# MASTEROPPGAVE
# Masterstudium i skolerettet utdanningsvitenskap med fordypning i matematikk og matematikkdidaktikk
# Mai 2020

Brøk i tekstoppgaver: En analyse av innhold og kognitive utfordringer i læremidler på åttende trinn

Maria Vilde Mo

OSLOMET

**OsloMet – storbyuniversitetet**

**Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier**

**Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning**

## Sammendrag

Denne studien har undersøkt innholdet i tekstoppgaver i seks læremidler på åttende trinn innenfor emnet brøk, i henholdsvis Faktor, Tetra og Nummer. Min studie undersøker innholdet i brøkkapitlene ved å analysere hvordan lærebøkene og tilhørende elevnettsted presenterer brøkbegrepet ved bruk av ulike brøkaspekt og -modeller, samt hvordan disse oppgavene utfordrer kognitivt.

Datamaterialet mitt består av 277 tekstoppgaver. Analysen er basert på de fem grunnleggende kategoriene av brøkbegrepet, et rammeverk utviklet av Kieren (1980). I forbindelse med dette ønsket jeg også å kategorisere mellom de tre vanligste modellene av brøk brukt i undervisningssammenheng omtalt som areal-, lengde- og mengdemodell, presentert blant annet av Petit, Laird, Marsden, and Ebby (2016). Bezuk and Bieck (1993) peker på at disse modellene har ulik vanskelighetsgrad, og mine analyser bekrefter dette. Nivårammeverket utviklet i MEG-studien (Turner, Dossey, Blum, & Niss, 2013) ble valgt for å undersøke hvordan oppgavene utfordrer kognitivt. Resultatene fra analysen viser at tekstoppgavene i læremidlene er kodet til et lavt nivå i de seks kognitive kategoriene som rammeverket bruker for å beskrive matematikkompetanse. Hovedsakelig skiller læremidlene seg fra hverandre når det gjelder brøkaspektene, hvor en stor del av oppgavene i Faktor er kategorisert innenfor brøk som del av en helhet, Nummer dedikerer en overveldende del av oppgavene til brøkaspektet tallstørrelse og Tetra har en større og jevnere variasjon mellom aspektene. Dersom analysen kun baserte seg på variasjon mellom brøkaspektene, hadde Tetra lærebok kommet best ut av den.

Min studie viser altså at tekstoppgavene i de seks utvalgte læremidlene ligger på et lavt kognitivt nivå, men det er ulikt hvordan læremidlene presenterer brøkbegrepet ved bruk av aspekter. Svært få av de seks læremidlene presenterer elevene for et variert brøkbegrep, og dette står i motsetning til forskning som poengterer at for å forstå brøk må man bli fortrolig med de ulike aspektene ved brøk (Lamon, 2012).

## Abstract

Title*: "Fractions in text-assignments: An analysis of content and cognitive demand in teaching materials in eighth grade"*

This study investigates how three different textbooks and their companion websites present the concept of fraction through text-assignments in eighth grade. The teaching materials are called Faktor, Tetra and Nummer. My study examines how the different chapters present the term fraction by using different subconstructs and models, as well as how these tasks are cognitively challenging.

My data consists of 277 text-assignments. The analysis is based on the five subconstructs of fractions, a framework developed by Kieren (1980). In connection to this, I also wanted to categorize between the three most common models used in relation to fractions, often referred to as area models, set models and number lines, presented by Petit et al. (2016). Bezuk and Bieck (1993) point out that these models have different levels of difficulty, and my analysis confirms that. A framework developed in the MEG-study was chosen to examine how tasks are cognitively challenging. The framework has enabled a deep study of cognitive factors that influence the difficulty of mathematics items. The results from my analysis show us that the text-assignments are coded to a lower level in all six cognitive categories used to describe mathematical competence in the MEG-framework. The teaching materials essentially differ in terms of which fraction interpretation is used the most, where a large portion of the tasks in Faktor use part-to-whole comparison. Nummer dedicates an overwhelming part to ratio. However, Tetra varies more between the five subconstructs. If the analysis was based on variation alone, Tetra´s textbook would have reigned.

In other words, my study shows that the text-assignments in the different teaching materials are categorized to a lower cognitive demand according to the MEG-framework. However, they differ in terms of how the concept of fractions are presented through different subconstructs. Very few of the teaching material analyzed in this study present students with a varied use of these interpretations, and this is in contrast to research that points out that in order to understand fractions properly, one must become familiar with the different subconstructs of fractions (Lamon, 2012).

## Forord

Denne masteroppgaven setter punktum på et langt utdanningsløp. Arbeidet med oppgaven har vært lærerikt og interessant, og jeg har tilegnet meg mye kunnskap som jeg vil ta med meg videre i arbeidet som lærer.

Det har også til tider vært krevende og frustrerende å skrive masteroppgaven. Jeg vil rette en stor takk til mine foreldre, Therese og Dagfinn, som har støttet og oppmuntret meg i løpet av denne prosessen. Flere dagers arbeid med korrekturlesing går heller ikke ubemerket forbi.

Jeg vil også takke Ingrid, min gode venninne og medstudent, for at du har satt deg inn i rammeverkene og kodet deler av mitt datamateriale. Du er god å ha.

Til slutt vil jeg takke min veileder Eyvind Martol Briseid for korrekturlesing, konstruktiv kritikk og faglig støtte.

Maria Vilde Mo

Oslo, 13.05.2020

## Innholdsfortegnelse

# Tabell- og figurliste

# 1.0 Innledning

I denne delen av oppgaven vil jeg gjøre rede for valg av tema og problemstilling, oppgavens innhold og oppbygning.

## 1.1 Bakgrunn for valg av tema

*Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) er en internasjonal studie som måler ferdigheter i matematikk og naturfag på grunnskolen. Et av de viktigste formålene med TIMSS er å kunne presentere data av høy kvalitet om elevers prestasjoner. Hovedfunnene fra TIMSS viser at norske elever skårer signifikant høyere enn jevnaldrende elever i de andre nordiske landene (Bergem, Kaarstein, & Nilsen, 2016), men det er svakere prestasjoner i emneområdet «Tall» som omhandler de fire regneartene, samt regning med brøk og desimaltall. På bakgrunn av at Petit et al. (2016) bekrefter TIMSS-undersøkelser om at vi har et forbedringspotensial i brøk, samt min interesse for emnet, har jeg valgt dette som tema i min studie. Ved å se nærmere på brøkoppgavene i læremidlene, ønsker jeg å undersøke hvordan brøkbegrepet blir presentert for elevene.

Etter at Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2006) ble innført, har det vært lite oppmerksomhet rundt papirbaserte læremidler i skolen. Diskusjoner om digital teknologi og bruken av digitale verktøy for å øve ferdigheter har derimot tatt mye plass (Gilje, 2017), mulig på bakgrunn av at digitale ferdigheter inngår som en av de fem grunnleggende ferdigheter i skolen. Det kan argumenteres for at det ikke er en motsetning mellom papirbaserte læremidler og digitale verktøy - de hører sammen i fremtidens skole.

Digitaliseringen bidrar til at det er både enkelt og praktisk å velge både papirbaserte og digitale læremidler, og ofte vil disse læremidlene sammen være utviklet av forlag og andre tilbydere. I tillegg har lærere tilgjengelige ressurser som de mener kan tilpasses undervisningen. Slik oppstår det en blandingskultur der elever arbeider med både papirbaserte og digitale læremidler, som er laget med utgangspunkt i kompetansemålene. Vi vet en del om hvor utbredt bruken av IKT er på ulike trinn, men vi vet mindre om forholdet mellom papirbaserte og skjermbaserte læremidler. De blir sjeldent sett på i sammenheng, og derfor tar min studie for seg kombinasjonen lærebok og tilhørende elevnettsted.

I litteraturen skiller forfatterne ofte på problemer med og uten en realistisk kontekst (OECD, 2013). Jeg opplever at det er et fokus på problemløsing både i litteraturen og i skolen, men det blir i realiteten mest arbeidet med pugging av algoritmer. Matematikk er et fag vi vet mange nåværende og tidligere elever har manglende interesse for, assosiasjoner med nederlag og oppgaver som ikke inngår i noen sammenheng (Rosenlund & Gulaker, 2018). Dersom matematikken bare handler om å følge prosedyrer og herme etter eksempler uten å forstå hvorfor, opplever jeg at elevene ikke tilbys muligheten til å resonnere. Kilpatrick et al. (2001) mener at det ikke er tilstrekkelig for elevene å bare jobbe med de samme oppgavene. De skriver at dersom elevene skal forstå algoritmen, så må de arbeide med å forklare og argumentere selv, med mange flere forskjellige problemer. Dette tror jeg dessuten vil endre elevenes motivasjon for faget, og av den grunn er det viktig med realistiske oppgaver i undervisningen for å kunne koble matematikken i klasserommet til hverdagen. Det er på bakgrunn av dette jeg har valgt å rette fokus mot tekstoppgavene, se på kvaliteten av disse oppgavene og hvilken del av matematikkompetansen som vektlegges her. Dette var et nødvendig valg for å avgrense oppgaven.

## 1.2 Problemstilling

Jeg ønsker gjennom denne studien å undersøke hvordan elevene blir presentert for brøkbegrepet på åttende trinn i ungdomsskolen. Det er viktig at elevene blir presentert for et grundig og variert bilde av brøk (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2019). Med variasjon menes det at oppgavene bør veksle mellom ulike aspekter og modeller av brøk. Spesielt ønsker jeg å se på hvordan elevene utfordres kognitivt i disse tekstoppgavene. På bakgrunn av dette har jeg formulert følgende problemstilling:

*Hvordan presenteres brøkbegrepet i tekstoppgaver i læremidler på åttende trinn?*

I mitt tilfelle undersøker jeg temaet brøk presentert i tre ulike lærebøker som er skrevet ut ifra Læreplanen for Kunnskapsløftet 2006 (Utdanningsdirektoratet, 2006). Med tanke på at læreren benytter læreboka som utgangspunkt i mye av den daglige undervisningen (Gilje et al., 2016), er det hovedsakelig dette læremiddelet som blir analysert i denne innholdsanalysen. Likevel vet vi at det finnes en blandingskultur mellom papir- og skjermbaserte læremidler. Dette utvidet problemstillingen ytterligere til å også omhandle lærebokas tilhørende elevnettsted. Med dette er det viktig å undersøke hvordan de tilhørende elevnettstedene komplementerer læreboka, altså om disse læremidlene fungerer selvstendig eller tilføyer noe til læringen som ikke presenteres i læreboka.

## 1.3 Oppgavens struktur

Oppgaven er inndelt slik at det først kommer en teoridel hvor begreper som er relevante defineres, de teoretiske rammeverkene redegjøres for og tidligere funn beskrives. Deretter beskrives den metodiske tilnærmingen i denne studien, gjennomføringen av datainnsamlingen og eksempler på utregning av ulike MEG-verdier og eksempelkodinger, slik at det skal være enklere å følge diskusjonen i kapittel 5. Videre blir resultatene presentert i kapittel 4, hvor det følger beskrivelse og tolkning av dataene. Så diskuteres resultatene i kapittel 5. Her vil problemstillingen bli besvart og teorien diskutert opp mot resultatene. Som en avsluttende kommentar blir ulike refleksjoner knyttet til studien presentert.

# 2.0 Teori

Denne innholdsanalysen omfatter brøkkapitlene i seks læremidler. Disse læremidlene er utarbeidet fra Læreplanen for Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2006), og det er derfor hensiktsmessig å kartlegge hvilke læreplanmål brøkkapitlene i datamaterialet er arbeidet ut ifra. Viktige momenter fra LK06 blir trukket frem innledningsvis i teorikapittelet, og dette vil bli brukt videre for å diskutere resultatene i kapittel 5. Fra august 2020 iverksettes Fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2020), og dette blir trukket frem i oppgaven for å vise blant annet tekstoppgavenes relevans også fremover i tid.

Kapittelet fortsetter med å ta for seg begrepet brøk og hvilke aspekter og modeller av brøk vi finner i undervisningssammenheng. Her refereres det til flere lærebøker for lærerstudenter i matematikk, og disse kildene er brukt for å få skolematematikkens perspektiv på brøk.

Uavhengig av læreplan bør et læremiddel i matematikk fremme matematikkompetanse. Derfor vil teorien ta for seg to ulike perspektiver på matematikkompetanse hvor PISA har tatt utgangspunkt i et av disse perspektivene i sin utforming av undersøkelsen. En komponent av PISA har undersøkt vanskelighetsgraden til PISA-oppgavene, og dette er gjennomført av Mathematics Expert Group (MEG). Denne konkretiseringen av rammeverket fra PISA omtales som MEG-rammeverket i min studie. Både PISA og MEG blir lagt frem i delkapittel 2.7 og 2.8. Alle PISA-oppgavene er satt i en kontekst for å skape virkelighetsnære problemer. I utgangspunktet ønsket jeg derfor å analysere kontekstoppgaver i min studie, men i realiteten har jeg analysert tekstoppgaver. I delkapittel 2.9 blir kontekstoppgaver og tekstoppgaver begrepsavklart.

Avslutningsvis presenteres forskningsprosjektet ARK&APP som kartlegger det nye læremiddellandskapet. Her defineres begrepene læremiddel, lærebok og digitale læremidler. Det er viktig å klargjøre disse begrepene, ettersom analysen omfavner både lærebøker og deres tilhørende elevnettsteder. Annen forskning legges også frem her, fordi dette vil være viktige komponenter videre i kapittel 5, hvor resultatene av analysen i de seks læremidlene drøftes.

## 2.1 Kunnskapsløftet

Læremidler er på mange måter bindeleddet mellom læreplan og praksis. Det er derfor nødvendig å se hvilke læreplanmål brøkkapitlene i datamaterialet er arbeidet ut ifra.

I den gjeldende læreplanen, LK06, faller brøk innunder hovedområdet tall og algebra (Utdanningsdirektoratet, 2015), og brøkbegrepet introduseres relativt tidlig for elevene. Etter 7. årssteget skal elevene i utgangspunktet kunne regne med brøker og plassere dem på tallinja. Med regning av brøk menes at elevene skal finne fellesnevner og utføre addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av brøker (Utdanningsdirektoratet, 2015). Etter 10. årssteget skal eleven kunne «*sammenlikne og regne om mellom hele tall, desimaltall, brøker, prosent, promille og tall på standardform, uttrykke slike tall på varierte måter og vurdere i hvilken situasjon ulike representasjoner er formålstjenlige*» (Utdanningsdirektoratet, 2015, p. 40). Eleven skal også kunne *«regne med brøk, utføre divisjon av brøker og forenkle brøkuttrykk»* (Utdanningsdirektoratet, 2015, p. 40) . Elevene opplever derfor en stabil økning i vanskelighetsgrad innen emnet brøk. Lærebøkene og elevnettstedene som er analysert i min studie, er blant annet utarbeidet fra disse læreplanmålene.

Det skal nevnes at Fagfornyelsen for 8. og 9. trinn iverksettes fra og med august 2020. Den bygger i stor grad på Niss´ kompetansebegrep som forklares nærmere i delkapittel 2.6. Rapporten legger vekt på at undervisning ikke bare skal være ferdighetstrening, men også bestå av utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter. Det er altså de samme formuleringene vi møtte i LK06, men som enda ikke er forankret sterkt nok i praksis. Med Innunder Fagfornyelsen følger kjerneelementene og dette forstås som en ivaretakelse av det viktigste i faget. I matematikk er et av disse kjerneelementene problemløsing, og tekstoppgaver blir i denne sammenhengen relevant. Tekstoppgaver blir dessuten anvendt i PISA-undersøkelsen. I mitt datamateriale koder jeg disse oppgavetypene av overnevnte grunner. Det er i tillegg interessant å se at tekstoppgaver er relevant også i de kommende årene.

## 2.2 Hva er brøk?

I matematisk forstand er brøk alle tall som kan skrives på formen $\frac{a}{b}$ der a og b er hele tall og $b \neq 0$ (Solem, Alseth, & Nordberg, 2010). Brøk gir oss mulighet til å uttrykke tallstørrelser mellom de hele tallene. Brøk dukker opp i elevenes daglige liv, som for eksempel i tid med $\frac{1}{2}$ time eller om vi skal fordele noe likt mellom oss (Hinna, Rinvold, & Gustavsen, 2011).

Behr, Lesh, Post, and Silver (1983, p. 2) peker på brøks betydning i grunnskolen: *«Rational number concepts are among the most complex and important mathematical ideas children encounter during their presecondary school years»*. Fra et matematisk perspektiv legger brøk grunnlaget for å ha suksess i algebra og videre i matematikken. I følge Brekke (2002) er dette en kritisk fase i matematikklæringen. Bjerke, Eriksen, Rodal, and Ånestad (2013) peker på tre årsaker til at elever har problemer med brøkbegrepet:

Den første er at det er et stort kognitivt sprang fra heltall til brøk. Brøk fungerer av den grunn som et terskelbegrep. Det er mange elever som strever med brøk (OECD, 2014), og dette kan forklares med at skrivemåten til brøk er annerledes enn for de hele tallene, og at det ikke er lett å sortere tallene etter størrelse. Lamon (2012) eksemplifiserer dette kognitive hoppet med at elevene tidligere har referert til tallet 1 som en enkel enhet, men brøkbegrepet setter en stopper for denne tankegangen.

Den andre årsaken kan være at undervisningen innfører algoritmer uten forståelse eller lite variasjon av representasjonsformer (Bjerke et al., 2013). I brøkundervisning blir ofte spørsmål lagt til side, og standardalgoritme blir trukket frem (Solem et al., 2010). Da kan elevene møte på problemer dersom de har glemt regelen eller om de ikke har forstått det de arbeider med. I boken *Teaching Number Sense* trekker Anghileri (2006) frem samme problematikk og oppfordrer lærerne til å heller oppmuntre elevene til å tenke, se mønstre, forutsi resultater og oppdage sammenhenger.

En tredje årsak er ifølge Bjerke et al. (2013) kompleksiteten i brøkbegrepet. Brøk er et svært sammensatt begrep der det inngår fem aspekter. Her blir det også poengtert at et ensidig fokus på kun ett av aspektene ved brøk vil gi manglende forståelse. Dette støttes også av Kleve (2014) som mener det er viktig å se sammenhengene mellom aspektene for å kunne opparbeide seg en dypere forståelse av brøk.

For å opparbeide seg en slik kunnskap og kunne regne med brøk på en standardisert måte, er det helt nødvendig at elevene har en god og dyp forståelse av hva brøk egentlig går ut på og hva brøker egentlig vil si (Solem et al., 2010). Det finnes som sagt fem aspekter av brøk, og det er viktig å påpeke at skillet mellom disse aspektene er flytende. For eksempel kan en brøk opptre som både del av en helhet og operator på samme tid. Dette utdypes nærmere nedenfor.

## 2.3 Aspekter av brøk

Kieren (1980) utviklet fem didaktiske kategorier, som han kalte de fem grunnleggende kategorier av brøkbegrepet. Disse kategoriene utgjør et rammeverk for aspekter av brøk. Kieren (1980) understreker at aspektene overlapper hverandre, og dette eksemplifiseres i *Aspekter ved brøk i en nasjonal prøve* av Gray and Ånestad (2016). Disse aspektene er matematiske tolkninger som kan sammenlignes med begreper eller med matematiske strukturer (Gray & Ånestad, 2016). For å forstå brøk, må man forstå alle mulige betydninger brøk kan representeres ved (Van de Walle et al., 2019). En av de mest brukte betydningene av brøk er del av en helhet. Mange forskere på feltet understreker betydningen av at elever ville forstått brøkbegrepet bedre dersom det var større vektlegging på tvers av andre betydninger av brøk, blant dem er Lamon (2012). Disse ulike aspektene av brøk presenteres nedenfor.

### 2.3.1 Brøk som del av en helhet

Brøk kan uttrykke del av en helhet, der helheten kan være én eller flere. Brøk som del av en helhet representerer en sammenligning mellom antall deler og antall deler helheten er delt inn i (Gray & Ånestad, 2016). Det faktum at teller og nevner sammen uttrykker en del av en helhet, gjør brøk til et relativt begrep. Det betyr at den mengden eller størrelsen som uttrykkes ved en brøkdel, kun kan forstås når brøkdelen ses i relasjon til denne helheten (Solem, Alseth, Eriksen, & Smestad, 2017). For eksempel kan denne helheten være en pizza eller 27 elever.

I opplæringen har det vært vanlig å starte med brøk som del av en helhet, og Van de Walle et al. (2019) poengterer at dette er et effektivt startpunkt for å bygge forståelse av brøkbegrepet. Grunnen til dette er at elevene ofte har hatt erfaringer med dette aspektet av brøk. En annen grunn er at det er mange måter å konkretisere brøk som en del av en helhet på, noe som støtter elevenes begynnende utvikling av brøkforståelse (Solem et al., 2017). Van de Walle, Karp, and Bay-Williams (2014) poengterer at brøk som del av en helhet presentert ved arealmodell er den vanligste fremstillingen av brøk i lærebøkene. Denne fremstillingen er så mye brukt at det for mange elever kan være problematisk å tenke på brøk gjennom de andre aspektene (Van de Walle et al., 2014).

### 2.3.2 Brøk som tallstørrelse

Dette aspektet handler om utvidelse av tallsystemet utover de hele tallene (Gray & Ånestad, 2016). Når brøk opptrer som et tall i seg selv, fungerer brøken som en tallstørrelse (Hinna et al., 2011). Brøken har ikke relasjon til en helhet, og kan derfor ikke forstås som et relativt begrep. Måling er et godt eksempel på at brøk blir brukt til å uttrykke en tallstørrelse, og elevene har erfaring med dette fra hverdagen. $2\frac{1}{2}$ time et eksempel på brøk som en tallstørrelse. På samme måte som det finnes uendelige tall på tallinja, finnes det også uendelig mange liter melk. Brøk som tallstørrelse er derfor ikke relatert til en gitt mengde.

Ved brøk som måling er det hele en måleenhet, en størrelse. Dette kan for eksempel være en lengdeenhet, som en pinne, en papirstripe eller en meter. Ved måling kan det som måles være større enn måleenheten, slik at elevene får erfaringer med brøker større enn 1 når de møter dette aspektet ved brøk. Dersom måleenheten er i meter, kan oppgaveeksempelet dreie seg om $1\frac{1}{2}$ meter lang gardin. Dette er fordelaktig for elevenes utvidelse av brøkforståelsen. Når det er snakk om måling er tallinja mest brukt (Lamon, 2007). Tallinjen er et godt hjelpemiddel for denne utvidelsen, ettersom den illustrerer at de rasjonale tallene strekker seg forbi 1 (Solem et al., 2017).

### 2.3.3 Brøk som kvotient

Kvotientaspektet av brøk får vi når en størrelse a skal deles i b like deler (Kieren, 1980). Brøken kan altså være svaret i en divisjon, der to heltall divideres, og på den måten unngår vi rest. Svaret på divisjonen kalles for kvotient, og kan skrives som en brøk (Solem et al., 2017). Dessverre er divisjon sjeldent koblet til brøk (Van de Walle et al., 2019). Elevene er kjent med å dele likt, og denne verdifulle erfaringen bør brukes i undervisning av brøk som kvotient (Lamon, 2012). Dette er en fordel ved dette aspektet av brøk. På bakgrunn av dette anbefaler Empson and Levi (2011) brøk som divisjon som utgangspunkt for undervisningen i brøk.

Kvotientoppgaver er i tillegg ofte enkle å konkretisere, og dermed kan elevene på egenhånd komme frem til et svar på ulike måter (Solem et al., 2017). Elevenes uformelle strategier illustreres med tegninger som ikke er nøyaktig målt, men som bygger på grunntanken om lik og rettferdig fordeling. Dette gjør aspektet meningsfylt for elevene.

### 2.3.4 Brøk som operator

Brøk kan også forstås som en operator. I denne tolkningen har brøken en funksjon som forstørrer eller forminsker (Gray & Ånestad, 2016). Det betyr som et tall som inngår i et regnestykke, fortrinnsvis som en brøk multiplisert med et annet tall (Solem et al., 2017). I de fleste tilfellene med brøk som operator er det snakk om å finne brøkdelen av noe, og brøken multipliseres derfor med det tallet. Operatoraspektet åpner opp for å tenke på hvilken effekt brøken har på helheten (Gray & Ånestad, 2016). Eksempelvis tilsvarer brøken $\frac{1}{2}$ en halvering.

En misoppfatning innenfor multiplikasjon av brøker, er at elevene blander inn regnereglene for addisjon av brøk (Hinna et al., 2011). Dette kan skje på to måter 1) at elevene finner fellesnevner, og 2) at elevene ikke multipliserer nevnerne når de består av samme tall. Situasjoner som $\frac{2}{3}$ av et publikum, peker på en brøkdel av et tall, og elever kan være i stand til å bruke hoderegning for å finne svaret (Van de Walle et al., 2019). Dette er ofte ikke vektlagt nok i læreplanene.

Når brøk fungerer som en operator, virker nevneren som en divisor og telleren som en multiplikator. Det kompliserende med brøk er at vi må se på forholdet mellom teller og nevner – dette gjelder også brøk som operator (Solem et al., 2017). Om telleren er større enn nevneren, blir resultatet et større tall, fordi vi multipliserer med et tall som er større enn det vi deler med. Operatoren kan også uttrykke et forhold mellom to størrelser, og da kalles den for forholdstall. Dette aspektet, brøk som forhold, beskrives nærmere nedenfor.

### 2.3.5 Brøk som forhold

Forhold er enda en sammenheng brøk brukes i. Dersom en betrakter brøk som forhold, vil brøken referere til forholdet mellom to størrelser (Lamon, 2012). For å illustrere dette bruker hun et eksempel med en eggekartong som inneholder 5 brune og 7 hvite egg. Forholdstallet $\frac{5}{7}$ fås ved å sammenligne brune egg med hvite, altså del-del. Hvis vi derimot sammenligner brune egg med helheten, del-hel, vil dette gi oss forholdstallet $\frac{5}{12}$. Denne del-hel-tolkningen kommer under aspektet del av en helhet, men Lamon (2012) illustrerer forskjellen mellom aspektene del av en helhet og forhold ved å legge til en kartong med 2 brune og 10 hvite egg. Med en helhetstolkning vil de brune eggene utgjøre $\frac{5}{12} kartong + \frac{2}{12} kartong = \frac{7}{12} kartong$, men hvis oppgaven tolkes som forhold, vil vi kunne si at $\frac{7}{24}$ av alle eggene er brune. Kieren (1980) skriver at selv om brøk som del av en helhet og brøk som forhold er relatert til hverandre, er definisjonene av addisjon ulike slik eksempelet over viser, og dette stiller ulike utfordringer til elevene. Derfor bør de skilles som to ulike aspekter (Gray & Ånestad, 2016).

Noen elever kan ha problemer med å forstå at $\frac{3}{10}$ er mindre enn $\frac{2}{5}$, fordi 10 er større enn 5. Dette grunnes i heltallstenkningen poengtert ovenfor. Elevene tenker altså på hvert tall som et eget, helt tall, og vet ikke at brøken er forholdet mellom de to tallene (Solem et al., 2017). I tillegg kan elever møte på blandingsforholdet 1:5. Til 1 del saft skal vi altså tilsette 5 deler vann. Det er noe helt annet enn deler av en helhet (Hinna et al., 2011).

Disse fem innfallsvinklene til brøk kan gjøre det problematisk for eleven dersom undervisningen ikke tar høyde for tid og modning. For at alle elever skal få en fullverdig forståelse av brøk, kan man argumentere for at læreren i tillegg bør unngå å innføre algoritmer før forståelse (Bjerke et al., 2013). Klassen må også naturligvis jobbe med alle aspekter av brøk ved bruk av ulike modeller.

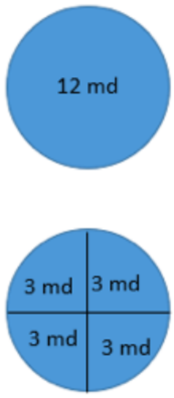
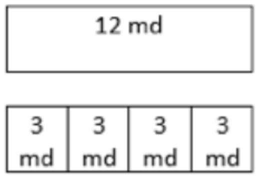
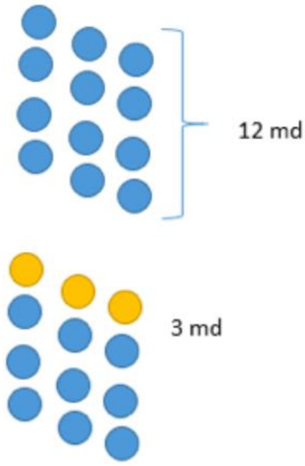
## 2.4 Modeller av brøk

Modeller kan oppfattes som fysiske konkreter, men i sammenheng med denne studien forstås modeller som mentale konstruksjoner beskrevet av Fosnot and Dolk (2002). Vi kan derfor forstå modeller som mentale kart matematikere bruker når de organiserer aktiviteter, løser problemer eller utforsker sammenhenger (Fosnot & Dolk, 2002). Når en matematiker for eksempel tenker på et tall, kan en ha tallinja i tankene, og se hvordan tallene er i forhold til hverandre på denne linja. Barns tidlige modeller er ofte representasjoner av deres handlinger i en situasjon. For eksempel kan barn ofte tegne opp fordeling av sjokolade, og på den måten modellere situasjonen. Så lenge elevene fortsetter å delta i matematikkdiskursen, blir oppfordret og støttet til å matematisere situasjoner, vil modellene deres gå fra å være representasjoner av deres handlinger til å omfatte en mer generalisert strategimodell (Fosnot & Dolk, 2002). Gravemeijer (1999) omtaler et skifte fra ideen om kontekstavhengig modellering til et fokus på de matematiske relasjonene. Denne uttalelsen forklarer at elevene opplever et skifte fra «models *of thinkng*» til «models *for thinking*» (Fosnot & Dolk, 2002, p. 17). Dette er et viktig vendepunkt i den matematiske utviklingen. Modeller skal altså hjelpe elevene å generalisere på tvers av situasjoner. De skal forbi modellering av en spesifikk situasjon til tolkning med en kraftig matematisk modell som et verktøy for tanken.

I arbeidet med å utvikle modeller som mentale konstruksjoner vil det være hensiktsmessig å bruke ulike representasjoner som et hjelpemiddel. Eksempler på ulike representasjoner er fysiske objekt som konkreter, visuelle modeller som tegninger eller verbalt gjennom språket, og i en kontekst (Kilpatrick et al., 2001). Mye av forskningen som det henvises til nedenfor, tar i bruk visuelle representasjonsformer for å forklare de ulike brøkmodellene; flere eksempler på dette finner vi blant annet i boka *A Focus on Fractions* av Petit et al. (2016) og Van de Walle et al. (2019) sin *Elementary and Middle Schools Mathematics*.

Det er viktig å merke seg at modeller ikke kan overføres i større grad enn strategier eller ideer. Elevene må selv konstruere dem (Fosnot & Dolk, 2002). Dersom vi utformer en oppgave med en modell i tankene, betyr ikke dette at alle elevene vil tolke eller assimilere konteksten på den samme måten. Det er likevel sannsynlig at en bestemt kontekst vil påvirke barnas modellering og strategier på en bestemt måte. Barnas tidlige modellering er altså direkte knyttet til deres handlinger i situasjonen. Ved å invitere elevene til å sammenligne og reflektere over forskjellige modeller, vil dette oppmuntre elevene til å vurdere relasjonene mellom dem (Fosnot & Dolk, 2002).

