, deretter skulle de skrive hvor mange blader det var hver dag og til slutt regne. Dette kan ha gjort at elevene ikke klarte å se sammenhengen mellom utregningen og hvordan de fant ut hvor mange blader det var de forskjellige dagene. Jeg foresår at lærerne introduserer en utvidet T-tabell for elevene slik at de lettere kan oppdage sammenhengen mellom variablene og å knytte en utregning til denne sammenhengen.

Geir forteller at de ikke har jobbet så mye med ganging, men at han prøver å jobbe parallelt med forståelsen og automatiseringen. Han forteller at de som så at det var to-gangen som gikk igjen i oppgaven med planten som vokser ikke nødvendigvis tenkte noe bestemt mønster, de bare kjente igjen tallene fra to-gangen. Dermed ble det utfordrende å få elevene til å knytte utregning til antall blader planten hadde.

4.3.5.5 Utfordring 5: Elevene generaliserer og setter ord på generaliseringen:

Det er utfordrende å både generalisere og sette ord på generaliseringen. Da lærerne veiledet elevene så gjorde de flere forsøk på å få til dette, men få elever fikk det til. Ved å be elevene lage oppskrifter og bruke sitt naturlige språk så kan lærerne legge til rette for at elevene kan få til dette (Malara & Navarra, 2018; Steinweg et al., 2018).

Tabell 9: Utfordringer som lærerne kan ta tak i

Utfordring:	**Forslag til hvordan lærerne kan ta tak i dette:**
1.Elevene kommer raskt i gang og opplever «flyt» mens de jobber	• Presentasjon av oppgaven slik at elevene kommer raskt i gang. Line gjorde dette på en god måte den første timen (viste en og en figur), og Geir har en god måte å bruke prosjektor (oppgaven på tavla) kombinert med å tegne/vise. Kanskje dere kan fortelle hverandre om dette og diskutere oppstart av oppgaven? • Pass på at det er lett å komme i gang, kanskje de skal finne både figur 3, 4 og 5 før de for eksempel hopper til 10? Også så kan dere «spare» utfordringene (store tall for eksempel) til de som trenger det • Introduser T-tabellen, og la det være god plass for elevene til å finne flere figurtall for de som rekker det • Planlegg spørsmål dere kan stille elever som står fast, hjelp flere grupper samtidig hvis flere sliter med det samme
2.Elevene følger med og får faglig utbytte av oppsummeringen	• «Fem praksiser», velg ut noen elevløsninger som man kan gå i dybden på • Samtaletrekk, tenkt spesielt på å repetere det elevene sier bruke begreper dere vil at de skal lære seg • Tegn og vis på tavla (Geir er ganske dreven på dette) mens eleven forklarer
3.Elevene ser sammenhengen	• Introduser T-tabellen • Utvid T-tabellen med en kolonne i midten der elevene kan regne og forklare

mellom de to variablene	
4.Elevene ser sammenhengen mellom figurtallene og hvordan vi kan regne ut antall brikker i figuren	• Utvidet T-tabell • Når elevene lager regneuttrykk til figurene, spør: hvor kommer 5 fra? (dette tror jeg dere begge to allerede gjør mye) • Bruk farger på figurene og knytt dette til utregningene (Geir gjorde noe sånt i 2. time) • Se sammenhenger mellom forskjellige måter å regne på (eks $2 \cdot 3$ og $3+3$)
5.Elevene generaliserer og setter ord på generaliseringen	• La elevene få lage en «oppskrift». «Når Kari kommer på jobb i morgen og får vite nummeret på figurtallet, hvordan kan hun da regne ut hvor mange brikker hun trenger» (kanskje hun er flislegger for eksempel)

For å finne ideer til oppgaver å jobbe videre med anbefalte jeg lærerne å bruke artikkelen «A framework for Analyzing Geometric Pattern Tasks»(Friel & Markworth, 2009) og https://www.youcubed.org/algebra/ Jeg foreslo også at lærerne kunne løse oppgavene de valgte ut sammen for å forutse forskjellige elevløsninger, som en del av «Fem praksiser».

4.3.5.6 Utfordringer som jeg ikke kommuniserte til lærerne

I tillegg til utfordringene som jeg presenterte for lærerne så har jeg lagt merke til flere utfordringer når jeg har analysert transkripsjonene fra undervisningstimene. Jeg går i gjennom noen av disse utfordringene her. Jeg valgte å ikke inkludere disse i oversikten jeg ga til lærerne av flere årsaker. For det første har de allerede fått mange utfordringer å ta tak i, og det er begrenset hvor mye de kan klare å forholde seg til og ta tak i den tiden vi jobber sammen. Jeg har ikke lyst til at de skal miste motet heller, de har fått til mye på kort tid, og det er viktig å ha fokus på det også. I tillegg så vil flere av utfordringene kreve langvarig og målrettet arbeid. Dette gjelder for eksempel å ta tak i de sosiomatematiske normene og den vanskelige balansen mellom sosiale hensyn og faglige mål.

Lærerne har lært mye på kort tid, men de mangler kunnskap innenfor alle de tre områdene (skolealgebra, avansert matematikk og undervisningskunnskap om algebra) som McCrory et al (2012) skisserer. Det er spesielt hos Line denne mangelen på kunnskap er tydelig. Dette kan komme til uttrykk når hun velger ut oppgaver, for eksempel da han skulle finne en oppgave som handlet om figurtall så endte hun opp med en funksjonsoppgave. At læreren mangler kunnskap kan gjøre at det faglige fokuset delvis forsvinner og at læreren ikke klarer å utnytte elevinnspill. Et eksempel på dette er da Milla presenterer funnene sine i «the raindrop task» og tydelig har oppdaget sammenhengen mellom variablene (figurnummeret og antall rader i figuren), men så blir det ikke satt ord på denne sammenhengen og funnet blir heller ikke utnyttet videre.

Det er også en utfordring å balansere i hvor stor grad elevene skal slippe til i oppsummeringssamtalen og forklare med egne ord. Geir har ordet nesten hele tiden. Han begynner noen ganger å fargelegge figurene og spør elever om regnestykker som passer til, men får ofte innspill som ikke passer helt til det han har lagt opp til. Mens Line lar elevene slippe til i stor grad, men i liten grad knytter det som blir sagt til matematikken. Dersom elevene bare skal fortelle hva de har gjort og ikke blir stilt kritiske spørsmål underveis kan matematikken komme i bakgrunnen. Elevene mister muligheter for læring dersom de ikke får sette ord på det de oppdager og forsvare sine funn.

Sosiomatematiske normer kan gjøre at det blir utfordrende å legge til rette for algebraisk tenkning. I klassen til Geir er det mye som tyder på at det er ansett som en god ting å bli raskt ferdig med oppgavene, dette kan være til hinder for utforskning og refleksjon. I klassen til Line blir spørsmål fra læreren om å forklare hva de har tenkt forstått slik at elevene tror de har løst oppgaven feil.

Det kan være vanskelig å forstå hva elevene tenker. Dette krever kunnskap og erfaring. Lærerne må også være forberedt på forskjellige måter elevene kan løse oppgavene på og ta utgangpunkt i deres perspektiv videre.

I klassen til Line kommer faglige mål i bakgrunnen til fordel for sosiale mål. Line tar ikke tak i feil som gjøres, selv om hun i oppstarts-intervjuet sier at det er viktig å lære av feil. Dette kan også ha med fagkunnskap å gjøre.

Det er mye som skjer samtidig og det kan være vanskelig å for læreren å rekke å ta tak i alt og veilede alle som trenger det.

I tillegg kan lærerens oppfatning av matematikkundervisning være en utfordring. Geir er opptatt av å forklare og vise elevene sammenhenger når oppgavene oppsummeres, og dette kan hindre at elevene selv får utforske, oppdage og sette ord på de generaliseringene de har gjort.

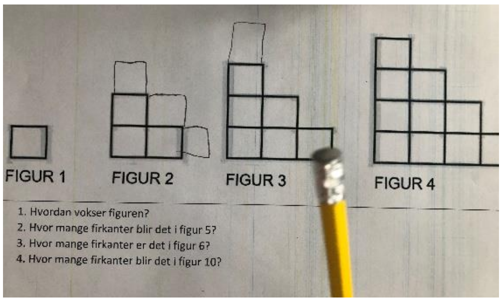
4.4 Andre runde med undervisning

Oppgaven som brukes i den tredje timen i begge klassene har Geir funnet på Internett.

4.4.1 Trekanttall – tredje time hos Geir

Geir forteller klassen at han har en ny grublisoppgave til dem. Han har laget en digital presentasjon der han viser en og en figur på tavla, først figur en, til slutt figur fire (slik som Line gjorde i den aller første timen). Til slutt vises alle figurene samtidig. Han legger trykk på at elevene skal se etter hvordan figuren vokser og at de ikke skal telle, men regne hvor mange firkanter figurene består av. Han vil at de skal vise det på en veldig grundig måte slik at alle forstår og at de skal lage en forklaring der de tegner eller skriver. Elevene får utdelt et oppgaveark (vedlegg 13) og en utvidet T-tabell (vedlegg 14) som delvis er påbegynt.

I denne timen er det også en elev som har løst oppgaven annerledes og har tegnet på brikker på figurene for å se hvordan de vokser. I introduksjonen så ber Geir elevene om å se etter hvordan figuren vokser. Dette kan legge til rette for rekursiv tenkning.



Figur 27: Jasmin sitt oppgaveark

Geir: Jasmin, hvorfor tegner du på nye her sånn? (hun har tegnet på ekstra firkanter på figur to så den er lik figur tre)

Jasmin: Fordi at jeg tegner hvordan den vokser med nye figurer på den.

Geir: Ja, men du må huske på at de der hører egentlig ikke til figur to, det er kun de tre som er på figur to, men du er jo borte i noe da, når du har tegnet på disse her, ligner den på noe?

Jasmin: Jeg prøver å få den litt lik

Geir: Hvor mange firkanter er det her da? (peker på figur to)

Jasmin: Seks

Geir: Og hvor mange firkanter er det i den? (peker på figur tre)

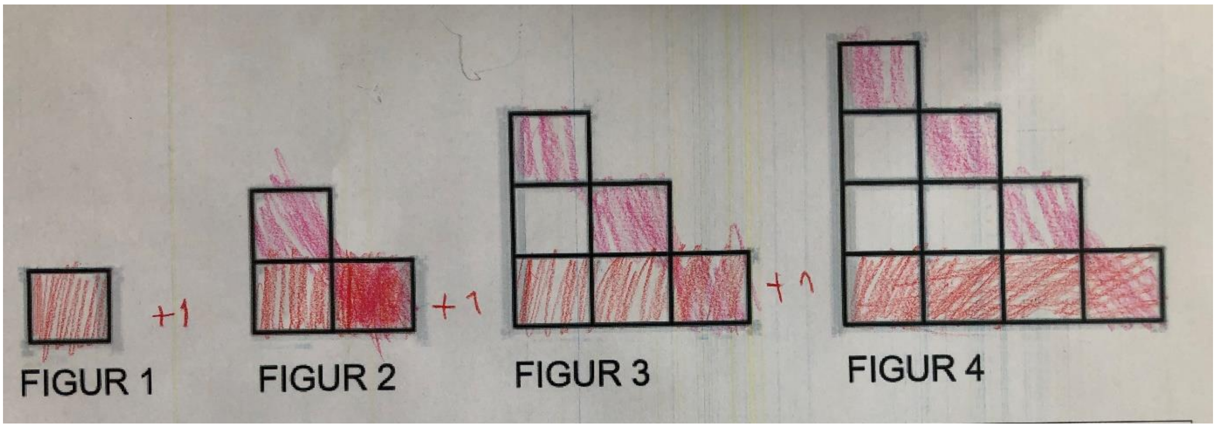
Jasmin: Syv

Geir: Ja det er syv, men hvis du ikke tar med den firkanten du har satt på selv

Jasmin: ..em, seks

Geir: Fire, fem, seks. Så når du tegner på de her så har du plutselig fått den figuren der, da er de like, ser du det (figur to og tre)

Geir: Her har du egentlig vist hvordan figur to vokser til figur tre



Figur 28: Janne sitt oppgaveark

> Geir: Ok Janne, hva har du tenkt
>
> Janne: En her og en her og så en oppover. Her er det to, her er det tre og her er det fire (peker på nederste linje)
>
> Geir: Ok, hvis vi starter med å se hvor mange flere firkanter det blir fra figur en til figur to og fra figur to til figur tre

Videre stiller Geir Janne spørsmål som skal gi svar på hvor mange brikker hele figuren vokser med. Geir tar ikke utgangspunkt i måten Janne har fargelagt figuren på (den nederste raden er rød, nye brikker på toppen av figuren er rosa). Igjen virker det ut i fra spørsmålene han stiller som om det er vanskelig for Geir å forstå eller å ta seg tid til undersøke hva eleven har tenkt selv.

I oppsummeringen blir Kriss valgt ut til å forklare sin løsning først.

> Kriss: Den der kan være den eller den (peker først på figur en og så på firkanten øverst og så firkanten til høyre på figur to), den der kan være den eller den (peker først på figur to og så øverst og så til høyre på figur tre) den der kan være den, den, den eller den (peker først på figur tre og deretter forskjellige steder på figur fire)
>
> Geir: Ja, men hvis du skal finne et system så må du nesten velge da.