Vi kan forklare brøk ved hjelp av ulike modeller. Det finnes tre forskjellige typer modeller som elevene vil bruke til å løse oppgaver og generalisere begreper relatert til brøk. Disse kalles arealmodell, lengdemodell og mengdemodell (Petit et al., 2016). Det er en betydelig mengde bevis på at bruk av modeller i brøkoppgaver er viktig (Cramer & Henry, 2002; Empson & Levi, 2011; Petit et al., 2016). Å bruke visuelle modeller er kritisk for læring, fordi bruken av disse verktøyene leder til senere benyttelse av mentale bilder, som igjen bygger elevenes forståelse av brøk (Petit et al., 2016). Hvert aspekt kan representeres ved en eller flere av disse modellene, og hver modell kan tolkes ut fra ulike aspekter (Gray & Ånestad, 2016). Disse modellene fremhever ulike sider av brøkbegrepet, og dermed er de mer passende til noen situasjoner og aspekter av brøk enn til andre (Solem et al., 2017). Dessverre er det dokumentert et ensidig bruk av arealmodellen. (Bjerke et al., 2013). Dette betyr at elevene ikke får muligheten til å utforske brøk gjennom en variasjon av modeller. Det kan være hensiktsmessig å presentere samme oppgave med flere enn en modell, slik at elevene kan se sammenhengene mellom dem. Nedenfor illustreres et eksempel ved hjelp av de tre ulike modellene, før hver modell beskrives nærmere.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I et år er det 12 måneder. ¼ av disse månedene er vintermåneder. |  |  |  |

*Tabell 1. Eksempler på brøkmodeller*

### 2.4.1 Arealmodell

I startfasen, ved utforskning av brøk, er arealmodellen et fint sted å begynne, ettersom modellen egner seg til lik deling og fordeling (Van de Walle et al., 2019). I en arealmodell hvor er det en figur som utgjør helheten, gjerne en sirkel eller et rektangel, så er det areal som bestemmer brøkdelene (Solem et al., 2017). I en figur kan for eksempel en tredel av arealet være skravert, som en illustrasjon av brøken $\frac{1}{3}$ . I følge Van de Walle et al. (2019) er sirkulære brøkdeler mest brukt innen arealmodellene. Den sirkulære formen gjenspeiler sammenlikningen av to størrelser som del-hel, og her får elevene erfaring med relativ størrelse som en del av helheten. Fordelen med sirkulære former i brøk er nettopp at den tydelig viser mengden som er igjen for å utgjøre en helhet (Van de Walle et al., 2019). Noen eksempler på aktiviteter med bruk av arealmodeller som elevene kan møte på i undervisningen er å fordele pizza, tegne i rutenett, brette papir og definere områder av lekeplassen. Men det er viktig å være klar over begrensingene til denne forståelsen av brøk. For eksempel vil en negativ effekt av konkretisering være at det leder elevene til et uheldig fokus på telling. I tillegg kan uvanlige former villede elevene.

### 2.4.2 Lengdemodell

Med lengdemodeller er det lengder eller mål som sammenlignes multiplikativt, i motsetning til areal ved en arealmodell. Om en lengde utgjør helheten, vil en annen lengde utgjøre en brøkdel av denne (Solem et al., 2017). I arbeid med lengdemodeller er tallinja et nyttig redskap for å bestemme den relative størrelsen til tall. Lengdemodeller kan hjelpe elevene med å forstå brøkstørrelse, ettersom linjer er endimensjonale (Van de Walle et al., 2019).

Erfaring med tallinje begynner med hele tall. Ytterligere bruk av tallinje viser at brøker kan være større enn 1, og at to forskjellige brøker kan peke på samme sted på tallinja (Solem et al., 2017). Lengdemodeller spiller derfor en viktig rolle i utviklingen av elevers brøkforståelse, men likevel er det lite brukt i amerikanske klasserom (Van de Walle et al., 2019). Forskning innen brøk viser at tallinja hjelper elever med å forstå at brøk kan være et tall, snarere enn et tall over et annet tall, og dette hjelper elevenes videre utvikling av brøkbegrepet (Petit et al., 2016).

Cruisenairstaver er en mindre sofistikert lengdemodell enn tallinja, men det fungerer godt til å vise at hvilken som helst lengde kan representere helheten. Andre eksempler på lengdemodeller er brettet papirstrimler eller snører. Lengdene kan også illustreres som smale rektangler, men det er likevel *lengden* som illustrerer brøkdelen. Lengdemodeller er nært relatert til hverdagslige kontekster (Van de Walle et al., 2019) og dette gjelder for eksempel måling. Musikk er også en fin mulighet til å lære brøk i sammenheng med noter, fordi noteverdier er essensielt sett brøkregning.

### 2.4.3 Mengdemodell

I en mengdemodell er det en bestemt mengde som kan telles som utgjør helheten (Solem et al., 2017). Det kan være alle elevene i et klasserom eller drops i en skål. Brøkdelen utgjøres av noen av elementene i mengden. I en mengdemodell er det kun *antallet* som avgjør brøkdelen.

Ideen om å henvise til en mengde av enheter som en helhet, gjør at mengdemodellen oppleves vanskelig for noen elever (Van de Walle et al., 2019). En vanlig misoppfatning med mengdemodeller er å fokusere på størrelsen til undergruppen, heller enn antallet som utgjør helheten (Van de Walle et al., 2019). Et eksempel er at dersom 12 enheter utgjør helheten, vil

4 enheter utgjøre $\frac{1}{3}$, ikke $\frac{1}{4}$. Mengdemodellen hjelper med etableringen av viktige sammenheng til virkelighetsnær bruk av brøk, ved for eksempel forhold. Eksempler på mengdemodeller som elevene kan møte i undervisningssammenheng er knapper, godteri og klinkekuler (Petit et al., 2016).

### 2.4.4 Ulike trekk ved modellene

I følge Bezuk and Bieck (1993) varierer modellene i utfordringsnivå for elevene. Grunnen til at modellene skiller seg i vanskelighetsgrad er relatert til grunnen om at elevene bør møte alle tre modellene i undervisning:

- *Hvordan helheten er definert*
- *Hvordan «like deler» er definert*
- *Hva brøken indikerer*

| | ***Helheten*** | ***«Like deler» er definert ved*** | ***Hva brøken indikerer*** |
|---|---|---|---|
| ***Arealmodell*** | Bestemt av arealet til et avgrenset område | Likt areal | Skyggelagt del av hele arealet |
| ***Lengdemodell*** | Enhet av avstand eller lengde | Like avstander | Plasseringen av et punkt i forhold til avstanden fra null |
| ***Mengdemodell*** | Helheten består av flere elementer bestemt av antallet | Likt antall objekter | Antall objekter i delmengden av hele antallet objekter |

*Tabell 2. Ulike trekk ved modellene. Egen oversettelse (Petit et al., 2016, p. 10)*

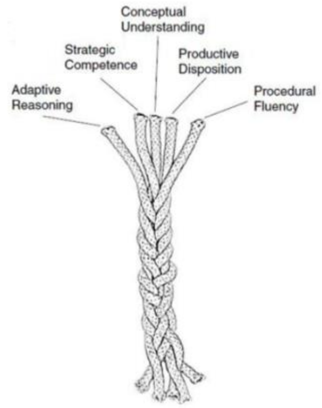
Dette rammeverket er inkludert fordi jeg ønsker å kategorisere tekstoppgavene etter hvilken modell de innbyr eleven til å bruke. Det vil være interessant å se fordelingen mellom brøkmodellene i de ulike læremidlene. For eksempel vil det å dele en langpanne med sjokoladekake likt mellom tre personer krever en annen forståelse enn å finne $\frac{1}{3}$ av et gitt antall dinosaurer (Petit et al., 2016). Lengdemodellen er forskjellig fra både arealmodell og mengdemodell. En lengde representerer en enhet som er definert med tall, og det er uendelig mange tall. $\frac{1}{3}$ på tallinja representerer et punkt på linja eller avstand fra 0, ikke $\frac{1}{3}$ av hele linja

(Petit et al., 2016). Det er derfor viktig at elevene får erfaring med hva brøken indikerer i de tre ulike tilfellene, slik at de selv kan anvende modellene hensiktsmessig. Petit et al. (2016) eksemplifiserer dette ved at en elev bruker sirkulær arealmodell for å lokalisere brøkene $\frac{1}{3}\ og\ \frac{1}{4}$ på en tallinje. Sirkulære former oversettes ikke godt til de lineære trekkene ved tallinjen.

## 2.5 Matematikkompetanse

Det er vanskelig å begrepsavklare kompetansebegrepet. Vi finner forklaringer som blant annet *evnen til å gjøre noe på en vellykket eller effektiv måte* og *en persons besittelse av nødvendig kunnskap, ferdighet, kvalifisering eller kapasitet*. Kilpatrick (2014) nevner at nære synonymer til kompetanse er: *evne*, *effektivitet*, *kunnskap*, *mestring*, *ferdigheter* og *talent*. Begrepet kompetanse er altså vanskelig å definere presist, men vi ser at det handler om hvor godt rustet man er til å gjennomføre eller forstå det man skal utføre. Fagkunnskap er en del av kompetansebegrepet. Å ha tilstrekkelig kunnskap innen et tema i matematikken er en del av matematisk kompetanse. Derimot er ikke kunnskap alene tilstrekkelig for å ha god matematikkompetanse.

I følge Kilpatrick (2014) består en helhetlig matematikkompetanse både av kunnskap om faginnholdet og kognitive ferdigheter. De kognitive ferdighetene er uavhengige av tema, men er nødvendige egenskaper for å kunne mestre matematisk tankegang. Kognitive kategorier i matematikk er beskrivelser av slike kognitive ferdigheter som elevene trenger i møte med en matematikkoppgave. Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som sammensatt av fem komponenter: forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement, oversettelse brukt i Stedøy (2018). Arbeidet med å definere hva som kjennetegner matematisk kompetanse var motivert av et ønske om å forbedre matematikkundervisningen. De fem komponentene er tett sammenflettet og avhengige av hverandre. Et av poengene ved modellen er at man ikke kan ha en velutviklet matematisk kompetanse dersom en av komponentene er underutviklet. For eksempel er det vanskelig å bruke regnealgoritmer effektivt og nøyaktig, uten å ha god forståelse av titallsystemet og de fire regneartene.



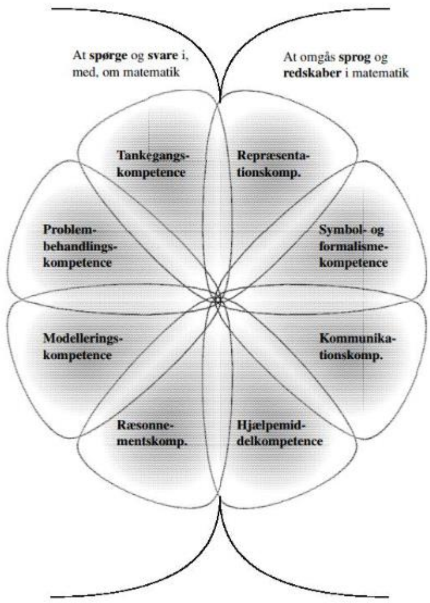
*Figur 3. Matematikkompetanse. (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001)*

Elevene må få mulighet til å utvikle alle fem komponentene samtidig, nettopp for at elevene skal utvikle en matematisk kompetanse som er varig, fleksibel og relevant.

## 2.6 KOM-prosjektet

I Danmark ønsket de å utvikle en kompetansebasert læreplan, til fordel for den tradisjonelle, emnebaserte læreplanen. Gjennom prosjektet Kompetencer og matematikklæring (KOM) tok arbeidsgruppen utgangspunkt i spørsmålet om hva det vil si å mestre matematikk (Niss et al., 2002). De utviklet en modell for hva som kjennetegner matematisk kompetanse, og denne består av åtte komponenter: tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse, modelleringskompetanse, resonnementskompetanse, representasjonskompetanse, kompetanse i symbolbruk og formalisme, kommunikasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse (Niss et al., 2002). Disse åtte kompetansene blir illustrert i figur 4.

Niss har delt kompetansebegrepet inn i to kategorier. Den første innebærer å kunne stille og svare på spørsmål om og med matematikk (Niss, 2015). Den andre handler om å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper. Hver av disse er delt inn i fire komponenter, se figur 4. Denne modellen deler tilnærmingen til Kilpatrick et al. (2001) ved at man ikke kan være matematisk kompetent dersom en av komponentene er underutviklet. Forskjellen mellom disse modellene er at i KOM-prosjektet er de tydelige på at sentrale felt innenfor matematikklæring ikke er inkludert i kompetansebegrepet. Dette gjelder særlig holdninger til matematikk og affektive sider ved læringen. Kilpatrick et al. (2001) bruker begrepet *mathematical proficiency*, ikke *mathematical competence*. Modellen inkluderer altså holdninger til faget i sitt proficiency-begrep. Likhetene er derimot at komponentene henger tett sammen og at begge modellene fokuserer på enkeltelevene og deres evne, kunnskap eller kapabilitet i matematikk.




*Figur 4. Matematikkompetanse (Niss et al., 2002)*

I delkompetansen tankegangskompetanse forklarer Niss et al. (2002) at dette innebærer å beherske matematisk tankegang, å ha bevissthet rundt hvilke spørsmål som er karakteristiske for matematikken og å kunne se for seg hvilke svar som forventes på en matematisk problemstilling. Innen tankegangskompetansen ligger også begrepsforståelsen. En annen del av denne kompetansen dreier seg om å kunne bruke matematiske begreper og kjenne begrensningene og rekkevidden til de ulike begrepene – altså skille mellom matematiske påstander, antagelser og bevis. Problembehandlingskompetansen innebærer å kunne identifisere, presentere og spesifisere ulike matematiske problemstillinger, og løse disse. Modelleringskompetansen omfatter analyse av modellers egenskaper og bedømming av deres rekkevidde og holdbarhet. Det handler også om å avkode og tolke modeller og aktivt kunne modellere ut ifra en gitt situasjon. Kommunikasjon med andre om modellen, inngår også i modelleringskompetansen. Niss et al. (2002) påpeker at grensen mellom modelleringskompetansen og problembehandlingskompetansen er flytende, og det er i hvilken grad man er nødt til å ta hensyn til elementer fra virkeligheten som skiller kompetansene. Et modelleringsproblem vil alltid være et problem, siden det ikke kan løses med en rutineoperasjon. Resonnementskompetanse handler om å kunne følge og vurdere argumentasjoner som legges frem av andre. Her innebærer dette også å kunne tenke ut og gjennomføre uformelle og formelle resonnement.

De fire siste komponentene handler om å mestre det matematiske språk og kunne bruke hensiktsmessige verktøy, hvor representasjonskompetansen dreier seg om forståelsen og benyttelsen av forskjellige representasjoner i matematikk. En elev som kan forstå og tolke ulike representasjoner av matematiske objekter, fenomener og situasjoner, og ser sammenhengen mellom ulike representasjoner, innehar representasjonskompetanse. Symbol- og formalismekompetanse innebærer hovedsakelig om håndtering av symboler og formler, i tillegg til å kunne oversette mellom dagligtale og matematisk symbolspråk (Niss et al., 2002). Selv om kompetansen i høy grad brukes i regning, er ikke denne synonym med ren regnekompetanse. For eksempel vil ikke en elev nødvendigvis ha forståelse for formler og symboler selv om de kan bruke det i utregninger. Kommunikasjonskompetanse består av å forstå og tolke andres matematiske utsagn, både skriftlig og muntlig. I like stor grad handler denne kompetansen om å kunne kommunisere matematiske ideer. Hjelpemiddelkompetanse handler om å kjenne til og kunne bruke varierte hjelpemidler. Eleven skal også kunne bruke hjelpemidlene på en hensiktsmessig måte.

Vi ser dermed at alle kompetansene har en undersøkende og en produktiv side. Den undersøkende siden inkluderer elevenes evne til å forstå, analysere og kritisk bedømme. Den produktive siden handler derimot om utførelsen av prosessene kompetansen innebærer. Niss et al. (2002) påpeker at derfor at begge sider av kompetansene består av både fysiske og mentale aktiviteter. Dette rammeverket som KOM-prosjektet har utviklet for beskrivelse av matematisk kompetanse har vært av stor betydning for senere forskning på feltet, blant annet i arbeid med utforming av oppgaver og vurdering av resultater i PISA-undersøkelsen (OECD, 2013). Det har også hatt tydelige konsekvenser for norsk skole gjennom endring av læreplan LK06 og dermed også gjennom utforming av nasjonale prøver.

## 2.7 PISA (Programme for International Student Assessment)

Ovenfor har vi sett eksempler på endimensjonale kompetansebeskrivelser. De er endimensjonale i den betydning av at de bare beskriver kognitiv kategori. Det finnes imidlertid mange todimensjonale rammeverk som beskriver både tematiske innholdsbeskrivelser i den ene retningen og beskrivelser av kognitive prosesser i den andre. PISA er en stor, internasjonal studie som undersøker elevkompetanse. Rammeverket fungerer todimensjonalt i den betydning av at det er en innholdsmessig- og en kognitiv dimensjon (Kilpatrick, 2014).

PISA er som sagt en internasjonal undersøkelse som sammenlikner elever i ulike OECD-land hvert tredje år. Undersøkelsen tester elevene i områdene matematikk, naturfag og lesing. Hensikten med PISA er å få innblikk i hvordan elevene bruker sin matematiske kompetanse til å løse virkelighetsnære problemer. Studiet er uavhengig av læreplaner, men sikter på å måle *Mathematical literacy* som elevene vil trenge i hverdagen nå og fremover (Nortvedt, 2013). Den norske rapporten fra PISA 2012 oversetter *Mathematical literacy* til matematisk kompetanse.

For å utforme oppgavesettene til PISA er det grunnleggende å definere hva som ligger i den matematiske kompetansen. En ekspertgruppe utnevnt av OECD har derfor utviklet et analyseverktøy ut ifra de kunnskapene og ferdighetene som forventes at elevene innehar for å kunne delta som fullverdige borgere. Undersøkelsen er ment til å avsløre om skolene forbereder elevene på de utfordringene som de vil møte i fremtiden (Nortvedt, 2013), men Sjøberg (2014) retter kritikk mot PISA prosjektet og påpeker at OECD sitt PISA-prosjekt har forandret norsk skole i negativ forstand. Han mener at PISA-prosjektet ikke er et pedagogisk prosjekt, men et politisk prosjekt. Han konkluderer med at OECD har fått en definisjonsmakt for trumfer nasjonale mål, prioriteringer og læreplaner, hvor PISA er et redskap som brukes i denne utøvelsen av makt (Sjøberg, 2014). Likevel presenteres PISA-rankingen som et gyldig mål for hele skolesystemets kvalitet, og OECD legger med andre ord premissene for kunnskap.

Det PISA legger i matematisk kompetanse er de tre prosessene *formulere*, *bruke* og *vurdere*. Elevene trekkes dermed frem som aktive problemløsere, og kompetanse knyttes derfor til det å kunne bruke matematikk (OECD, 2013). *Å formulere* omhandler elevenes evne til å gjenkjenne og identifisere muligheter til å bruke matematikk ved å lage en matematisk problemstilling med utgangspunkt i en virkelig situasjon. *Å bruke* handler om at eleven skal bruke matematiske fakta, begreper og prosedyrer og resonnere rundt disse, slik at de kan løse et problem som allerede har fått en matematisk form. *Å vurdere* innebærer elevens evne til å reflektere over matematiske løsninger, og vurdere disse opp mot hverandre (Nortvedt, 2013).

Videre defineres det hvilke kompetanseområder elevene trenger for å kunne mestre de tre prosessene for problemløsing. Her har PISA tatt utgangspunkt i arbeidene til Niss et al. (2002) og deres åtte kompetanser, for å selv utforme syv kompetanseområder (OECD, 2013). Disse kompetanseområdene i PISA, er som følger (Nortvedt, 2013):

- *Kommunisere med, i og om matematikk*
- *Matematisere og modellere matematiske og virkelige situasjoner*
- *Representere matematiske størrelse og bruke hensiktsmessige, matematiske representasjoner i oppgaveløsing*
- *Resonnere og argumentere matematisk*
- *Planlegge, velge ut og bruke problemløsningsstrategier*
- *Bruke symbol- og formelspråk*
- *Velge ut og bruke hensiktsmessige matematiske verktøy og hjelpemidler*

I delkapittel 2.6 ble disse kompetanseområdene nærmere beskrevet. Hver av de tre prosessene *å formulere*, *bruke* og *vurdere* er inkludert i de ulike kompetansene ovenfor. Dette beskriver dermed hva som må til for at en elev kan få matematisk kompetanse og bli en matematisk problemløser (Nortvedt, 2013).

## 2.8 MEG (Mathematics Expert Group): en konkretisering av rammeverk fra PISA

I artikkelen *Using Mathematical Competencies to Predict Item Difficulty in PISA: A MEG Study* (Turner et al., 2013) blir rammeverket til PISA konkretisert. Hensikten var å lage en kategorisering for å kunne forutsi vanskelighetsgraden til matematikkoppgaver som blir gitt i PISA. Med dette rammeverket som utgangspunkt delte forskergruppen, kalt Mathematics Expert Group, matematikkompetanse inn i seks delkompetanser. Denne forskergruppen hadde arbeidet sammen med en gruppe fra Australian Council for Educational Research i nesten 4 år for å forberede OECDs PISA-undersøkelse i 2012 (Stacey & Ross, 2015). Deres delkompetanser bygger på PISA sine kompetanseområder presentert ovenfor, men hjelpemiddelkompetansen er fjernet. De seks delkompetansene i MEG-studien er dermed (Turner et al., 2013):

- *Reasoning and argumentation*
- *Communication*
- *Modelling (ofte referert som Mathematising)*
- *Representation*
- *Solving problems mathematically (referert som Problem solving)*
- *Using symbolic, formal and technical language and operations (referert som Symbols and formalism)*

Disse kompetanseområdene er ikke skarpt avskilt, men overlapper til en viss grad. Hovedsakelig må kompetanseområdene brukes i fellesskap for å løse matematiske problemer (Turner et al., 2013). De seks kompetanseområdene i rammeverket er delt inn i fire nivåbeskrivelser, kategorisert fra 0-3. Et eksempel på denne nivådelingen blir presentert nedenfor i avsnittet om *Representation*.

*Reasoning and argumentation* handler blant annet om elevenes logiske tankeprosesser og evne til å trekke gyldige, matematiske slutninger. Gi velbegrunnede resultater eller bevise et resultat. Kompetanseområdet innebærer at eleven kan danne, granske eller begrunne egne og andres matematiske uttalelser. Andre former for mentale prosesser og refleksjon for å utføre oppgaver blir vurdert i andre kategorier. Derimot blir for eksempel tankegangen som trengs for å velge eller utforme en strategi, vurdert innunder kategorien *Problem solving*. Resonnementene som kreves for å omdanne kontekstuelle elementer til en matematisk form, blir redegjort i *Mathematising*. Det er viktig å skille mellom disse flytende overgangene i kompetanseområdene. Når nivået av kompetanseområdet *Reasoning and argumentation* skal kodes er det antall trinn eller kompleksiteten av slutningene som er viktige bidragsytere.

*Communication* besår av to komponenter. Den mottakelige komponenten innebærer at eleven skal forstå oppgavens formulering og hva den spør om. Lesing og tolkning av utsagn, spørsmål og instruksjoner, er sentralt i dette kompetanseområdet. Det er viktig at eleven forstår den matematiske informasjonen som blir presentert, hvilken informasjon som er relevant og hvilken besvarelse som er forventet. Den andre komponenten består for eksempel av å presentere svaret gjennom løsningstrinn, beskrive resonnement eller begrunne svaret. Her ser vi altså en grad av kommunikasjon fra elevens side. *Communication* inkluderer ikke å vite hvordan man skal nærme seg eller løse problemet, hvordan man tar i bruk den gitte informasjonen, eller hvordan man kan resonnere eller rettferdiggjøre svaret. Det er snarere forståelsen eller presentasjonen som er relevant. Kompetansenivået øker i vanskelighetsgrad lineært med kompleksiteten av informasjon som skal tolkes for å forstå oppgaven. Eksempler kan være om det er behov for å koble flere informasjonselement, bevege seg frem og tilbake i teksten for å få oversikt, eller behov for å gi en detaljert skriftlig forklaring.

Fokuset for kompetanseområdet *Modelling*, også kalt *Mathematising*, omhandler oversettelsesarbeidet fra en matematisk situasjon til noe hverdagslig, og omvendt. En situasjon utenfor matematikken kan kreve oversettelse til en form for matematisk behandling. For eksempel inkluderer dette å gjøre forenklinger av antagelser, identifisere variabler, forholdet mellom dem, og uttrykke disse variablene i en matematisk form. Det motsatte gjelder dersom et matematisk utfall må tolkes i forhold til en situasjon eller kontekst utenfor matematikken. Dette inkluderer oversettelse av matematiske resultater i forhold til spesifikke elementer i konteksten, og validere om løsningen er tilstrekkelig i forhold til konteksten. Matematisk behandling av påfølgende problemstillinger innen det matematiske domenet, faller innenfor andre kompetanseområder. Etterspørselen av aktivering i denne kompetansen øker med graden av kreativitet, innsikt og kunnskap som er nødvendig for å oversette mellom kontekstelementene og de matematiske strukturene i problemet.

Kompetanseområdet *Representation* omhandler å avkode, utforme og manipulere matematiske representasjoner eller knytte sammen forskjellige representasjoner for å oppnå en løsning. Representasjon av en matematisk enhet forstås som et konkret uttrykk av et matematisk begrep, objekt, forhold, prosess eller handling. Det kan være fysisk, verbalt, symbolsk, grafisk, tabellformet, skjematisk eller figurativt. Matematiske oppgaver blir ofte presentert i tekstform, noen ganger med grafisk materiale som hjelper å sette konteksten. Å forstå muntlig- eller tekstinstruksjoner inngår som en del av *Communication*. Det samme gjelder for arbeid med symbolske fremstillinger, som inngår innunder *Symbols and formalism*. En oversettelse mellom flere representasjoner er en del av kompetanseområdet *Representation*. For å kunne finne en løsning, fange en situasjon eller presentere et arbeid, krever det at eleven kan avkode, bruke, tolke, oversette eller utforme tabeller, grafer eller diagrammer. Alt dette inngår i kompetanseområdet *Representation*. Etterspørselen av dette kompetanseområdet øker med mengden informasjon som skal trekkes ut, behovet for å integrere informasjon fra flere representasjoner og behovet for å utforme representasjoner fremfor å bruke det som allerede er gitt. Nivået øker også med kompleksiteten, fra enkle representasjoner som søylediagram til mindre standardiserte som kanskje er utviklet til spesialiserte formål, eksempelvis befolkningspyramide.

Som sagt tidligere blir hver av disse seks delkompetansene delt inn i fire nivåer, fra 0 til 3, hvor det følger spesifikke nivåbeskrivelser. Turner et al. (2013, p. 28) beskriver nivå 0 innen *Representation* slik:

> *Directly handle a given representation, for example going directly from text to numbers, reading a value directly from a graph or table, where minimal interpretation is required in relation to the situation.*

Nivå 1 innen samme delkompetanse, beskrives slik:

> *Select and interpret one standard or familiar representation in relation to a situation.*

Her leser vi at nivå 1 har større grad av kompleksitet enn nivå 0. Den videre nivådelingen bidrar til en ytterligere nyansering av rammeverket. Nivå 0 innebærer ikke nødvendigvis fravær av kompetanseområdet, nivå 0 omhandler fortsatt en form for arbeid, men heller at oppgaven krever kompetanse på det laveste nivået innen kategorien. Det samme gjelder for de øvrige fem delkompetansene. For ytterligere kompetansebeskrivelser, se MEG-rammeverket som er vedlagt denne oppgaven.

Det strategiske aspektet, *Problem solving*, går ut på at eleven må velge eller utforme en matematisk strategi for å kunne løse oppgaven. Det innebærer også en overvåking og kontroll av prosessene involvert. Med ordet strategi betyr dette ett sett med trinn som til sammen utgjør den overordnede planen som er nødvendig for å løse problemet. Hvert trinn består av et delmål. Kunnskapen, de tekniske prosedyrene og resonnementene som faktisk trengs for å utføre løsningen, antas å tilhøre de andre kompetanseområdene. Nivåbeskrivelsene for denne kompetansen øker med graden av kreativitet og oppfinnelse som er involvert ved å identifisere en passende strategi. Nivået blir gitt ut ifra om strategien er gitt eller åpenbar, eller om eleven må utarbeide en flertrinnsstrategi eller sammenlikne strategier. I tillegg øker kompleksiteten ved antall, rekkevidde og kompleksitet av trinnene som trengs.

I kompetansebeskrivelsen til *Symbols and formalism* inngår forståelsen og bruk av symbolske uttrykk. Dette kompetanseområdet gjenspeiler ferdigheter med å aktivere og bruke matematisk innholdskunnskap, for eksempel gjennom matematiske definisjoner, fakta, regler, algoritmer og prosedyrer. Dette innebærer også å gjøre utregninger basert på definisjoner, konvensjoner og regler i matematikken. Det å sette opp en likning for å gjenspeile nøkkelelementene i en ekstra-matematisk situasjon hører til *Mathematising*, men løsningen av den er en del av *Symbols and formalism*. Nivåbeskrivelsene til kompetanseområdet øker med kompleksiteten i det matematiske innholdet og prosedyrekunnskapen som kreves.

Forskergruppen ønsket å undersøke sammenhengen mellom kodingsresultatene og hvor vanskelig oppgavene slo ut for elevene i de faktiske PISA-undersøkelsene (Turner et al., 2013). Det viste seg at forskerne, ved hjelp av rammeverket, kunne forutsi hvilke oppgaver som ville slå vanskelig ut i PISA. Omtrent 70% av variansen i PISA-dataene kunne bli forutsett av de kompetanserelaterte variablene. Det viste seg også at koding med utgangspunkt i dette rammeverket viste en høy grad av interkoderreliabilitet, se delkapittel 3.7, som ga studien en høy grad av reliabilitet (Turner et al., 2013).

Selvom det kan virke paradoksalt at jeg benytter dette rammeverket i min studie for å analysere vanskelighetsgraden til tekstoppgavene i læremidler på åttende trinn når PISA er tydelige på at de ikke tester skolekunnskaper og ikke forholder seg til landets læreplaner, er det ikke nødvendigvis motsigende fordi hensikten til begge studier er å avdekke kompetanseområdene som kreves. Begge er relevant og tett koblet til matematikkompetansen. Som nevnt har PISA tatt utgangspunkt i arbeidene til Niss et al. (2002) og deres åtte kompetanser, for å selv utforme syv kompetanseområder konkretisert gjennom MEG-rammeverkets formuleringer.

## 2.9 Kontekstoppgaver og tekstoppgaver

PISA, som er et internasjonalt prosjekt gjennomført av OECD, undersøker blant annet 15 åringers kunnskaper i matematikk (OECD, 2013). PISA fokuserer på at matematikken skal være relevant for elevene, og at oppgavene skal være i en meningsfull og autentisk kontekst. Elevene blir beskrevet som problemløsere, og oppgavene tar derfor utgangspunkt i reelle og konkrete situasjoner fra ulike kontekster. Det oppstår en betydelig merverdi ved å kombinere kontekster som tar utgangspunkt i praktiske situasjoner (Rosenlund & Gulaker, 2018). Ved en større variasjon i oppgavetypene presentert for elevene i de ulike læremidlene, kan dette åpne for større engasjement og interesse for matematikken. Dette kan spille inn på elevenes motivasjon og lyst til å løse matematikkoppgaven. Å engasjere elevene kan gjøres ved at læreren lanserer kontekster med problemstillinger som oppfattes som nyttig kunnskap sett fra elevens side. På samme måte som PISA tok utgangspunkt i kontekstoppgaver, ønsket også jeg å plukke ut kontekstoppgaver i mitt datamateriale. Derfor er det er nødvendig å begrepsavklare både kontekstoppgaver og tekstoppgaver, samt se hvor disse begrepene har blitt brukt tidligere. Dette setter kriterium for hvilke oppgaver jeg skal ta med videre i mitt datamateriale.

OECD definerer oppgaver som intra-mathematical og extra-mathematical etter hvilken kontekst oppgaven har. Dersom en oppgave er intra-mathematical refererer den kun til matematiske objekter, symbol og strukturer, og henviser ikke til forhold utenfor den matematiske verden (OECD, 2009). Videre definerer de extra-mathematical kontekstoppgaver ved at elevene må oversette konteksten inn i en matematisk form. Så lenge oppgaven relaterer til noen form for virkelige elementer som ikke er langt unna en virkelig situasjon, og det kreves en ekte bruk av matematikken for å løse problemet, er det et extra-mathematical problem.

Gravemeijer og Doorman (1999) skriver om en metode som kalles realistisk matematikkundervisning (RME). Kontekstproblemene som brukes er reelle for eleven, og som de kan erfare. Kontekstproblemer har en sentral rolle og er viktig i undervisningen helt fra starten (Gravemeijer & Doorman, 1999). Målet med denne undervisningen er at den skal gi elevene innsikt i matematikken, og gi dem muligheten til å forstå matematikken ut fra deres egen forståelse og uformelle kunnskap. RME prøver derfor å lære elevene den formelle og abstrakte siden av matematikken gjennom aktivitet og matematiske problemer fra virkeligheten (Gravemeijer & Doorman, 1999). Dette harmoniserer med PISA sitt ønske om at elevene skal være forberedt på problemer i dagliglivet som krever matematisk kompetanse, og dermed fungere som aktive borgere i et moderne samfunn. Ettersom rammeverket utformet i MEG-studien analyserer oppgavene gitt i PISA-undersøkelsen, ønsket jeg i min studie kun å ta utgangspunkt i kontekstoppgaver. Det viser seg likevel at definisjonen av kontekstoppgaver oppleves snevrere enn tekstoppgaver. Det blir dermed mer presist å definere mitt datamateriale som bestående av tekstoppgaver.

Det er vanskelig å gi en presis og universell definisjon av tekstoppgaver, men en generelt akseptert definisjon av tekstoppgaver i matematikk er som følger:

> *"Word problems can be defined as verbal description of problem situations wherein one or more questions are raised the answer to which can be obtained by the application of mathematical operations to numerical data available in the problem statement. In their most typical form, word problems take the form of brief texts describing the essentials of some situation wherein some quantities are explicitly given and others are not, and wherein the solver—typically a student who is confronted with the problem in the context of a mathematics lesson or a mathematics test—is required to give a numerical answer to a specific question by making explicit and exclusive use of the quantities given in the text and mathematical relationship between those quantities inferred from the text" (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000, p. ix).*

Et av de foreslåtte kjerneelementene i Fagfornyelsen er problemløsning i matematikk. Verschaffel et al. (2000) poengterer at det er hensiktsmessig å la elever arbeide med tekstoppgaver, blant annet som en trening i problemløsing. Det kan derfor virke som at problemløsning og tekstoppgaver i matematikk er aktuelt og vil fortsette å være aktuelt i årene fremover. Tekstoppgaver kan i tillegg hjelpe elevene å se nytten i matematikkfaget.

Verschaffel, Greer og De Corte (2000) mener at tekstoppgaver kun bør refereres til eksisterende eller tenkelige meningsfulle kontekster, og dermed ikke i kontekst av en rent numerisk kalkulasjon. Eksempel på rene, numeriske problemer er «$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=?$», der oppgaven avslører hvilken kalkulasjon som må gjøres. I tillegg utelukkes oppgaver i muntlig form, og er derfor ikke gjeldende i definisjonen av tekstoppgaver.

Det er likevel viktig å påpeke at det finnes flytende overganger mellom kontekstoppgaver og tekstoppgaver. Noen analyserte oppgaver i min studie faller derfor i en gråsone mellom begrepet tekstoppgave definert av Verschaffel et al. og ekstra-matematisk oppgave definert av OECD. Kombinasjonen av Verschaffel et al. sin definisjon av tekstoppgaver og en ytterligere beskrivelse av OECD sin formulering av oppgaver i kontekst, har ført til at min studie utelukker oppgaver formulert som følgende: *regn ut, utvid brøken, forkort brøken, finn likeverdig brøk, gjør om til blandet tall, gjør om til uekte brøk, gjør om til desimaltall,* o.l.

### 2.9.1 Et poeng relatert til oppgavetekstene

Analysen er utført ved bruk av rammeverket utformet av Mathematics Expert Group (MEG), hvor en del av rammeverket omfatter oppgavenes språk. Rammeverket er en underkomponent av PISA, nettopp for å avsløre vanskelighetsgraden til de respektive oppgavene. Et viktig poeng her er at hver oppgave i PISA er nøye utarbeidet. Det er derfor nærliggende å anta at det ligger et større arbeid og hensikt bak oppgavetekstene, enn hva lærebokforfatterne har vektlagt dette kompetanseområdet. Kompetanseområdet kalt *Communication* omfatter å lese og tolke tekst, forestille og forstå informasjonen presentert. For mer utfyllende forklaring se delkapittel 2.8. Theen (2019) har analysert språket i PISA-oppgaver i matematikk i sin doktoravhandling og fant ut at mange oppgaver har et unødvendig vanskelig språk. Når en matematikkoppgave gis i skriftlig tekst kan måten oppgaveteksten er formulert på, avgjøre hvor vanskelig den blir. Det kan derfor argumenteres for at denne delen av analysen ikke er like gyldig som de andre kompetanseområdene, nettopp fordi det er usikkert hvilke vurderinger som ligger til grunn i lærebokforfatternes oppgaveformuleringer. Tatt dette i betraktning mener jeg at oppgavene i mitt datamateriale må vurderes på lik linje med alle andre oppgaver innen delkompetansen *Communication.* Betydningen av læremidlene, og hvordan de vektlegger matematisk kompetanse, må ikke undervurderes.

## 2.10 Et nytt læremiddellandskap: ARK&APP

Øystein Gilje ledet forskningsprosjektet ARK&APP som hadde som oppdrag å undersøke valg og bruk av læremidler i norsk skole for å kunne danne seg et helhetlig bilde av det nye læremiddellandskapet. Nedenfor blir først begrepene læremiddel, lærebok og digitale læremidler presentert, før prosjektets funn relatert til min studie legges frem.

### 2.10.1 Læremidler

Selve begrepet læremiddel blir forstått på ulike måter blant lærere, forskere og i utdanningssektoren forøvrig. Den teknologiske utviklingen og utdanningspolitiske føringer gjør at definisjoner av læremiddel ikke er konsistente over tid (Gilje, 2017). Den mest presise definisjonen finner vi i opplæringsloven paragraf 17.1 (Opplæringsloven, 2010):

> *«Med læremiddel menes alle trykte, ikke-trykte og digitale element som er utviklet til bruk i opplæringen. De kan være enkeltstående eller inngå i en helhet, og dekker alene eller til sammen kompetansemål i Læreplanverket for Kunnskapsløftet»*

Med dette leser vi at både lærebøkene og de tilhørende elevnettstedene brukt i min studie omtales som læremidler. Annet materiale som ikke har hensikt å dekke ett eller flere kompetansemål i et spesifikt fag og på et bestemt nivå i grunnopplæringen, er dermed ikke læremidler, men heller ressurser for læring (Gilje, 2017).

I Meld. St. 28 (Kunnskapsdepartementet, 2016) er det lagt vekt på at en nettbasert nettleser kan brukes til å støtte skoleeiere i arbeidet med å vurdere og velge nye læremidler i sammenheng med Fagfornyelsen. Denne rettlederen for kvalitet i læremidlene skal gi signaler om hva som kjennetegner læremidler med god kvalitet (Svingen & Gilje, 2018). Rettlederen består av en rekke påstander som læreren kan bruke til å vurdere læremiddelet. Verktøyet dokumenterer vurderingen hver enkelt lærer har gitt, og kan brukes til enten å sammenlikne læremidler eller sammenlikne vurderingene flere lærere har gjort av det samme læremiddelet (Utdanningsdirektoratet, udatert). Slik ser de for seg at rettlederen kan bidra til refleksjon rundt hva som er god kvalitet, og skape et grunnlag for bevisste valg av læremiddel til bruk i matematikkundervisning (Svingen & Gilje, 2018).

### 2.10.2 Lærebok

Det mest brukte av alle læremidler har vært, og er, læreboka. Klette (2004) og Imsen (2004), samt ARK&APP prosjektet til Gilje et al. (2016) i senere tid, bekrefter dette. Vi kjenner til læreboken som en form for litteratur direkte rettet mot undervisning på bestemte undervisningstrinn. Utviklingen, produktet og funksjonen av læreboken viser at det er en meget sammensatt form for litteratur (Johnsen, 1999). Det er læreplanen som er styrende for undervisningen, og derfor er det lærernes profesjonelle ansvar å velge lærebok. Gjennom forskningsprosjektet ARK&APP ser vi nemlig at lærerkollegiet i hvert fag på grunnskolen i fellesskap velger lærebøker (Gilje et al., 2016).

Tidligere hadde man en elevbok og en enkel lærerveiledning. Nå finnes det derimot læreverk som består av pakker av lærebøker med en rekke varianter av tilleggsmateriell. I tillegg til elevbok og lærerveiledning, omfatter dette også lettlestutgaver av boken, arbeidsbøker, oppgavesamlinger, kopieringsoriginaler, konkretiseringsmateriell, CDer, elevnettsider og nettsider kun for lærere, etc. Min analyse omfatter derimot kun læreboka slik den blir presentert for elevene, og lærebokas tilhørende elevnettsted.

Lærebøker i matematikk skiller seg fra de andre fagene ved at de har mindre tekst. Primært er det oppgaver som elevene skal arbeide med (Svingen & Gilje, 2018). Samtidig, felles med de andre lærebøkene i skolefagene, blir de sett på som vesentlige når det gjelder å gjøre om kompetansemålene i læreplanen til praksis i undervisningen (Svingen & Gilje, 2018). I prosjektet til ARK&APP kommer det frem at 85% av lærerne på 5.-7.trinn og ungdomsskolen bruker papirbaserte læremidler. Mer om dette i delkapittel 2.10.4.

Askew (2001) påpeker at det forekommer et gap mellom forskning og det som brukes av matematikkmateriale i klasserommet. Eksempel på slik materiale kan være matematikkbøker. Det kan være tidligere lærere som selv er forfattere av lærebøkene i matematikk, og ikke forskere innenfor pedagogikk og matematikkdidaktikk. Det er også en tankevekker dersom matematikkbøkene resirkulerer gamle metoder og ikke baserer seg på hva som er praktisk i klasserommet og den stadige utviklingen innenfor forskning om forståelsen av hvordan barn tilegner seg ulike områder av matematikk (Askew, 2001). I sammenheng med emnet brøk er det derfor viktig at materiale brukt i matematikkundervisningen, favner alle aspekter av brøk slik forskningen anbefaler (Kleve, 2014; Solem et al., 2010; Van de Walle et al., 2014) m.fl. Dette er grunnlaget for min studie.

### 2.10.3 Digitale læremidler

Digitale ferdigheter er en del av de fem grunnleggende ferdighetene som er integrert i læreplanmålene gjennom hele utdanningsløpet i Norge (Utdanningsdirektoratet, 2015). Norge var relativt tidlig ute med å integrere digital kompetanse i læreplanverket ved å gi det status som en av fem grunnleggende ferdigheter. Med Kunnskapsløftet kom flere formuleringer knyttet til digitale verktøy:

> *«Digitale ferdigheiter i matematikk inneber å bruke digitale verktøy til læring gjennom spel, utforsking, visualisering og presentasjon. Det handlar òg om å kjenne til, bruke og vurdere digitale verktøy til berekningar, problemløysing, simulering og modellering. Vidare vil det seie å finne informasjon, analysere, behandle og presentere data med formålstenlege verktøy, og vere kritisk til kjelder, analysar og resultat» (Utdanningsdirektoratet, 2015, p. 38).*

Digitale læremidler kommer i mange former, og dette kan for eksempel være e-bøker, elevnettsteder og tavleressurser. Digitale læremidler utgjør vanligvis et supplement til boka i form av øvingsoppgaver (Gleinsvik, Lunde, & El-Amrani, 2016). Digitale læremidler i matematikkundervisning antas å ha potensiale til å gi bedre forståelse og dyp innsikt i faget, støtte opp om elevenes kreativitet og dermed også utvikle bedre kompetanse (DIM, 2015-2018). Mange skoler har allerede oppdaget fordelen med denne type læremidler, nettopp at de er intuitive og enkle å bruke og kan utnyttes til å gi dynamiske og interaktive illustrasjoner av sentrale begreper i matematikk og dermed gi grunnlag for god begrepsforståelse og dyp innsikt i matematiske sammenhenger (DIM, 2015-2018). Særlig er slike læremidler viktige i arbeidet med terskelbegrep – begrep som elevene må forstå for å kunne utvikle seg videre innenfor et område. Brøk er et eksempel på terskelbegrep. Hiebert and Lefevre (1986) omtaler begrepsforståelse som dypere innsikt i de matematiske begrepene og dermed gir et annet og bedre grunnlag for kreativitet og selvstendig problemløsing. Dette gjelder dessuten undervisningen om teknologiske læremidler. Dette bør ikke være generelt, men om et spesifikt tema (Mishra & Koehler, 2006). Mer om dette i delkapittel 5.5.1.

Bruken av digitale læremidler øker, men papirboka er fremdeles hovedløsningen for de aller fleste. I de første årene på grunnskolen bruker elevene de digitale læremidlene selvstendig og individuelt, og ofte for å trene ferdigheter. På ungdomsskolen og videregående nivå er de digitale læremidlene mer omfattende og komplekse og krever at læreren må få anledning til å sette seg inn i hvordan læremidlene bør brukes (Drijvers, 2015). Dette kan være årsaken til at matematikk er det faget hvor IKT brukes minst på alle trinn. Dette til tross for de digitale læremidlenes mange fordeler. I kapittel 5 problematiseres bruken av digitale læremidler kun med hensikt som variasjon i undervisningen.

### 2.10.4 Forskningsfunn (ARK&APP)

I dette forskningsprosjektet er ledet av Øystein Gilje og det ble i alt gjennomført 12 casestudier i fire fag (naturfag, matematikk, samfunnsfag og engelsk) og på tre ulike nivå (mellomtrinnet, ungdomsskolen og videregående skole). I tillegg ble det gjennomført tre nasjonale spørreundersøkelser, hvor to av dem var gjennomført som en del av den årlige spørreundersøkelsen *Spørsmål til Skole-Norge*. NIFU har tatt ansvaret for den tekniske gjennomføringen av spørreundersøkelsen. De tilsammen 20 forskerne har i løpet av tre år analysert hvilken funksjon læremidler og verktøy hadde i ulike arbeidsformer. Prosjektet viser hvor forskjellig digitaliseringen har smittet over i skolen og blitt en del av elevenes læring i ulike arbeidsformer (Gilje, 2017).

ARK&APP viser både hvordan skoleeiere, skoleledere og lærere velger læremidler, og hvilke funksjoner disse har for læring og undervisning. På denne måten bidrar ARK&APP med ny kunnskap om hvordan både papirbaserte og skjermbaserte læremidler velges og brukes fra 5. trinn til tredje klasse i videregående skole. Funnene fra denne forskningen er mange. Under har jeg listet opp de funnene som er relevant til min studie (Gilje et al., 2016):

- *Det viser seg at lærerkollegiet i hvert fag velger i fellesskap lærebøker. Lærerens autonomi i selve valget er størst på videregående skole.*
- *Majoriteten av lærerne er helt eller stort sett enige i at det læremiddelet de oppfatter som sentralt og mest brukt i sin undervisning dekker kompetansemålene.*
- *Over 60% av grunnskolelærere oppgir at de hovedsakelig bruker læreboka og supplerer med andre læremidler og ressurser for læring i de tilfeller der de opplever at læreboka ikke dekker kompetansemålene.*
- *I grunnskolen baserer 85% av lærerne i matematikk seg i hovedsak på læreboka.*
- *Lærerne mener at lærebøker spiller en større rolle enn ressurser for læring i lærerens i fortolkningsarbeidet av læreplanen. Det er mer individuelt arbeid enn gruppearbeid i undervisningsøktene. Matematikkfaget har svært stor andel individuelt arbeid sammenliknet med de andre fagene.*
- *Læreboka er det læremiddelet som flest lærere oppgir var brukt i siste time.*
- *I matematikk bruker lærerne primært papirbaserte læremidler.*

- *Læreboka har en viktig funksjon som et strukturerende element i undervisningsøktene, og danner utgangspunkt for en rekke undervisningsøkter.*
- *Digitale læremidler og ressurser for læring, som spill og simuleringer, skaper engasjement blant elevene.*

Funnene som antyder at læreboka er det mest brukte læremiddelet, bekreftes av undersøkelsen gjennomført av Waagene og Gjerustad (2015) hvor lærere på alle trinn opplevde at lærebøker spiller en større rolle enn ressurser for læring. Det er ikke overraskende at læremidler med en innbygget didaktikk og progresjon ofte får denne funksjonen i operasjonaliseringen av læreplan.

## 2.11 Tidligere forskning

### 2.11.1 Reinhardtsen (2020) etterspør vanskeligere matematikkoppgaver

Elevene kommer til et punkt i matematikkforståelsen der de går fra konkret bruk av regning til en mer abstrakt forståelse av matematikk. I Reinhardtsen (2020) sin doktorgrad *Student meaning making in elementary algebra teaching* undersøker hun hvordan elevene samhandler i klasserommet da elevene blir introdusert for algebra. Hun observerer klasserom i fire forskjellige land, henholdsvis Norge, Sverige, Finland og USA. Denne doktorgraden omhandler algebra, men det er mulig å trekke linjer til brøk ettersom dette omtales som et terskelbegrep hvor vi finner et skifte fra heltalsstenkning til rasjonale tall. Fra et matematisk perspektiv legger brøk grunnlaget for forståelse av senere elementære algebraiske operasjoner (Behr et al., 1983). Fokuset i doktorgraden er rettet mot elevarbeidet og at elevene må lære seg matematikk på en annen måte enn før. Kalkulatoren er med i baklomma hele dagen, og det å kunne sette opp et regnestykke og regne ut riktig er ikke like viktig som det var for 100 år siden. Nå gjelder det i større grad at elevene skal kunne se de større sammenhengene, og uttrykke dette. Læring er en prosess med mål om å tilegne seg kunnskap. Ofte innebærer dette assimilasjon og memorering, men prosessen bør også involvere anvendelse og refleksjon over det som læres. Blooms taksonomi er et eksempel på promotering av høyere ordens tenking. Modellen klassifiserer det kognitive arbeidet som må gjøres i henhold til seks nivåer med ulik kompleksitet (Krathwohl, 2002). Reinhardtsen (2020) undersøkte elevers matematiske diskusjon og samarbeid på det kritiske tidspunktet hvor det er forventet at de skal ta steget mot en mer analytisk og abstrakt måte å arbeide matematisk på. Funnene i hennes studie viser at strategiene varierte ikke mer mellom grupper i ulike land enn mellom grupper i ulike klasserom i samme land. Gjennomgående brukte elevene i liten grad de algebraiske ideene som hadde blitt introdusert i undervisningen. I følge Reinhardtsen (2020) bør elever få vanskeligere matematikkoppgaver. Med vanskeligere matematikkoppgaver mener Reinhardtsen at elevene må lære seg å tenke, ikke herme etter lærerens algoritmer.

### 2.11.2 Forholdet mellom lærebok og elevnettsted i norskfaget (Nilssen, 2015)

Selv om det innledningsvis ble presentert at papirbasert lærebok og digitalt læremiddel sjeldent blir sett på i sammenheng, skiller Nilssen (2015) sin studie seg fra dette. Hun har undersøkt kvaliteten til læremidlene i Nye kontekst og Saga i norskfaget, og relasjonen mellom dem.

Et digitalt læringsmiddel beskrives som en komponent som tilhører den tradisjonelle læreboken. Det er en generell oppfatning om at læreboken hovedsakelig tar for seg det elevene skal lære, og at digitale læringsressurser inneholder oppgaver, ofte flervalgsoppgaver, i tema som allerede er dekket av læreboken (Nilssen, 2015). Nilssen sine analyser viser blant annet at læreboken Saga 9 legger til rette for en holistisk digital kompetanse ved at boken instruerer elevene til å søke på nett etter informasjon om beskyttelse av personvernet. Oppgaven følger opp med instruksjon om at elevene må lage liste over de viktigste nettvett-reglene, og senere presenteres en diskusjonsoppgave om hvordan man lykkes ved å følge disse reglene. Dette signaliserer at læreboken er selvbærende og uavhengig av den tilhørende elevnettsiden. Ved å plassere det teoretiske innholdet i læreboken, selv eksplisitte digitale emner, viser lærebokforfatterne indirekte at det viktigste finnes i læreboken (Nilssen, 2015).

Gilje et al. (2016) sitt forskningsprosjekt viser at lærerne bruker det digitale læringsmiddelet mest for å skape variasjon i undervisningen og for at elevene får teste sin digitale ferdighet. Nilssen (2015) mener at slik overflødighet ikke øker bruken av digitale læringsressurser i skolen, og heller ikke skaper en holistisk digital kompetanse. Den digitale kompetansen krever nemlig dypere og mer helhetlig forståelse av digitale læremidler. Når læreboken alene bærer den funksjonelle, faglige belastningen og det tilhørende elevnettstedet kun har overflødig innhold som er annerledes på grunn av deres digitale og interaktive modus, er dette nøyaktig årsaken til hvorfor elevnettstedet kun fungerer som en variasjon i undervisningen (Nilssen, 2015). Teknologi i skolen blir bare underholdning dersom det ikke er klare retningslinjer eller klar faglig-pedagogisk bakgrunn for bruken. Nilsson etterspør kvalitetssikring av det didaktiske samspillet mellom lærebok og tilhørende nettsted. Dersom utviklingen av disse to læremidlene hadde vært tettere integrert, ville nok dette sikret oppfatningen og bruken av elevnettstedene som en kvalitativ nødvendighet i tillegg til læreboken. I forskningen konkluderer Nilssen (2015) med at det finnes tydelige tegn på at lærebøkene er selvbærende og selvstendig fra den tilhørende nettsiden. Dette begrunner hun med at teorien finnes kun i lærebøkene, selv for tydelig digitale emner, og dette kommuniserer at all viktig informasjon er å finne i læreboka. Forholdet mellom lærebok og elevnettsted i sammenheng med matematikkfaget diskuteres nærmere i delkapittel 5.5.

## 3.0 Metode

For å svare på problemstillingen presentert innledningsvis har jeg samlet og analysert brøkoppgaver fra læremidler på ungdomstrinnet – dette inkluderer lærebøkene Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2014), Tetra 8 (Hagen et al., 2006) og Nummer 8 (Hole, Jensen, Tellefsen, & Wallace, 2014) og deres tilhørende elevnettsted. Analysen har bestått av to deler: hvilket aspekt og modell av brøk som blir brukt, og i hvilken grad oppgavene utfordrer elevene. Sistnevnte analyseres gjennom rammeverket utviklet av Mathematics Expert Group (MEG) presentert i teorikapittelet. Med bakgrunn i dette har jeg muligheten til å si noe om kvaliteten til læremidlene, og (u)likhetene mellom dem. I dette kapittelet beskrives metodevalgene som er gjort for å gjennomføre denne studien. Dette innebærer blant annet forskningsdesignet, utvalget til studien, analysemetoden og hva som er blitt gjort for å ivareta validiteten til studien.

### 3.1 To ulike tilnærminger

Det finnes to ulike tilnærminger i den pedagogiske forskningen, disse blir kalt kvantitativ- og kvalitativ forskning (Kleven, Tveit, & Hjardemaal, 2014). Den kvantitative metoden kjennetegnes av et stort datamateriale, en objektiv forskerrolle og har sin styrke i hypotesedannede undersøkelser (Kleven et al., 2014). Den kvalitative forskningen derimot, kjennetegnes av en relasjon mellom forsker og informant, et lite datamateriale og forskerens subjektivitet i analyseprosessen. Mitt datamateriale består av tekst og studien tar for seg få læremidler for å studere disse nøye. Likevel skal jeg foreta en kvantitativ innholdsanalyse ved å kategorisere i et bestemt rammeverk. Jeg ønsker å gjøre beregninger med mine data, og dette gir studien et kvantitativt preg. Derfor kan mitt datamateriale plasseres i et skjæringspunkt mellom de kvalitative og kvantitative studiene. Dette støttes av Krippendorf (2004) som definerer den kvalitative innholdsanalysen som en blandet metodetilnærming, ettersom tildelingen av kategorier til teksten som et kvalitativt trinn og analysen av frekvensen som en kvantitativt trinn (Kongelf, 2019).

### 3.2 Forskningsdesign

Tanken bak studien var et ønske om å kunne vurdere lærebøkene som blir benyttet i norsk skole, ettersom de har en såpass stor betydning for hvordan matematikkundervisningen formes. Dette ble presisert i teorikapittelet. Med tiden har også digitale ressurser fått større omfang i skolefagene, og det er blitt laget tilhørende elevnettsted til læreverkene.

Utgangspunktet for innholdet i analysen ble derfor utvidet til å gjelde læreboka og det tilhørende elevnettstedet som blir brukt i matematikkundervisningen.

Jeg har valgt å gjennomføre en komparativ casestudie hvor jeg har analysert og sammenliknet brøkoppgaver i tre ulike læremidler. Casestudien har en rekke kjennetegn, blant annet den rike beskrivelsen av casene som skal analyseres. Den komparative casestudien kjennetegnes nettopp ved at flere tilfeller blir studert og sammenliknet (Cohen, Manoin, & Morrison, 2011). Casestudien studerer en eller noen få enheter inngående for å trekke deskriptive slutninger, eller gi innsikt i hvorvidt et fenomen fører til noe annet (Dahlum & Wæhle, 2018). Studien gir dermed mulighet til å gå i dybden med kategorisering, drøfting og analyse. En komparativ casestudie vil gjøre det mulig å peke på tendenser, spesielt dersom man inkluderer studien i en rekke av flere studier som belyser den samme problemstillingen (Cohen et al., 2011). Selv om studien tar for seg en eller få tilfeller og studerer disse nøye, brukes metoden for å kaste lys over flere viktige fenomener ut ifra den helhetlige beskrivelsen av det enkelte tilfellet (Dahlum & Wæhle, 2018).

Jeg ønsker å gi en beskrivelse av innholdet i brøkoppgavene i læremidlene på ungdomstrinnet. Jeg leter altså ikke etter årsakssammenhenger – eksempelvis om ulike læremidler gir ulikt resultat på tester av elevene i kompetanse innen brøk. Datagrunnlaget er for lite til å trekke årsakssammenhenger. Jeg har verken tilgang til data eller tid nok til å kunne trekke gode, generelle slutninger på grunnlag av dette. Jeg har aldri tidligere brukt noen av læremidlene som elev selv, eller brukt disse i egen undervisning som lærer. Min subjektivitet kommer frem i analysen gjennom min tolkning av rammeverket. På tross av disse to bemerkningene mener jeg casestudie er en riktig beskrivelse av min studie, nettopp fordi jeg har gjennomført en grundig, deskriptiv analyse av tre ulike lærebøker og deres tilhørende elevnettsted.

## 3.3 Utvalg av data

I min komparative casestudie ser jeg på brøkoppgaver som gis elevene gjennom læremidlene bok og elevnettsted på ungdomstrinnet. Da jeg valgte ut lærebøker tok jeg utgangspunkt i utvalgskriterier utformet av Cohen et al. (2011), og disse fem kriteriene går ut på utvalgsstørrelsen, representativiteten til utvalget, tilgjengeligheten, hvilken utvalgsstrategi som benyttes og hva slags studie utvalget skal gjøres til. Dette utdypes nærmere nedenfor.

### 3.3.1 Utvalgsstørrelse

En casestudie kjennetegnes av en rik og grundig analyse av et fenomen, og av den grunn kan ikke utvalget være for stort (Cohen et al., 2011). Jeg har antatt at 3 caser er passende utvalgsstørrelse for min innholdsanalyse, og disse fant jeg gjennom forskningsprosjektet til ARK&APP. Utdanningsdirektoratet var oppdragsgiver til en spørreundersøkelse om valg og bruk av læremidler som en del av forskningsprosjektet ARK&APP. Dette ble utført av NIFU i 2015 (Waagene & Gjerustad, 2015). Av analysen fikk jeg informasjon om hvilke læremidler og digitale ressurser som blir mest brukt i matematikktimene på ungdomsskolen. Figuren nedenfor viser prosentfordelingen mellom lærebøkene.

**Tabell 20: Hvilken lærebok benytter elevene i matematikk på 8. – 10. trinn? Prosent (N=39)**

| | Andel (%) |
|---|---|
| SIRKEL (Aschehoug) | 26 |
| Faktor (Cappelen) | 18 |
| nye MEGA (Cappelen) | 13 |
| Maximum (Gyldendal) | 3 |
| TETRA (Fagbokforlaget) | 3 |
| Ingen av disse | 39 |
| Totalt | 100 |

*Tabell 5. Prosentfordeling av ulike lærebøker brukt på ungdomstrinnet (Waagene & Gjerustad, 2015)*

Av denne tabellen valgte jeg Sirkel, Faktor og Tetra. Nye Mega og Maximum ble ikke inkludert, fordi disse hadde ikke tilgjengelig elevnettsted på det tidspunktet min analyse ble gjennomført. Svaralternativet «ingen av disse» utgjør en andel på 39%, og fordi denne prosentandelen er forholdsvis stor ble jeg anbefalt å inkludere læreboken Nummer 8 av flere lærere som benytter boken selv. Boken utfordrer til å sette ord på matematikken og tankemønstre. Det finnes også flere oppgaver som viser elevene ulike løsningsmetoder, og dette er hovedårsaken til at Nummer 8 ble anbefalt til min analyse.

Gjennom mailkorrespondanse med en av forskerne i prosjektet fikk jeg innblikk i hvordan spørreundersøkelsen ble presentert for lærerne som deltok. ARK&APP sto for innholdet i spørsmålene, og forskerne fra NIFU fikk oppgaven med å gjennomføre og legge frem denne spørreundersøkelsen. Lærebøkene presentert i spørreundersøkelsen var derfor forhåndsbestemt av ARK&APP. Forskningens utforming begrunnes i ønsket om at alle lærere som deltok skulle ha mulighet til å svare, og av den grunn ble svaralternativet «ingen av disse» inkludert. I etterkant ser jeg at denne forskningen kunne vært gjort annerledes, slik at alle mulige lærebøker i matematikk blir representert for informantene. Jeg mener lærerens bruk av ulike lærebøker ikke kommer klart nok frem når informanten skal krysse av på forhåndsgitte svaralternativer. Dermed kan det være nyttig informasjon som går tapt innunder kategorien «ingen av disse».