Geir: Det som er bra da som Kriss er inne på her er at når du får en sånn figur og skal finne et system, finne ut hvordan den vokser, så kan du velge om det skal være denne firkanten som skal være figur en, eller denne eller denne (peker forskjellige steder på figur to) og så se etter et system, prøve å finne ut hvordan figuren vokser når du har funnet figur en her på figur to. så vokser den med en over og en på siden her, eller som Kriss sa så kan figur en være til høyre her, da kommer det plutselig to firkanter i en søyle her som er en firkant større enn den første søylen (peker på figur to). Funker det videre også, hvis vi tenker at dette er figur en og dette er figur to (peker på figur tre), da kommer den to firkanter her og tre firkanter her (loddrette rader som settes på fra venstre)

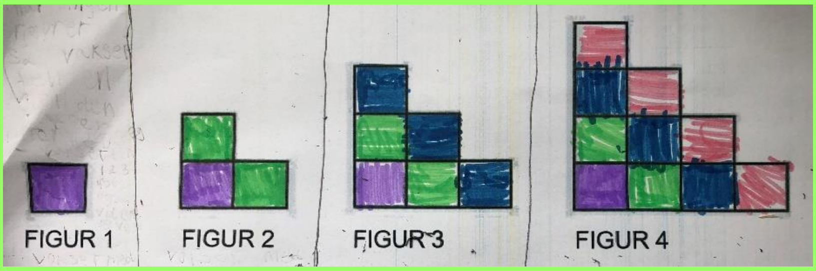
Geir: Er det noen andre som vil vise hvordan figuren vokser?

Ida: I figur en er det bare en på siden, i figur to er det to, og sånn fortsetter det med tre og fire. (hun peker på raden til venstre på hver figur)

Geir: Ja her er den en firkant høy, her er den to firkanter høy og her er den fire (peker på figurene) og det er sant, det er en måte den vokser på, kanskje vi kunne brukt det som en måte til å finne ut hvor mange firkanter totalt blir det i de forskjellige figurene.

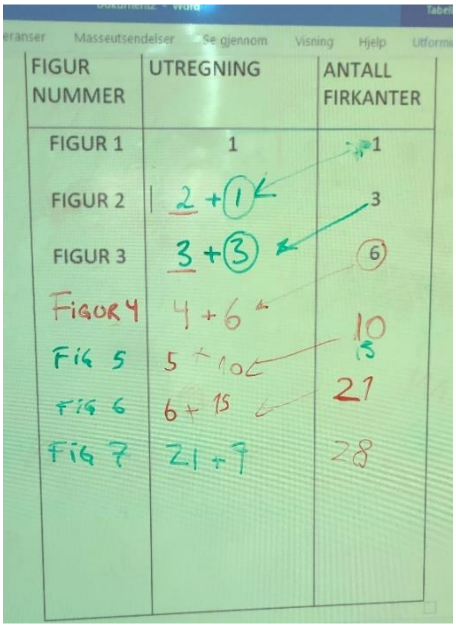
Geir: Er det noen flere som vil vise hvordan de har tenkt?

Marte: Jeg har liksom tenkt her er det en farge, og her er det en farge, og her er det en farge. (figur 29 viser arket hennes)



Figur 29: Marte sin løsning

Geir har laget klar en ny presentasjon, en bildeserie der figurene er fargelagt tilsvarende metoden til Marte, men med andre farger. Dette knytter han til T-tabellen og fyller ut kolonnen i midten (den som er markert med «utregning»). Han knytter regnestykkene til rekursiv tenkning, hvor mange brikker det var i den forrige figuren og hvor mange nye brikker man må plusse på. Jeg spør Geir etter timen hvorfor han nå fokuserer på rekursiv tenkning, mens han i den forrige timen (med planten som vokser) sammen med elevene fant to forskjellige eksplisitte formler. Geir sier at han kjenner til at trekanttall har en egen formel, men han synes det blir for komplisert å fokusere på noe annet enn rekursiv tenkning på denne oppgaven.



Figur 30: Bilde av tavla etter oppsummeringen

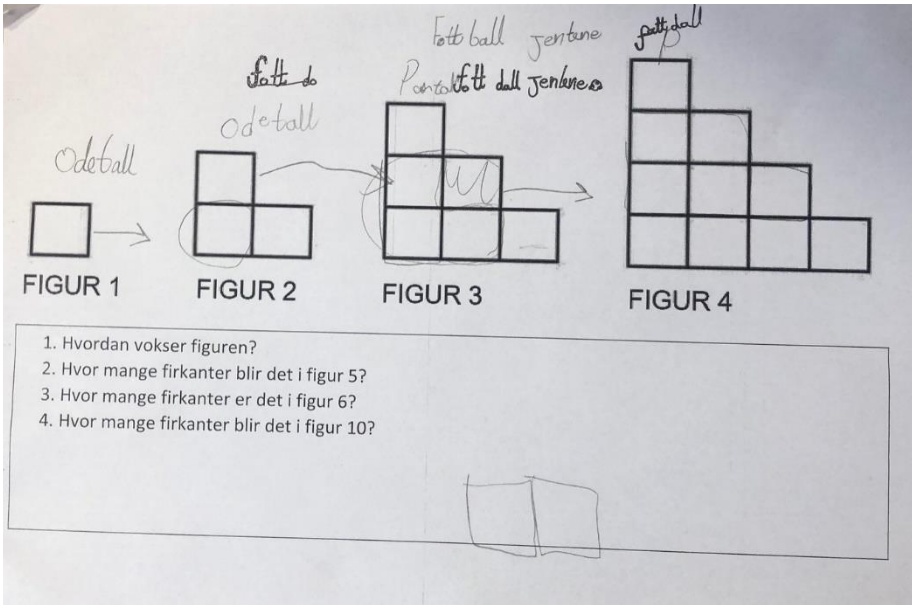
4.4.2 Trekanttall – tredje time hos Line

Line starter timen med å memorere litt sammen med elevene om de to foregående oppgavene. Hun henger opp oppgavearket i A3-format på tavla (vedlegg 13). Line peker på en og en figur og elevene svarer på hvor mange brikker de forskjellige figurene består av.

> Line: ..og så lurer jeg på, hvordan ser figur fem ut? Nå skal dere få et ark her som dere kan bruke, kanskje dere kan fargelegge de nye figurene som kommer frem her, for å se om det kanskje er lettere å se et mønster da. Og så skal dere få en sånn en som dere kan skrive inn i (viser frem arket med T-tabell, vedlegg 14).

Her oppmuntrer Line elevene til generalisering ved å c) å få elevene til å utvide ut over de tilfellene som allerede står på oppgavearket.

> Nadia: Er dette et mønster? Oddetall, oddetall, partall, partall. Er det riktig at det er oddetall og det er oddetall?
>
> Line: Hvordan har du tenkt Nadia?

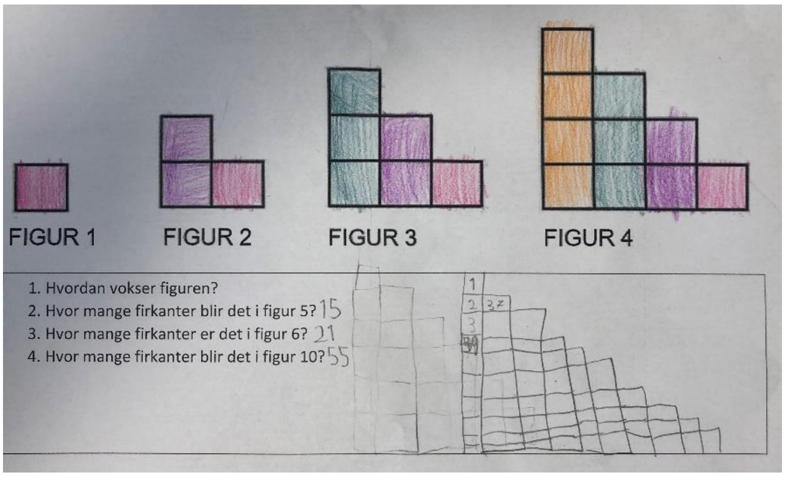


Figur 31: Nadia sitt ark

Nadia: (Tegner med blyant og forklarer), den her er oddetall og så den her, hvis du ser på denne så er de to neste partall

Line: Kan du vise med farger det du har tenkt?

Nesten alle som snakker med læreren får denne timen beskjed om å vise med farger hvordan de har tenkt. Er Nadia inne på noe her? Burde Line ha hjulpet henne videre, er det noe med oddetall og partall, vil mønsteret med to oddetall og så to partall fortsette? Line sier selv at hun ikke har kunnskap nok til å ta fatt i uventede elevinnspill.



Figur 32: Milla sitt ark

Milla: Jeg tenkte at når jeg skulle forklare med farger, så tok jeg alle de med en kloss i rosa, og de med to lilla, og de med tre blå og de med fire oransje (figur 32).

Line: For hvordan vokser den egentlig da?

Milla: Først er det en, så vokser det to klosser bak, så vokser det tre klosser bak og så fire.

Line: Har dere lyst til å prøve å skrive i skjemaet hvor mange klosser det er på hver figur?

Line: Figur en

Elever: En

Line: Figur to

Elever: Den er tre

Line: Og så kan man skrive et regnestykke

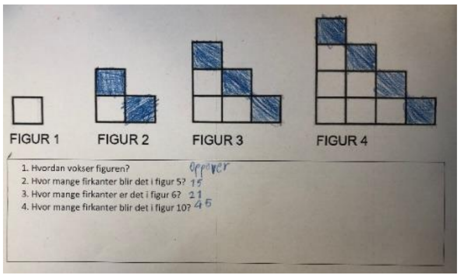
Milla: 2+3

Line: 2+3, er det fem klosser, hva var det dere tenkte? Det er tre firkanter, kan vi vise det med et regnestykke? Hvordan kan vi lage et regnestykke for å vise hvor mye det er på figur to.

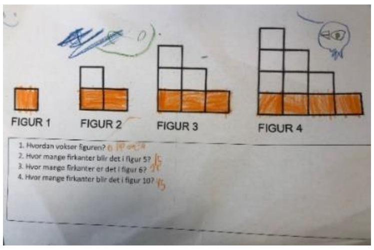
Line: Kanskje det er litt lettere hvis det er sånn her (læreren tegner vannrette streker i T-tabellen).

Line: Det er jo 1+2 sa du (peker på de rosa og lilla firkantene i fig2) hva blir den her da (peker på figur 3)?

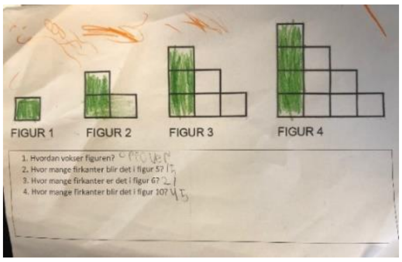
Line blir avbrutt av flere elever som trenger hjelp og får ikke avsluttet samtalen med Milla og læringspartneren. Line prøver å oppmuntre elevene til å generalisere ved å b) få elevene til å se etter mønstre og sammenhenger. Line spør elevene om hvordan figuren vokser og prøver etterpå å få elevene til å knytte dette til lage regnestykker som beskriver hvor mange firkanter det er i figuren. Elevene kommer aldri så langt.



Figur 35: måte 1

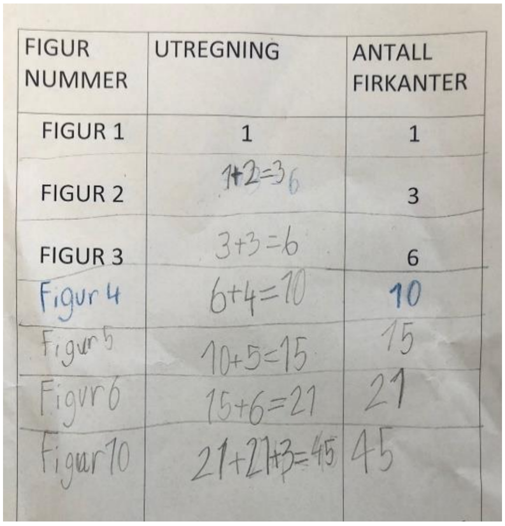


Figur 34: måte 2



Figur 33: måte 3

Tre gutter jobber sammen og de har funnet tre forskjellige måter de kan fargelegge hvordan figurene vokser på (se figur 33, 34 og 35). Line er opptatt av hva elevene har tenkt når de har skrevet opp regnestykkene, og de kommer i samarbeid frem til at de har tatt den forrige figuren og plusset på de nye brikkene (rekursiv tenkning). Line lurer på hva som ligger bak regnestykket til figur ti, men de klarer ikke å komme frem til noe. Det viser seg at de har tegnet den på baksiden, men kommet frem til feil svar (riktig skal være 55 på figur ti).



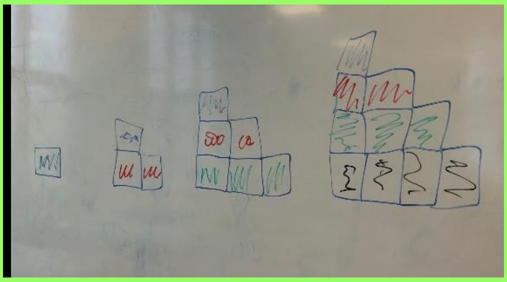
FIGUR NUMMER	UTREGNING	ANTALL FIRKANTER
FIGUR 1	1	1
FIGUR 2	1+2=3 6	3
FIGUR 3	3+3=6	6
Figur 4	6+4=10	10
Figur 5	10+5=15	15
Figur 6	15+6=21	21
Figur 10	21+21+3=45	45

Figur 36: T-tabellen til de tre guttene

> *De tre guttene er jo på veldig ulikt nivå egentlig. Den ene har store huller i matten, men har egentlig ganske godt potensiale. Det at de kanskje får stille litt på samme grunnlag, at de ikke trenger så mye forkunnskap i matte for å kunne løse oppgavene, det er problemløsning. Det er positivt at de kan delta likeverdig. Men for å ta neste skritt og lage en formel må man kanskje i større grad bygge på det de kan fra før. Men sånn sett var det fint at de så oppgaven på tre forskjellige måter. Den første og den siste oppgaven var mer visuell, det blir ikke like abstrakt da, de kan på en måte se det.*

Ved å lage regnestykker som representerer måten figurene vokser på så vil elevene kanskje kunne oppdage at det er et mønster i hvordan figurene vokser (1+2+3+4…) og bruke dette til å generalisere og forutse hvordan de neste figurene vil se ut. En lærer som kjenner til trekanttall vil kanskje klare å koble dette til måten elevene har fargelagt figurene på, så igjen støter vi på utfordringen med at Line mangler fagkunnskap for å klare å ta fatt i elevenes innspill og knytte de til matematikken de jobber med.