### 3.3.2 Tilgjengelighet

I tillegg var det store kvalitetsforskjeller i de tilhørende elevnettstedene, hvor noen av lærebøkene ikke hadde elevnettsted i det hele tatt. Dette påvirket tilgjengeligheten (Cohen et al., 2011), og dermed skjedde utvelgelsen av læremidler gradvis, hvor jeg til slutt ble sittende igjen med Sirkel 9 (Torkildsen & Maugesten, 2007), Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2014), Tetra 8 (Hagen et al., 2006) og Nummer 8 (Hole et al., 2014) som utgangspunkt for analyse, hvorav de tre førstnevnte var tilgjengelig på biblioteket til OsloMet. Sistnevnte måtte derimot bestilles selv. Herfra samlet jeg data fra lærebøkene- og elevnettstedenes kapitler som omhandlet brøk. Det er viktig å påpeke at utvalget mitt har vært for lite til at det representativt for hele boka jeg har valgt ut, for andre bøker i samme serie og generelt bøker brukt i matematikkundervisning. Læreverkene i sin helhet blir nærmere beskrevet i delkapittel 3.3.

De forskjellige lærebøkene legger opp kapitlene om brøk ulikt. Noen oppgavetyper er svært repeterende, og dette gjelder tydelig algoritmiske oppgaver. Standardiserte oppsett eller utregningsmåter for de fire regneartene, kalles algoritmer (Hinna et al., 2011). Standardalgoritme brukes for å understreke at det er svært utbredte regnemetoder.
Rent innholdsmessig gir ikke disse oppgavetypene interessant data med tanke på mitt analysearbeid. Brøken blir i beste fall kategorisert innenfor tallstørrelse, men jeg kan ikke sikkert plassere den innenfor en modell av brøk. Oppgavetekstene i de algoritmiske oppgavene er ganske rett frem. Med andre ord er oppgavetyper formulert som *regn ut, utvid brøken, forkort brøken, finn likeverdig brøk, gjør om til blandet tall, gjør om til uekte brøk, gjør om til desimaltall,* o.l. utelatt fra analysen. Likevel anerkjenner jeg at dette er en viktig del av matematikkunnskapen som elevene må besitte. Likeså har jeg en tidsbegrensing som ikke tillater å analysere alle oppgaver i alle kapitlene som omhandler brøk. Som følge av dette har jeg valgt å fokusere på alle tekstoppgaver som omhandler brøk. Tekstoppgaver refererer til eksisterende eller tenkelige meningsfulle kontekster, og er dermed ikke i kontekst av en rent numerisk kalkulasjon (Verschaffel et al., 2000). Disse oppgavene utelukker ikke nødvendigvis algoritmiske løsningsmetoder, men kjennetegnes ved at oppgaven blir presentert gjennom tekst, og eventuelt bilde.

Primært ønsket jeg å ha med brøkoppgaver som var satt i en kontekst og utelukke de rene algoritmiske oppgavene, ettersom også oppgavene i PISA berører virkelighetsnære problemer. Underveis i analysen ble jeg usikker og oppdaget at det ikke fantes klare skiller mellom oppgavetypene. Hver gang jeg tvilte på om oppgavetypen var riktig, analyserte jeg dem likevel, nettopp for å hindre at informasjon gikk tapt. I senere tid har jeg slettet noe datamateriale, men det dukker likevel opp tilfeller som ikke kan beskrives som kontekstoppgaver. Et eksempel på en slik type oppgave dukker opp i delkapittel 3.6.1.

### 3.3.3 Representativitet

Dette har resultert i et datamateriale på totalt 378 oppgaver. Disse oppgavene ble først kategorisert etter aspekt av brøk og deretter hvilken modell av brøk som blir presentert i oppgaven. Etter denne kategoriseringen ekskluderte jeg læreboken Sirkel 9 på bakgrunn av representativitet, som inngår i et av utvalgskriteriene til Cohen et al. (2011). Jeg ønsket at det skulle være en variasjon i de lærebøkene som ble plukket ut. Med variasjon mener jeg at det bør være flere lærebøker med hver sin utforming. For eksempel utelukket jeg Sirkel 9 etter første del av analysen, nettopp fordi den minnet om Faktor 8 i måten kapittelet var lagt opp. Begge bøkene hadde i tillegg en overvekt av brøk som del av en helhet og oppgavene er ofte er presentert med arealmodell - Sirkel 9 og Faktor 8 stemmer derfor godt overens med tidligere forskning som er gjort på feltet (Anghileri, 2006; Askew, 2001; Kleve, 2014; Lamon, 2012).

Jeg utelukket også Sirkel med bakgrunn i studiens utvalgsstørrelse og hvilken studie utvalget skal gjøres til, formulert av Cohen et al. (2011). Sirkel 9 er den eneste læreboken som er ment til å brukes på niende trinn av mine utvalgte lærebøker. Dette kunne antakeligvis påvirke resultatene dersom analysen av Sirkel 9 ble gjennomført. Dessuten er tre caser en passende utvalgsstørrelse i min studie. Dette førte til at Sirkel 9 ble utelatt av del to i analysen – hovedsakelig på bakgrunn av variasjon i representativitet, utvalgsstørrelse og formålet med studien (Cohen et al., 2011).

### 3.3.4 Endelig utvalg av data

Denne ytterligere avgrensningen gir meg lærebøkene Faktor 8, Tetra 8 og Nummer 8 og deres tilhørende elevnettsted som videre tas med til den andre delen av kategoriseringen. Dette tilsvarer et omfang på 277 oppgaver.

Datainnsamlingen min foregikk suksessivt og repeterende. Suksessivt i form av at jeg tok for meg et og et læremiddel, og repeterende i form av gjentatte runder med gjennomlesninger og justeringer av datamaterialet mitt (Kongelf, 2019). Dette har vært tidkrevende, ettersom jeg i første runde kategoriserte 368 oppgaver en rekke ganger. Det samme gjaldt andre runde, hvor jeg kategoriserte 277 oppgaver i MEG-rammeverket. Jeg benyttet forhåndsdefinerte kategorier ut ifra teori, og dette heter i følge Tranøy (2019) en deduktiv tilnærming. Dette ga meg et datamateriale som gjorde meg i stand til å oppdage klare trekk ved lærebøkene. Som nevnt tidligere har jeg ikke mulighet til å foreta meg generaliseringer med et lite utvalg, men det gir meg derimot muligheten til å gjøre en grundig analyse av oppgavene i lærebøkene.

## 3.4 Kort om hvert læreverk

De tre ulike læreverkene jeg sitter igjen med er store og ulike. Det er vanskelig å vite hvilke klasserom som bruker hva, ettersom dette gjøres forskjellig i alle klasserom. Bruk av oppgavebøkene er derfor mer tilfeldig, og ble av den grunn valgt bort. Det eneste vi kan være sikker på er bruken av grunnboka, og at elevene hovedsakelig forholder seg til denne. Kun grunnboken og tilgjengelig elevnettsted ble brukt som data i min analyse, på bakgrunn av at 85% av alle matematikklærere baserer undervisningen på læreboken (Gilje et al., 2016). I tillegg er de tilhørende digitale elevnettsted inkludert, ettersom disse sjeldent blir sett i sammenheng med læreboka. Det er ingen motsetning mellom papirbaserte læremidler og digitale verktøy, de hører sammen i fremtidens skole. I et læremiddellandskap som er preget av både papirbaserte og digitale læremidler, har jeg et ønske om å skape et analytisk bilde av kvaliteten på lærebøkene og deres tilhørende elevnettsted.

Denne avgrensningen av læreverkene er hovedsakelig grunnet i tidsperspektivet på oppgaven. Noen emner innen brøk faller utenfor analysen ettersom læremidlene legger frem brøkbegrepet ulikt. Det er viktig å påpeke at dersom det ble foretatt en analyse av alle tekstoppgaver som omhandlet brøk i hele læreverket, ville dette antakelig gitt andre resultater. Blant annet finner vi aspektet brøk som forhold i tema målestokk, som blir presentert i andre kapitler i lærebøkene. Nedenfor beskrives hvert læreverk kortfattet og emnene der brøk dukker opp blir presisert.

### 3.4.1 Faktor

Læreverket Faktor er skrevet av Espen Hjardar og Jan-Erik Pedersen (2014). Kapittel 2 i Faktor 8 omhandler brøk og lærestoffet med oppgaver om brøk går over 32 sider. For læreren finnes det flere lærerressurser, og dette inkluderer en tavlebok, videoer med gjennomgang av alle kapitler med øvingsoppgaver og omvendt undervisning. I tillegg finnes kapittelprøver, terminprøver og digitale halvårsprøver med løsningsforslag. Målark, kopieringsoriginaler og faktornøtter ligger også tilgjengelig for lærere som benytter Faktors læreverk.

For elevene finnes øvingsoppgaver i tre kategorier, video med gjennomgang av alle kapitler med øvingsoppgaver, digital kapittelkartlegger, manualer for digitale verktøy og *Faktorama*. På første side i Faktors grunnbok blir det henvist til elevnettstedet faktor.cdu.no, og det er dette nettstedet som er blitt brukt i min analyse. Videre inne på elevnettstedet finnes *Faktorama* som er en nettressurs som krever innlogging. *Digital vurdering* og *Faktor Premuim* krever også innlogging.

Læreverket totalt sett inneholder altså en grunnbok, en oppgavebok og lærerens bok for hvert trinn. I tillegg finner vi ekstra læringsressurser både for elever og lærere, nemlig et elevnettsted og lærernettsted. Trykte tilleggskomponenter er et fordypningshefte, eksamensforberedende hefte og regelhefte. Til øving av grunnleggende ferdigheter finnes det også temahefter. Med andre ord er Faktor et omfattende læreverk med mange komponenter.

#### *Flere emner som tar for seg brøk i læreverket*

Som nevnt blir elevene presentert for brøkbegrepet relativt tidlig i Faktor 8. Oppgavene i brøkkapittelet er repeterende, og jeg får et inntrykk av mengdetrening. I sammenheng med kapitlene om prosentregning, måling, algebra, likninger, sannsynlighet og geometri dukker brøk opp i ulike situasjoner. Eksempelvis gjennom målestokk, forholdsregning og formler presentert som brøkuttrykk. Dette gjelder for både Faktor 9 og Faktor 10, og det er dermed trygt å fastslå at brøk dukker opp i ulike former og situasjoner utenom det rene brøkkapittelet i Faktor 8.

### 3.4.2 Tetra

Læreverket Tetra er svensk og skrevet av May Britt Hagen, Synnöve Carlsson, Karl-Bertil Hake og Birgitta Öberg (2006). Nyere utgave av boken ble utgitt i 2015, og det er denne som er brukt i min analyse. Kapittel 5 i Tetra 8 omhandler brøk og grunnkurset går over 20 sider. For elevene er det laget en grunnbok og tilhørende elevnettsted åpent for alle. Grunnboka og treningsheftet kan begge kjøpes i digital utgave. Elevene kan også jobbe med oppgaver på Tetras elevnettsted, her er det enkelt å finne frem ettersom oppgavene er fordelt tematisk. I tillegg er det laget et treningshefte som er en oppgavesamling for elever som trenger et enklere opplegg. Her får elevene tildelt enklere oppgaver med enkle forklaringer.

For læreren finner vi lærerveiledning i papirutgave på alle trinn. Denne inneholder arbeidsark for alle kapitler og til verktøykassa, generell del med det pedagogiske grunnlaget for verket, repetisjonsoppgaver, prøver, grubliser og fasit. Inne på Tetra sitt nettsted finnes også lærerveiledning for 9. og 10. trinn i digital utgave. Læreren kan få tak i fasit til treningsheftene, terminprøver, forslag til årsplan og nasjonale prøver inne på nettstedet.

Læreverket i helhet består altså av en grunnbok, treningshefte og lærerveiledning på alle trinn. I tillegg finner vi ekstra læringsressurser både for elever og lærere inne på Tetras nettsted.

#### *Flere emner som tar for seg brøk i læreverket*

Brøk dukker opp for første gang ved introduksjonen av rasjonale tall i kapittel 2 Tall. Brøkkapittelet i Tetra 8 har flest tekstoppgaver, og derav flest oppgaver analysert. Tetra har en snau overvekt av brøk som måltall, og brøk som del av en helhet og brøk som operator er like godt representert. I Tetra ser vi ellers mange av de samme temaene som dukker opp i Faktor og forholdsvis Nummer. Med andre ord dukker brøk opp i sammenheng med algebra, geometri og måling, prosent og funksjoner. Her blir elevene blant annet introdusert for målestokk og forhold, i tillegg ser vi at forståelse av brøk er essensielt i kapittelet om sannsynlighet. Dette er en oppsummering av både Tetra 9 og 10. Mot slutten av Tetra 10 finner vi dessuten et kapittel dedikert til repetisjon, og her får elevene mulighet til å friske opp tidligere emner fra Tetra 8 og 9, blant annet brøk.

### 3.4.3 Nummer

Læreverket Nummer er skrevet av Arne Hole, Renate Jensen, Helga Kufaas Tellefsen og Anne Karin Wallace (2014). Formålet med boken er å lære elevene å snakke matematikk og instruere hverandre.

Delkapittel 2A i Nummer 8 omhandler brøk og fordeler seg over 15 sider. For elevene finnes det en grunnbok og en parallellbok, begge finner også i digitalt format. Parallellboka er laget for å gi elever som sliter med matematikk et bedre grunnlag. Boka har en lav inngangsterskel, men følger strukturen til læreboka. I tillegg finner elevene en tilhørende YouTube-kanal og et gratis elevnettsted. Dette nettstedet inneholder verktøyopplæring i Excel og Geogebra. Elevene kan også finne løsningsforslag til utvalgte oppgaver fra læreboka og teste seg med interaktive oppgaver til hvert kapittel.

For læreren finnes det en lærerveiledning kalt Lærerens bok. Dette er en metodisk veiledning som gir didaktiske tips til arbeid med stoffet i klasserommet. Tilsvarende finnes i digital utgave for hvert trinn. Lærerens digitalbok er beriket med undervisningsfilmer fra Twig, og kan fungere som motiverende innledning eller oppsummering til tema, eller som utgangspunkt for en klasseromsamtale. I tillegg finnes det kapittel- og terminprøver, forklaring av oppgaver, løsninger og verktøyopplæring i Excel og GeoGebra på lærernettstedet.

Læreverket Nummer finnes både i papirutgave og digital utgave av læreboka, parallellboka og Lærerens bok for hvert trinn. I tillegg finnes det et eget gratis nettsted for både elever og lærere.

### *Flere emner som tar for seg brøk i læreverket*

Etter å ha gjennomført kapittel 2 i Nummer 8, skal eleven tegne illustrasjoner av brøker og skrive dem som en brøk, vite hvordan brøk brukes i ulike sammenhenger, plassere dem på en tallinje og addere og subtrahere brøker. Kapittel 2A i Nummer 8 tar for seg brøk, og her er det en klar overvekt av aspektet brøk som tallstørrelse, hvor lengdemodellen blir brukt flest ganger.

Brøk dukker igjen opp senere under temaene geometri, algebra, måling, funksjoner, prosent og kombinatorikk. På samme måte som Faktor og Tetra, har brøk en naturlig forbindelse i mange sammenhenger. Likevel skjer dette forholdsvis sjeldnere i Nummer, og dette kan ha noe med det snevre omfanget av oppgaver å gjøre. Tanken bak spiralprinsippet at elevene skal lære litt det ene året, og bygge videre på dette grunnlaget neste år. Lærebøkene Tetra og Nummer viser spiralprinsippets tendenser hvor brøk dukker opp i alle tre lærebøker i serien. Vi kan konkludere med at de samme emnene i lærebøkene dukker opp fordi midlene følger den samme læreplanen. Det fjerde delkapittelet i Nummer 10, 1D, tar altså for seg brøkregning. En elev som har fulgt Nummer som lærebok vil for første gang bli introdusert for divisjon av brøk i dette delkapittelet. Etter å ha fullført kapittelet skal eleven kunne forklare sammenhengen mellom brøk og divisjon, mestre de fire regneartene med brøk, samt forklare begrepene ekte-, uekte- og brudden brøk. Dette vil antakeligvis sette preg på analysen av brøkkapittelet i Nummer 8.

## 3.5 Analyse

Det finnes flere tekstanalytiske metoder. Forskning som er basert på kategorisering og sammenligning av innholdet i tekstene beskrives som innholdsanalyser (Dahlum, 2015). Mitt datamateriale består som nevnt av skriftlige brøkoppgaver fra ulike læreverk på ungdomstrinnet. I mitt tilfelle skal jeg kode og finne mønstre i seks ulike læremidler, derfor blir en kvantitativ innholdsanalyse riktig terminologi for meg. Forskning på lærerbøker i matematikk viser at det er en overvekt av innholdsanalysestudier (Fan, Zhu, & Miao, 2013). I tillegg viser studien at det er en overvekt av kvantitative metoder brukt i disse analysearbeidene. Min studie tilføyer seg i rekken.

Det er kategorigeringssystemet som er det sentrale analyseverktøyet i innholdsanalyser. Disse kategoriene bidrar til intersubjektivitet ved at de muliggjør rekonstruksjon eller gjentagelse av analysen for andre. Dette gjør det mulig å sammenligne funn og pålitelighet til studien. I MEG-rammeverket er beskrivelsene eksplisitt angitt innenfor de ulike kategoriene (figur 6, tabell 9 og vedlegg for eksempler), og dette fører enklere til funn som er replikerbare og valide. I følge Krippendorff (2004) gjør dette innholdsanalysen til et vitenskapelig verktøy, siden teknikken inkluderer spesifikke prosedyrer.

En svakhet ved tekstanalysen er at kodeskjemaet splitter opp innholdet i kategorier, slik at innholdet analyseres hver for seg og helheten ikke blir oppdaget (Ryghaug, 2002). Imidlertid er ikke dette et problem for meg, ettersom det nettopp er hver enkelt oppgave som er forskningsobjektene. I innholdsanalysen er metoden objektiv, men allerede når forskeren lager rammeverket gjøres tolkninger, og når forskeren skal registrere innholdet gjøres ytterligere tolkninger (Ryghaug, 2002). Min analyse er derimot basert på eksisterende rammeverk, som reduserer subjektiviteten i kodingen.

### 3.5.1 Valg av rammeverk til kodingen

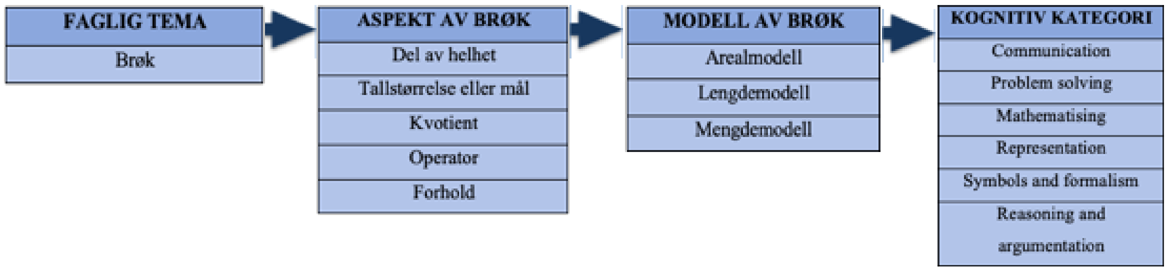
I løpet av prosessen med denne oppgaven har jeg lest flere studier som tar for seg innholdsanalyse av matematikkoppgaver. Van de Walle (2019) mener introduksjonen av alle aspekter av brøk er kritisk for at elevene skal få en helhetlig forståelse av brøk. Jeg så det derfor nødvendig i min studie å kategorisere oppgavene inn i ulike aspekter av brøk. Analysen er derfor basert på de fem grunnleggende kategoriene av brøkbegrepet, et rammeverk utviklet av Kieren (1980). I forbindelse med dette ønsket jeg også å kategorisere mellom de tre vanligste modellene av brøk brukt i undervisningssammenheng, presentert blant annet av Petit et al. (2016).

Det er mange rammeverk som tar for seg oppgavenes vanskelighetsgrad. For eksempel vurderte jeg et rammeverk som bygger på Blooms taksonomi eksemplifisert av Pedersen (2013). Her ble det gjennomført en innholdsanalyse av matematikkoppgaver som ble gitt i TIMSS Advanced i 1998 og 2008 og læreplanene for R1/R2 fra LK06 og 2MX/3MX fra R94. Hensikten med studiet var å vurdere samsvaret mellom oppgavene og læreplanene.

Rammeverket utviklet i MEG-studien (Turner et al., 2013) er også et eksempel på innholdsanalyse av matematikkoppgaver. En del av arbeidet med å velge rammeverk gikk på å prøvekode oppgaver. Da jeg fikk se hva de ulike rammeverkene ga meg av informasjon og hvilke analyser jeg kunne gjøre videre på disse dataene, falt det endelige valget på MEG-rammeverket. Dette valget ble tatt på bakgrunn av at MEG-rammeverket ga en grundig beskrivelse av de ulike kategoriene, og dessuten en ytterligere nivåbeskrivelse innen hver kategori. Av den grunn virket dette rammeverket inngående med detaljerte beskrivelser. Turner et al. (2013) sier dessuten at 70% av variansen i hvor vanskelig oppgavene viser seg å være kan forklares ved bruk av dette rammeverket. Rammeverket ble i utgangspunktet utviklet for å forutsi vanskelighetsgraden til PISA-oppgaver, og dette samsvarer godt med min hensikt med oppgaven. Rammeverket med navn og beskrivelser, er vedlagt oppgaven.

### 3.5.2 Kodingsprosessen

Figur 6 illustrerer hvordan arbeidet med kodingen har foregått.




*Figur 6. Gangen i kodingen*

Jeg løste mange av matematikkoppgavene på forhånd, slik at jeg kodet oppgavene mer presist. For eksempel skiller *Problem solving* i MEG-analysen mellom antall trinn i utviklingen av en matematisk strategi. Løsningsforslag til oppgavene var derfor nødvendig. I tillegg blir det tydeligere hvilken aspekt- og modell av brøk som presenteres, dersom en fullstendig løsning av oppgaven er gjort på forhånd. Ofte finnes det flere måter å modellere en brøk, og jeg kodet etter hva som oppleves mest hensiktsmessig ut ifra oppgavens kontekst og hva en elev ville gjort. De tre lærebøkene er ulike i utformingen, hvor noen benytter seg av illustrasjoner i liten grad. Dersom jeg kun hadde tatt utgangspunkt i tekstoppgaver illustrert med bilder og figurer, ville mange oppgaver blitt ekskludert, og dermed mye datagrunnlag falt bort.

Figur 6 viser antall trinn i kodingen, men det er viktig å påpeke at hver oppgave blir kodet til et aspekt og en modell av brøk, med mindre oppgaveteksten spesifikt impliserer at det er ønskelig med flere modeller av brøken. Ved at jeg hovedsakelig velger kun et aspekt per oppgave, vil det være mulige nyanser jeg går glipp av slik beskrevet av Gray and Ånestad (2016) i deres kvalitative studie om aspekter ved brøk i en nasjonal prøve. Der poengteres det at en og samme oppgave åpner opp for mange aspekter av brøk dersom man undersøker oppgaven nøye. Dessuten forklarer Kieren (1980) at det finnes flytende skiller mellom aspektene. Ettersom min analyse er kvantitativ med talldata, ville resultatene av opptellingen muligens bli misvisende. Av den grunn kodes oppgavene til det brøkaspektet som umiddelbart oppleves hensiktsmessig i konteksten. Innunder kognitiv kategori blir derimot oppgavene kategorisert i hver av de seks kompetansebeskrivelsene. Etter at jeg hadde kodet alle oppgavene slik som beskrevet, og illustrert i figur 6, fikk jeg en medstudent til å kode 35 oppgaver fra datamaterialet mitt, og dette tilsvarer ca. 13%. Dette ga meg muligheten til å sammenligne kodingen, og vi fikk diskutert kategoriseringen av de ulike oppgavene. Samsvaret mellom kodingen vår blir ytterligere presisert i delkapittel 3.5 om validitet.

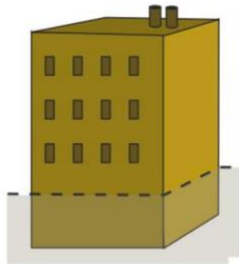
### 3.5.3 Tre eksempler fra kodingen

Her presenteres tre oppgaver fra henholdsvis Faktor 8, Nummer 8 og Tetra 8, for å illustrere kodingen som er gjort og ulike vurderinger som ble tatt underveis.

#### *3.5.3.1 Oppgave 2.4*

Omtrent hvor stor brøkdel av bygningen ligger

a) Under bakken
b) Over bakken



*Figur 7. Oppgave 2.4 i Faktor (Hjardar & Pedersen, 2014)*

Denne oppgaven er en av de første oppgavene som dukker opp i Faktors brøkkapittel. Deloppgave b inngår i denne oppgaven, men for enkelthetens skyld presenteres kun kodingen for deloppgave a. Oppgavene inngår i mitt datamateriale, og kodingen bak deloppgave a har jeg valgt å presentere fordi denne type oppgave er en gjenganger, men ikke nødvendigvis til stor kognitiv utfordring hos elevene. Liknende oppgaver er å finne i de andre læremidlene også.

Ut ifra figuren er det naturlig å plassere oppgaven innunder arealmodell av brøk. På samme figur ser vi deler av bygningen som er skravert, og det er snakk om hvor stor del av bygningen som ligger under bakken. Med dette kodes brøkaspektet til del av en helhet. Videre blir oppgavens vanskelighetsgrad klassifisert. Oppgaveteksten er kort og presis, hvor alt er direkte relevant til oppgaven. Av den grunn blir oppgaven definert til nivå 0 innunder kategorien *Communication*. Umiddelbart kunne kompetansen som omfatter det strategiske aspektet blitt rangert til nivå 0, nettopp fordi fremgangsmåten åpenbart er rettet mot å lese av figuren. Noen ville likevel argumentert for at eleven ikke nødvendigvis vil se brøkdel av arealet direkte, men heller forholde seg til høyden av bygningen. Dersom eleven velger å måle opp høyden, vil strategien kunne kategoriseres som nivå 1. *Mathematising* er også kodet til nivå 1. Oppgaven er satt i en hverdagslig kontekst, og det er eleven som skal tallfeste hvor stor del av bygningen som er under bakken. Eleven skal dra matematiske slutninger fra illustrasjonen som er satt i en hverdagslig kontekst. Dette enkle oversettelsesarbeidet er beskrevet som nivå 1 i rammeverket. Figuren er enkel, og eleven skal som sagt tolke direkte ut ifra denne. Altså kodes *Representation* til nivå 0. Likeså gjelder for kategorien *Symbols and* *formalism*. Her skal den matematiske kompetansen komme til uttrykk, eksempelvis gjennom regler og algoritmer. Som sagt skal ingen utregning gjennomføres, eleven skal kun trekke slutninger direkte fra informasjonen gitt i oppgaven, dermed blir også *Reasoning and argumentation* kodet til nivå 0.

#### 3.5.3.2 Oppgave 2.15 b

Renate bor $\frac{3}{4}$ km fra skolen.

Hun går til og fra skolen hver dag.

b) Hvor langt går hun på to dager, tre dager og en skoleuke?

Denne oppgaven er hentet fra Nummer 8 som utgjør en del av mitt datamateriale. Brøken presentert i oppgaveteksten føres inn som måltall, ettersom brøken relateres til en måleenhet. Oppgaven blir derimot ikke illustrert med en figur eller et bilde, men konteksten den er satt inn i dreier seg om lengder og avstander, på bakgrunn av dette blir oppgaven kategorisert innenfor lengdemodell.

Videre har oppgaven blitt analysert kognitivt, og innen *Communication* byr ikke oppgaven på spesielle utfordringer. Oppgaveteksten er direkte relevant til oppgaven, og det er korte setninger som må forstås, derfor er oppgaven kodet til nivå 0. *Problem solving* er satt til nivå 1, ettersom eleven skal bruke informasjonen som er gitt til å finne en enkel strategi. *Representation* er derimot satt til nivå 0, ettersom eleven kun skal lese av numeriske verdier fra en tekst. I nivåbeskrivelsen til *Mathematising* står det skrevet at denne kategorien innebærer et oversettelsesarbeid. Her fungerer oversettelsesarbeidet i begge retninger; fra dagliglivet til noe matematisk, men også oversettelsen fra et tallsvar til noe utenfor matematikken. Oppgaven er derfor kodet til nivå 1. I oppgaven skal elevene bruke korte, algoritmiske kalkulasjoner som involverer brøk, og derfor er denne oppgaven blitt kodet til nivå 1 innenfor *Symbols and formalism*. Avslutningsvis har jeg vurdert at elevene skal utføre enkle resonnement for å løse oppgaven og ta gyldige slutninger, og nivået er derfor satt til 1.

#### 3.5.3.3 Oppgave 81

«Ei loppe er 3 mm lang. Den kan hoppe 30 cm langt og 20 cm høyt. En gutt på 1,5 m vil gjerne ha det samme resultatet i forhold til sin lengde som loppa greide. Hvor langt og høyt må da gutten hoppe? Tror du han klarer det?»

Denne oppgaven er hentet fra Tetra 8 og inngår også i datamaterialet mitt. I oppgaveteksten blir det ikke eksplisitt presentert en brøk, og det er heller ikke gitt ut ifra teksten hvilken modell av brøk som er naturlig å bruke for eleven. Jeg har likevel valgt å analysere denne oppgaven, ettersom analysen kan drives etter hva som intuitivt presenterer seg. I denne oppgaven dreier det seg om lengder og høyder, og det er derfor naturlig å kategorisere oppgaven innunder lengdemodell.

Brøkoppgaver dukker opp i mange fasonger, hvor brøk som et forholdstall er en av dem. Det gir en ekstra utfordring når eleven selv må finne dette forholdstallet, og det kan gi spennende analyseresultater. I noen oppgaver er det ikke nødvendig med løsningsforslag, ettersom jeg enkelt kan visualisere løsningen. I denne oppgaven derimot var det nødvendig å utforme et løsningsforslag med flere mulige løsninger, slik at jeg kunne tallfeste en brøk til kodingen, men ikke minst for å gjøre kodingen mer reliabel. I de to ulike løsningsforslagene vist nedenfor sammenlignes to deler med hverandre, og dermed fungerer brøken som et forhold:

### Løsningsforslag 1

$$Forhold = \frac{lengde}{størrelse} = \frac{300mm}{3mm} = 100$$

$$Forhold = \frac{høyde}{størrelse} = \frac{200mm}{3mm} \approx 66{,}67$$

*Gutten må derfor hoppe* $1{,}5m * \frac{300}{3} = 150\ m$ *langt og* $1{,}5m * \frac{200}{3} = 100m$ *høyt.*

### Løsningsforslag 2

$$\frac{guttens\ lengde}{loppens\ lengde} = \frac{lengden\ av\ guttens\ hopp}{lengden\ av\ loppas\ hopp}$$

$$\frac{1500mm}{3mm} = \frac{x}{300mm}$$

$$\frac{450000}{3} = \frac{3x}{3}$$

$$150000 = x \Longrightarrow 150 \, meter$$

*Dette gir oss at gutten må hoppe 150 meter for å hoppe like langt i forhold til loppa.*

*Vi gjør samme kryssmultiplikasjon med høyden. Setter inn 200mm for høyden av loppens hopp.*

Innenfor kodingen i rammeverket til MEG-studien blir *Communication* kodet til nivå 1. Det er fordi det blir presentert mer enn korte setninger, og elevene er nødt til å plukke ut relevant informasjon til løsningen av oppgaven. Det blir ikke presentert en åpenbar løsning for eleven, og uansett hvilken løsning eleven benytter vil dette innebære flere steg. Eleven må konvertere cm til mm (eller omvendt), og deretter finne en brøk som representerer forholdet mellom størrelsen til loppa og lengden på hoppet. Videre må denne brøken brukes for å kunne finne guttens eventuelle lengde på sitt hopp. På bakgrunn av dette blir *Problem solving* kodet til nivå 2. Det er nødvendig å finne en brøk som tilsvarer forholdet. Eleven trenger ikke å foreta seg et oversettelsesarbeid i en direkte betydning, ettersom informasjonen som skal tas i bruk allerede er numerisk. Likevel må disse verdiene settes sammen for å finne et forholdstall som eleven videre kan gjøre utregninger med. Derfor har jeg vurdert kategorien *Mathematising* til nivå 2. Som nevnt skal elevene lese av numeriske verdier fra en tekst, og dermed kodes *Representation* til nivå 0. I selve utregningen må elevene anvende brøk som forholdstall og gjøre utregninger over flere trinn, så denne kategorien blir vurdert til nivå 2. Elevene skal ta gyldige slutninger fra flere aspekt av problemet og følge logikk som innebærer flere steg – derfor er *Reasoning and argumentation* også kodet til nivå 2.