Oppsummeringen er preget av en del uro, noen sitter og tegner, noen prater, og Line må flere ganger avbryte oppsummeringen for å få elever til å følge med. Noen ganger henviser hun direkte til elever som hun husker har gjort noe lignende det som blir presentert på tavla. Hun henvender seg også til hele klassen noen ganger for å spørre om flere har skrevet ned regnestykker for eksempel. Nina og Anniken kommer opp først. Line tegner figurene på tavla så elevene kan fargelegge mens de forklarer.



Nina: Det der er den fra den første figuren og så kommer det noen nye under her (peker på figur to)

Anniken: Og så fortsetter det. Hvis dere ser her er den (peker på figur 2 og så på figur 3)

Nina: Her ser vi at det kommer to nye her, og så kommer det tre nye under her igjen og så kommer det fire nye der igjen.

Line: Så den vokser på en måte oppover.

Nina: Se her det er alltid den samme brikken (peker på den blå firkanten som er med fra figur en), den er der og der. Og så har vi funnet ut hvor mange firkanter det blir i figur fem. Det er 15.

Line: Hva tenkte dere da?

Nina: På figur fem så tenkte vi at det var fem under, for på figur fire var det fire under…

Line: Så den vokser under her

Nina: Ja så det var fire og fem og så telte vi og da var det 15, og så på figur seks så kommer det nye under der igjen

Nina: Fordi at på figur fire er det fire under, på figur fem er det fem under og på figur seks er det seks under.

Line: Så på figur en er det en under, på figur to er det to under, på figur tre er det tre under, på figur fire er det fire under, hvor mange er det da på figur 10?

Anniken: Da er det ti under

Line: Ja da er det ti under

Nina: Da starter vi med ti under og så etterpå så tar vi ni under så tar vi åtte under, så tar vi syv under helt til vi kommer til en. Vi bare teller nedover og nedover (peker på de vannrette radene)

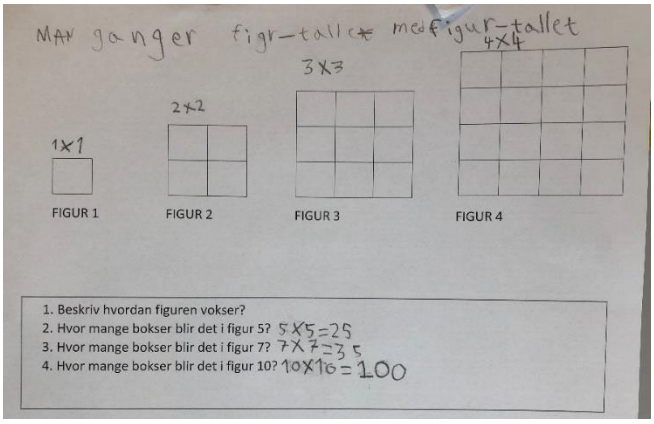
Line: Ok, kjempefint

Her oppmuntrer Line til generalisering ved å c) få elevene til å utvide ut over de tilfellene de har jobbet med. Elevene har klart å generalisere ved at de har funnet en sammenheng mellom figurnummeret og hvor mange firkanter figuren har på den nederste raden. Elevene bruker sitt naturlige språk og formulerer en generalisering ved å komme med flere eksempler.

4.4.3 Kvadrattall – fjerde time hos Geir

Til denne timen har Geir tatt utgangspunkt i oppgavearket elevene brukte i forrige time (trekanttall) og selv laget en oppgave som han mener passer nivået i klassen. Han viser oppgavearket med prosjektor på tavla før elevene setter i gang (vedlegg 15) slik han gjorde i den forrige timen.

Når Geir går rundt og veileder elevene så spør han ofte hvordan de fant ut hvor mange «bokser» det er i hver figur og om de kan klare å vise det med et regnestykke. Han oppmuntrer elevene til generalisering ved å b) få elevene til å se etter mønstre og sammenhenger. Jeg tenker da på mønstre i hvordan figuren vokser og sammenhenger mellom antall brikker i figuren og utregningen. Noen elever ser raskt mønsteret og får utdelt en ny oppgave (vedlegg 16), noen rekker også en tredje oppgave i løpet av timen (vedlegg 17).



Figur 37: Even sitt oppgaveark

Even er raskt ferdig med det første arket (figur 37) og rekker opp hånden.

> Even: Jeg er ferdig med alle oppgavene. Man ganger figurtallet med figurtallet. Den ganger den, to ganger to, tre ganger tre, fire ganger fire, fem ganger fem og syv ganger syv og ti ganger ti.
>
> Geir: Ja, da skal du få prøve på en annen oppgave

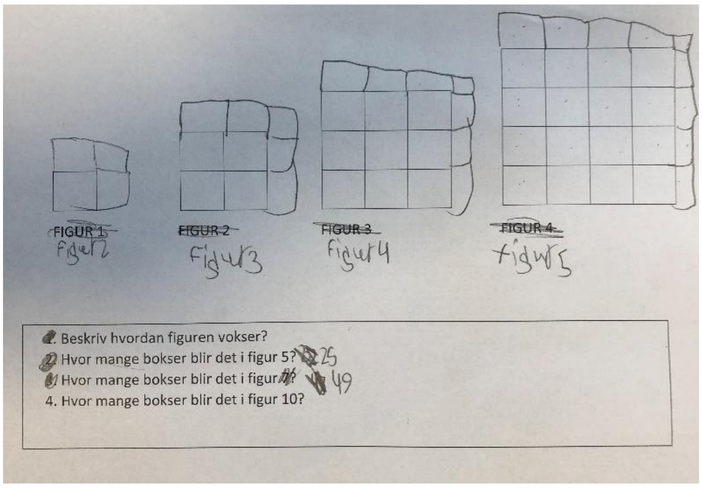
Her har eleven klart å se sammenhengen mellom de to variablene og også å sette ord på det. Denne eleven har fått til funksjonstenkning (correspondence relationship) og beskriver den avhengige variabelen (antall bokser i figuren) ved hjelp av den uavhengige variabelen (figur-tallet). Geir kommenterer ikke på annen måte enn at han bekrefter at oppgaven er løst riktig. Geir tar heller ikke for seg denne elevløsningen i oppsummeringen til slutt. Geir husker ikke episoden da jeg spør han etterpå. Jeg tenker at det kan ha vært flere årsaker til at han ikke tok tak i løsningen til eleven, men fordi han ikke husker episoden så kan det være en mulighet at han ikke har kunnskap nok om tidlig algebra til å få med seg at eleven har generalisert ved å bruke det naturlige språket sitt.

Lykke har tegnet litt på oppgavearket (se figur 38) og figur syv har hun tegnet i ruteboken.

> Geir: Du tegnet figur syv, hvordan visste du hvor stor den kom til å bli?

Lykke: Jeg bare gjorde sånn som forrige gang, jeg telte de oppover her (peker på figuren), og så tok jeg på litt mere sånn som den vokser.

Geir: Ja du ser at det kommer på en måte et nytt lag utenpå her. Klarer du å vise det med et regnestykke på noen måte? Figur to så egentlig sånn ut (tegner figur to,) hvor



Figur 38: Lykke sitt oppgaveark

mange bokser er det her i figur to?

Lykke: Fire

Geir: Ja, hva slags regnestykke kunne gitt oss det svaret der?

Lykke: Fire pluss null eller fem?

Geir: Hvilket regnestykke for figur to kunne gi oss svaret fire bokser?

Lykke: Jeg vet ikke

Geir: Tenk på når vi har jobbet med ganging, har vi tegnet noen sånne bokser da?

Lykke: Ja

Geir: Tenk på om du kan bruke det på noen måte? Hvilket gangestykke viser dette på en måte? (peker på figur to) Hvor mange bokser er det bortover her?

Lykke: To. Da blir det to pluss to

Geir: Gangestykke da?

Lykke: En ganger fire?

Geir: Altså to, (peker på figuren igjen)

Lykke: To ganger to?

Geir: Ja, men det vil også funke med det pluss-stykket du sa

Geir: Hvis det var to pluss to på figur to, hvilket regnestykke ville det blitt her på figur tre da?

Lykke: Tre pluss tre pluss tre

Geir: Ja, ikke sant

Lykke: Eller tre ganger tre

Geir: Ja, og nå er du i nærheten av å finne et regnestykke som du kan bruke til å finne ut hvor stor figur syv er da.

Lykke: Å ja, nå vet jeg! (høres ut som en a-ha-opplevelse) Kan det være syv ganger syv?

Geir: Helt riktig

Lykke: …og på figur ti, hundre!

Geir: Bra, nå skal du få prøve på en ny oppgave.

Geir har selv sagt at han ønsket å koble oppgaven opp imot multiplikasjon, og han får til slutt med seg Lykke i denne tankegangen. Lykke gir tydelig uttrykk for at hun har en a-ha-opplevelse da hun klarer å se sammenhengen mellom figurene og multiplikasjon.

Geir går opp til tavlen og gjør seg klar for en liten oppsummering. Figur 39 viser bilde av tavlen der Geir fargelegger og skriver.

Geir: Mange har klart å løse den første oppgaven på forskjellige måter. Vi skal se på det nå, hvilke regnestykker man kan finne, for kanskje det kan hjelpe dere med å løse den neste oppgaven. Noen har tenkt at figuren vokser på den måten her (fargelegger figur en nederst til venstre på alle figurene. På figur to kommer det tre nye (fargelegger) og på figur tre kommer det fem nye. Noen har funnet figur fem ved å tegne på nye bokser på figur fem. Men hvis vi skal finne et regnestykke, hvordan vil det regnestykket blir ut i fra det mønsteret her?

Rikke: På toeren blir det to oppe, to bortover og to nedover, og så kan det bli et regnestykke, for eksempel to ganger to

Geir: Men hvis vi fargelegger på denne måten her så er det ikke helt det mønsteret der vi ser da.

Geir: Her blir det 1+3, her blir det 1+3+5, her blir det 1+3+5+7. En kommer derifra, tre har vi der, fem har vi der, syv har vi der (Geir peker på figuren). Kanskje vi kan bruke dette mønsteret her på figur fem, da blir det 1+3+5+7+hva?

Elev: Ni

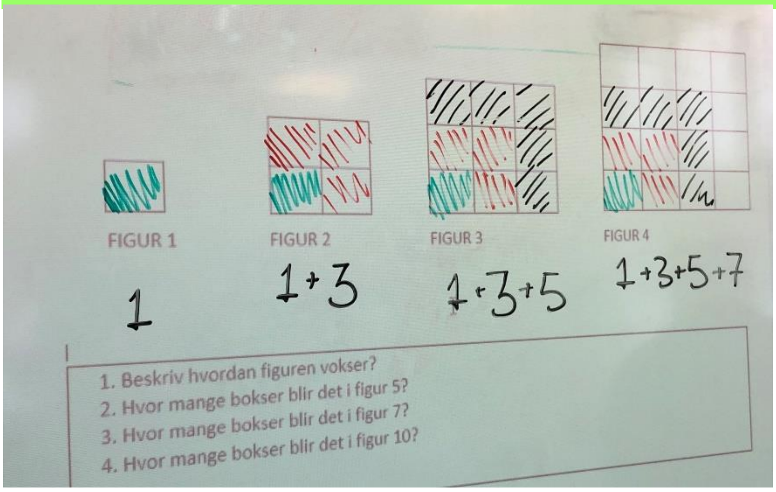
Geir: Hvordan fant du ut det

Elev: Det vokser med to nye hver gang

Geir: Det går an å bruke pluss hvis man bruker det mønsteret her, men man må holde ganske god kontroll på tanken hvis man skal hoppe for eksempel til figur ti da.

Geir: Og så var det sånn Lykke snakket om da, hun snakket om hvor høy og hvor lang figuren var. På figur en er det bare en rute bortover og oppover, på figur to er det to ruter oppover og to ruter bortover, på figur tre er det tre ruter oppover og tre ruter bortover. Og hva kunne du bruke da Lykke for å finne ut hvor mange ruter det er?

Lykke: Vi kunne bruke ganging til å vite svaret.



Figur 39: Bilde av tavlen etter oppsummeringen

Geir forteller videre om hvordan de kan gange for å finne svaret og knytter det til da de jobbet med multiplikasjon tidligere og øvde på tegne rutenett når de skulle finne svaret på et gangestykke. Geir skriver gangestykker til hver figur på tavla i dialog med elever han velger ut fra de som rekker opp hånda. Her legger Geir til rette for generalisering ved å fokusere oppmerksomheten mot matematiske sammenhenger. Dette er den siste kategorien i Ellis sitt rammeverk, og dette er en handling som jeg ikke har observert hos Geir tidligere.

Det er ti minutter igjen av timen og de som ikke allerede har fått den andre oppgaven med kvadrat-tall, får denne utdelt (vedlegg__). Noen elever løser oppgaven raskt og får utdelt et tredje oppgaveark (vedlegg __). Geir er fornøyd med at så mange elever fikk til oppgaven. Timen er preget av at elevene jobber med oppgavene de får, og ingen må sitte lenge og vente på hjelp denne gangen. Geir opplever også selv at timen gikk bra, at han traff det faglige nivået.

> *I ettertid så tenker jeg at dette burde ha vært den første oppgaven. Oppgaven traff nivået ganske bra. Det var mange som det gikk opp et lys for, og så tok jeg utgangspunkt i noe de kjente, det burde jeg ha gjort med en gang. Det å tegne rutenett når de var usikre på hva svaret var noe kjent for dem på en måte og at de kunne koble det til ganging og dermed lettere koblet det til en eksplisitt formel med ganging da.*

4.4.4 Funn etter andre runde med undervisning

Jeg sammenfatter her både lærernes refleksjoner og mine funn etter observasjonene.

> *Først så fant jeg ferdige oppgaver (time 1-3), men så stolte jeg på meg selv. Jeg kronglet litt i starten, men på en måte så gikk det opp et lys for meg også, at jeg kunne lage oppgaver til klassen. Det ville ta meg lengre tid å lete i havet av oppgaver for å finne noe som passet for elevene, da var det raskere at jeg selv lagde noe som kunne passe for elevene.*

Geir fokuserte mest på å finne oppgaver som elevene kunne få til. Han opplevde at det fungerte bra med koblingen til multiplikasjon. Han mener at flere elever nærmet seg å kunne formulere en eksplisitt formel. Han tenker at det neste blir å se mer på trekanttall der de kan halvere et kvadrat og jobbe med deling. Jeg merket meg at flere av elevene løste oppgavene i den fjerde timen på kort tid og at de raskt fikk en ny oppgave. Jeg undrer meg over hvorvidt det som Franke et al (2008) opplevde at de gjennomførte utviklingsarbeid også har skjedd her, at Geir har tilpasset arbeidet med algebra til den måten han pleier å undervise på, og at det dermed blir fokus på å løse oppgaver fremfor å utforske og ha tid til å gå i dybden på en oppgave. Fordi undervisning er en kulturell aktivitet (Stigler & Hiebert, 2009) vil det ta tid for lærerne å rekontekstualisere den nye kunnskapen selv klare å lage opplegg som passer til arbeid i tidlig algebra dersom de ikke pleier å ha fokus på utforskende matematikkundervisning.

Geir synes T-tabellen var et bra verktøy og at tabellen hjalp elevene med å holde oversikt over variablene. Han har ikke fått tid til å se så mye på alle forslagene til hva de kunne ta tak i. Det er veldig mye han leser om som han tenker at han må huske å gjøre, men tiden strekker ikke til. Det at de ikke har nok tid til å lage undervisningsopplegg og å lese fagstoff om undervisning nevnes av begge lærerne.

> *T-tabellen var et bra verktøy fordi hvis noen hadde ulike måter å løse det på så kunne de sammenligne med hverandre, steg for steg hvordan de har tenkt, de kan sammenligne metoder, er det lett å bruke pluss eller ganging. Det blir satt i system, det skaper en oversikt som gjør at det blir lettere å snakke med andre.*

Geir vil fortsette med figurtall fremover. Han tenker at hvis han klarer å treffe riktig så er det utfordringer både for de sterke og de svake. Dette er oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde.

Når det gjelder funksjonstenkning så tenker Geir at den eksplisitte formelen ikke er så viktig for elevenes del, men han tenker at det er nyttig at han som lærer kjenner til den. Men elevene må se etter mønster og tenke seg frem til ulike måter å løse oppgaven på, han tenker at det er den algebraiske tenkningen.

> *Hvis jeg skal tenke på den algebraiske siden av oppgaven så blir det litt annerledes, for det er ikke det som ligger fremst i hodet mitt. Det kan jo være at de kan klare å løse en oppgave men at de ikke kan knytte det til algebraisk tenkning. For at det skal bidra til å utvikle den algebraiske tenkningen til elevene så må det være noe mer. Til vanlig så kan det være «flott, dere fant svaret», men hvis det skal utvikle den algebraiske tenkningen så må de kanskje ha funnet et mønster, eller at de skjønner hvordan det henger sammen, at de bruker en oppgave til å løse en annen, den type a-ha opplevelser.*
>
> *Når jeg oppsummerer så vil jeg at flest mulig skal forstå, da forklarer jeg mye.*

Det at Geir velger å forklare mye for at elevene skal forstå kobler jeg igjen til at Geir har et platonsk syn på matematikkundervisning (Ernest, 1989).

Geir tror ikke han har endret seg som lærer gjennom denne perioden, men han vil gjerne det. Han ser på fokus på algebraisk tenkning som en ny måte å tilnærme seg undervisningen på.

Line forteller at hun fikk den siste oppgaven av Geir. Men hun ser hvordan den bygger på den første oppgaven (the raindrop task). Hun har mye som skal gjøres for tiden og fikk i liten grad forberedt seg og sett på oversikten over utfordringer fra første runde. Hun tenker at oppgaven var litt lik den første. Hun føler jo at det har løsnet for flere elever, at de begynner å få teften for det og skjønne litt hvordan de kan tenke. Så hun tror det har noe å si at det her er den tredje oppgaven, at de kan dra litt på tanker de har gjort før.

Selv om hun i liten grad fikk forberedt seg så brukte hun T-tabellen, hun fikk arkene som Geir hadde laget.

> *På den forrige oppgaven med bladene så fortsatte de bare mønsteret uten å lese hva som stod i tabellen, de skulle jo hoppe over noen dager (der det gikk fra dag fem til dag ti). Men her klarte flere av dem å fylle inn og følge tabellen.*

Line forteller at de tidligere har jobbet med oppgaver der det har vært en ukjent, i andre klasse. Men hun har ikke tidligere hatt noen tanker om det er algebra eller ikke. Line synes det er interessant at så små barn kan forholde seg til algebraisk tenkning. Hun tror at man lett kan tenke at det er mer komplisert enn det er. Hun opplever at barna synes det er veldig stas med algebra.

Line forteller at hun har endret oppfatningen sin av hva algebra er:

> *Jeg tenker at det er å se sammenhenger og mønstre og på en måte finne formler. Særlig stikkordet mønster har løsnet litt opp i tankene.*

Line mener at det som i størst grad har gjort at undervisningen har blitt annerledes i denne perioden er at hun ikke har fulgt læreboka og at hun har lagt opp til gruppearbeid nå. Hun sier hun har vært langt utenfor komfortsonen sin, men at det har vært lærerikt. Hun føler at både hun og elevene har fått til mye. Men hun tror ikke hun hadde fått det til uten samarbeidet med meg og Geir.

> *Jeg har gått utenfor den rytmen når man jobber i boka. Og det tror jeg også at barna har satt veldig pris på. Særlig det med problemløsning og gruppearbeid, at det har vært en oppgave den kan jobbe med litt lenge. I motsetning til mengdetreningsoppgaver.*

Line mener at hun har lært like mye som elevene. Hun synes algebra er et veldig spennende tema og at det har vært gøy å utforske det sammen med elevene.

Det jeg følte at jeg kom til kort med var det å kunne ta tak i ting og improvisere. Hvis du skal improvisere så må du virkelig kunne det veldig godt. Det å kunne ta tak i det elevene sier og veilede dem og forklare til dem henger sammen med å kunne improvisere. Noen ganger kan det dukke opp et spørsmål der du kan få mye motivasjon fra elevene gratis. Oi, la oss undersøke det, det var spennende. Og så kan man gå inn i det sammen. Og det kan du ikke ha planlagt, så sånne type ting da. Undre seg sammen og utforske seg sammen, og det er god energi rundt det.

Å styre en matematisk samtale og snakke om matematikk føler Line seg veldig usikker på. Hun merker at hun mangler kunnskap og erfaring for å kunne klare å få et faglig fokus. Hun sier at hun er motivert og inspirert til å jobbe med den matematiske samtalen, hovedutfordringen er at hun føler hun ikke har kunnskap nok til å gjennomføre det.

4.4.4.1 Hva slags hjelp ønsker lærerne videre?

Geir ønsker seg en idebank knyttet til ulike emner og ulike trinn, for eksempel hva slags oppgaver man kan jobbe med om man jobber med brøk på 4. trinn. Dette ønsket står litt i motsetning til det han selv sier om at det tar mindre tid å lage oppgavene selv, men det kan kanskje være nyttig å ha en idebank å gå ut i fra. Han har også behov for å forstå hva dette ender opp med, hvordan elevene skal jobbe med algebra når de skal ha matematikk på videregående skole, han trenger mer horisontkunnskap når det gjelder algebra (Loewenberg Ball et al., 2008). Geir vil gjerne også lære mer om matematikken som ligger bak den algebraen elevene skal jobbe med på barnetrinnet, dette knytter jeg til McCrory et al (2012) sine perspektiver på hva slags kunnskap læreren trenger for å undervise i algebra, både kunnskap om algebraen elevene skal lære, men også kunnskap om avansert matematikk. Geir nevner ikke selv noen ønsker som går på McCrory et al sitt tredje område når det gjelder hva slags kunnskap læreren trenger for å undervise i algebra, nemlig undervisningskunnskap om algebra. Geir er usikker på om han trenger veiledning. Men fordi det er litt nytt for han å tenke på denne måten, så tenker han at det kanskje kunne ha vært nyttig å gå på et kurs.

Line føler et stort behov for mer tid til undervisningsplanlegging. Fordi ting må gjøres så fort så ender hun opp med å gjøre det hun kan fra før. Hun ønsker seg også en mentor som hun kan møte og spørre om hjelp, en som hadde satt av tid. Line har kommet inn på videreutdanning i matematikk neste skoleår og er veldig klar for å gå i gang med å utvikle matematikkundervisningen sin videre. Line peker også selv på at hun trenger både mer kunnskap om å undervise i algebra og mer fagkunnskap om algebra, i tillegg trenger hun mer kunnskap om avansert matematikk for å kunne forstå hva elevene tenker. Så Line trenger å utvikle kunnskapen sin i alle de tre områdene som McCrory et al har skissert at lærerne trenger kunnskap i når de skal undervise i algebra.

5 Diskusjon

5.1 Lærernes kunnskap og oppfatninger om matematikk og algebra

Fordi lærerne har veldig forskjellig utdanningsbakgrunn blir det veldig tydelig i denne studien hvilken betydning fagkunnskap kan ha for hvordan læreren legger opp undervisningen. Mens Geir er opptatt av hva elevene skal få med seg faglig og legger opp oppsummeringene ut i fra dette, er Line mest opptatt av det emosjonelle aspektet, i såpass stor grad at elevene ofte ikke får vite det dersom de har løst en oppgave feil. Jeg opplever i tillegg at Geir har størst utvikling i timene sine og i større grad faglige refleksjoner og visjoner for arbeidet fremover. Dette kan være fordi han har fagkunnskap som han kan knytte refleksjonene sine til. Utfordringen er at han kanskje ender opp med en lærerstyrt undervisningsstil og i stor grad «tar over» innholdet i oppsummeringene fordi han er så opptatt av hva elevene må få med seg faglig i timene. Geir er opptatt av at elevene skal forstå og dette kobler jeg til det platonske synet på matematikk. Her er Line «helt på den andre siden», hun virker genuint opptatt av hva elevene tenker og at de skal få mulighet til å løse oppgavene på sin egen måte, også om de ender opp med feil svar. Utfordringen er at Line mangler fagkunnskap og dermed ikke klarer å utnytte elevenes innspill i klassesamtalen. Lines oppfatning av matematikk samsvarer med et problemløsningsorientert syn på matematikkundervisning, og dette er et godt utgangspunkt for å kunne legge til rette for utforskning og algebraisk tenkning i klasserommet. Jeg mener at Line har et godt utgangspunkt for videre arbeid dersom hun får bygd opp matematikk-kunnskapen og den matematikkdidaktiske kunnskapen sin og får trening i å knytte dette til læringsarbeid i klasserommet. Å forstå hva elevene tenker er et av de tre punktene til Kieran (2016) for hva som er viktig å legge vekt på i utviklingsarbeid med lærere. Line virker oppriktig interessert i hva elevene tenker men trenger fagkunnskap for å kunne forstå og forutsi hvordan elevene vil tenke og løse oppgaver. Det virker som om Geir i stor grad har sett for seg hvordan elevene skal løse en oppgave, men at dette kanskje blir et hinder for han når han veileder elevene. Jeg undrer meg over om han har sett for seg alle mulige løsningsmetoder eller om det er slik at han ønsker at elevene skal løse oppgaven på en bestemt måte. Dette er to eksempler på at det er vanskelig for lærerne å forstå hva elevene tenker. Lærere som i liten grad har kunnskap om algebra og erfaring med å legge til rette for algebraisk tenkning vil kunne ha vansker med å klare å forutse forskjellige måter elevene kan løse en oppgave på, og å vite hvordan de skal reagere på uventede elevinnspill.

5.2 Algebraisk tenkning i klasserommet

5.2.1 Sosiomatematiske normer, til hinder eller til hjelp for algebraisk tenkning?

I begge klassene opplevde jeg at det var sosiomatematiske normer som delvis var til hinder for å legge til rette for algebraisk tenkning.

Når Geir forteller om klassen sin og timene sine så merker jeg meg at mye av dette kan kobles til sosiomatematiske normer. Han sier at elevene har en klar formening av hva en matematikktime skal bestå av, og det forventes at de flinke svarer når det er oppsummering. Han sier selv at kulturen var satt da han tok over klassen. Ut ifra observasjonene jeg gjorde opplevde jeg at det var en oppfatning i klassen om at det er om å gjøre å bli raskt ferdig og løse flest mulig oppgaver. Dette kan være til hinder for å legge til rette for utforskning og problemløsning og støtter i så fall ikke opp om algebraisk tenkning.