Resultatene fra kodingen av disse tre oppgavene presenteres slik i kategoriseringsskjemaet:

| | | Ulike aspekter av brøk | | | | | Ulike modeller av brøk | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Oppgavenummer | Underoppgave | Del av helhet | Tallstørrelse eller mål | Kvotient | Operator | Forhold | Arealmodell | Lengdemodell | Mengdemodell |
| 2,4 | a | 1 | | | | | 1 | | |
| 2,15 | b | | 1 | | | | | 1 | |
| 81 | a | | | | | 1 | | 1 | |

*Tabell 8. Kodingsresultater – aspekt og modell av brøk.*

| | | A MEG Study - Competency definitions and their level descriptions | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Oppgavenummer | Underoppgave | Communication | Problem solving | Mathematising | Representation | Symbols and formalism | Reasoning and argumentation |
| 2,4 | a | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2,15 | b | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 81 | a | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 |

*Tabell 9. Kodingsresultater - MEG-rammeverket.*

### 3.5.4 Eksempeloppgave kodet til nivå 3 i MEG

Ingen av mine analyserte oppgaver fra lærebøkene Faktor, Tetra eller Nummer er kategorisert til å ligge på nivå 3 i noen av kompetansebeskrivelsene. Derfor har jeg inkludert en oppgave kodet til nivå 3 for å eksemplifisere hva dette nivået innebærer.

Hver dag i 2002 (Abel-året) ble det publisert to matematiske oppgaver på baksiden av Dagbladet. På nettsiden til matematikk.org (Matematikk.org, Udatert) sies det at oppgavene passer for matematikkinteresserte som liker litt utfordringer. Oppgavesettet 45 fra dag 1, lyder:

Telleren og nevneren i en brøk er positive heltall og har differanse 16. Verdien av brøken ligger mellom $\frac{7}{4}$ og $\frac{9}{5}$ . Hva er telleren i brøken?

A) 36 B) 37 C) 38 D) 39 E) 40

Det må poengteres at denne oppgaven ikke er satt i en kontekst. Oppgaven faller heller innunder betegnelsen *intra-matematisk oppgave*, beskrevet av OECD. Det er nettopp det matematiske aspektet av oppgaven som fører til at oppgaven blir kodet til nivå 3. Se forklaring nedenfor. Abel-oppgavene funnet i Dagbladet, vil antakeligvis ofte være kodet til nivå 3. Disse er svært sjeldent satt i kontekst. Det er også viktig å påpeke at oppgaven har flere svaralternativ. Tradisjonelt i Norge er ikke denne oppgavetypen utbredt, fordi det blir hevdet at flervalgsoppgaver ikke legger til rette for selvstendig tenkning eller problemløsning (Sirnes, 2005). Denne faktoren vil dermed i utgangspunktet påvirke mulige elevstrategier, hvor noen elever kan bruke svaralternativene i løsningen av oppgaven. Likevel er flervalgsoppgaver vært tatt i bruk i stor skala med PISA og nasjonale prøver, blant annet i matematikk. Av den grunn bruker jeg også oppgavetypen i denne sammenheng.

#### *3.5.4.1 Løsningsforslag til oppgaven:*

Skriver brøken som $\frac{x+16}{x}$. Da gjelder at $\frac{7}{4} < \frac{x+16}{x} < \frac{9}{5}$. Trekker vi 1 fra alle ledd, får vi $\frac{3}{4} < \frac{16}{x} < \frac{4}{5}$. Hvis vi inverterer brøkene, får vi $\frac{4}{3} > \frac{x}{16} > \frac{5}{4}$. Multiplikasjon med 16, gir $\frac{64}{3} > x > 20$, og vi ser at $x = 21$ er den eneste muligheten. Telleren i brøken er dermed $21 + 16 = 37$.

Dersom det skulle blitt gjennomført en analyse av denne oppgaven ved bruk av MEG-rammeverket, ville kategoriseringen se slik ut:

| | | A MEG Study - Competency definitions and their level descriptions | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sett | Dag | Communication | Problem solving | Mathematising | Representation | Symbols and formalism | Reasoning and argumentation |
| 45 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 3 | 3 |

*Tabell 10. Kodingsresultat Abel-oppgave.*

Kompetansebeskrivelsen *Communication* har blitt kodet til nivå 0. Dette er på grunnlag av at eleven kun trenger å forstå korte setninger hvor all informasjon er direkte relevant til oppgaven. Årsaken til at *Problem solving* er kodet til nivå 3, er fordi eleven må tenke ut en flersteget strategi som inneholder delmål. Strategien krever at elevene har kontroll på løsningsprosessen. Siden oppgaven bare refererer til matematiske objekter og ikke henviser til saker utenfor matematikken, blir *Mathematising* kodet til nivå 0. Det samme nivået blir *Representation* kodet til, ettersom eleven skal lese isolerte numeriske verdier direkte fra teksten. *Symbols and formalism* har blitt kodet til nivå 3, på bakgrunn av at eleven må ta i bruk flere matematiske regler, definisjoner og teknikker for å finne en løsning på problemet. Det samme gjelder *Reasoning and argumentation*, hvor eleven må ha innsikt i kompleks informasjon for å bestemme hvilken løsning som vil være hensiktsmessig å ta i bruk, i tillegg til å begrunne denne antakelsen. Eleven må ta en evaluering og kunne argumentere for denne på en ordnet måte.

## 3.6 Total MEG-skår, gjennomsnittlig MEG-verdi og gjennomsnittlig total MEG-skår

Etter at alle oppgavene var kategorisert til et aspekt av brøk, en modell av brøk og kognitiv kategori var kodet, ønsket jeg å benytte meg av en total MEG-skår og en gjennomsnittlig MEG-verdi i hver kognitiv kategori, for å få en forståelse av hvert læremiddel. Verdien for total MEG-skår i hver oppgave fant jeg ved å addere verdiene i hver kognitiv kategori. Hensikten med å sette en total MEG-skår var for å skape en oversikt over vanskelighetsgraden til oppgaven, og dermed enklere plukke ut oppgaver til videre analyse. Det er viktig å poengtere at man kan gå glipp av nyansene i hver oppgave ved å representere hver oppgave med en total MEG-skår. Dette kan føre til at nyttig informasjon går tapt.

En gjennomsnittlig MEG-verdi i hver kognitiv kategori, fant jeg ved å summere verdiene for en kognitiv kategori og dermed dividere på antall tilfeller. Dette blir eksemplifisert nedenfor. Gjennomsnitt er et tall som angir den mest typiske verdien for en mengde med tall. Noen ganger er et gjennomsnitt veldig nær den faktiske sannheten, men bruk av gjennomsnitt kan være problematisk dersom verdiene viker stort. Det er derfor viktig at spredningen til tallene er innenfor rimelige grenser for å skape et virkelighetsnært bilde av situasjonen. I min studie ligger denne spredningen mellom 0-2 som tilsvarer kodet nivåbeskrivelser, og 0-9 der 9 er den høyeste registrerte total MEG-skår. Det er derfor mulig å anta at gjennomsnittet gir adekvate verdier. Bruk av gjennomsnittmål i min studie problematiseres nærmere i kapittel 5. Resultatene fra total MEG-skår og gjennomsnittlig MEG-verdi blir presentert i delkapittel 4.2.2.

For videre analyse av resultatene var det nødvendig å finne en gjennomsnittlig total MEG-skår for hvert aspekt og modell av brøk. Dette gjorde det mulig å kunne si noe om hvorvidt det er forskjell i den kognitive vanskelighetsgraden mellom oppgavetypene i de seks læremidlene. Gjennomsnittlig total MEG-skår fant jeg ved å ta utgangspunkt i alle oppgaver innenfor et aspekt av brøk, summere de totale MEG-skårene og deretter dividere på antall tilfeller. Det samme gjaldt da jeg kun tok utgangspunkt i oppgavene med en modell av brøk. Resultatene blir presentert i delkapitlene 4.2.3 og 4.2.4.

Et eksempel på hvordan disse MEG-verdiene ble regnet ut, demonstreres nedenfor gjennom fem fiktive oppgaver. Oppgave 1, 2 og 5 er knyttet til brøk som del av en helhet og oppgave 3 og 4 er brøk som forhold. I MEG-rammeverket vil disse fem oppgavene se slik ut:

| | | A MEG Study - Competency definitions and their level descriptions | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Oppgavenummer | Underoppgave | Communication | Problem solving | Mathematising | Representation | Symbols and formalism | Reasoning and argumentation |
| 1 | a | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | a | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | a | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | a | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | a | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |

*Tabell 11. Eksempelkoding i MEG-rammeverket.*

Oppgavenes totale MEG-skår blir dermed:

Oppgave 1: 3

Oppgave 2: 4

Oppgave 3: 5

Oppgave 4: 2

Oppgave 5: 7

Gjennomsnittlig MEG-verdi for den kognitive kategorien *Communication*, blir derimot:

$$\frac{0+1+2+0+2}{5} = 1{,}0$$

Gjennomsnittlig total MEG-skår for oppgavene knyttet til brøk som del av en helhet, regnes ut slik:

$$\frac{3+4+7}{3} = 4{,}67$$

Og gjennomsnittlig total MEG-skår for brøkoppgavene knyttet til forhold, er:

$$\frac{5+2}{2} = 3{,}5$$

## 3.7 Validitet

Dette delkapittelet vil dreie seg om reliabilitet og validitet, og hva jeg har gjort for å styrke dette i min studie.

Validitet dreier seg om i hvilken grad resultatene fra en studie er gyldige og innebærer åpenhet om hvordan en velger ut, leser og analyserer tekster. I tillegg krever det at forskeren er konsekvent under analysen. Av den grunn har jeg beskrevet kategoriseringsskjemaet jeg har brukt og min koding så nøyaktig som mulig. Ofte blir validitet delt inn i to deler, indre- og ytre validitet. Sistnevnte dreier seg om gyldigheten til resultatene utenfor deres kontekst, nemlig om muligheten til generalisering av funnene (Dahlum, 2018). Med andre ord hvilken grad resultatene kan overføres til andre utvalg og situasjoner. Dette kan være aktuelt å vurdere dersom jeg ønsker å si noe om nivået på norske læremidler generelt. Som nevnt tidligere har jeg ingen bakgrunn til å forklare årsakssammenhenger, og dette begrunnes med mitt begrensede datamateriale. Indre validitet dreier seg derimot om hvilken grad resultatene er gyldige for det utvalget som er undersøkt. Indre validitet brukes for å vurdere hvorvidt indikatoren, i mitt tilfelle rammeverkene, faktisk måler det som forskeren ønsker å måle (Dahlum, 2018). Dette er et viktig hensyn å ta, siden jeg har et ønske om å trekke slutninger om datamaterialet.

Reliabilitet dreier seg derimot om stabilitet i målingen og i hvilken grad en studie kan etterprøves. I min studie er det aktuelt å vurdere i hvilken grad kodingen har vært pålitelig. Det er to typer reliabilitet som er aktuelt å diskutere – interkoderreliabilitet og intrakoderreliabilitet (Turner et al., 2013). Interkoderreliabilitet går ut på at to eller flere uavhengige personer koder samme fenomen hvor graden av samsvar bør være høyt. Det er nettopp dette som er blitt gjort i min studie, hvor en medstudent kodet et tilfeldig utvalg av oppgaver fra datamaterialet. Dette kan også forstås som forskertriangulering, hvor minst to forskere samarbeider om en analyse (Røykenes, 2009). Intrakoderreliabilitet innebærer at kodingen som en forsker gjennomfører er konsistent gjennom hele kodeprosessen (Turner et al., 2013). For å sikre dette har jeg som nevnt brukt tid på å sette meg inn i rammeverkene og øvd meg på kodingen eksemplifisert ovenfor. Dessuten har jeg tydelig lagt frem hvilken analysemetode som er benyttet. Erfaring med koding og kunnskap om teorien er avgjørende for reliabiliteten.

Et annet faktum som hever min studies validitet er MEG-studiens egen kvalitetssikring gjennom Cronbachs alfa. Samsvaret ble vurdert mellom de åtte koderne som hadde kodet PISA-oppgaver med utgangspunkt i rammeverket (Turner et al., 2013). Cronbach alfa brukes for å sjekke konsistens mellom flere mål som antas å henge sammen (Svartdal, udatert). Altså om flere elementer i en test tester samme konstrukt. Dersom det er en god konsistens går alfa-verdien mot 1. Kvalitetssikringen i MEG-studien viste gjennomgående høy korrelasjon mellom de åtte koderne. Derimot var verdiene innenfor kategorien Reasoning betydeligere lavere ($\alpha$=0.62). Det viser seg dermed at denne er mer inkonsistent og problematisk å analysere enn de andre kategoriene i samme rammeverk. Dette stemmer overens med egen erfaring eksemplifisert nedenfor.

### 3.7.1 Samsvar med en annen koder

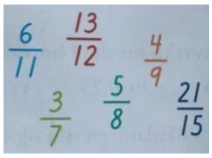
Som nevnt ovenfor ønsker jeg at resultatene mine er pålitelige. Det er vanskelig å bruke kodemanualen uten en form for tolkning hos den som koder. Derfor har det vært nødvendig med forskertriangulering for å øke sjansen for at mine vurderinger av eksemplene er så riktige som mulig. En medstudent av meg har kodet 13% av mitt datamateriale, og våre koderesultater var i stor grad samstemte. Kategoriseringen av brøkens aspekt og form for modell ble gjennomgående kodet likt. Det var heller noen tilfeller av inkonsistens i kodingen fra MEG-rammeverket som vi senere måtte diskutere oss til enighet. Et eksempel på et slikt tilfelle beskrives nærmere nedenfor.

Som nevnt tidligere er oppgaven 9b et eksempel på en brøkoppgave som ikke er satt i kontekst, men som likevel har blitt inkludert i mitt datamateriale. Det var i noen tilfeller vanskelig å skille mellom intra-matematiske oppgaver og faktiske tekstoppgaver, og dermed har flere oppgaver som befinner seg i «gråsonen» blitt inkludert. Jeg har likevel vært konsekvent med å utelukke oppgavetyper formulert som: *regn ut, utvid brøken, forkort brøken, finn likeverdig brøk, gjør om til blandet tall, gjør om til uekte brøk, gjør om til desimaltall,* o.l. De ulike oppgavetypene er definert i delkapittel 2.12.

### Oppgave 9b i Tetra

Hvilke av brøkene er

b) Større enn $\frac{1}{2}$, men mindre enn 1?




*Figur 12. Oppgave 9b i Tetra (Hagen, Carlsson, Hake, & Öberg, 2006)*

Første rad representerer min medstudents kodingsarbeid, og nederste rad er min egen analyse av oppgaven:

| | | A MEG Study - Competency definitions and their level descriptions | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Oppgavenummer | Underoppgave | Communication | Problem solving | Mathematising | Representation | Symbols and formalism | Reasoning and argumentation |
| 9 | b | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 9 | b | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

*Tabell 13. Koding av oppgave 9b i Tetra.*

Gjennom hele analysen var det overveiende stor enighet om nivåkategoriseringen til kompetanseområdene *Communication* og *Problem solving*. Mulig forklaring av dette er at nivåbeskrivelsene for disse kategoriene er enkle å tolke. I oppgaven vist ovenfor analyserte begge *Mathematising* til å ligge på nivå 0, men denne kategorien var ved noen tilfeller oppe til diskusjon.

I Kompetanseområdet *Representation* var vi uenige, og dette kan skyldes at vi har ulike oppfatninger av hva som er en representasjon. I teorikapittelet får vi forklaringen: eksempler på ulike representasjoner er fysiske objekt som konkreter, visuelle modeller som tegninger eller verbalt gjennom språket og i en kontekst (Kilpatrick et al., 2001). Kodeinstruksen fra rammeverket beskriver *Representation* på samme måte*: «We understand a concrete expression of a mathematical concept, object, relationship or action. It can be physical, verbal, symbolic, graphical, tabular, diagrammatic or figurative»* (Turner et al., 2013, p. 4). Det er store muligheter for skjønn i tolkningen av hva som er en fysisk, verbal eller symbolsk representasjon. I kompetansebeskrivelsen av nivå 0, se side 26, er det også flere mulige tolkninger for hva som tilsvarer en enkel representasjon. Her er det rom for tolkningsforskjeller. Min medstudent argumenterte for nivå 1 i *Representation*, som følge av at det i nivåbeskrivelsen gir uttrykk for at tallverdier sammenlignes. Vi ble sammen enige om at tallverdiene likevel ikke blir plassert i en graf, tabell eller liknende. I løsningen av oppgaven blir eleven nødt til å lese isolerte, numeriske tall – ikke nødvendigvis i oppgaveteksten direkte – men de inngår som en naturlig del av teksten. Derfor ble kategorien tildelt nivå 0.

Videre hadde vi også gitt kategorien *Symbols and formalism* ulik verdi. Personlig resonnerte jeg meg frem til at strategien som trengs for å løse oppgaven ikke nødvendigvis var rett frem for eleven, men når denne strategien var funnet vil oppgaven kunne løses uten store utfordringer. Nivå 0 er bestemt til regning med lett gjennomførbare tall. Gjennom diskusjon med den andre koderen, forsto jeg at noen elever ønsker å regne med brøkene for å eksempelvis kunne plassere dem på en tallinje. I tillegg kan uekte brøker oppleves utfordrende for elever. *Sustained* regning med brøk tilsvarer nivå 1.

Det var kompetansebeskrivelsen i *Reasoning and argumentation* som opplevdes mest problematisk å overføre til oppgavene, og av den grunn ga vi oftest ulik verdi i denne kategorien. Oppgave 9b er ikke et unntak, og vi måtte diskutere oss til enighet i dette tilfellet. Det er mulig at 1) rammeverket enda ikke godt nok presiserer kompetansenivået i de ulike resonnering- og argumentasjonsevnene, eller at 2) vi som matematikkpedagoger har ulik oppfatning av hva det krever av elevens resonneringsevne når den løser en matematisk oppgave. Denne problematikken beskrives også i Turner et. al. (2013) hvor MEG-forskernes egen koding ved bruk av rammeverket ga en verdi på $\alpha=0.62$. En tommelfingerregel er at alt over 0,7 er akseptert, men dersom verdien er under dette kan resultatene bli vurdert som «questionable» i følge George & Mallery (2003).

Gjennom en åpen diskusjon kom vi likevel til enighet også i denne kategorien, ettersom det i kompetansebeskrivelsen til nivå 2 står skrevet at eleven må utføre en kjede av konklusjoner for å lage et flertrinns argument. Dette tilsvarer mer resonnering og argumentasjon enn hva oppgaven krever. Nivået ble derfor satt til 1 som følge av at eleven gjennomfører resonnement innenfor ett aspekt av problemet.

Etter å ha diskutert med den andre koderen, ser jeg at uenigheten i koding skyldes konsekvente tolkningsforskjeller. Det er derfor mulig å anta at min koding likevel har vært forholdsvis intrakonsistent. Variasjon i tolkningen ser ikke ut til å være tilfeldig, og dette gir meg grunn til å tro at tolkningen har vært konsekvent gjennom min koding av oppgavene. Diskusjonen beskrevet ovenfor tok jeg med meg tilbake til originalanalysen, og korrigerte der det var nødvendig. I dette tilfellet ble mine koderesultater for oppgave 9b forandret til:

| | | A MEG Study - Competency definitions and their level descriptions | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Oppgavenummer | Underoppgave | Communication | Problem solving | Mathematising | Representation | Symbols and formalism | Reasoning and argumentation |
| 9 | b | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

*Tabell 14. Kodingsresultat av oppgave 9b i Tetra.*

### 3.7.2 Andre innspill angående rammeverket

Kodingen gjennomført av MEG omfatter analyse av PISA-oppgaver, og det er dermed gjort kvalitetssikring av dette tilfellet. Det er nødvendigvis ikke gitt at rammeverket vil fungere på samme måte for analyse av lærebøker og tilhørende elevnettsted. Man kan for eksempel argumentere for at lærebokforfatterne ikke er like gjennomtenkt i utformingen av oppgavetekstene, på samme grundige måte som forfatterne av PISA-oppgavene. Dette vil problematisere kodingen innenfor kategorien *Communication*. Via email har jeg kommunisert med John Dossey som er en av forskerne i MEG-gruppen. Han skriver at deres tilnærming er egnet for min studie, så lenge områdene i læreplanen er tilpasset. Han presiserte at jeg nødvendigvis må introdusere andre algoritmer i beskrivelsen av *Symbols and formalism* som er informative for mitt tema og nivå i matematikken, ettersom disse tilpasningene vil styrke MEG-funnene i analysen min. I tillegg har jeg lagt merke til at MEG-rammeverket tidligere har blitt brukt i andre analytiske sammenhenger, og denne studien vil tilføye seg i rekken. Det må derfor presiseres at elevene som møter oppgavene fra lærebøkene brukt i min studie og elevene som gjennomfører PISA-oppgavene er omtrent like gamle. Dette er avgjørende for at kodingen innenfor kategorien *Symbols and formalism* er adekvat. I kodebeskrivelsen inngår brøk innunder nivå 1, dette ville ikke vært tilfellet for en annen aldersgruppe. Jeg kan derfor med trygghet si at min analyse vil gi valide resultater ved bruk av MEG-rammeverket.

# 4.0 Resultater

I dette kapittelet presenteres resultatene fra kodingsarbeidet av lærebøkene Faktor, Tetra og Sirkel, og deres tilhørende elevnettsted, som presentert i metodekapittelet. En diskusjon om betydningen av funnene med eventuelle implikasjoner, finnes i kapittel 5. Innledningsvis i dette kapittelet er antall oppgaver i hvert aspekt og modell av brøk talt opp og presentert i søylediagram. Her presenteres hvert læremiddel for seg. Prosentfordelingen mellom de ulike aspektene og modellene av brøk i hvert læremiddel, presenteres i to tabeller som en oppsummering. Videre fremstilles tabeller med prosentfordelingen mellom nivåene i hver kognitiv kategori.

For å lette analysearbeidet har jeg regnet ut total MEG-skår, gjennomsnittlig MEG-verdi og gjennomsnittlig total MEG-skår. Den totale MEG-skåren brukes videre i utregning av gjennomsnittlig total MEG-skår, men den gir også en indikasjon på nivået til hvert læremiddel. Total MEG-skår og gjennomsnittlig MEG-verdi brukes for å gi et analytisk bilde av hvert læremiddel.

Avslutningsvis presenteres gjennomsnittlig total MEG-skår for antall oppgaver i hvert aspekt og modell av brøk. Først presenteres disse verdiene i tabeller for hvert læremiddel alene, deretter får hvert aspekt og modell en egen gjennomsnittlig total MEG-skår.

Nedenfor er totalt antall oppgaver i hvert læremiddel talt opp.

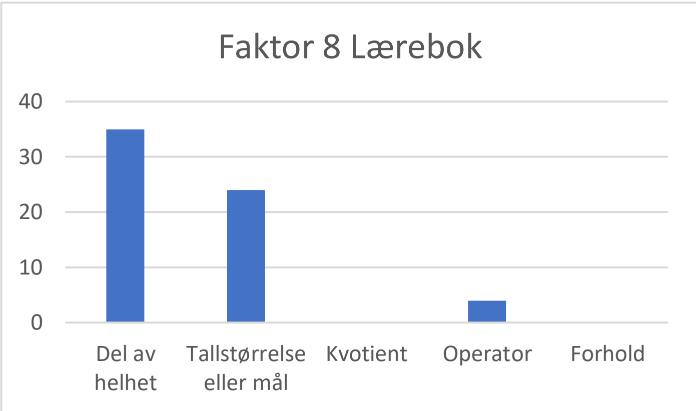
| | |
|---|---|
| Faktor 8 Lærebok | 63 |
| Faktor 8 Elevnettsted | 12 |
| **Totalt antall oppgaver (Faktor)** | **75** |
| Tetra 8 Lærebok | 96 |
| Tetra 8 Elevnettsted | 48 |
| **Totalt antall oppgaver (Tetra)** | **144** |
| Nummer 8 Lærebok | 37 |
| Nummer 8 Elevnettsted | 21 |
| **Totalt antall oppgaver (Nummer)** | **58** |

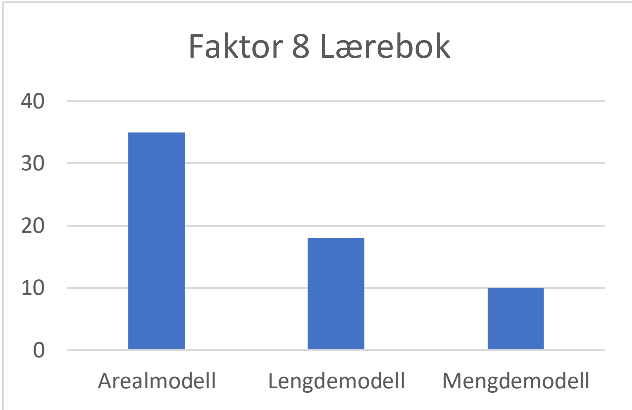
*Tabell 15. Totalt antall oppgaver*

## 4.1 Antall oppgaver med aspekt og modell av brøk

### 4.1.1 Faktor 8

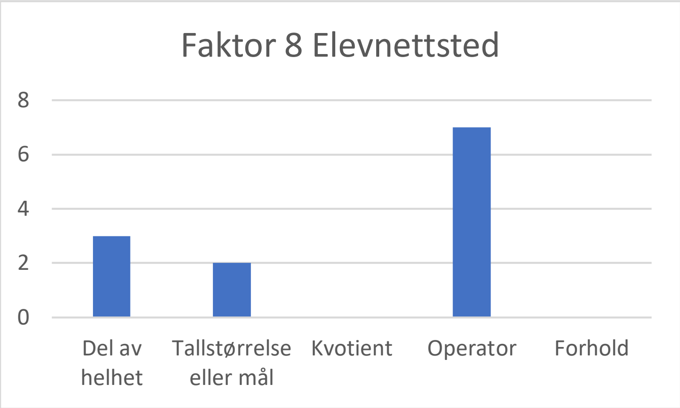
Læreboken Faktor 8 har en overvekt av aspektet brøk som del av en helhet. 35 av 63 oppgaver har blitt kategorisert innenfor dette aspektet, som tilsvarer ca. 56%. Selvom et flertall av oppgavene omhandler brøk som del av en helhet, inkluderer læreboken også brøk som tallstørrelse i et betydelig omfang. Aspektet brøk som operator er omtrent fraværende, og vi finner ikke oppgaver innenfor aspektet kvotient eller forhold. Arealmodell av brøk dukker opp 35 ganger av totalt 63 tekstoppgaver i boka. Dette tilsvarer ca. 56% av tilfellene.

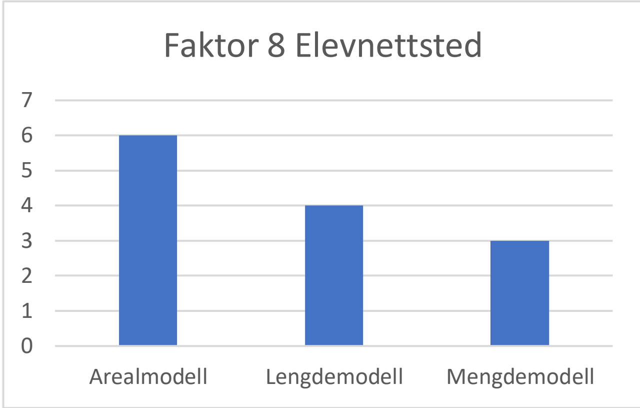



*Figur 16. Oppgavefordeling av brøkaspekt og modeller i Faktor*

Faktors elevnettsted viser et litt annet bilde av brøk enn det læreboken gjør. Her får elevene i større grad gjort oppgaver som omfatter brøk som operator. Tabellen viser derimot et skjevt bilde av fordelingen, ettersom det er få oppgaver det er snakk om. Det er i utgangspunktet ikke mange oppgaver inne på elevnettstedet til Faktor, og enda færre oppgaver som inneholder annen oppgavetekst enn «regn ut», «utvid brøken», etc. 7 av 12 oppgaver omhandler brøk som operator, og dette antallet kan gi elevene begrenset mulighet til å utfordre seg innenfor dette aspektet. Utbredelsen av de tre ulike modellene er tilsynelatende likt i både lærebok og elevnettsted. Elevnettstedet har en overvekt av brøk vist som areal, og mengdemodellen er den minst brukte modellen i begge læremidlene.



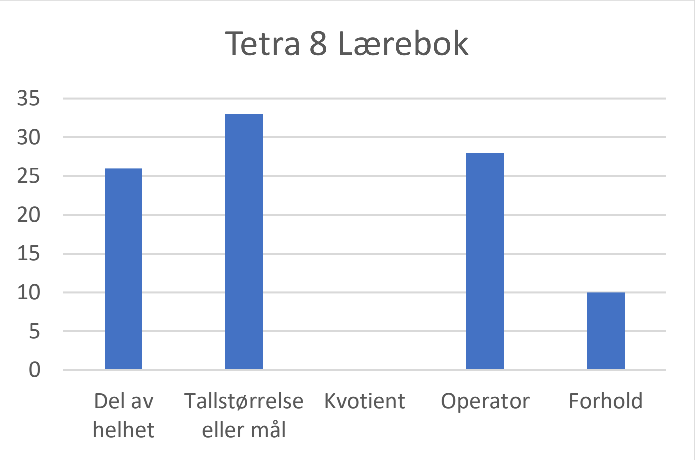



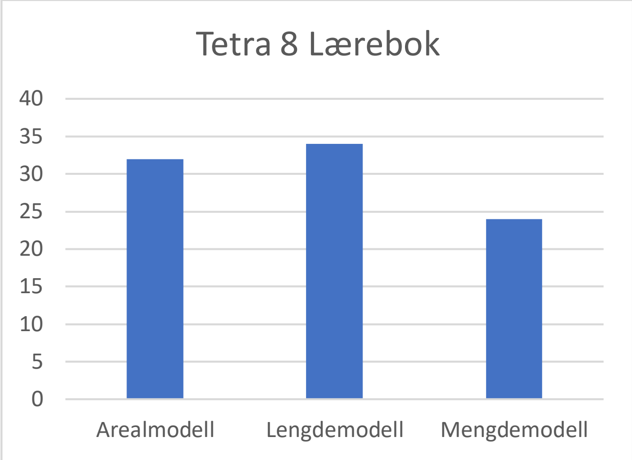

*Figur 17. Oppgavefordeling av brøkaspekt og modeller i Faktor elevnettsted*

### 4.1.2 Tetra 8

Tetra 8 har størst antall tekstoppgaver av samtlige lærebøker som er analysert i denne studien, og denne læreboken viser i tillegg andre tendenser enn de to foregående. For det første skiller læreboken seg fra de andre ved at det er en overvekt av aspektet tallstørrelse. Denne overvekten tilsvarer 34% av oppgavene i Tetra. For det andre er flere aspekter forholdsvis godt representert. Aspekter som tidligere ikke fikk stort spillerom, dukker oftere opp i oppgaver i denne læreboka. Cirka 29% av oppgavene omhandler brøk som operator. Nesten 27% av oppgavene dreier seg om brøk som del av en hel. Vi ser derfor at prosentfordelingen er jevn utover de nevnte aspektene. I tillegg dukker aspektet forhold kun opp i Tetra, og denne er registrert 10 av 97 oppgaver, altså ca. 10%. Ingen av oppgavene ble registrert innunder aspektet brøk som kvotient.