Line sier selv at når hun spør hva elevene tenker så tror de at de har løst oppgaven feil. Jeg opplevde også da jeg var i klassen at flere elever virket forvirret og usikre da hun stilte dem spørsmål, og at det å bli bedt om å begrunne hvordan de hadde tenkt ikke ble oppfattet så positivt. Det kan ta tid å endre sosiomatematiske normer, men dette er nødvendig for å legge til rette for algebraisk tenkning i klassene.

5.2.2 Legges det til rette for generalisering?

Når det gjelder å legge til rette for generalisering i klasserommet så tok jeg utgangspunkt i Ellis (2011) sitt rammeverk med inndeling i seks handlinger som kan legge til rette for generalisering i klasserommet. Lærerne jeg har fulgt i studien deltar i stor grad selv i generalisering (kategori 1) og de oppmuntrer elevene til å generalisere (kategori 2) når de presenterer oppgavene og veileder elevene. Når det er tid for oppsummering så oppfordrer lærerne elevene til å dele sin generalisering eller ide (kategori 3). Den ene læreren deler også noen ganger selv elever sine generaliseringer og ideer (kategori 4). De tre siste kategorien til Ellis brukes i mindre grad, dette kan både knyttes til lærernes oppfatning av algebraundervisning, men også til deres kunnskap om algebra. Disse kategoriene går ut på at lærerne oppmuntrer elevene til å begrunne eller forklare, at de bygger videre på en generalisering eller en ide og at de fokuserer oppmerksomheten mot matematiske sammenhenger. For å få til dette så kreves det at lærerne har kunnskap om algebra og undervisningskunnskap i algebra. Lærerne må også øve seg på å forstå hva elevene tenker.

5.2.3 Hvorfor utnytter ikke lærerne elevenes innspill?

I transkripsjonene fra undervisningstimene er det flere eksempler på at elevene har interessante innspill som kunne ha vært et godt utgangspunkt for algebraisk tenkning. Det kan være flere faktorer som begrenser lærerne slik at de ikke får til å ta tak i dette. For det første så kan det være at de mangler kunnskap, ut i fra McCrory et al (2012) sitt rammeverk er denne kunnskapen tredelt. Lærerne må ha kunnskap om skolealgebra, det som elevene skal lære seg. De må også ha kunnskap om mer avansert matematikk slik at de kan utnytte elevinnspill som det er verdt å gå videre på. De trenger også undervisningskunnskap om algebra. I tillegg trenger lærerne kunnskap om hvordan elevers algebraiske tenkning kan komme til uttrykk. Dette kan være hvordan elevene bruker sitt naturlige språk til å generalisere (Malara & Navarra, 2018). For å forstå hvordan elevene tenker trenger lærerne også å bygge seg opp en erfaring i forstå hva elevene sier og å knytte dette opp imot matematikken. Dersom lærerne bruker tid på å forutse forskjellige løsningsmetoder til en oppgave (Smith & Stein, 2011) vil de være bedre forberedt på forskjellige innspill elevene kan komme med.

5.3 Algebraisk tenkning og utviklingsarbeid med lærere

I den grad vi kan si at lærerne nå er i gang med å implementere den nye læreplanen i matematikk, så vil jeg påstå at lærerne er på Kleve (2010) sitt tredje nivå når det gjelder begrensende faktorer som hindrer lærerne i å implementere læreplanen. De har et ønske om å få det til men blir begrenset av at de mangler kunnskap og erfaringer.

Man oppnår kanskje ikke så mye ved å dele ut lærerveiledninger og gi lærerne en idebank med oppgaver slik som jeg gjorde. Lærerne må ha tid til å lese og sette seg inn i nye oppgaver, og dette etterspør både Geir og Line og flere av lærerne i spørreundersøkelsen. Ved å få tid til å løse oppgavene selv først og gjerne sammen med andre lærere vil man kunne bidra til at lærerne er forberedt på flere alternative løsningsmetoder. Om oppgavene lærerne får jobbe med er av typen «conceptual awareness pillars» (Stylianides & Stylianides, 2009) så vil man også kunne legge til rette for at lærerne utsettes for en kognitiv konflikt og endrer sin oppfatning av hva undervisning i tidlig algebra kan være. Lærerne trenger hjelp og ideer til hvordan de kan styre en matematisk samtale og slippe til elevene. Lærerne trenger også matematikkdidaktisk kunnskap som kan hjelpe elevene med å oppdage sammenhengen mellom de to variablene når de jobber med figurtall. Dette kan være grep som å la elevene sette ord på sammenhengen mellom de to variablene med sitt naturlige språk og å bruke verktøy som T-tabellen for lettere å oppdage sammenhengen mellom variablene.

5.4 Konklusjon

Jeg har gjennomført en kvalitativ studie og kan dermed ikke si noe generelt om hvordan lærere i Norge vil håndtere omleggingen til å integrere mer algebraisk tenkning i matematikkundervisningen. Men jeg har gjort noen funn som kan være interessante å utdype videre, og det kan være til hjelp for andre som skal veilede lærere å ta utgangspunkt i mine funn fra samarbeidet med de to lærerne jeg har fulgt opp gjennom aksjonsforskning.

Lærerne synes det er vanskelig å gi eksempler på forskjellige oppgaver man kan bruke i undervisning i algebra på barnetrinnet. Hovedvekten av forslagene fra lærerne knyttet jeg til å jobbe med likninger. Dette funnet om likningenes fremtredende plass i lærernes eksempler stemmer overens med det tradisjonelle synet på algebra, at algebra handler om å løse likninger og finne en ukjent størrelse (Kieran, 2004). I likninger står «den ukjente» for en ukjent størrelse som man kan regne seg frem til, mens vi i tidlig algebra stort sett jobber med variabelbegrepet der den ukjente er en størrelse som kan variere. Lærerne synes også begrepene som brukes i læreplanen for å beskrive algebra, strukturer, mønstre og relasjoner, er vanskelige å forklare og skille fra hverandre. Forklaringene til lærerne samsvarer ikke alltid med hvordan begrepene blir brukt i faglitteraturen. Det kan være vanskelig å forstå disse begrepene opp imot algebra fordi mange lærere bruker disse begrepene i dagligtalen, men ikke når de diskuterer eller tenker på matematikk og algebraundervisning.

Ønskene lærerne har for hvordan de kan få hjelpe til å utvikle kompetansen sin i tidlig algebra går på at de trenger mer kunnskap, at de trenger tid til få denne kunnskapen, lage undervisningsopplegg og nok tid til selve matematikkundervisningen. Noen av lærerne ønsker også å opparbeide seg en erfaring gjennom å være med på å utvikle undervisningsopplegg.

Å legge til rette for generalisering og dermed algebraisk tenkning i klasserommet er en sammensatt prosess som både krever kunnskap og erfaring. I tillegg til utfordringene med å legge til rette for generalisering så støtte lærerne på flere utfordringer. Jeg oppsummerer noen av utfordringene her. Lærerne kan ha et syn på matematikkundervisning som ikke er lett å forene med algebraisk tenkning. Det kan være sosiomatematiske normer i klassen som hindrer at det er rom for å utforske og dermed legge til rette for algebraisk tenkning. Det kan være komplisert for lærerne å forstå hva elevene tenker og å la elevene komme til orde i oppsummeringssamtaler. Fordi undervisning er en kulturell aktivitet vil det være et omfattende og tidkrevende arbeid som må gjøres dersom lærerne skal få til en varig endring av undervisningen. Lærerne må rekontekstualisere den nye kunnskapen om algebraundervisning slik at den blir relevant for dem, og aktivt være med som kunnskapsprodusenter dersom de skal kunne få til en endring i undervisningen slik at det legges til rette for algebraisk tenkning.

6 Litteratur

Balasundaram, A. B. R. (2017). Algebravansker. Hva er årsaken til at elevene syns algebra er vanskelig? Er det hull i grunnleggende kunnskap og/eller misoppfatninger hos elever på videregående skole som gjør at algebra er vanskelig for dem? I: The University of Bergen.

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., … Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. I C. Kieran (Red.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (s. 27-49). Cham: Springer International Publishing.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, N.H: Heinemann.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "Algebra eyes and ears". *Teaching children mathematics, 10*(2), 70-78.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2005a). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2005b). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 34-42. https://doi.org/10.1007/BF02655895

Blanton, M. L., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., Kim, J.-S. & Kim, J.-S. (2015). *The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebraic intervention in third grade*.

Boaler, J. (2020). Mathematical mindset algebra. Hentet 2020.06.07 2020 fra https://www.youcubed.org/algebra/

Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2008). *Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem* (1. utg.)Routledge.

Bryman, A. (2016). *Social research methods* (5th ed. utg.). Oxford: Oxford University Press.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M. & Zeringue, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 53-59. https://doi.org/10.1007/BF02655897

Carraher, D., Martinez, M. & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. I *Algebra in the early grades* (s. 235-272). Routledge.
Chapin, S. H., O'Connor, C., O'Connor, M. C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions: Using math talk to help students learn, Grades K-6* Math Solutions.
Cross Francis, D. (2015). Dispelling the notion of inconsistencies in teachers' mathematics beliefs and practices: A 3-year case study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(2), 173-201. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9276-5
Cusi, A., Malara, N. A. & Navarra, G. (2011). Theoretical issues and educational strategies for encouraging teachers to promote a linguistic and metacognitive approach to early algebra. I *Early algebraization* (s. 483-510). Springer.
Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 308-345. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.4.0308
Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics teaching: The state of the art, 249*, 254.
Fangen, K. (2010). *Deltagende observasjon* (2. utg. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.
forskningsdepartementet, K. u.-o. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.
Franke, M. L., Carpenter, T. P. & Battey, D. (2008). Content matters: Algebraic reasoning in teacher professional development. I *Algebra in the early grades* (s. 333-360). Routledge.
Friel, S. N. & Markworth, K. A. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *MatheMatics teaching in the Middle school, 15*(1), 24-33.
Glassmeyer, D. & Edwards, B. (2016). *How middle grade teachers think about algebraic reasoning*.
Hermansen, H. & Mausethagen, S. (2016). Når kunnskap blir styrende: Læreres rekontekstualisering av nye kunnskapsformer. *Acta Didactica Norge, 10*(2), 92-107.
Hunter, J., Anthony, G. & Burghes, D. (2018). Scaffolding teacher practice to develop early algebraic reasoning. I C. Kieran (Red.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (s. 379-401). Cham: Springer International Publishing.
Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? I *Algebra in the early grades* (s. 5-18). Routledge.
Kaput, J. J., Blanton, M. L. & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. I *Algebra in the early grades* (s. 19-56). Routledge.
Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades* (1. utg.)Routledge.
Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional talk: How to structure and lead productive mathematical discussions*. Portland, Me: Stenhouse Publishers.
Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *An International Journal, 12*(3), 317-326. https://doi.org/10.1007/BF00311062
Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.
Kieran, C. (2018). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 79-105). Cham: Springer International Publishing.
Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra : Research into its Nature, its Learning, its Teaching* (1st ed. 2016. utg.). Cham: Springer International Publishing : Imprint: Springer.
Kleve, B. (2010). Educational reforms: How are they implemented? I(s. 155-168). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing, cop. 2010.
Kunnskapsdepartementet. (2018). *Kjerneelementer i fag*. Oslo. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf

Kunnskapsdepartementet & Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet* (Midlertidig utg. juni 2006. utg.). Oslo: Kunnskapsdepartementet ; Utdanningsdirektoratet.
Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg., 2. oppl. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.
Loewenberg Ball, D., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554
Malara, N. A. & Navarra, G. (2018). New Words and Concepts for Early Algebra Teaching: Sharing with Teachers Epistemological Issues in Early Algebra to Develop Students' Early Algebraic Thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 51-77). Cham: Springer International Publishing.
Mason, J., Stephens, M. & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.
Mausethagen, S. & Raaen, F. D. (2017). To jump the wave or not: teachers' perceptions of research evidence in education. *Teacher Development, 21*(3), 445-461. https://doi.org/10.1080/13664530.2016.1262893
McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D. & Senk, S. L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-615. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.5.0584
Moss, J. & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. I *Early algebraization* (s. 277-301). Springer.
Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544
Nardi, P. M. (2018). *Doing survey research: A guide to quantitative methods* (Fourth edition. utg.). New York,London, England: Routledge.
Panorkou, N. & Maloney, A. P. (2016). Early algebra: Expressing covariation and correspondence. *Teaching children mathematics, 23*(2), 90-99.
Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1*, 257-315.
Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741
Radford, L. (2018). The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 3-25). Cham: Springer International Publishing.
Schifter, D. (2018). Early Algebra as Analysis of Structure: A Focus on Operations. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 309-327). Cham: Springer International Publishing.
Shilling-Traina, L. & Stylianides, G. (2013). Impacting prospective teachers' beliefs about mathematics. *The International Journal on Mathematics Education, 45*(3), 393-407. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0461-7
Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004
Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
Solem, I. H., Alseth, B., Nordberg, G., Nordqvist, S., Vetlesen, E. & Paiam, V. (2018). *Tall og tanke 1 : matematikkundervisning på 1. til 4. trinn* (2. utg. utg.). Oslo: Gyldendal.

Steinweg, A. S., Akinwunmi, K. & Lenz, D. (2018). Making implicit algebraic thinking explicit: Exploiting national characteristics of German approaches. I *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (s. 283-307). Springer.
Stephens, A. C. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? *Journal of Mathematical Behavior, 27*(1), 33-47. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.12.002
Stigler, J. W. & Hiebert, J. (2009). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom* (First Free Press trade paperback edition; Tenth anniversary edition. utg.). New York: Free Press.
Strachota, S., Knuth, E. & Blanton, M. (2018). Cycles of Generalizing Activities in the Classroom. I C. Kieran (Red.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (s. 351-378). Cham: Springer International Publishing.
Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314-352.
Taber, K. S. (2009). Building theory from data: Grounded theory. *School-based research: A guide for education students*, 216-229.
Tiller, T. (2006). *Aksjonslæring - forskende partnerskap i skolen: Motoren i det nye læringsløftet* (2. utg. utg.). Kristiansand: Høyskoleforlaget.
Twohill, A. (2018). Observations of structure within shape patterns. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 213-235). Cham: Springer International Publishing.
Tønnesen, E. & Haugstulen, K. B. (2016). Algebra-trøbbel er kritisk. Hentet 2020.02.02 fra https://khrono.no/timss-matemtaikk-naturfag/algebra-trobbel-er-kritisk/148370
Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Hovedomraader
Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05
Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122-137. https://doi.org/10.1007/BF03217374
Wilson, E. (2017). *School-based research: A guide for education students* Sage.
Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Oslo: Universitetsforl.
Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458. https://doi.org/10.2307/749877

Invitasjon til å delta i forskningsprosjekt

Jeg jobber som lærer på Slemmestad barneskole og fullfører dette skoleåret en mastergrad i matematikkdidaktikk ved OsloMet. Jeg er spesielt interessert i «tidlig» algebra, og i forbindelse med at algebra fra neste høst skal være med som kunnskapsområde fra 1. trinn i barneskolen så ønsker jeg å studere nærmere hvordan lærerne er forberedt på dette.

Jeg skal gjennomføre en spørreundersøkelse blant lærere som underviser i matematikk på barnetrinnet. Jeg håper å nå frem til flest mulig lærere i «nye» Asker kommune. Målet mitt er at jeg får nok deltakere i studien slik at resultatene kan brukes til å lage et forslag til kompetanseheving i forbindelse med den nye læreplanen. Jeg håper dere har mulighet til å sette av tid til at jeg kan komme til dere.

Jeg kommer til skolene som ønsker å delta i studien og har med meg spørreskjemaene. Jeg gir litt informasjon og er til stede når lærerne fyller ut skjemaet. Det er en fordel for meg, og kanskje også nyttig for skolen om alle som underviser i matematikk er med.

Jeg trenger ca 30 minutter til sammen med lærerne (til litt informasjon og utfylling av skjemaet).

Ut ifra funnene i undersøkelsen så ønsker jeg også å intervjue noen lærere for å utdype svarene på spørreundersøkelsen og kanskje også være med og observere noen undervisningstimer. På siste side i spørreundersøkelsen ber jeg de som kan være interessert i å være med på et intervju etterpå om å skrive navnet sitt. De som ikke ønsker å være med videre kan være helt anonyme. Det må være frivillig for lærerne på skolen å delta i studiet. Det ser jeg for meg at kan løses ved at de som ikke ønsker å være med lar vær å levere meg spørreskjemaet. Det kan uansett være nyttig for en matematikklærer å svare på spørsmålene i skjemaet som del av egen refleksjon om de nye læreplanene.

Elisabeta Eriksen (OsloMet) er min veileder. Hun har mye kunnskap om algebra, og har nylig gjennomført et post-doc-studie om tidlig algebra.

Denne spørreundersøkelsen mener jeg også kan være del av oppstart på refleksjon og arbeid med den nye læreplanen. En mulighet kan være at jeg kommer til skolene når lærerne jobber i faggrupper.

Jeg skal på ingen måte teste lærerne eller måle skoler opp mot hverandre.

Jeg er fleksibel på tidspunkt. Jeg kan komme de fleste mandager, torsdager og fredager. Onsdager kan jeg komme på ettermiddagen, og jeg har også mulighet til å komme på morgenen tirsdager og noen ettermiddager på tirsdager.

Dersom dere har spørsmål eller ønsker å melde interesse kan dere ringe meg: tlf XXXXXXXXX, eller sende epost: XXXXXXXXXXXX

Hilsen Marianne Eskeland

Vedlegg 2 – Informasjon til pilotgruppen

Informasjon ang pilotering av spørreundersøkelse

Som del av min masteroppgave (Algebraisk tenkning på barnetrinnet) skal jeg gjennomføre en spørreundersøkelse blant lærere som underviser i matematikk på barnetrinnet. Jeg vil undersøke i hvilken grad matematikklærere på barnetrinnet er forberedt på å jobbe med algebra som et av kunnskapsområdene i matematikk i den nye læreplanen. Dette skal jeg gjøre ved å undersøke hvilken forståelse de har av kunnskapsområdet algebra og hvordan de ser for seg at undervisning i algebra på barnetrinnet kan foregå.

Det jeg trenger hjelp til nå er å teste ut hvordan spørreskjemaet fungerer. Du trenger ikke å skrive på navn, og jeg kommer til å makulere besvarelsen din når jeg har sett på den.

- Skriv gjerne et spørsmålstegn på spørreskjemaet dersom det er ord, formuleringer eller spørsmål du ikke forstår. Bruk gjerne en egen farge til dette.
- Dersom du ikke vet hva du skal svare så skriv gjerne «vet ikke», eller kryss av for «vet ikke» dersom det er et svaralternativ.
- Om du får det til så ta tiden på hvor lang tid du bruker på å fylle ut skjemaet.
- Bakerst i spørreundersøkelsen er det en side med noen spørsmål som gjelder hvordan du synes det var å fylle ut spørreundersøkelsen, jeg blir veldig takknemlig om du har tid til å svare på disse også.

Du velger selv om du vil svare på spørreundersøkelsen, all deltakelse i denne studien skal være frivillig.

Dersom du har spørsmål kan du ringe meg: tlf XXXXXXX eller epost: XXXXXXXXX

Tusen takk for hjelpen!

Hilsen Marianne Eskeland

SPØRREUNDERSØKELSE TIL LÆRERE SOM UNDERVISER I MATEMATIKK PÅ BARNETRINNET

Informasjon:

- Jeg ønsker at du svarer på spørsmålene i riktig rekkefølge
- Noen av spørsmålene kan være vanskelig å svare på, det er helt i orden om du ikke klarer å svare på alle
- Dersom du er usikker på hva du skal svare så kan du skrive «vet ikke», eller du kan komme med et forslag og skrive at du er litt usikker
- Dersom du har utfyllende kommentarer eller vil skrive mer til noen av spørsmålene, så kan du skrive på baksiden av spørreskjemaet
- Du kan være helt anonym, du trenger ikke å skrive på navn eller skole
- Dersom du ikke ønsker å delta i studien min så kan du fylle ut spørreskjemaet, men la vær å levere det til meg

Hilsen Marianne Eskeland

Tlf: XXXXXXXXXXXXXXXx

Epost: XXXXXXXXXXXXXXXX

1. Hvor mange år har du jobbet som lærer? ______________

2. Hvor mange år har du undervist i matematikk? _____________

3. På hvilke(t) trinn underviser du i matematikk nå? _______________________

4. På hvilke trinn har du undervist i matematikk? (sett flere kryss om det passer)

1. trinn	**2. trinn**	**3. trinn**	**4. trinn**	**5. trinn**	**6. trinn**	**7. trinn**	**u.trinn**	**vgs**
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

5. Hva slags utdanning og hvor mange vekttall eller studiepoeng har du i matematikk og matematikkdidaktikk?

Utdanning (navn eller beskrivelse):	**Vekttall eller studiepoeng:**

6. På hvilke trinn mener du det egner seg å undervise i algebra? Sett flere kryss om det passer:

1. trinn	**2. trinn**	**3. trinn**	**4. trinn**	**5. trinn**	**6. trinn**	**7. trinn**	**vet ikke**
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

7. Skisser kort tre forskjellige oppgaver du kunne tenke deg å bruke når du underviser i algebra på barnetrinnet:

Eksempel 1:

Eksempel 2:

Eksempel 3:

8. Slik beskrives algebra som et av de matematiske kunnskapsområdene (under kjerneelementene) i forbindelse med den nye læreplanen:

Algebra i grunnskolen betyr å arbeide med strukturer, mønster og relasjoner. Elevene skal gjennom hele skoleløpet arbeide med algebraisk tenkemåte - om hvordan algebra er en generalisering av tallregning, om hvordan algebra kan brukes til å finne ukjente størrelser, og om hvordan algebra kan brukes til å uttrykke sammenhenger mellom størrelser.

a. Hva kan det bety å arbeide med strukturer på barnetrinnet?

Skriv svaret ditt her:

b. Hva kan det bety å arbeide med mønster på barnetrinnet?

Skriv svaret ditt her:

c. Hva kan det bety å arbeide med relasjoner på barnetrinnet?

Skriv svaret ditt her:

d. Hvordan kan man jobbe med generalisering av tallregning på barnetrinnet?

Skriv svaret ditt her:

e. Hvordan kan algebra brukes til å finne ukjente størrelser på barnetrinnet?

Skriv svaret ditt her:

f. Hvordan kan algebra brukes til å uttrykke sammenhenger mellom størrelser på barnetrinnet?

Skriv svaret ditt her:

9. Hvor ofte foregår dette i matematikk-timene dine?

	hver uke	noen ganger	sjelden	aldri	vet ikke
1. Undersøker hvordan et tall i en tallrekke henger sammen med de tallene som kommer foran	☐	☐	☐	☐	☐
2. «Jobbe baklengs» (feks starte med svaret og undersøke hva oppgaven kunne ha vært)	☐	☐	☐	☐	☐
3. Jobber med «likninger» (feks: 5+6 = ☐+ 8, eller mer avanserte)	☐	☐	☐	☐	☐
4. Utforsker regnelovene (feks 6+7 = 7+6, gjelder dette for alle tall?)	☐	☐	☐	☐	☐
5. Utforske forskjellige regnemetoder (hva er likt/ulikt, hvorfor fungerer regnemetodene, hvilke andre oppgaver kan metodene brukes på..)	☐	☐	☐	☐	☐
6. Studerer tallrekker (eks: 5 – 10 – 15 – 20, hva er «regelen» her?)	☐	☐	☐	☐	☐
7. Prøve å forutsi et svar på en oppgave uten å foreta selve utregningene	☐	☐	☐	☐	☐
8. Generaliserer, dvs lete etter noe som gjentar seg og lager en «regel» som gjelder tilsvarende tilfeller (eks: 3+5=8, 5+7=12, oddetall + oddetall = partall)	☐	☐	☐	☐	☐
9. Tester ut om en «regel» gjelder for flere lignende tilfeller (eks oddetall+oddetall =partall, hva med partall + partall?)	☐	☐	☐	☐	☐
10. Jobber med funksjoner (to størrelser som endrer seg sammen, eks «det er plass til 4 barn på hvert bord, kan vi finne en måte å regne på for å finne ut hvor mange barn vi har plass til når vi får vite hvor mange bord vi har?»)	☐	☐	☐	☐	☐
11. Jobber med figurtall (eks kvadrat-tall, trekant-tall)	☐	☐	☐	☐	☐
12. Regne med bokstaver (som representerer ukjente eller varierende størrelser)	☐	☐	☐	☐	☐
13. Jobber relasjonelt med likhetstegnet (eks: 478 + 49 = 50 + ☐, finne tallet som skal stå i boksen uten å regne ut det som står til venstre for likhetstegnet)	☐	☐	☐	☐	☐
14. Studerer grafer og diskuterer hva slags situasjon/funksjon den kan representere	☐	☐	☐	☐	☐
15. Utforsker hvordan en mengde kan deles opp i ulike grupper (eks: «tre barn skal dele ti drops, hvor mange muligheter finnes det?»)	☐	☐	☐	☐	☐

10. Her kan du skrive dersom du har ønsker og forslag til hvordan du kan få hjelp til å utvikle din kompetanse for å kunne jobbe med kunnskapsområdet algebra i den nye læreplanen:

Tusen takk for at du har svart på dette spørreskjemaet!

Til slutt vil jeg spørre deg om du kunne tenke deg å delta i et intervju. Du står fritt til å takke nei til videre deltagelse i studien dersom du blir spurt om å være med videre, så du forplikter deg ikke til noe ved å vise interesse nå.

Dersom vi ser at det kan være nyttig så kan det også blir aktuelt at jeg er med og observerer noen matematikktimer der du underviser, men bare om du synes det er greit.

Dersom du samtykker til at jeg kan kontakte deg senere med forespørsel om å delta i et intervju og eventuelt observasjon av undervisning kan du skrive navnet ditt her:

Navn:

Skolen din:

Og gjerne epostadressen din:

Vedlegg 4 - Intervjuguide

OPPSTARTSINTERVJU

(først: info om lydopptak og informantenes rettigheter)

1. Lærerens forhold til matematikkundervisning
    - Hvordan vil du beskrive deg som matematikklærer?
    - Kan du beskrive en av dine typiske matematikktimer?

2. Lærerens forhold til algebra
    - Hva tenker du på når du hører ordet «algebra»?
    - Husker du noe fra algebraundervisningen da du gikk på skolen?

3. Hva er algebra og algebraisk tenkning
    - Hvordan vil du definere algebra?
    - Vil algebra defineres annerledes på barnetrinnet enn ellers i matematikken? Hvorfor/hvorfor ikke

4. Lærernes syn på algebraundervisning
    - Hvilke arbeidsmåter egner seg best når du underviser i algebra? (og hvorfor)
    - Hvorfor/hvorfor ikke undervise i algebra på barnetrinnet?
    - Har du eksempler på hvordan du har undervist i algebra på barnetrinnet? Gjerne ut i fra matrisespørsmålene i spørreundersøkelsen.
    - Har du opplevd at undervisning i et annet emne enn algebra endte opp med fokus på algebra eller algebraisk tenkning? Fortell

5. Fagfornyelsen
    - Hva tenker du er en god måte for deg å forberede deg til å undervise etter ny læreplan fra høsten?