I tillegg er det registrert en stabil bruk av både areal-, lengde- og mengdemodell, hvor lengdemodellen oftest er representert. Dette skiller seg nok en gang fra læremiddelet Faktor.



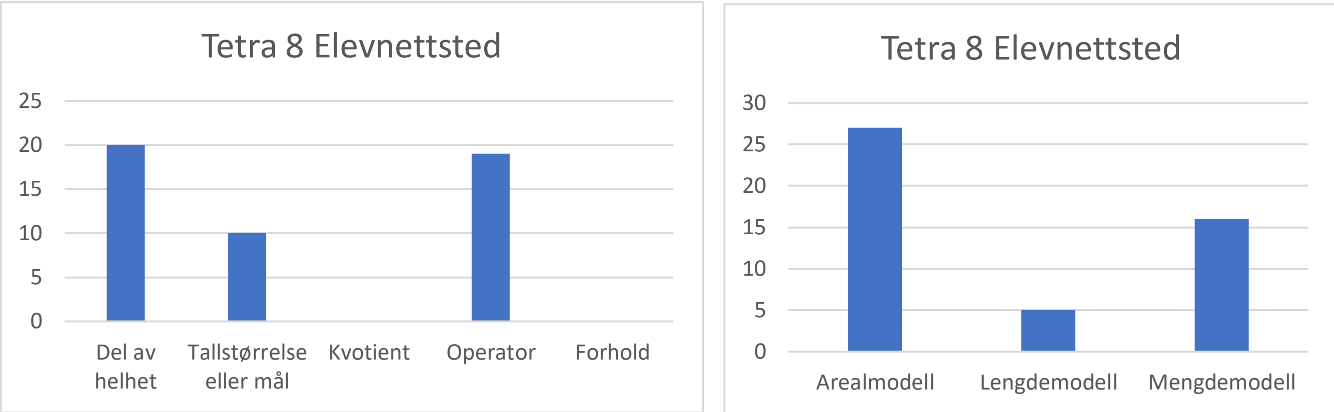




*Figur 18. Oppgavefordeling av brøkaspekt og modeller i Tetra*

Tetra 8 sitt elevnettsted samsvarer ikke med læreboka. Det er en snau overvekt av aspektet brøk som del av en helhet, men en stor andel av oppgavene fremstiller også brøk som operator. Brøk som tallstørrelse har en nedgang på 14 prosentpoeng, og det er desidert færrest oppgaver som uttrykker brøk som tallstørrelse på Tetras elevnettsted av de tre aspektene som er representert. Verken brøk som kvotient eller forhold dukker opp. Antall oppgaver er betydelig større i læreboka, men de 49 tilfellene vi finner på Tetras elevnettsted gir et desidert større omfang av tekstoppgaver sammenlignet med de to andre elevnettstedene.

I motsetning til læreboken er det heller ikke en jevn fordeling av modellbruken på elevnettstedet. Lengdemodellen er utvilsomt minst representert, og arealmodellen er derimot dominerende. Mengdemodellen dukker til gjengjeld opp i 16 av 48 tilfeller, som tilsvarer ca. 34%.

Med andre ord har både aspektet og modellen av brøk som oftest dukker opp i læreboka en betydelig nedgang i Tetra sitt elevnettsted. Brøk som tallstørrelse og lengdemodell presenteres ofte i læreboka, men bare sporadisk på elevnettstedet. Om vi derfor kun leser av tabellene, kan læreboka virke mer allsidig og grundigere i innføringen av brøkbegrepet enn hva nettstedet er. Det gjenstår å se hva MEG-analysen tilføyer i analysen av oppgavene.

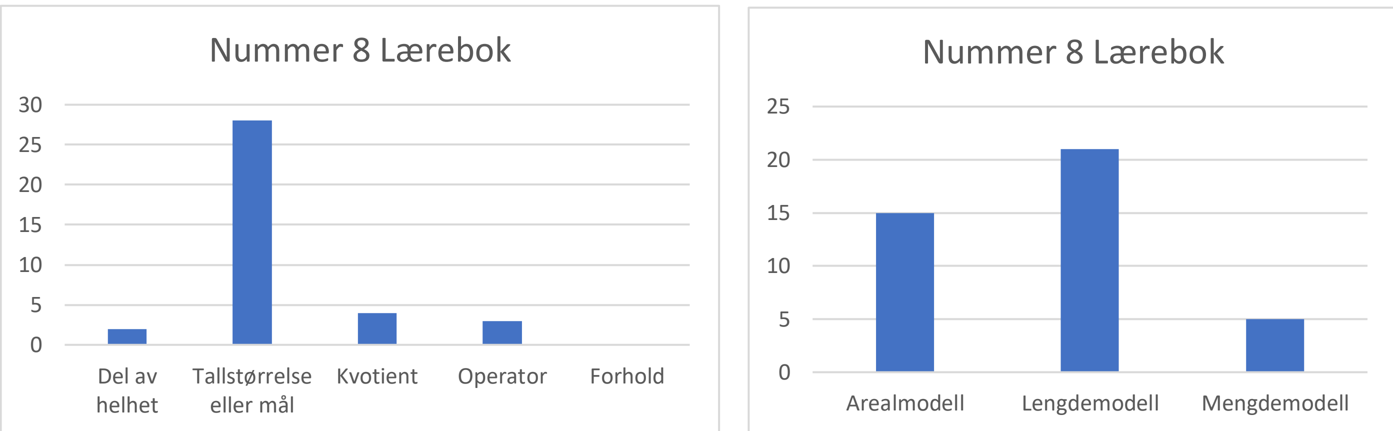



*Figur 19. Oppgavefordeling av brøkaspekt og modeller i Tetra elevnettsted*

### 4.1.3 Nummer 8

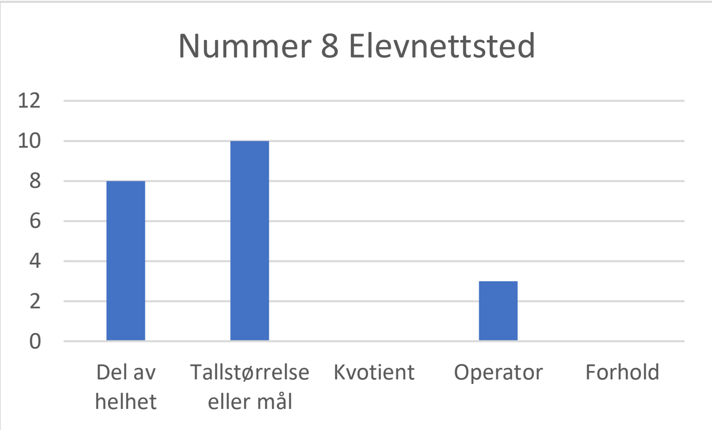
Umiddelbart oppfattes Nummer som ganske annerledes enn de to foregående lærebøkene. Boken har et betydningsfullt antall oppgaver som dreier seg om brøk som tallstørrelse eller mål. De fire gjenværende aspektene av brøk blir sjeldent, eller aldri, presentert for elevene. På den andre siden er dette den eneste læreboken i analysen som inneholder oppgaver om brøk som kvotient.

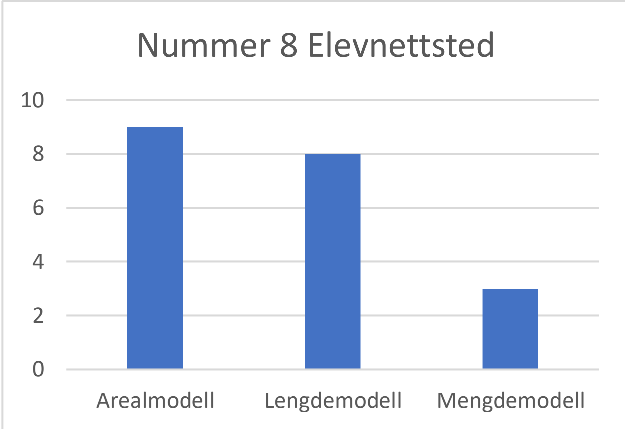
Det er større variasjon i modellbruken. Oppgaver forklart gjennom en lengdemodell er mest vanlig i denne boken, og dette antallet tilsvarer 21 av 41 oppgaver, ca. 51%. Dernest kommer arealmodellen på ca. 37%, og 12% av oppgavene forklares gjennom mengdemodell. Det er derfor en betydelig mer jevn fordeling av modeller av brøk, enn aspekter.




*Figur 20. Oppgavefordeling av brøkaspekt og modeller i Nummer*

Elevnettstedet til Nummer 8 komplementerer læreboken i den betydning at elevene får noe mer erfaring med brøk som del av en helhet. Oppgaveomfanget til elevnettstedet er begrenset, og det samme gjelder derfor også mulighetene til å utfordre seg innenfor en annen forståelse av brøk. Ingen oppgaver demonstrerer brøk som kvotient eller forhold. Til gjengjeld er det en større balanse mellom arealmodell og lengdemodell. Mengdemodell dukker opp i tre av oppgavene.




*Figur 21. Oppgavefordeling av brøkaspekt og modeller i Nummer elevnettsted*

### 4.1.4 Oppsummering i bruk av aspekt og modell av brøk i læremidlene

| | Del av en helhet | Tallstørrelse eller mål | Kvotient | Operator | Forhold |
|---|---|---|---|---|---|
| Faktor | 55,6 % | 38,1 % | 0,0 % | 6,3 % | 0,0 % |
| Faktor elevnettsted | 25,0 % | 16,7 % | 0,0 % | 58,3 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel (Faktor)** | 50,6 % | 34,7 % | 0,0 % | 14,7 % | 0,0 % |
| Tetra | 26,8 % | 34,0 % | 0,0 % | 28,9 % | 10,3 % |
| Tetra elevnettsted | 40,8 % | 20,4 % | 0,0 % | 38,8 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel (Tetra)** | 31,4 % | 29,4 % | 0,0 % | 32,3 % | 6,9 % |
| Nummer | 5,4 % | 75,7 % | 10,8 % | 8,1 % | 0,0 % |
| Nummer elevnettsted | 38,1 % | 47,6 % | 0,0 % | 14,3 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel (Nummer)** | 17,3 % | 65,5 % | 6,9 % | 10,3 % | 0,0 % |

*Tabell 22. Oppsummerende prosentfordeling mellom brøkaspektene i læremidlene*

Både i Tetra, Nummer og Nummers elevnettsted er brøk som tallstørrelse mest dominerende.

Tetras elevnettsted har på samme måte som den tilhørende boken, en god fordeling mellom aspektet del av en helhet, tallstørrelse og operator. Den skjeve fordelingen vi finner i Nummer, balanseres mer ut i deres elevnettsted, og totalt sett får elevene erfaring med alle aspektene, utenom forhold. Dette er en kontrast til Faktor, hvor boken har en klar overvekt av brøk som del av en helhet. Inne på elevnettstedet til Faktor møter elevene derimot et flertall av oppgaver som omhandler brøk som operator. Totalt sett tar Faktor for seg brøkaspektene del av en helhet, tallstørrelse og operator.

| | Arealmodell | Lengdemodell | Mengdemodell |
|---|---|---|---|
| Faktor | 55,6 % | 28,6 % | 15,8 % |
| Faktor elevnettsted | 46,1 % | 30,8 % | 23,1 % |
| **Total prosentandel (Faktor)** | 53,9 % | 28,9 % | 17,1 % |
| Tetra | 35,6 % | 37,8 % | 26,7 % |
| Tetra elevnettsted | 56,3 % | 10,4 % | 33,3 % |
| **Total prosentandel (Tetra)** | 42,8 % | 28,2 % | 29,0 % |
| Nummer | 36,6 % | 51,2 % | 12,2 % |
| Nummer elevnettsted | 45,0 % | 40,0 % | 15,0 % |
| **Total prosentandel (Nummer)** | 39,3 % | 47,6 % | 13,1 % |

*Tabell 23. Oppsummerende prosentfordeling mellom brøkmodellene i læremidlene*

Arealmodellen er mest brukt både i Faktors lærebok og Faktors elevnettsted. Dette gjelder også for Tetra- og Nummer sitt elevnettsted. Nummer- og Tetras lærebok bruker mest lengdemodellen for brøk, men Tetra har derimot en jevnere fordeling mellom de tre modellene, sammenliknet med Nummer. Den totale prosentandelen til alle læremidlene viser hovedsakelig at elevene får erfaring med alle tre modeller av brøk.

## 4.2 Kategorisering av kognitiv kompetanse (MEG)

Som beskrevet tidligere har jeg også kategorisert kognitiv kompetanse i rammeverket utviklet gjennom MEG-studien (Turner et al., 2013). Jeg har altså kategorisert alle oppgavene i nivå 0-3 i de seks kategoriene *Communication*, *Problem solving*, *Mathematising*, *Representation*, *Symbols and formalism* og *Reasoning and argumentation*.

### 4.2.1 Sammenlikning av prosentandel i nivåbeskrivelsene

Tabellene nedenfor presenterer funnene fra koding i disse kategoriene for alle tre læremidler og deres tilhørende elevnettsted. Tabellene gir en oversikt over andel oppgaver på hvert nivå innen hver kognitiv kategori. En felles prosentsum er regnet ut for å gi en gjengivelse av begge læremidlene samlet.

## Communication

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Faktor | 89,0 % | 11,0 % | 0,0 % | 0,0 % |
| Faktor elevnettsted | 91,7 % | 8,3 % | 0,0 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 89,3 % | 10,7 % | 0,0 % | 0,0 % |
| Tetra | 66,0 % | 25,5 % | 8,5 % | 0,0 % |
| Tetra elevnettsted | 56,1 % | 29,3 % | 14,6 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 62,7 % | 26,8 % | 10,5 % | 0,0 % |
| Nummer | 83,8 % | 8,1 % | 8,1 % | 0,0 % |
| Nummer elevnettsted | 57,2 % | 19,0 % | 23,8 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 74,1 % | 12,0 % | 13,8 % | 0,0 % |

*Tabell 24. Prosentfordeling mellom nivåbeskrivelsene i Communication*

Felles for alle læremidlene er at de bruker et enkelt språk i oppgavetekstene. Dette leser vi av tabellen ovenfor hvor det er et flertall oppgaver kodet til nivå 0. Tetra og Nummer har oppgavetekster som kodes fra nivå 0 til 2. Elevnettstedet til Nummer har derimot størst prosentandel av oppgavene kodet til nivå 2, men dette kan begrunnes i at et lite antall tekstoppgaver gir store utslag i prosentandelene.

## Problem solving

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Faktor | 39,7 % | 58,7 % | 1,6 % | 0,0 % |
| Faktor elevnettsted | 66,7 % | 25,0 % | 8,3 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 44,0 % | 53,3 % | 2,7 % | 0,0 % |
| Tetra | 26,6 % | 62,8 % | 10,6 % | 0,0 % |
| Tetra elevnettsted | 31,3 % | 52,1 % | 16,6 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 28,2 % | 59,2 % | 12,6 % | 0,0 % |
| Nummer | 64,9 % | 32,4 % | 2,7 % | 0,0 % |
| Nummer elevnettsted | 47,6 % | 47,6 % | 4,8 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 58,6 % | 37,9 % | 3,5 % | 0,0 % |

*Tabell 25. Prosentfordeling mellom nivåbeskrivelsene i Problem solving*

Det er en større prosentfordeling mellom nivåene i det som omhandler det strategiske aspektet i løsningen av en oppgave. Et flertall av oppgavene ligger på nivå 1, og denne overvekten observeres tydeligere i den totale prosentandelen hos både Faktor og Tetra. Nummers lærebok skiller seg fra dette ved at et større antall oppgaver er blitt kodet til nivå 0, men prosentandelen på nivå 1 er likevel relativt stor. Det finnes flest oppgaver i Tetra som krever at eleven utarbeider en flertrinnsstrategi, og dette leser vi av nivå 2 som er 12,6%.

## Mathematising

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Faktor | 34,9 % | 65,1 % | 0,0 % | 0,0 % |
| Faktor elevnettsted | 58,3 % | 41,7 % | 0,0 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 38,7 % | 61,3 % | 0,0 % | 0,0 % |
| Tetra | 40,5 % | 57,4 % | 2,1 % | 0,0 % |
| Tetra elevnettsted | 20,8 % | 79,2 % | 0,0 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 33,8 % | 64,8 % | 1,4 % | 0,0 % |
| Nummer | 64,9 % | 35,1 % | 0,0 % | 0,0 % |
| Nummer elevnettsted | 52,4 % | 42,8 % | 4,8 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 60,4 % | 37,9 % | 1,7 % | 0,0 % |

*Tabell 26. Prosentfordeling mellom nivåbeskrivelsene i Mathematising*

Kompetansen som beskriver oversettelsesarbeidet mellom hverdagslig oppfatning og matematikken, blir i MEG-rammeverket kalt *Mathematising*. Komplisert oversettelsesarbeid som rangeres til nivå 2 eller 3 er dårlig representert i alle læremidler. Hovedvekten av oppgavene er kodet til enten nivå 0 eller 1 i denne kategorien. Faktor og Tetra har en overvekt av oppgavene kodet til nivå 1, sammenliknet med Nummer. Men til gjengjeld har Nummer en større prosentandel kodet til nivå 2, hvorav ingen av oppgavene i Faktor er kodet til nivå 2.

## Representation

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Faktor | 65,1 % | 30,1 % | 4,8 % | 0,0 % |
| Faktor elevnettsted | 75,0 % | 25,0 % | 0,0 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 66,7 % | 29,3 % | 4,0 % | 0,0 % |
| Tetra | 86,2 % | 13,8 % | 0,0 % | 0,0 % |
| Tetra elevnettsted | 77,1 % | 22,9 % | 0,0 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 83,1 % | 16,9 % | 0,0 % | 0,0 % |
| Nummer | 59,5 % | 24,3 % | 16,2 % | 0,0 % |
| Nummer elevnettsted | 47,6 % | 47,6 % | 4,8 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 55,1 % | 32,8 % | 12,1 % | 0,0 % |

*Tabell 27. Prosentfordeling mellom nivåbeskrivelsene i Representation*

Det er generelt få brøkoppgaver som presenteres gjennom tabeller, grafer eller andre matematiske fremstillinger, som mulig oftere dukker opp i sammenheng med temaet Funksjoner. Nummer er det læremiddelet som oftest presenterer oppgavene i brøk på nivå 1, sammenliknet med de to øvrige. Nivå 1 innebærer blant annet at elevene må tolke, utarbeide eller dekode ulike representasjoner av brøk, eller selv konstruere en enkel representasjon. Dette skjer oftere i både Nummer og Faktor, sammenliknet med Tetra. Selv nivå 2 er godt representert i Nummer innenfor dette aspektet, hvor hele 16% av oppgavene i læreboken er kodet til dette nivået. Det er også en god andel oppgaver kodet til nivå 2 på elevnettstedet, og den totale prosentandelen er stor på nivå 2 i Nummer. Dette står i kontrast til Faktor og Tetra, hvor få eller ingen oppgaver er kodet til nivå 2.

### Symbols and formalism

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Faktor | 46,0 % | 54,0 % | 0,0 % | 0,0 % |
| Faktor elevnettsted | 16,7 % | 75,0 % | 8,3 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 42,7 % | 56,0 % | 1,3 % | 0,0 % |
| Tetra | 44,7 % | 47,8 % | 7,5 % | 0,0 % |
| Tetra elevnettsted | 28,6 % | 58,3 % | 13,1 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 40,1 % | 51,4 % | 8,5 % | 0,0 % |
| Nummer | 27,0 % | 73,0 % | 0,0 % | 0,0 % |
| Nummer elevnettsted | 19,1 % | 71,4 % | 9,5 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 24,1 % | 72,4 % | 3,5 % | 0,0 % |

*Tabell 28. Prosentfordeling mellom nivåbeskrivelsene i Symbols and formalism*

Vi ser tydelig at det er nivå 0 og 1 som dominerer, og i dette kompetanseområdet er det hovedsakelig en overvekt av nivå 1 i alle læremidlene. Samtlige læremidler krever at eleven tar i bruk flere matematiske prinsipper og komponenter for å løse oppgavene, men Tetra har den største fordelingen her. Dette leser vi av den totale prosentandelen som ligger på 8,5.

### Reasoning and argumentation

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Faktor | 68,3 % | 31,7 % | 0,0 % | 0,0 % |
| Faktor elevnettsted | 25,1 % | 66,6 % | 8,3 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 61,4 % | 37,3 % | 1,3 % | 0,0 % |
| Tetra | 25,5 % | 64,9 % | 9,5 % | 0,0 % |
| Tetra elevnettsted | 4,2 % | 87,5 % | 8,3 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 18,3 % | 72,5 % | 9,2 % | 0,0 % |
| Nummer | 18,9 % | 78,4 % | 2,7 % | 0,0 % |
| Nummer elevnettsted | 14,2 % | 66,7 % | 19,1 % | 0,0 % |
| **Total prosentandel** | 17,2 % | 74,1 % | 8,7 % | 0,0 % |

*Tabell 29. Prosentfordeling mellom nivåbeskrivelsene i Reasoning and argumentation*

Et klart flertall av oppgavene i Tetra og Nummer er kodet til nivå 1. Ingen av læremidlene har et stort antall oppgaver som krever at elevene trekker slutninger fra flere sider av oppgaven. Prosentandelen på nivå 2 i Tetra og Nummer er henholdsvis 9,2% og 8,7% i kompetanseområdet *Reasoning and argumentation*. I Faktor er prosentandelen på nivå 1 relativt liten sammenliknet med prosentandelen på nivå 0.

### 4.2.2 Sammenlikning av læremidlene gjennom total MEG-skår og gjennomsnittlig MEG-verdi

I innholdsanalyse ved bruk av MEG-rammeverket kan oppgavenes vanskelighetsgrad avsløres. Rammeverket gjør det enklere å forutsi hvilke matematikkoppgaver som kan oppleves utfordrende for elever. Tidligere har jeg kategorisert hver oppgave etter kognitiv kompetanse. Resultatene av disse har jeg senere summert for å få et fullstendig bilde av hele oppgaven.

I mitt videre kodingsarbeid har jeg derfor notert total MEG-skår av hver oppgave for å få en indikasjon av den totale vanskelighetsgraden av oppgaven. Det vil si at verdien av hver rad summeres. Som presentert tidligere har ingen av oppgavenes nivåbeskrivelse blitt kodet til nivå 3. Denne type kodingsarbeid mener jeg gir et tydeligere bilde og oversikt over omfanget av oppgaver på ulike nivå. Det blir derfor lettere å få et inntrykk av kapittelets oppbygning – altså oppgaveinnhold og progresjon. Nedenfor beskrives verdien av kompetansebeskrivelsene summert.

| Verdi av kompetansebeskrivelsene summert | Definisjon |
|---|---|
| 0-2 | Lav |
| 3-5 | Middels |
| 6-9 | Høy |

*Tabell 30. Beskrivelse av kompetansenivåene summert*

I figuren ovenfor har jeg delt den totale MEG-skåren i tre forskjellige grupper. Dette er for å umiddelbart kunne skille mellom vanskelighetsgraden til enkeltoppgaver. Min hypotese antyder at dersom en oppgave får totalt en verdi mellom 0-2 beskrives den som mindre kognitivt utfordrende, men om oppgaven summert gir en total MEG-skår fra 6-9 kan oppgaven oppleves utfordrende for elevene. Dette er kun en hypotese av oppgavenes opplevde utfordringsnivå for elevene. Jeg har ikke hensikt om å finne ut om dette stemmer, og det blir derfor ikke testet ut med elever. Forskerne som utviklet MEG-rammeverket poengterer likevel at 70% av variansen i hvor vanskelig oppgavene viser seg å være, kan forklares ved bruk av dette rammeverket (Turner et al., 2013). I mitt datamateriale er det ingen oppgaver som er blitt summert til en verdi høyere enn 9. I dette rammeverket kan derimot en oppgave få totalt 18, og dette problematiseres i kapittel 6. Nedenfor presenteres mitt videre kodingsarbeid og analyse av hvert læremiddel.

For å kunne si noe om hvorvidt det er forskjell på den kognitive vanskelighetsgraden innen oppgavene som finnes i de ulike læremidlene, har jeg funnet gjennomsnittsnivået innenfor hver kognitiv kategori. Dette er en litt annen måte å presentere tallene fra kodingen i nivåbeskrivelsene, tidligere vist som prosentandeler i delkapittel 4.2.1. Resultatene av gjennomsnittsmålingen av hver kognitiv kategori, vises nedenfor.

| **Gjennomsnittskår** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Communication | Problem solving | Mathematising | Representation | Symbols and formalism | Reasoning and argument |
| Faktor | 0,11 | 0,62 | 0,65 | 0,40 | 0,54 | 0,32 |
| Faktor elevnettsted | 0,08 | 0,42 | 0,50 | 0,25 | 0,92 | 0,83 |
| Tetra | 0,43 | 0,84 | 0,62 | 0,14 | 0,63 | 0,84 |
| Tetra elevnettsted | 0,54 | 0,85 | 0,79 | 0,23 | 0,79 | 1,04 |
| Nummer | 0,24 | 0,38 | 0,35 | 0,57 | 0,76 | 0,84 |
| Nummer elevnettsted | 0,67 | 0,57 | 0,52 | 0,52 | 0,90 | 1,10 |

*Tabell 31. Gjennomsnittlig vanskelighetsgrad i hver kognitiv kategori*

Figuren ovenfor viser gjennomsnittlig vanskelighetsgrad innen hver kognitiv kategori for oppgavene i hvert læremiddel. Det er variasjon i den gjennomsnittlige vanskelighetsgraden i oppgavene mellom læremidlene. Nedenfor presenteres hver lærebok ut ifra total MEG-skår og gjennomsnittlig MEG-verdi.

#### *4.2.2.1 Resultater Faktor 8*

I beskrivelsen av boka oppsummeres den til å inneholde en rolig progresjon med kortfattet tekst og enkelt språk, slik at den skal passe best mulig for alle elever. Det stemmer at boka inneholder kortfattet tekst. All informasjon i tekstoppgavene er direkte relevant til oppgaven, og et klart flertall av oppgavene er satt til nivå 0. Av tabellen leser vi at *Communication* har en gjennomsnittskår på 0,11. Boka har flest bilder av de tre analyserte, men svært få av illustrasjonene inneholder figurer eller tabeller som skal leses og tolkes av elevene, derav gjennomsnittverdi 0,4 i *Representation*.

Vi kan anta at totalt fjorten oppgaver i kapittelet kan gi elevene litt større utfordring enn de resterende førtini tekstoppgavene som inneholder en overvekt av verdi 0 i nivåbeskrivelsene. Med andre ord vil ikke Faktor 8 i utgangspunktet oppfattes som utfordrende for elevene.

Hovedtyngden i innholdet av oppgavene ligger på det strategiske aspektet, ettersom aspektets gjennomsnittskår er høyest her og ligger på 0,62. Det matematiske aspektet, altså utregningen, kommer også godt til uttrykk, siden den gjennomsnittlige vanskelighetsgraden ligger på 0,54.

Gjennom mitt videre kodingsarbeid avsløres vanskelighetsgraden til oppgavene, og dermed blir oppbygningen av kapittelet dokumentert. I Faktor er de tretten første oppgavene dokumentert til en total MEG-skår på 1. Utover i kapittelet finner vi tjueto oppgaver kodet til total MEG-skår 2, og vi dokumenterer en svak økning i vanskelighetsgraden. Avslutningsvis ligger ni av de elleve siste oppgavene på et nivå summert til 3. Dette avslutter kapittelet. Derfor stemmer det at Faktor har en rolig progresjon i sitt brøkkapittel.

#### 4.2.2.2 Resultater Faktor elevnettsted

Faktors elevnettsted bygger på nivådifferensiering. Her kan elevene velge mellom Kategori 1, 2 eller 3. Kategori 1 kan minne om de tretten første oppgavene i Faktorboka som ligger på 1 i total MEG-skår. Neste kategori har tre litt varierte tekstoppgaver. Den største variasjonen finner vi likevel i Kategori 3 som har en total MEG-skår fra 1-6. Her finner vi læremiddelets første oppgave kodet til nivå 2. Det er dessuten flere oppgaver analysert innenfor Kategori 3, enn antall tekstoppgaver i Kategori 1. Det ser ut til at jo høyre nivå, jo flere oppgaver er satt i kontekst.

Elevnettstedet ligger stort sett på samme utfordringsnivå som boka, men tilføyer noe i Kategori 3. De elevene som ikke blir utfordret i læreboka, kan ha mulighet til å bryne seg på noen oppgaver i elevnettstedet ettersom kategorien *Symbols and formalism* har en gjennomsnittskår på 0,92. Dessuten har kompetansebeskrivelsen *Reasoning and argumentation* en gjennomsnittskår på 0,83. Faktors elevnettsted har den laveste gjennomsnittskåren i *Communication* sammenliknet med de andre læremidlene, og verdien viser 0,08.

Både bok og elevnettsted inneholder totalt 75 tekstoppgaver. Læremidlene kan derfor identifiseres ved et begrenset antall oppgaver som er lite utfordrende. Det skal derimot nevnes at Faktor ikke har færrest antall oppgaver av de analyserte læremidlene.

#### 4.2.2.3 Resultater Tetra 8

Oppbygningen i Tetra 8 sitt kapittel starter forholdsvis rolig med de trettisyv første oppgavene, hvor de fleste oppgavene ligger på en total MEG-skår summert til 0-2 med unntak av én oppgave. De neste tretti oppgavene ligger på 3-4, men unntak av fire enkeltoppgaver. Ytterligere tretti oppgaver har total MEG-skår summert til å ligge mellom 2-9. Oppgavene viser derfor stor varians i utfordringsnivå. Vanskelighetsgraden øker, men denne økningen er ikke jevn. Det er derfor ingen klar progresjon i boken, men heller en jevn fordeling av oppgaver på ulike nivå.

Tetra har det største omfanget av oppgaver. Læreboken inneholder ti oppgaver som har en total MEG-skår mellom 6-9. Det er fortsatt ingen av kategoriene som er kodet til nivå 3. Derimot er det mange oppgaver i læreboken som dekker nivå 1 innunder alle kompetansebeskrivelsene, og vi finner også flere forekomster av nivå 2 på samtlige nivåbeskrivelser utenom *Representation* som har en gjennomsnittskår på 0,14. I kompetansebeskrivelsen til *Problem solving* registreres en gjennomsnittskår på 0,84. Den samme skåren vises innunder *Reasoning and argumentation*.

Oppsummert kan vi si at oppgavene i Tetra er mange og varierte. Tetra bruker forholdsvis et enkelt språk, ettersom gjennomsnittskåren i *Communication* er 0,43. Det er få bilder i forhold til oppgaver, og boken kan dermed få et overveldende uttrykk for noen elever. Analysen viser at læreboken har noe å tilby alle elever.