OPPSTARTSAMTALE MED TO LÆRERE

6. Algebra i ny læreplan
   - Lærerne får se oversikten over kjerneelementer og mål i den nye læreplanen (for trinnet de underviser på) og spørsmål om hvilke mål som kan knyttes til algebra og algebraisk tenkning (og hvordan).

7. Oppgaver og opplegg for timene fremover: hvilket potensiale ser lærerne for utvikling av algebraisk tenkning?
   - Hvorfor har dere valgt ut denne/disse oppgavene?
   - Hvordan skal dere presentere oppgavene for elevene?
   - Hvordan ser dere for dere at elevene vil løse oppgavene?
   - Hvilke mål og kjerneelement i den nye læreplanen vil kunne knyttes til undervisningsopplegget?

INTERVJU ETTER UNDERVISNING

8. Utfordringer og muligheter i timen som har blitt observert (samtale med læreren ut fra utvalgte situasjoner i timen)
   - Hvorfor fulgte du opp…
   - Hvorfor spurte du….
   - Hvorfor gikk du ikke videre med….
   - Hvorfor valgte du ut de elevløsningene?
   - Noe mer du vil tilføye?

9. Hva føler du at du fikk til?

10. Hvilke hindringer møtte du på?

11. Hvordan kan jeg hjelpe deg videre?

SLUTTINTERVJU ETTER ANDRE RUNDE

12. Oppgavene dere har valgt å jobbe med
    - Hvorfor valgte dere disse oppgavene?
    - Hvilket potensiale for algebraisk tenkning så dere i oppgavene?

13. Tok du tak i noen av utfordringene (med tips) som jeg oppsummerte etter første runde?
    - Hvilke utfordringer tok du tak i?
    - Var noen av tipsene til hjelp?

14. Kommer du nå på episoder eller opplegg der dere tidligere har jobbet algebraisk uten å være klar over det?

15. Undervisning i algebra sammenlignet med vanlig matteundervisning
    - Opplevde du det annerledes å planlegge et undervisningsopplegg i algebra enn slik du vanligvis planlegger matematikkundervisning?
    - Gjorde du som lærer noe som var annerledes i planleggingen av undervisningsopplegget?
    - Hvordan opplevde du deg som lærer nå du underviste i algebra?
    - Hvordan har fokus på algebra påvirket din matematikkundervisning?

16. Videre arbeid
    - Har du noen tanker om hvordan dere vil jobbe videre med algebra i klassene nå?
    - Hva kan være til hjelp for deg slik at du kan klare å jobbe med algebra slik det er tenkt i den nye læreplanen?

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Algebraisk tenkning på barnetrinnet"?

Dette er en forespørsel til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å få kunnskap om i hvilken grad det legges til rette for algebraisk tenkning på barnetrinnet. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg. Vi ønsker først og fremst at du fyller ut et spørreskjema. Dersom du synes det er greit å bli kontaktet med forespørsel om intervju og observasjon av undervisning i etterkant av spørreundersøkelsen, så skriver du navnet ditt på undersøkelsen. Navnet ditt vil bare bli brukt til å komme i kontakt med deg, og ikke bli publisert på noen måte.

Formål
Masterprosjektet har som formål å undersøke hvordan lærere på barnetrinnet knytter algebra opp mot den nye læreplanen, og i hvilken grad og hvordan algebra og algebraisk tenkning integreres i matematikkundervisningen på barnetrinnet.
Dette forskningsprosjektet er del av en mastergrad ved OsloMet.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
OsloMet - storbyuniversitetet

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du er valgt ut fordi du underviser i matematikk på barnetrinnet.

Hva innebærer det for deg å delta?
- Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du fyller ut et spørreskjema. Det vil ta deg ca. 30 minutter. Spørreskjemaet inneholder spørsmål om din bakgrunn som lærer, dine oppfatninger om algebra og algebra og den nye læreplanen.
- Noen av lærerne som har svart på spørreundersøkelsen blir invitert til å være med på et samtalebasert intervju der vi diskuterer algebra på barnetrinnet og den nye læreplanen. Om du godkjenner det så vil det bli tatt lydopptak av samtalen, lydopptaket slettes etter at samtalen har blitt skrevet ned.
- Av de lærerne som blir valgt ut til intervju vil også noen bli spurt om å bli observert med lydopptak av 2-3 påfølgende matematikktimer.
- For de som har blitt observert i undervisningen så tar vi også en liten samtale til slutt. Kanskje du har noe du ønsker å ta opp om undervisningen som har blitt observert?

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Prosjektansvarlig og masterstudenten vil ha tilgang til datamaterialet.
- Navn og kontaktopplysninger vil lagres atskilt fra datamaterialet.
- Du vil ikke kunne identifiseres ut i fra det som skrives i masteroppgaven, men om du leser oppgaven vil du kanskje kunne kjenne igjen at det er skrevet om deg.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes innen *31.12.2020*. Personopplysninger og opptak blir slettet senest ved prosjektslutt.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra OsloMet - storbyuniversitetet har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Masterstudent ved OsloMet: Marianne Eskeland, e-post: XXXXXXXXXX, tlf XXXXXXXX eller veileder og førsteamanuensis ved OsloMet Elisabeta Eriksen, epost: XXXXXXX
- Personvernombud ved OsloMet: Ingrid Jacobsen, e-post: personvernombud@oslomet.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Elisabeta Eriksen — Marianne Eskeland

Prosjektansvarlig (Forsker/veileder) — *student*

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Algebraisk tenkning på barnetrinnet*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å svare på et spørreskjema
- ☐ å delta i intervju (med lydopptak)
- ☐ å bli observert med lydopptak mens jeg gjennomfører undervisning

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 31.12.2020

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Samtykkeerklæring til lydopptak av undervisning
-informasjon til foresatte-

Klassens lærer er deltaker i masterprosjektet *Algebraisk tenkning på barnetrinnet*.
Formålet med prosjektet er å undersøke hvordan lærere på barnetrinnet knytter algebra opp mot den nye læreplanen, og hvilken grad og hvordan det legges til rette for algebraisk tenkning i matematikkundervisningen.
Det vil bli tatt lydopptak i 2-3 undervisningsøkter. Lydopptakeren slås av dersom en elev som ikke har gitt samtykke snakker. Jeg ønsker også å ta bilde av skriftlig elevarbeid (det elevene har skrevet og tegnet i bøkene sine), og vil passe på at det ikke kommer med navn på bildene.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta når observasjonene skal gjennomføres. Dersom du *ikke* ønsker at det skal bli tatt lydopptak når ditt barn snakker lar du vær å samtykke.

Hva skjer med informasjonen om elevene?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt i henhold til regelverket. Lydopptakene vil bli lagret på en ekstern harddisk som er sikret med kode. Prosjektet skal etter planen avsluttes innen *31.12.2020*. Alle data og opptak blir slettet ved prosjektslutt.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg og ditt barn basert på ditt samtykke som foresatt.

På oppdrag fra OsloMet - storbyuniversitetet har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Masterstudent ved OsloMet: Marianne Eskeland, e-post: XXXXXXX, tlf XXXXXXXX eller veileder og førsteamanuensis ved OsloMet Elisabeta Eriksen, epost: XXXXXXX
- Personvernombud ved OsloMet: Ingrid Jacobsen, e-post: personvernombud@oslomet.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Elisabeta Eriksen	Marianne Eskeland
Prosjektansvarlig (Forsker/veileder)	*student*

Samtykke til deltakelse ved lydopptak av undervisning

- ☐ Jeg har mottatt informasjon om prosjektet
- ☐ Jeg gir tillatelse til at mitt barn kan delta under lydopptak av undervisning
- ☐ Jeg gir tillatelse til at det kan tas bilde av skriftlig arbeid mitt barn har gjort

Navn på elev:

Signatur fra foresatt, dato:

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Algebraisk tenkning på barnetrinnet

Referansenummer

540591

Registrert

06.09.2019 av Marianne Cecilie Mobech Eskeland - [redacted]

Behandlingsansvarlig institusjon

OsloMet - storbyuniversitetet / Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier / Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Elisabeta Iuliana Eriksen, [redacted]

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Marianne Eskeland, [redacted]

Prosjektperiode

19.08.2019 - 31.12.2020

Status

06.11.2019 - Vurdert

Vurdering (1)

06.11.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 06.11.2019 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.2020.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).
NSD vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

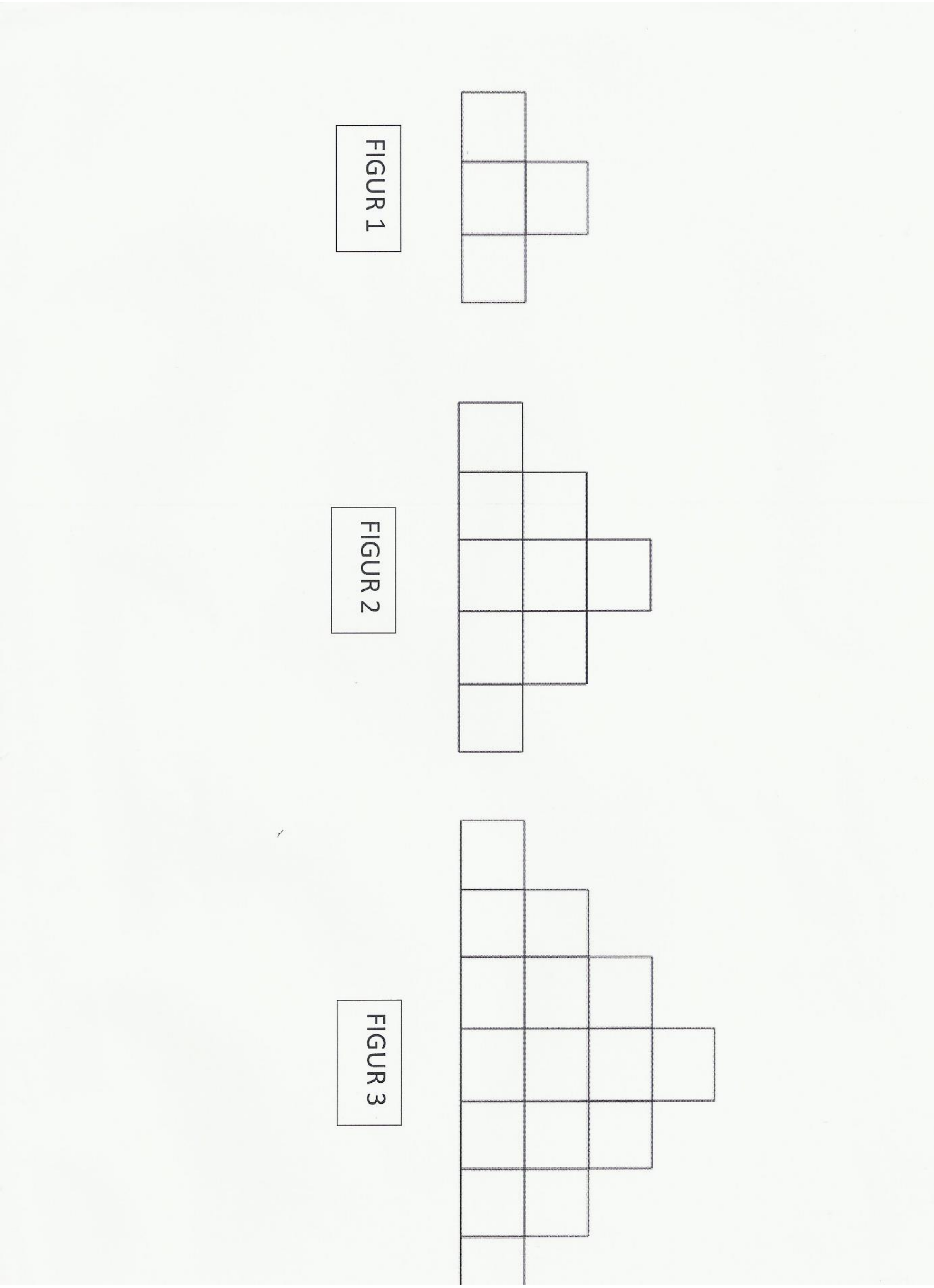
For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