#### 4.2.2.4 Resultater Tetra elevnettsted

Tetras elevnettsted er det største elevnettstedet i analysen. I likhet med boken finner vi oppgaver inndelt i nivåer presentert som blå-, grønne- og røde oppgaver, hvor det grønne kurset inngår som en del av grunnkurset i læreboken. Selv det laveste utfordringsnivået virker ikke for lett. Her finner vi koding av nivåbeskrivelsene som gir total MEG-skår fra 1-3. De grønne oppgavene får en total MEG-skår på 2-5, og de røde oppgavene ligger hovedsakelig på verdier fra 4-9. Vi ser dermed at det er tydelig nivådifferensiering, hvor de røde oppgavene er klart mer krevende enn de blå. Vi legger også merke til at oppgavenes totale MEG-skår overlapper hverandre, siden en total MEG-skår på 3 finnes på både de blå-, grønne- og røde oppgavene.

Gjennomsnittsskåren i *Communication* på 0,54 viser at mange oppgavetekster er relativt korte hvor all informasjon er direkte knyttet til løsningen av oppgaven. *Symbols and formalism* har en gjennomsnittskår på 0,79, men vanskelighetsgraden til *Reasoning and argumentation* er ytterligere høyere og har en gjennomsnittverdi på 1,04. Det strategiske aspektet har en skår på 0,85, og vi leser av tabellen at flere områder av oppgavene på elevnettstedet kan by på utfordringer.

#### *4.2.2.5 Resultater Nummer 8*

I beskrivelsen av læreboken står det at boken inneholder mange varierte og differensierte oppgaver. I delkapittelet om brøk er det få oppgaver som er satt i kontekst, eller i det minste kan beskrives som tekstoppgaver. På samme måte som Faktor bruker også Nummer et enkelt språk, og dette gir utslag i kompetansebeskrivelsen *Communication* hvor gjennomsnittskåren ligger på 0,24. Derimot er *Representation* godt presentert i denne læreboken, og verdien er kodet til 0,57. Vi finner ikke høyere gjennomsnittskår i denne kompetansebeskrivelsen i noen av de andre læremidlene. Mange oppgaver krever at eleven gjennomfører enkle utregninger, men en overvekt mot verdi 1 tilsvarer at eleven også må utføre *sustained* utregninger av brøk, og dette leser vi av gjennomsnittsverdien på 0,76. *Reasoning and argumentation* har en tilsvarende høy verdi som ligger på 0,84.

Vi finner svært få nivåbeskrivelser kodet til nivå 2 innenfor *Problem solving, Mathematising, Symbols and formalism* og *Reasoning and argumentation*.

Majoriteten av oppgavene ligger på en total MEG-skår 2-4. Den tildelte totale MEG-skåren til hver oppgave viser ikke en jevn økning av vanskelighetsgrad i løpet av Nummers brøkkapittel. Med jevn økning mener jeg at de første oppgavene elevene møter på har en total MEG-skår på 0-1, og utover i kapittelet ser vi økning til 2-3, og senere oppgaver kodet til 3-4. Det er derfor ingen klar progresjon eller rekkefølge på utfordringsnivået til oppgavene.

#### *4.2.2.6 Resultater Nummer elevnettsted*

Inne på elevnettestedet til Nummer fordeles oppgavene innunder «mer øving» og «flere utfordringer». Språket er generelt enkelt, men oppgavetekstene blir mer omfattende i «flere utfordringer». Vi leser av en gjennomsnittskår i *Communication* på 0,67. I samme læremiddel finner vi også flere oppgaver som utfordrer kompetansen *Representation*, og her ligger gjennomsnittskåren på 0,52. Tyngden i alle oppgavene på elevnettstedet til Nummer ligger hovedsakelig i *Symbols and formalism* og *Reasoning and argumentation*, henholdsvis gjennomsnittskår på 0,90 og 1,10. Men i «flere utfordringer» krever det at elevene selv planlegger fremgangsmåten til løsning av oppgaven, altså er gjennomsnittsnivået til *Problem solving* 0,57.

Verdiene kodet i kompetansebeskrivelsene gir generelt en total MEG-skår på 3-4 for oppgavene i øvingsoppgavene. Utfordringsoppgavene ligger derimot på alt fra 1-6, men overvekt av verdi 5. Felles for begge læremidlene i Nummer er at det er totalt få oppgaver, men derimot større variasjon i vanskelighetsgraden til oppgavene.

### *4.2.3 Gjennomsnittlig total MEG-skår i aspekter av brøk*

Videre i analysearbeidet har jeg regnet ut gjennomsnittlig total MEG-skår både for hvert læremiddel, men også alle læremidler under ett. Dette skal gi en indikasjon på vanskelighetsgraden til oppgavene kategorisert under ulike aspekter av brøk. Her ser vi at brøkoppgaver forbundet i brøk som operator eller forhold er rangert mer utfordrende enn for eksempel brøkoppgaver relatert til brøk som del av en helhet. Dette undersøkes nærmere i det femte kapittelet.

| Gjennomsnittlig total MEG-skår | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Del av helhet | Tallstørrelse eller r | Kvotient | Operator | Forhold |
| Faktor 8 | 2,31 | 3,00 | n/a | 3,50 | n/a |
| Faktor elevnettsted | 2,67 | 1,50 | n/a | 3,57 | n/a |
| Tetra 8 | 2,45 | 2,53 | n/a | 4,75 | 6,30 |
| Tetra elevnettsted | 2,95 | 4,60 | n/a | 5,16 | n/a |
| Nummer 8 | 2,00 | 3,29 | 2,50 | 3,67 | n/a |
| Nummer elevnettsted | 5,75 | 2,80 | n/a | 5,33 | n/a |

*Tabell 32. Gjennomsnittlig total MEG-skår i brøkaspektene i hvert læremiddel*

| Gjennomsnittlig total MEG-skår | |
|---|---|
| Del av en helhet | 2,71 |
| Tallstørrelse eller mål | 3,04 |
| Kvotient | 2,50 |
| Operator | 4,64 |
| Forhold | 6,30 |

*Tabell 33. Gjennomsnittlig total MEG-skår i brøkaspektene*

### 4.2.3 Gjennomsnittlig total MEG-skår i modell av brøk

Ved utregning av gjennomsnittlig total MEG-skår av brøkoppgaver representert ved mengdemodeller, viser den en høyere vanskelighetsgrad enn hva arealmodellen gjør. Imidlertid er det store forskjeller mellom læremidlene, og vi ser for eksempel at oppgavene med arealmodeller på Nummers elevnettsted er mer utfordrende enn hva oppgavene med arealmodeller er i Faktor.

**Gjennomsnittlig total MEG-skår**

| | Arealmodell | Lengdemodell | Mengdemodell |
|---|---|---|---|
| Faktor 8 | 2,14 | 2,71 | 3,10 |
| Faktor elevnettsted | 3,50 | 2,50 | 3,00 |
| Tetra 8 | 3,75 | 3,06 | 4,42 |
| Tetra elevnettsted | 3,48 | 5,60 | 5,24 |
| Nummer 8 | 2,86 | 3,67 | 3,60 |
| Nummer elevnettsted | 4,44 | 3,13 | 6,67 |

*Tabell 34. Gjennomsnittlig total MEG-skår i brøkmodellene i hvert læremiddel*

**Gjennomsnittlig total MEG-skår**

| | |
|---|---|
| Arealmodell | 3,17 |
| Lengdemodell | 3,26 |
| Mengdemodell | 4,39 |

*Tabell 35. Gjennomsnittlig total MEG-skår i brøkmodellene*

# 5.0 Diskusjon

I denne oppgaven ønsket jeg å undersøke hvordan elevene på åttende trinn blir presentert for brøkbegrepet gjennom tekstoppgaver i tre ulike lærebøker og deres tilhørende elevnettsted. Innledningsvis i dette kapittelet presenteres MEG-rammeverket og hvordan dette har fungert i denne studien. Dette er hensiktsmessig å legge frem før videre diskusjon, av den grunn at det kan gi et klarere innblikk og forståelse av analysen. Her legger jeg frem utfordringen ved at det ikke finnes et reelt nivå 0 i rammeverket, og at dette ville nyansert forskjellene mellom oppgavene ytterligere. Et funn i dette delkapittelet er at det ikke finnes oppgaver kodet til nivå 3 i MEG-rammeverket, og dette kan ha sammenheng med at nivå 3 ikke passer så godt med hva elevene skal lære i betydning av kompetansemålene i gjeldende læreplan. Dette gjør det mulig å etterspørre vanskeligere matematikkoppgaver, slik Reinhardtsen (2020) gjør. Jeg mener det er problematisk at det mangler oppgaver kodet til nivå 3 i mitt datamateriale, og dette støttes i begrepet dybdelæring som blir mer relevant fremover i forbindelse med Fagfornyelsen.

I delkapittel 5.3 legger jeg frem hvilke deler av matematikkompetansen som blir vektlagt i læremidlene. Noen funn her er blant annet at til tross for at liknende beskrivelser av *Problem solving* dukker opp i andre rammeverk, har ikke dette kompetanseområdet tilsvarende betydning i mitt datamateriale. Det samme gjelder for *Mathematising* hvor få eller ingen oppgaver er kodet til et høyere nivå i kompetanseområdet, til tross for bevist effekt i forskning og vektlegging i læreplanene.

Videre blir mine resultater belyst i sammenheng med teorikapittelet. I kapittel 5.4 ser vi hvilke brøkaspekt som ofte blir benyttet ifølge forskning, og hvilke brøkaspekt og modeller som benyttes i læremidlene i mitt datamateriale. Resultatene fra kategoriseringen i MEG-rammeverket brukes for å presentere utfordringsnivåene til de ulike brøkaspektene. Dersom analysen kun baserer seg på variasjon av brøkaspektene, kommer Tetras lærebok best ut. Det er for eksempel uheldig for elevenes brøkbegrep at store prosentandeler av oppgavene i Nummers lærebok dekker brøk som tallstørrelse, men Watanabe (2007) påpeker at i Japan vektlegges mål-aspektet i lærebøker på alle trinn der brøk behandles, og elevene her presterer godt på internasjonale undersøkelser. Et fremtredende funn her er at modellene har ulike utfordringsnivå.

Videre diskuterer jeg forholdet mellom lærebok og tilhørende elevnettsted i mitt datamateriale. Hittil svarer lærere at digitale læremidler blir brukt til hensikt for å skape variasjon i undervisningen (Nilssen, 2015). Dersom elevnettstedene inneholder gode oppgaver og fungerer som en berikelse til matematikkundervisningen, bør dette alene være årsak til å benytte det digitale læremiddelet. Et viktig funn i denne sammenhengen er at vi finner en større prosentandel av oppgavene kodet til nivå 2 i samtlige kompetanseområdene på elevnettstedene. I tillegg ser vi at Nummer elevnettsted jevner ut lærebokens overveldende fokus på brøk som tallstørrelse. Likevel fungerer ikke elevnettstedene som selvstendige og uavhengige læremidler, og dette kan årsaksforklares med at elevnettstedene i mitt datamateriale er utformet som en oppgavebank uten nyttig informasjon, eksempler, forklaringer eller god utnyttelse av digitale fordeler. Dette mener jeg medfører til en ytterligere overfladisk bruk av læremiddelet, presentert av Nilssen (2015). En kvalitetssikring og videre utvikling av disse digitale læremidlene vil være fordelaktig.

Avslutningsvis argumenterer jeg for kreative oppgaver, og hvilken forskjell dette virker inn på helhetsinntrykket av brøkkapitlene i læremidlene. Med dette introduseres ideer til videre forskning.

## 5.1 Rammeverkets svakhet

Fordi valg av rammeverk har vært med å forme studien, mener jeg det er hensiktsmessig å inkludere hvor godt dette har fungert. Rammeverket er brukt til å kunne forutsi vanskelighetsgraden til PISA-oppgaver. Det er derfor interessant å vurdere hvordan rammeverket har egnet seg til innholdsanalyse av lærebøker brukt på samme aldersgruppe.

Å kategorisere oppgaver etter aspekt og modeller av brøk har egnet seg godt til å trekke frem karakteristikker og kjennetegn ved de ulike brøkkapitlene. Dessuten har kodingen i MEG-rammeverket gitt meg muligheter til å si noe om hvilke aspekt ved brøk som var knyttet til oppgaver som var kognitivt utfordrende. Her fant jeg for eksempel at brøkoppgaver innenfor aspektet forhold er målt til den høyeste gjennomsnittlig total MEG-skår. Kategorisering av oppgaver har også vist seg godt egnet til å analysere hvordan brøkoppgavene utfordrer kognitivt, ikke bare hvilke regler og regneferdigheter elevene må kunne beherske. Jeg sitter igjen med oppfatningen om at viktige karakteristikker ved datamaterialet har kommet frem ved hjelp av analysen. At få oppgaver i Tetra tester elevenes evne til å tolke eller utforme tabeller, og at størsteparten av oppgavene hovedsakelig tester elevenes evne til *Problem solving*, altså strategivalg, er eksempler på slike karakteristikker.

Samsvaret i kodingen mellom den andre koderen og meg var god nok til at jeg vil si at tolkningen av kodeinstruksen var mulig å overføre til andre typer oppgaver som ikke er laget av PISA. Fokuset mitt i oppgaven har vært å forutse vanskelighetsgraden til oppgavene i brøkkapitlene i åttende trinn på ungdomsskolen, og dette korrelerer med MEG-studiens mål.

Min hensikt har ikke vært å dokumentere hvor vanskelig de analyserte oppgavene oppfattes for elevene, men jeg har likevel kunnet vurdere om mitt inntrykk av vanskelighetsgrad i læremidlene stemmer overens med det som kommer frem etter kategoriseringen. Inntrykket er at forskjellen i vanskelighetsgrad på oppgavene mellom de ulike læremidlene er enda større enn det som kom frem i mine undersøkelser. Årsaken til dette kan være at MEG-rammeverket ikke har et reelt nivå 0. Dette ble beskrevet nærmere i delkapittel 2.8 ved bruk av kompetanseområdet *Representation* som eksempel. Det laveste nivået betyr ikke at kompetansen er fraværende, og dette skaper problemer for nyansene i analysen. En stor mengde oppgaver er kodet til nivå 0 og 1, hvor flere oppgaver fikk samme total MEG-skår selvom en oppgave tydelig manglet flere kompetanseområder. Denne problematikken ville vært unngått dersom rammeverket brukte nivå 0-4, med et reelt nivå 0, for å kunne skille mellom nyansene i de ulike læremidlene ytterligere.

Det har ikke blitt registrert oppgaver på nivå 3 i denne analysen. Det er derfor naturlig å spørre seg om rammeverket fungerer slik som det skal. Er tekstoppgavene i mine valgte læremidler for enkle? Gjennom mailkorrespondanse med John Dossey, en av forfatterne av MEG-rammeverket, skriver han at deres tilnærming er egnet for min studie så lenge algoritmene i beskrivelsen av *Symbols and formalism* er tilpasset tema og nivå i matematikken. Elevene som gjennomfører PISA-oppgavene og elevene som går i åttende trinn er jevngamle. Aldersforskjellen er ikke større enn at kompetanseområdet *Symbols and formalism* kan bli værende slik den var konstruert. Dette er avgjørende for at kodingen innenfor kategorien *Symbols and formalism* er adekvat. I kodebeskrivelsen inngår brøk innunder nivå 1, og dette ville ikke vært tilfellet for en annen aldersgruppe. Jeg kan derfor med trygghet si at min analyse ga valide resultater ved bruk av samme rammeverk.

I læreplanen innen matematikkfaget ser vi at kompetansemål i brøk etter 10. trinn innebærer at eleven skal kunne «*samanlikne og rekne om mellom heile tal, desimaltal, brøkar, prosent, promille og tal på standardform, uttrykkje slike tal på varierte måtar og vurdere i kva for situasjonar ulike representasjonar er formålstenlege*» (Utdanningsdirektoratet, 2015, p. 40). Eleven skal også kunne *«rekne med brøk, utføre divisjon av brøkar og forenkle brøkuttrykk»* (Utdanningsdirektoratet, 2015, p. 40). Dette er et eksempel på at få, kort formulerte kompetansemål dekker et stort fagområde. Det er mulig at MEG-rammeverkets kompetansebeskrivelser i nivå 3 ikke samsvarer med de norske kompetansemålene på ungdomsskolen. Lærebokforfatterne utformer lærebøkene etter den gjeldende læreplanen, og min analyse viser at oppgavene som omfatter brøkregning ikke innebærer at eleven tolker komplekse forhold i matematikken som involverer flere ideer og forbindelser, slik kompetansebeskrivelsene på nivå 3 tilsier. For eksempel innebærer kompetanseområdet *Reasoning and argumentation* på nivå 3 at eleven skal: "*Synthesize and evaluate, use or create chains of reasoning to justify inferences or to make generalizations, drawing on and combining multiple elements of information in a sustained and directed way*" (Turner et al., 2013, p. 26). Kompetansebeskrivelsene på nivå 3 passer ikke med det elevene skal lære i brøk, ifølge norsk læreplan.

Det blir også beskrevet i LK06 at elevene skal kunne vurdere i hvilken situasjon ulike representasjoner er formålstjenlige. Eksempler på ulike representasjoner er symboler, tegninger, regnefortellinger, konkreter, diagrammer og tabeller. Det å forstå og bruke ulike representasjoner er en viktig del av matematikkompetansen, og Kilpatrick et al. (2001) påpekte at et viktig tegn på begrepsforståelse i matematikk er at eleven kan representere et matematisk objekt, for eksempel brøk, på ulike måter. Se figur 3. Dette vil forme elevenes forståelse av brøkbegrepet, men vi ser også her at i MEG-rammeverkets nivå 3 innenfor *Representation* krever at elevene *«Understand and use a non-standard representation that requires substantial decoding and interpretation; or devise a representation that captures the key aspects of a complex situation; or compare or evaluate representations»* (Turner et al., 2013, p. 28). Dette er nok et eksempel på at kompetansebeskrivelsen i nivå 3 er mer omfattende og detaljert enn hva kompetansemålet i LK06 tilsvarer. I tillegg leser vi av resultatene i denne studien at ingen av oppgavene er kodet til nivå 3. Dette gjelder også kompetanseområdet *Representation*, se tabell 27. Dette støtter min påstand om at elevenes brøkoppgaver på åttende trinn ikke utfordrer elevene nok. Det er mulig at læremidlene brukt i mitt datamateriale trapper opp vanskelighetsgraden i løpet av niende og tiende trinn, og det kunne for eksempel vært interessant å kategorisere repetisjonskapitlene i de tredje bøkene i læreverkene for å undersøke dette.

## 5.2 Elevene bør få vanskeligere matematikkoppgaver

Som presentert i resultatkapittelet er en stor mengde oppgaver i mitt datamateriale kodet til nivå 0 og 1 i MEG-rammeverket. Vi finner ingen oppgaver som er kodet til nivå 3, og dette mener jeg er problematisk. I følge Reinhardtsen (2020) bør elever få vanskeligere matematikkoppgaver. Nå gjelder det i større grad at elevene skal se de større sammenhengene og kunne uttrykke dette.

I brøkundervisning blir ofte spørsmål lagt til side, og standardalgoritme blir trukket frem. I løpet av et skoleår skal elevene gjennom et stort antall emner. Tanken bak spiralprinsippet at elevene skal lære litt det ene året, og bygge videre på dette grunnlaget neste år. I realiteten må elevene ofte lære alt på nytt neste gang emnet står på planen, fordi de ikke husker noe fra året før. Dette kan forklares med at læreplanmålene i tema brøk spesielt fokuserer på regning. Elevene kan dermed møte på problemer dersom de har glemt regelen eller om de ikke har forstått det de arbeider med (Solem et al., 2010). Karlsen (2014) sier at det kan være lett å lære regnereglene for brøk, men hvis man ikke knytter forståelse til ferdighetene, går reglene fort surr og elevene kan slite med å vurdere holdbarheten til et svar. I Kilpatrick et al. (2001) sin trådmodell inngår tråden *procedural fluency* som legger vekt på nettopp dette – at man må se sammenhengen mellom ferdighetene og prosedyrene for å få en dypere forståelse. Anghileri (2006) trekker frem samme problematikk og oppfordrer lærerne til å oppmuntre elevene til å tenke, se mønstre, forutsi resultater og oppdage sammenhenger. Med tanke på aspekter av brøk er det også viktig å se sammenhengene mellom aspektene for å kunne opparbeide seg en dypere forståelse av brøk (Kleve, 2014).

Samfunnet er i stadig endring og det stilles derfor andre krav til dagens elever som oppfordres til å være kreative, utforskende, kritiske og reflekterende. Departementet mener at tidligere læreplaner har vært for omfattende, ref. spiralprinsippet, og de nye læreplanene skal legge bedre til rette for dybdelæring. Dybdelæring har blitt et viktig begrep i Fagfornyelsen. Det å bruke tid på å arbeide med de utvalgte emnene, kan føre til at læreren åpner opp for flere utfordrende oppgaver. Det er ikke nødvendig at alle lærer alt, minst like viktig for utviklingen av kompetansen er det at elevene får mulighet til å gå dypere inn i enkelte områder. Dybdelæring er en form for læring der elevene relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer (Sandvik, 2016). Dybdelæring handler om å se sammenhengene. En dypere forståelse kan gjøre at man knytter nye mentale bilder til begrepet og man kan assosiere det med anvendelser man ikke var oppmerksom på tidligere. Det handler om å skape seg et komplett bilde, og dette krever mange og varierte erfaringer med begrepet. Innen brøk innebærer dette erfaringer med alle aspektene og modellene av brøk, og se de ulike sammenhengene brøk kan brukes i.

I læreplanen innunder Tall og algebra står det også at eleven skal kunne: *«analysere sammensatte problemstillingar, identifisere faste og variable storleikar, kople samansette problemstillingar til kjende løysingsmetodar ...»* (Utdanningsdirektoratet, 2015, p. 40). Dette samsvarer med uttalelsene til både Anghileri, Kleve og Reinhardtsen. I tillegg favner samtlige kompetanseområder i MEG-rammeverket om disse aktivitetene. Likevel er det få oppgaver i mitt datamateriale som er kodet til høye MEG-verdier i disse kompetanseområdene. Vanskelige oppgaver i matematikk er fraværende ifølge mine analyser, og dessuten etterspurt av Reinhardtsen.

## 5.3 Lavt utfordringsnivå på brøkoppgavene i mitt datamateriale

Gjennom kodingen i de seks kognitive kategoriene gitt ved rammeverket utviklet i MEG-studien, kan jeg si noe om i hvilken grad oppgavene i datamaterialet mitt er kognitivt utfordrende for elevene som tar i bruk disse læremidlene. Rammeverket er bygget på PISA sin beskrivelse av hva som kjennetegner mestring i matematikk (Turner et al., 2013), og til tross for at hjelpemiddelkompetansen er tatt ut av rammeverket til MEG, er det rimelig å argumentere for at oppgavene som er kognitivt utfordrende innen de seks kategoriene vil være oppgaver som utfordrer en helhetlig matematisk kompetanse. Niss (2006) påpeker hvordan mestring innen de åtte delkompetansene i KOM-studien, som PISA bygger sitt rammeverk på, er en forutsetning for god undervisningskompetanse i matematikk. Gilje et al. (2016) peker på hvordan læreboken er retningsgivende faktor i hva som presenteres for elevene i undervisningen. Således kan mine analyser antyde hvilke deler av matematikkompetansen som de valgte læremidlene vektlegger. Mine data sier derimot ikke noe om hvorvidt elevene har klart å løse oppgavene, og dermed heller ingen ting om elevenes faktiske matematikkompetanse. Jeg kan likevel si noe om hvilke deler av matematikkompetansen læremidlene vektlegger.

Jevnt over er det de lave nivåene, 0 og 1, som dominerer innen de seks kognitive kategoriene. Unnatakene for Tetras to læremidler samlet er kategoriene *Communication* og *Problem solving*, hvor en betydelig andel av oppgavene er kodet til nivå 2. Unntakene for Nummers to læremidler samlet er kategoriene *Communication* og *Representation*, som også har en del oppgaver kodet til nivå 2. Dette betyr at gjennomsnittsoppgaven, når jeg ser hele datamaterialet mitt samlet, krever i liten grad at elevene trenger å matematisere eller kunne avanserte matematiske teknikker, regler og kunnskap. Elevene må imidlertid ha gode resonnerings- og argumentasjonsferdigheter og/eller evne til å følge logiske resonnement, samt at eleven kan planlegge løsningsstrategier.

*Symbols and formalism* tilsvarer delkompetanser som vi finner igjen i de andre rammeverkene for kjennetegn på matematisk kompetanse beskrevet i teorikapittelet. I Blooms taksonomi er *Knowledge* den lavest rangerte kognitive prosessen av de seks hierarkisk ordnede kategoriene som beskriver de kognitive ferdighetene til en elev (Krathwohl, 2002). Fra KOM-prosjektet kjenner vi igjen *Symbol- og formalismekompetansen* som den tilsvarende kompetansen (Niss et al., 2002). MEG-studien bygger som kjent på KOM-prosjektet, så beskrivelsen av disse er svært samsvarende (Turner et al., 2013). Kilpatrick et al. (2001) sitt rammeverk har to tråder som til sammen gir en tilsvarende kompetanse, *Conceptual understanding* og *Procedural fluency*. *Conceptual understanding* kan forstås som relasjonell forståelse, og dette kan oppfattes som langt mer utfordrende enn hva kompetanseområdet *Symbols and formalism* tilsvarer. I den høyeste nivåbeskrivelsen til kompetansen skal elevene kunne kombinere et mangfold av regler og konvensjoner i matematikken, samt kunne arbeide fleksibelt med komplekse sammenhenger som involverer variabler. På bakgrunn av dette trekker jeg sammenhenger mellom *conceptual understanding* og kompetanseområdet *Symbols and formalism*. PISA bruker i sitt rammeverk navnet *symbol- og formelspråk* som er å kjenne igjen fra både Niss og MEG-studien (Nortvedt, 2013). Det som er felles for alle disse teoretiske rammeverkene er at *Symbols and formalism* er med i kompetansebeskrivelsen, men ikke alene definerer matematisk kompetanse. Den matematiske kompetansen er nemlig sammensatt av flere komponenter, blant annet evnen til å finne løsningsstrategier og bruke representasjoner. Kilpatrick et al. (2001) tydeliggjorde dette ved å bruke metaforen fem tett sammenvevde tråder, vist i figur 3.

Til tross for at liknende kompetansebeskrivelser av *Symbols and formalism* dukker opp i andre rammeverk på forskningsfeltet, blir ikke elevene tilsvarende utfordret innenfor denne delkompetansen ifølge mine analyser. Ettersom det er stort fokus på denne delkompetansen i flere av rammeverkene, er det å forvente at læremidlene også legger stor vekt på denne kompetansen. Når oppgaver øker i vanskelighetsgrad, er det naturlig å tenke seg at oppgavene krever flere regneoperasjoner og bruk av flere regler. Kodingen av *Symbols and formalism* viser også her at mesteparten av oppgavene favner nivå 0 og 1, hvor det er et flertall av oppgavene kodet til nivå 1. I Faktor og Nummer er 1,3% og 3,5% av oppgavene kodet til nivå 2. Derimot har Tetra en høyere prosentandel kodet til nivå 2, men denne prosentandelen er lav sammenliknet med andre delkompetanser kodet til nivå 2 i læreverket. Derfor kan vi i hovedsak konkludere med at *Symbols and formalism* blir lite vektlagt i læremidlene, også sammenliknet med de andre kompetanseområdene med unntak av *Mathematising*. Dette er altså oppgaver som tester regelkunnskap og regneferdigheter hos elevene. Dette tilsier altså at elevene ikke trenger å bruke flere regler eller en rekke regneoperasjoner ved løsning av mesteparten av oppgavene i mitt datamateriale.

Kompetanseområdet *Mathematising* er minst vektlagt. Dette gjelder både sammenliknet med de andre kompetanseområdene og blant læremidlene. I Faktor er ingen oppgaver kodet til nivå 2. I Nummer er kun 1,7% av oppgavene kodet til dette nivået, og en tilsvarende lav prosentandel på 1,4% er kodet til nivå 2 i Tetras læremidler. I teorikapittelet blir det lagt frem viktigheten og fordelene det bringer ved å benytte seg av oppgaver satt i kontekst (Rosenlund & Gulaker, 2018). Ofte er tekstoppgaver satt i en kontekst, og dette krever at elevene må oversette fra en hverdagslig setting til matematikken slik at oppgaven kan løses. I Læreplanen for Kunnskapsløftet står det beskrevet at formålet med matematikkfaget innebærer å bruke problemløsing og modellering til å analysere og omforme et problem til matematisk form, løse det og vurdere hvor gyldig løsningen er (Utdanningsdirektoratet, 2015). Ordlyden samsvarer godt med kompetanseområdet *Mathematising*, og det er derfor interessant at det finnes få eller ingen oppgaver på et høyere nivå i kompetanseområdet i de analyserte læremidlene, til tross for bevist effekt i forskning og vektlegging i læreplanene. Fagfornyelsen, som snart blir gjeldende læreplan, legger også indirekte frem viktigheten av tekstoppgaver. Dette vises gjennom vektleggingen av problemløsing i læreplanens kjerneelementer. Et annet kjerneelement, modellering og anvendelse, er også inne på kompetanseområdet *Mathematising*. Kjerneelementet handler om at eleven skal få innsikt i hvordan de skal bruke matematikk i de ulike situasjonene, både i og utenfor faget (Utdanningsdirektoratet, 2020). En slik forståelse kunne hatt stor nytteverdi på ungdomstrinnet.

Videre ser vi i beskrivelsen av hvilke grunnleggende ferdigheter elevene skal mestre ut fra læreplanen i matematikk, står det at elevene i grunnskolen skal kunne reflektere, vurdere og kommunisere matematikk. De samme beskrivelsene kan finnes i nivåbeskrivelsene av kompetanseområdene *Communication* og *Reasoning and argumentation* i MEG-rammeverket. I Tetra er 9,2% av oppgavene kodet til nivå 2 innenfor *Reasoning and argumentation*. I Nummer er 8,7% av oppgavene kodet til nivå 2, og Faktor er 1,3% av oppgavene det samme. Den gjennomsnittlige vanskelighetsgraden til *Reasoning and argumentation* er også høy i samtlige læremidler, sammenliknet med gjennomsnittet til de andre kompetanseområdene. *Reasoning and argumentation* er den kategorien som har størst andel av oppgavene kodet til nivå 2. Dette er med unntak av *Communication*, hvor læremidlene i Faktor ikke har noen oppgaver kodet til nivå 2 i kompetanseområdet. Det har derimot Faktors oppgaver innen kompetanseområdet *Reasoning and argumentation*. Dette tilsvarer at læremidlene i mitt datamateriale vektlegger at elevene kan følge logiske tankeprosesser og har evne til å trekke gyldige, matematiske slutninger.

Likevel er det oppsiktsvekkende at ingen oppgaver er kodet til nivå 3 i kompetansebeskrivelsene. Et høyt nivå i dette kompetanseområdet tilsvarer at eleven kan utforme argumenter på flere trinn eller ta komplekse slutninger. Oppgavene krever ikke at elevene utarbeider komplekse løsningsstrategier over flere trinn. At den er kompleks innebærer at den har flere delmål som elevene må kontrollere, evaluere og justere underveis i løsningsprosessen. Elevene behøver heller ikke kunne trekke tråder mellom flere komplekse matematiske representasjoner, sammenlikne og evaluere disse, eller at de kan lage en representasjon som beskriver en kompleks matematisk sammenheng (Turner et al., 2013). Dersom man sammenlikner dette med læreplanmålene for 8.-10. trinn, kan man lese at det forventes at norske ungdomsskoleelever skal mestre ulike representasjonsformer og skal kunne bruke disse til å fremstille matematiske sammenhenger (Utdanningsdirektoratet, 2015). Det er derfor interessant, sett i sammenheng med kompetansemålene, at elevene ikke blir presentert for eller utfordret i det høyeste nivået innen kategorien som omhandler *Representation*.