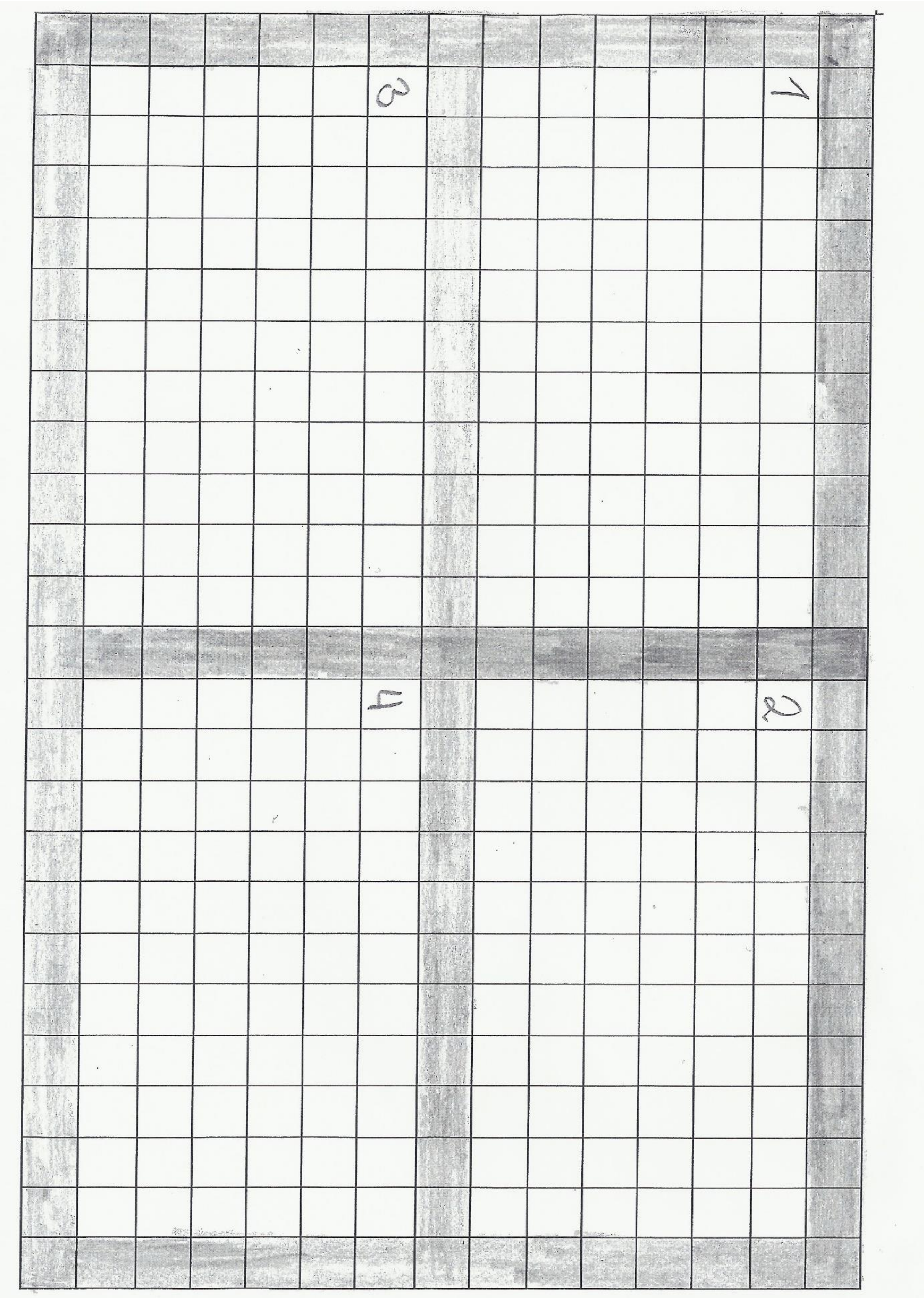
Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Kajsa Amundsen
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

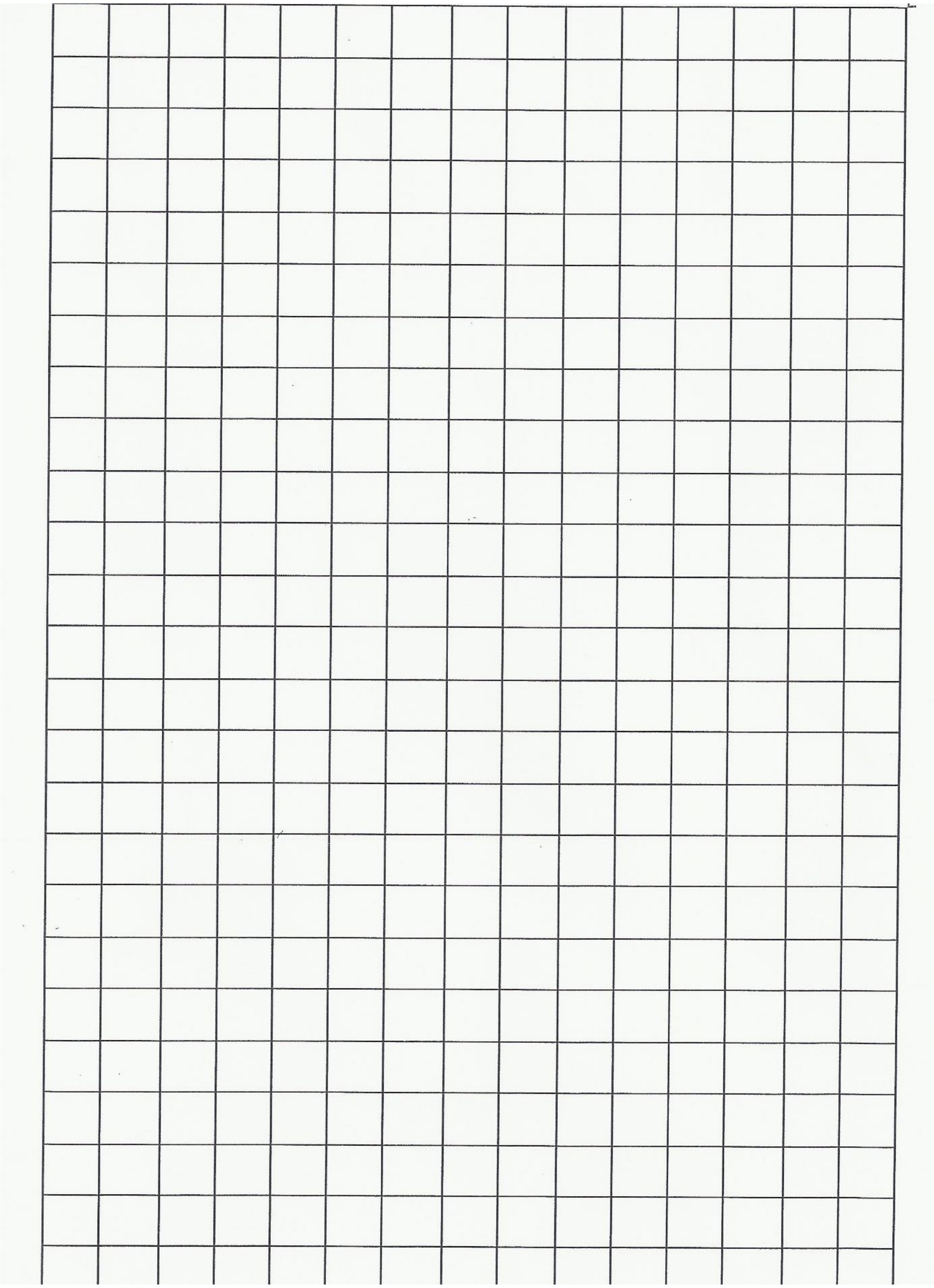
Vedlegg 8 – «The raindrop task»



Vedlegg 9 – Ark som figurene fra «The raindrop task» skal tegnes på



Vedlegg 10 – Ruteark som elevene kunne tegne større figurer på

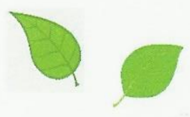
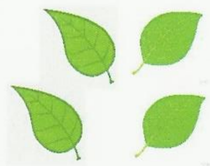
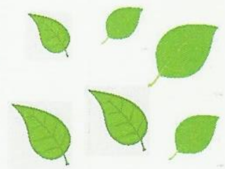


Vedlegg 11 – Voksende plante

Voksende mønster

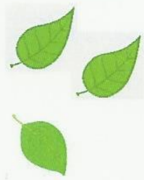
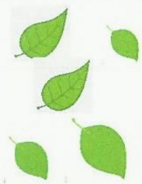
En plante vokser hver dag slik dere ser på bildene. Hvor mange blader har planten på de ulike dagene som er satt opp i skjemaet?

Oppgave 1

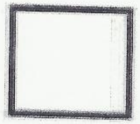
Dag 1	Dag 2	Dag 3	Dag 4	Dag 10	Dag 100	Dag n
						
Antall blader						
Vis utregninger:						

Vedlegg 12 – Ekstraoppgave, voksende plante

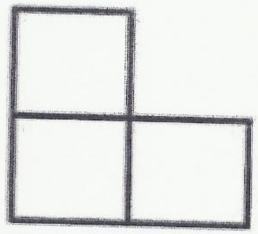
Oppgave 2

Dag 1	Dag 2	Dag 3	Dag 4	Dag 10	Dag 100	Dag n
						
Antall blader						
Vis utregninger:						

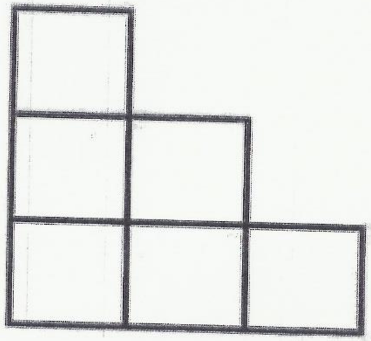
Vedlegg 13 – Oppgaveark, trekanttall



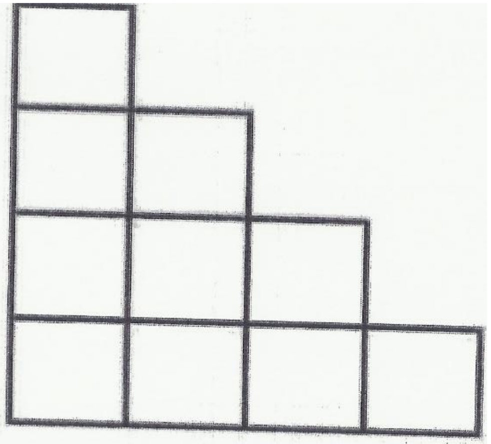
FIGUR 1



FIGUR 2



FIGUR 3



FIGUR 4

1. Hvordan vokser figuren?
2. Hvor mange firkanter blir det i figur 5?
3. Hvor mange firkanter er det i figur 6?
4. Hvor mange firkanter blir det i figur 10?

Vedlegg 14 – Utvidet T-tabell til oppgaven med trekanttall

FIGUR NUMMER	UTREGNING	ANTALL FIRKANTER
FIGUR 1	1	1
FIGUR 2		3
FIGUR 3		6

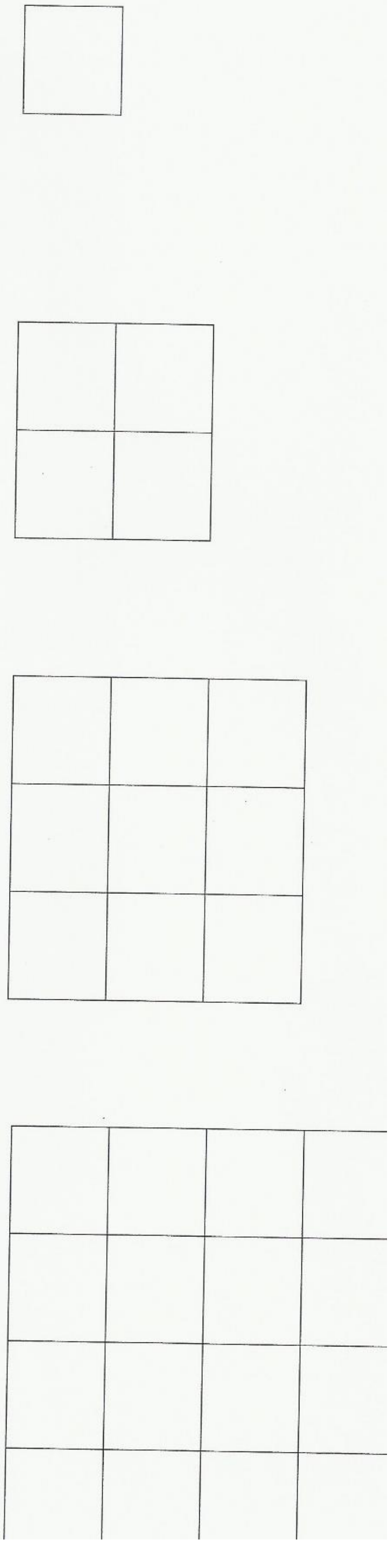
Vedlegg 15 – Oppgaveark 1, kvadrattall

FIGUR 1

FIGUR 2

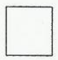
FIGUR 3

FIGUR 4

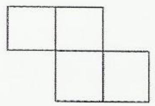


1. Beskriv hvordan figuren vokser?
2. Hvor mange bokser blir det i figur 5?
3. Hvor mange bokser blir det i figur 7?
4. Hvor mange bokser blir det i figur 10?

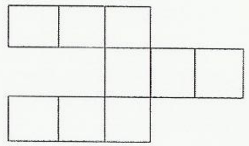
Vedlegg 16 – Oppgaveark 2, kvadrattall



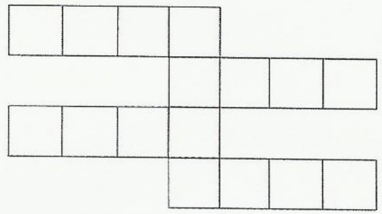
FIGUR 1



FIGUR 2



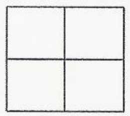
FIGUR 3



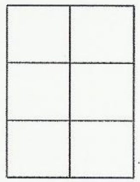
FIGUR 4

1. Beskriv hvordan figuren vokser?
2. Hvor mange bokser blir det i figur 5?
3. Hvor mange bokser blir det i figur 7?
4. Hvor mange bokser blir det i figur 10?

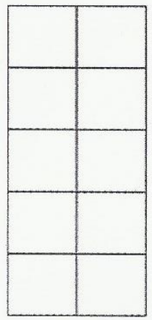
Vedlegg 17 – Ekstra-oppgave i Geir sin fjerde time



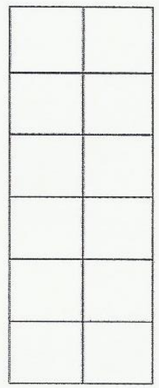
FIGUR 1



FIGUR 2



FIGUR 3



FIGUR 4

1. Beskriv hvordan figuren vokser?
2. Hvor mange bokser blir det i figur 5?
3. Hvor mange bokser blir det i figur 7?
4. Hvor mange bokser blir det i figur 10?