### 5.3.1 Forskjeller blant læremidlene

Det er mulig å trekke frem noen forskjeller blant læremidlene. Faktor har helt tydelig færre oppgaver kodet til nivå 2 i samtlige kompetanseområder. I de tilfellene det finnes oppgaver kodet til nivå 2, er det i tre av fire tilfeller Faktors elevnettsted som trekker opp det relativt lave snittet. På den andre siden har Nummer sine to læremidler størst prosentandel kodet til nivå 2 samlet, hvor alle seks kompetanseområdene har oppgaver kodet til nivå 2. Resultatene av kodingen fra Tetra sine to læremidler viser at det er også en relativt stor prosentandel av oppgavene som er kodet til nivå 2 i samtlige kompetanseområder, men unntak av *Representation*. Det er mulig å argumentere at det er problematisk å omtale oppgavene i prosentandel, ettersom Tetra har totalt flest oppgaver i sine to læremidler. Antallet av oppgaver kodet til nivå 2 vil derfor antakeligvis være flest.

Med dette kan vi konkludere at elevene som arbeider med læremidlene fra Faktor blir mindre utfordret enn elevene som arbeider med de fire andre læremidlene. Men i all hovedsak ser vi at elever som tar i bruk lærebøkene Faktor, Tetra og Nummer, og deres tilhørende elevnettsteder møter enkle brøkoppgaver, siden flesteparten av oppgavene blir analysert innenfor nivåbeskrivelse 0 eller 1. Mine resultater viser derfor et lavt utfordringsnivå generelt i brøkoppgavene.

## 5.4 Utfordringsnivå i hvert aspekt av brøk

Nedenfor ordnes teksten etter hvert aspekt av brøk. De ulike læremidlene vektlegger aspektene av brøk ulikt, og relevante læremidler blir derfor trukket frem innenfor hvert delkapittel. Andre kommentarer relatert til modellbruken nevnes også.

I kapittel 4 presenterer tabellene 32-35 aspektenes og modellenes gjennomsnittlige totale MEG-skår i hvert læremiddel, samt for alle læremidler under ett. Dette gir en indikasjon på vanskelighetsgraden til de forskjellige oppgavetypene i de ulike læremidlene. Disse resultatene trekkes frem i presentasjonen.

### 5.4.1 Brøkaspektet del av en helhet

I boken *Elementary and middle school mathematics* skrevet av Van de Walle, Karp og Bay-Williams informerer forfatterne om at aspektet brøk som del av en helhet presentert ved arealmodell er den vanligste fremstillingen av brøk i lærebøkene. Denne fremstillingen er så mye brukt at det for mange elever kan være problematisk å tenke på brøk gjennom de andre aspektene (Van de Walle et al., 2014). Det samme gjelder forskning blant norske elever, hvor Bjerke et al. (2013) viser at de oftest bruker en arealmodell i del av helhet-aspektet når de skal illustrere brøk. De andre aspektene ved brøk er nesten fraværende som støtte når de skal løse oppgaver.

Mine analyser presentert i figur 16, 19 og 21 i resultatkapittelet viser at aspektet del av en helhet er den vanligste fremstillingen av brøk i Faktor lærebok, Tetra elevnettsted og Nummers elevnettsted. Dette aspektet utgjør 55% av oppgavene i Faktor lærebok, 40% av oppgavene i Tetra elevnettsted og 38% av oppgavene i Nummer elevnettsted. Ikke bare har aspektet brøk som del av en helhet den nest laveste gjennomsnittlig total MEG-skår, henholdsvis 2,71. I disse læremidlene er også et flertall av oppgavene fremstilt gjennom arealmodellen. Disse læremidlene samsvarer derfor med utsagnet Van de Walle et. al (2014) og Bjerke et al. (2013) kommer med ovenfor. Modellen utgjør en total prosentandel på 54% av oppgavene i Faktor, 43% i Tetra og 39% i Nummer. Arealmodellen har lavest gjennomsnittlig total MEG-skår sammenliknet med lengde- og mengdemodellen, og denne verdien er på 3,17. Både brøk presentert som del av en helhet og arealmodellen er derfor blant de fremstillingene som er lavest i utfordringsnivå, sammenliknet med de andre aspektene og modellene av brøk, ut ifra analysene i denne studien.

Det er uheldig om læremidlene har et overveldende fokus på brøk som del av en helhet. Bjerke et al. (2013) forklarer at et ensidig fokus på kun ett av aspektene kan medføre en svekket forståelse av brøk. Lav gjennomsnittlig total MEG-skår fører til at læremidler som Faktor lærebok og Tetra elevnettsted, som vektlegger aspektet brøk som del av en helhet og arealmodellen, går glipp av muligheten til å utfordre elevene og legge til rette for utvikling innenfor forståelsen av brøk. Lamon (2007) konkluderer sin forskning med at meningsfull læring vil oppstå ved å inkludere flere aspekter i brøkundervisningen.

Det er likevel viktig å bemerke at ikke alle oppgaver innenfor brøkaspektet del av en helhet er målt til å ligge på et lavt utfordringsnivå. Analysen av Nummers elevnettsted viser at oppgaver innenfor aspektet del av en helhet har en gjennomsnittlig total MEG-skår på 5,75. Dette trekker det forholdsvis lave snittet til aspektet betydelig opp. Dette faktum undertrykker likevel ikke poenget om at fullverdig forståelse av brøk oppstår når man kjenner til hver og en av aspektene, samt hvordan disse henger sammen (Bjerke et al., 2013; Lamon, 2007; Van de Walle et al., 2014). Nedenfor presenteres de følgende fire aspektene av brøk.

### 5.4.2 Brøkaspektet tallstørrelse

Halvparten av læremidlene analysert i denne studien viser andre tendenser enn det Van de Walle et al. (2014) antyder; presentert innledningsvis i delkapittel 5.4.1. Som nevnt tidligere finner vi i læreboka til Nummer 8 at et vesentlig flertall av oppgavene presenterer brøk som en tallstørrelse, henholdsvis 75,7%. Brøkaspektet tallstørrelse er regnet til en gjennomsnittlig total MEG-skår på 3,04 som er tredje høyest av de fem aspektene. Ca. 51% av oppgavene i Nummer 8 fremstilles ved lengdemodell, og kombinasjonen av brøk som tallstørrelse presentert ved tallinja er ifølge Petit et al. (2016) mest hensiktsmessig. Petit et al. (2016) eksemplifiserer dette ved å vise en elevs ineffektive metode med å plassere brøker på tallinja ved å bruke sirkulære arealmodeller for å kunne oppdage forskjellene mellom brøkene. Dette viste seg å fungere dårlig. Dette støttes av Bjerke et al. (2013) som viser at elevenes bruk av arealmodellen ofte er ukritisk og uhensiktsmessig. Det er likevel registrert et forholdsvis stort antall oppgaver som fremstiller brøk ved arealmodell i Nummer 8, cirka 37%. Det kan derfor være interessant å se et eksempel på hvordan disse aspektene av brøk hensiktsmessig kan fungere sammen.

#### *5.4.2.1 Brøk som tallstørrelse presentert ved arealmodell*

Fem venner er veldig glad i is og skal dele 4L is likt mellom seg.

a) Hvor mye is får hver?

b) Hvordan er svaret sammenliknet med tolkningen av $\frac{4}{5}$ som «fire femtedeler»?

Her ser vi at det fint kan fungere å bruke arealmodell for å illustrere fordelingen av is på fem venner. Første deloppgave omhandler aspektet brøk som kvotient, men vi ser at deloppgave b tar for seg brøken $\frac{4}{5}$ som en tallstørrelse. Her blir derfor sammensetningen av is illustrert som arealmodell med brøkaspektet tallstørrelse, presentert.

Gjennomsnittlig total MEG-skår i brøkaspektet tallstørrelse ligger på 3,04. Denne verdien ble gitt etter et omfattende utregningsarbeid, ettersom det var et stort omfang oppgaver relatert til brøk som tallstørrelse i alle læremidlene. Kun brøkaspektene forhold og operator har en høyere gjennomsnittlig total MEG-skår enn tallstørrelse. Disse aspektene dukker derimot opp få ganger og kun i ett av seks læremidler hver. Mer om dette senere.

I Japan vektlegges mål-aspektet og tallinjemodellen i lærebøker på alle trinn der brøk behandles. Watanabe (2007) påpeker at Japan presterer bedre på internasjonale undersøkelser enn elever i USA, der del av en helhet og arealmodellen er mye vektlagt i undervisningen. Brøkundervisning hvor brøk kun anses som et tall for å uttrykke del av en helhet kan derfor villede elevene. Utelukkelse av flere aspekt er også med på å påvirke elevenes brøkbegrep. I algebraundervisning kan for eksempel elever ha problemer med å anse brøk som et svar til likningen. Fra et matematisk perspektiv legger brøk grunnlaget for forståelse av senere elementære algebraiske operasjoner, og mange elevvansker i algebra kan bli sporet tilbake til ufullstendig forståelse av brøk (Behr et al., 1983). Det er derfor viktig at elevene forstår at en brøk representerer en tallstørrelse. Det kan derfor argumenteres for at denne fremstillingen av brøk er fordelaktig for elevenes forståelse av brøk. Aspektet tallstørrelse peker mot et høyere nivå i matematikken, i den forstand at brøk er et tall, og dette er viktig innsikt videre i matematikkforståelsen. Hovedmengden av oppgavene i Nummer lærebok presenterer brøk som en tallstørrelse, og dette vil muligens gi elevene en begrenset brøkforståelse. Likevel trenger det ikke å være så galt, siden Nummer unngår å fokusere for mye på brøk som del av en helhet slik det blir gjort i USA.

Det er likevel viktig å påpeke at ensidig betraktning av brøk som tallstørrelse, vil det være umulig å forstå brøk som et relativt begrep (Bjerke et al., 2013). Dette støtter tanken om at elevene må presenteres for alle aspekter av brøk for fullverdig brøkforståelse.

### 5.4.3 Brøkaspektet kvotient

Dessverre er divisjon sjeldent koblet til brøk (Van de Walle et al., 2019). Dette stemmer med min analyse av de seks læremidlene hvor det er få registrerte tilfeller av brøk som kvotient. Når brøk representeres og refereres til som en del av et divisjonsstykke, tolkes brøk som en kvotient. I følge Behr et al. (1983) er dette en svært kompleks og abstrakt tolkning av brøk som det kan være vanskelig for elever å danne seg mentale bilder av. For å deabstrahere kvotientbegrepet, foreslår Birkeland, Breiteig, and Venheim (2005) å ta utgangspunkt i målingsdivisjon. Målingsdivisjon kan presenteres på flere måter som kan åpne for konkrete eksempler. Med dette finnes det grunner til å anta at oppgaver med divisjon av brøk relativt ofte vil være innenfor aspektet brøk som tallstørrelse, siden disse ofte dreier seg om målingsdivisjon. Dette er et eksempel på at skillet mellom brøkaspektene er flytende, slik det ble beskrevet av Kieren (1980) i teorikapittelet.

Dessuten utsetter Nummer lærebok divisjon av brøk til 10. trinn, altså til lærebok Nummer 10, som kan påvirke min analyse. Nummer presenterer sine elever for emnet brøk både på åttende og tiende trinn, og dette skaper muligheter for at fordelingen mellom brøkaspektene er annerledes enn min analyse antyder. Læreboken Nummer 8 har nemlig få eller ingen oppgaver dedikert til brøkaspektene del av en helhet og forhold, dessuten lite av både kvotient- og operatoroppgaver.

I nyere tid mener Solem et al. (2017) at kvotientoppgaver ofte kan være enkle å konkretisere. Dette støtter utsagnet til Birkeland et al. (2005) ovenfor ved at det er snakk om målingsdivisjon. I denne sammenhengen kan elevene på egenhånd komme frem til et svar på ulike måter. Det er derfor ikke urimelig å anta at disse type oppgaver har en lavere gjennomsnittlig total MEG-skår enn de andre aspektene, ettersom dette videre vil påvirke kodingen i kompetanseområdene til for eksempel både *Problem solving* og *Symbols and formalism*. Elevenes uformelle strategier illustreres med tegninger som ikke er nøyaktig målt, men som bygger på grunntanken om lik og rettferdig fordeling. Dette gjør dessuten aspektet meningsfylt for elevene (Solem et al., 2017). Det er derfor interessant å bemerke seg at kun ett av seks læremidler i mitt datamateriale benytter seg av brøkaspektet kvotient. Nedenfor presenteres et eksempel på en kvotientoppgave fra mitt datamateriale.

En av oppgavene i Nummer 8 lyder slik: «fem venner er veldig glad i is og skal dele 4 L is likt mellom seg. Hvor mye is får hver?» Denne situasjonen stemmer godt overens med betegnelsen på brøk som kvotient, nemlig at brøken er svaret i en divisjon, der to heltall divideres. Det er bemerkelsesverdig at ingen andre oppgaver i analysen tar for seg liknende situasjoner. Antakeligvis vil oppgaver som omhandler en divisjon falle innunder andre kategorier av brøk. For eksempel finner vi på Tetra sitt elevnettsted en duk på $12\frac{1}{2}\ meter$ som skal deles i $\frac{1}{2}\ meter$ lange deler. Her er det verken to heltall som divideres eller et brøksvar, og dermed faller denne oppgaven heller innunder kategorien måltall. Men viktigst av alt er at oppgaven omhandler målingsdivisjon knyttet til lengder. Duken blir målt opp en halv meters lengde av gangen. Målingsdivisjon omtales ofte som gjentatt subtraksjon (Solem et al., 2017).

Et annet eksempel finner vi i læreboken til Tetra hvor en gevinst på 8000kr skal deles på tre kompiser. Slike divisjoner av heltall er ikke ukjent. Dessuten skal de tre vennene få hver sin del av gevinsten, henholdsvis $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$ $og$ $\frac{1}{4}$. Med dette oppfyller ikke divisjonsoppgaven beskrivelsen for kvotient og oppgaven får heller ingen brøk som svar. Dermed vil denne kategoriseres som en operator, ettersom hver brøk kan multipliseres med den totale gevinsten for å vise hvor mye de vil få hver. Det er likevel naturlig å tenke seg at en liknende oppgave kan ha blitt kategorisert innenfor aspektet brøk som del av en helhet. Dette kan begrunnes i at gevinsten er det hele som skal fordeles, der hver kompis får hver sin del. Denne oppgaven er et eksempel på at det ikke er skarpe skiller mellom aspektene av brøk, hvor oppgaven kan plasseres både som del av en helhet og operator. Jeg har likevel valgt å kategorisere denne oppgaven som operator, på bakgrunn av at brøken virker multiplikativt på en størrelse. Dermed er kun fire brøkoppgaver i læreboken Nummer 8 kategorisert som kvotient.

Det er uheldig at få oppgaver i Nummer omhandler brøk som kvotient, dessuten er aspektet fraværende i de andre læremidlene som er analysert. Dette vil videre påvirke læremidlenes fremstilling av et helhetlig brøkbegrep, slik anbefalt av blant annet Van de Walle et al. (2019), Lamon (2012), Petit et al. (2016) og Bjerke et al. (2013). Siden den gjennomsnittlige totale MEG-skåren er målt til 2,5 og er den laveste registrerte skåren blant brøkaspektene, kan man anta at dette ikke vil heve vanskelighetsgraden til brøkoppgavene i læremidlene, men kan heller være med å påvirke elevenes brøkforståelse. Det er også viktig å nevne at bruk av gjennomsnitt i denne sammenhengen ikke er like overbevisende, ettersom den gjennomsnittlig total MEG-skåren baserer seg på fire analyserte oppgaver. Det er derfor ønskelig med flere kvotientoppgaver i læremidlene av overnevnte grunner.

### 5.4.4 Brøkaspektet operator

Brøk som operator blir presentert i alle læremidlene i analysen. Det er derfor et stort antall oppgaver som omhandler dette aspektet. Den gjennomsnittlige totale MEG-skåren er målt til 4,64 som gjør aspektet operator til det nest vanskeligste. Kun oppgaver relatert til brøk som forhold er mer kognitivt vanskeligere, ifølge mine analyser. Dette samsvarer med en rekke studier gjennomført av Kieren og hans kolleger, blant annet Ganson and Kieren (1980), hvor de har undersøkt utviklingen i barns tenking om brøk som operator og forhold, og forholdet mellom dem. Ifølge Behr et al. (1983, p. 8) konkluderer studien med at: *«the level of cognitive thinking necessary for successful performance on general operator tasks is relatively the same level as that needed for successful performance on the multiplicative-equivalence comparisons in the ratio tasks»*. De fant altså oppgaver der forholdaspektet og operatoraspektet bød på omtrent samme grad av kognitive utfordringer, som passer med mine analyser hvor jeg finner ut at disse brøkaspektene er knyttet til de vanskeligste oppgavene i mitt datamateriale. Ganson and Kieren (1980) knytter ikke direkte aspektene til vanskelighetsgrad, slik min studie undersøker, men poengterer at de likevel er nært knyttet kognitivt.

Femten av de tjue oppgavene i mitt datamateriale som har høyest total MEG-skår, er operatoroppgaver. Dessuten er den gjennomsnittlige totale MEG-skåren er målt til 4,64 som gjør aspektet til det nest vanskeligste. Mine analyser kan ikke avsløre om et gitt aspekt i seg selv gir opphav til kognitivt utfordrende oppgaver. Jeg kan derimot si noe om den kognitive utfordringen til de operatoroppgavene som forfatterne av læremidlene har valgt å ta med. Det ville vært interessant å spekulere om det er slik at oppgaven automatisk er vanskelig siden den omfatter brøkaspektet operator, eller om forfatterne er bevisste i utformingen av slike typer oppgaver? Jeg vil tro det er mulig å lage kognitivt lite utfordrende oppgaver som er knyttet til dette aspektet. Er forfatterne bevisste eller ubevisste når de mener at dette aspektet hører sammen med oppgaver som er kognitivt utfordrende?

Det er tenkelig at utfordringsnivået til brøkkapitlene i analysen trekkes opp på bakgrunn av operatoroppgavene. Dette gjelder også Faktor elevnettsted hvor det er en klar overvekt av tekstoppgavene kategorisert innenfor aspektet operator, henholdsvis 58% av oppgavene. Disse oppgavene har en gjennomsnittlig total MEG-skår på 3,57, som er den høyeste gjennomsnittlig total MEG-skår målt i læreverket (les: Faktor lærebok og Faktor elevnettsted). Generelt sett har oppgavene i Faktor lavere gjennomsnittlige totale MEG-verdier, sammenliknet med Tetra og Nummer. Det er derfor fordelaktig at elevene kan møte mer utfordrede oppgaver innenfor dette aspektet.

Lærebøkene Faktor og Nummer benytter seg av brøk som operator i minst grad i forhold til de andre læremidlene. Læreboken Faktor oppleves som enkel ved første øyekast, og denne hypotesen støttes ved at boken holder et sterkt grep på brøkaspektet del av en helhet og brøk som tallstørrelse, to aspekt som kodes til en relativt lav gjennomsnittlig total MEG-skår, sett i forhold til brøkaspektet operator. I denne sammenhengen er relasjonen mellom Faktors lærebok og elevnettsted viktig, nettopp fordi elevnettstedet tilføyer flere tekstoppgaver som omhandler brøkaspektet operator. Dette er fordelaktig både med tanke på utfordringsnivå og at elevene skal møte et variert brøkbegrep. Mer om forholdet mellom lærebok og elevnettsted i delkapittel 5.5.2.

### 5.4.5 Brøkaspektet forhold

Aspektet forhold skiller seg betydelig ut fra de andre, og Behr et al. (1983) mener at forhold er mer en sammenlikningsindeks enn et tall. I teorikapittelet som omhandler brøkaspektet forhold, 2.3.5, blir de ulike perspektivene på forhold presentert. Her vises det til at eleven må være oppmerksom på konteksten for å kunne håndtere dette aspektet korrekt. Tabell 22 viser at få brøkoppgaver er kategorisert til aspektet forhold. I de læremidlene som har et skarpere skille mellom emnene i matematikken, vil slike forholdsoppgaver dukke opp i andre kapitler i læreverket. Dette kan eksempelvis forklares med at målestokk og forhold dukker opp i senere kapitler som innenfor Geometri. Dermed forskyves de vanskelige brøkoppgavene til andre steder i boken.

Reinhardtsen (2020) poengterer at elevene trenger vanskeligere oppgaver for å engasjere seg. I brøkkapittelet i læreboken Tetra finner vi de eneste oppgavene innenfor aspektet forhold. Disse oppgavene er målt til en gjennomsnittlig total MEG-skår på 6,30, som er den høyeste registrerte gjennomsnittlig total MEG-skår. Ettersom disse oppgavene er de eneste forholdsoppgavene registrert i denne studien, fører dette til at verdien 6,30 blir stående som gjennomsnittlig total MEG-skår for brøkaspektet forhold. Aspektet forhold regnes dermed som mest kognitivt utfordrende av brøkaspektene, og med dette burde flere oppgaver i brøkkapitlene i læremidlene omfattet brøkaspektet forhold.

Reinhardtsen (2020) oppleves provoserende for mange ettersom hun etterspør vanskeligere oppgaver i et tema som allerede er problematisk for elevene. Ovenfor kan vi lese av diskusjonen om de ulike brøkaspektene at det kanskje ikke lenger er snakk om at brøk er vanskelig fordi oppgavene er kategorisert til et høyt kognitivt nivå, som min analyse motbeviser, men heller at undervisningen fremstiller et mangelfullt brøkbegrep, som min studie bekrefter. Ved at læremidlene gjensidig bruker få aspekt av brøk, svekker dette elevers forståelse av brøk. Problemer kan dermed oppstå om læreren kun baserer seg på læremidlene i sin matematikkundervisning, slik beskrevet i Gilje et al. (2016) sin forskning. Elevene vil få et mangelfullt brøkbegrep, og dette fører til at elevene opplever brøk som et vanskelig tema.

Forholdsoppgavene er nyttige, nettopp fordi oppgavene viser til flere sider av matematikken. Oppgavene er kategorisert til den høyeste gjennomsnittlige totale MEG-skåren, som tilfredsstiller Reinhardtsen (2020) etterspørsel av vanskelige matematikkoppgaver. Dessuten er aspektet en av fem brikker for å kunne gi elevene et fullstendig brøkbegrep. Det er som sagt svært nyttig å opparbeide seg en dypere forståelse for brøkregning ved å kunne se sammenhengene mellom aspektene (Kleve, 2014).

### 5.4.6 Modellene varierer i vanskelighetsgrad

Femten av de tjue oppgavene som har høyest total MEG-skår, er operatoroppgaver. Av disse femten oppgavene er flest fremstilt ved mengdemodellen. Denne modellen har en gjennomsnittlig total MEG-verdi på 4,39 og dette støtter antagelsen om at modellene varierer i vanskelighetsgrad, påpekt av Petit et al. (2016) i teorikapittelet. Grunnen til at modellene skiller seg i vanskelighetsgrad er relatert til grunnen om hvordan helheten er definert, hvordan «like deler» er definert og hva brøken indikerer (Petit et al., 2016). I mine resultater har arealmodellen den laveste gjennomsnittlig total MEG-skår, på 3,17. Lengdemodellen har en gjennomsnittlig total MEG-skår på 3,26, og ligger derfor mellom de to andre modellene i vanskelighetsgrad. Mine analyser stemmer derfor overens med Petit et al. (2016) sin antakelse om at modellene varierer i vanskelighetsgrad.

Oppgaver som er multiplikative og hvor like deler ikke alltid oppleves likt for elevene, kan derfor være utfordrende. Altså operatoroppgaver ved bruk av mengdemodell. Det hender likevel at elever kan være i stand til å bruke hoderegning på slike oppgaver. Oppgaver som innebærer for eksempel at elevene skal finne svaret til $\frac{2}{3}$ av et publikum på 15 mennesker, er enklere å løse. Slike eksempler blir tatt høyde for i MEG-rammeverket, og vil av den grunn ikke få høy gjennomsnittlig total MEG-skår, til tross for at oppgaven omhandler både operator og mengdemodell av brøk. Hoderegning, i denne sammenheng med brøk, er ikke nok vektlagt i læreplanene.

Elever møter ulike modeller av brøk til ulik tid. Petit et al. (2016) forklarer at elevene først møter brøk gjennom delingsaktiviteter. Her brukes ofte representasjoner som visuelle sirkler og rektangler som støtte til tanken. I eldre klassetrinn møter elevene tallinjen og til slutt arbeider de med mengdemodellen. Det er nok forskning som taler for variert bruk av brøkmodeller (Cramer & Henry, 2002; Fosnot & Dolk, 2002; Gravemeijer, 1999). Variasjon i modellene er et viktig poeng for å anskaffe seg en helhetlig brøkforståelse, men det er ikke garantert suksess ved variert bruk av modellene. Dette poengterer Petit et al. (2016).

Det finnes bevis på at bruk av modeller letter læring av matematiske begrep og prinsipper (Clements, 1999). Likevel har forskere funnet ut av bruken av disse ikke nødvendigvis garanterer suksess eller er tilstrekkelig for garantert meningsfull læring (Clements, 1999). Det er heller den delte konteksten rundt som er viktigst - måten elevene arbeider, snakker og samhandler med materialet mot et matematisk formål. De kan altså ikke på egenhånd bære den tiltenkte betydningen eller bruksområdene, og dette ble poengtert i delkapittel 2.4.

## 5.5 Er elevnettstedene en berikelse til matematikkoppgavene i brøk?

Medienes plass i norsk skole har vært preget av ambivalens. Et syn på medier som en kommersiell underholdningsarena har ført til skepsis mot å slippe mediene inn i undervisningen (Erstad, 2005). Oppfatningen av erfaringer av mediebruk som en «privat» kompetanse kan potensielt være en hindring for å utnytte fordelen det er å koble elevenes fritidsverden og skoleverden. Buckingham (2006) argumenterer for at skolen ikke har råd til å overse elevenes private erfaring med media, og er nødt til å utstyre dem med en forståelse for media og teknologi som kulturformer. Erstad (2005) plasserer digital kompetanse i et spenningsfelt mellom skole og fritid, formell og uformell læring, og mellom mediekultur og institusjonalisert læringskultur. Det er viktig å holde opplæringen relevant for elevene ved å beholde nærheten til deres egne erfaringer med teknologi. Det er viktig at skolen har en aktiv rolle på disse arenaene, slik at opplæring i digital kompetanse ikke blir privatisert. Johannesen, Øgrim, and Giæver (2014) understreker imidlertid at den kompetansen elevene har tilegnet seg gjennom privat bruk ikke er tilstrekkelig, eller nødvendigvis relevant, for skolebruk.

Forskning på læremidler har ikke vært prioritert de siste 20 årene, og selv om vi vet en del om hvor utbredt bruken av IKT er på ulike trinn gjennom forskningsprosjektet til Gilje et al. (2016), vet vi mindre om forholdet mellom papirbaserte og skjermbaserte læremidler. Dette skal studeres nærmere nedenfor.

### 5.5.1 Forutsetninger for bruk av digitale læremidler

Digitale læremidler skiller seg fra læreboka ved at oppgavene er interaktive. Interaktive digitale hjelpemidler kan stimulere større engasjement og dermed skape mer interesse, lærelyst og glød for faget blant dagens ungdomsskoleelever og lærere (DIM, 2015-2018). Særlig er slike læremidler viktige i arbeidet med terskelbegrep – begrep som elevene må forstå for å kunne utvikle seg videre innenfor et område. Brøk er et eksempel på terskelbegrep. Når elevene arbeider med digitale læremidler, frigir det tid for læreren. Men dette løser nok ikke tidsproblematikken læreren står ovenfor, beskrevet nærmere nedenfor.

Tre av fire grunnskolelærere svarer at de i hovedsak bruker papirbaserte lærebøker, men at de supplerer med noe bruk av digitale læremidler (Gilje et al., 2016). Lærere i grunnskolen ser digitale læremidler som et supplement, men generelt sett ønsker lærerne å bruke digitale læremidler mer enn de gjør (Nilssen, 2015). Dette gapet mellom faktisk bruk og ønsket om å bruke digitale læremidler, skyldes en kombinasjon av flere faktorer. De to mest forekommende faktorene er kvaliteten av det tekniske utstyret og begrenset kunnskap om de digitale læremidlene. Lærerne mener det tar for lang tid å ta i bruk de digitale læremidlene (Nilssen, 2015). Mangel på kunnskap er sammenhengende med faktoren mangel på tid. Vurderingen lærerne må ta av tilgjengelige digitale læremidlene, og hvordan disse kan tas i bruk i undervisningen, tar ekstra tid. Mangel på tid er hovedårsaken til begrenset bruk av digitale læremidler. Grunnen til hvorfor de derimot tar i bruk disse digitale læremidlene er for å skape en variasjon i undervisningen.

Men variasjon i undervisningen alene er ikke god nok grunn til å bruke digitale læremidler i undervisning. Variasjon er en måte å unngå at undervisningen blir kjedelig. Indirekte blir derfor de tilhørende elevnettstedene sett på som underholdning. Blikstad-Balas (2012) mener at digitale læremidler blir brukt uten eksplisitte og klare retningslinjer med tydelig pedagogisk formål. Det er dermed problematisk at elevnettstedene blir bruk av underholdningshensikter, ettersom elevene dermed ikke får en holistisk digital kompetanse. Pedagogikk og didaktikk er overordnet både designet på teknologien og mulighetene det gir. Nilssen (2015) etterspør kvalitetskriterier for å vurdere de digitale læringsressursene, slik at også disse er bærere av faglig innhold.

Det er viktig å øke bevissthet hos lærerne og skape en systematisk kvalitetssikring av læremidlene brukt i undervisningen, slik som den digitale rettlederen presentert i delkapittel

2.10.1. Ved en slik kvalitetssikring åpner dette muligheten for at det digitale læremiddelet vil bli brukt mer i undervisning, eller eventuelt brukt av riktig, pedagogisk årsak. Dette vil bidra å øke lærerprofesjonaliteten, og Nilssen (2015) argumenterer for at slik kvalitetssikring kan skje gjennom kursing av lærerne.

Workshops, lærertrening eller kursingen, som Nilssen (2015) refererer til, passer dårlig til å skape en dyp forståelse som kan hjelpe lærerne med å bli kunnskapsrike brukere av teknologi i undervisningssammenheng. Denne vektleggingen av kompetanser og sjekklister som lærerne må kunne, er problematisk av flere grunner: For det første er det ofte raske endringer i teknologien, så dersom kompetansen er for spesifikk vil den fort blir utdatert (Mishra & Koehler, 2006). Det er derfor nødvendig med bred teknologikunnskap som rekker lenger enn til spesifikke terminologier, programvarer eller maskinvarer. For det andre er ofte programvarer laget for forretningsvirksomhet og jobb, ikke utdanning. Fokuset er derfor rettet mot hva og ikke mot didaktikkens hvorfor. Mishra og Koehler (2006) argumenterer for at den dype forståelsen av hva teknologien innebærer må være integrert i *design-studies* og være en del av utdanningen. Undervisningen om teknologiske læremidler bør ikke være generelt, men om et spesifikt tema (Mishra & Koehler, 2006). Ved at lærerne har en dyp, pedagogisk innsikt av de digitale hjelpemidlene i undervisningssammenheng, kan dette videre bidra til dyp fagforståelse hos elevene.

### 5.5.2 Forholdet mellom lærebøkene og tilhørende elevnettsteder

Som navnet tilhørende elevnettsted impliserer, så er det et bestemt forhold mellom læreboka og denne nettsiden. For det første deler de samme navn og er komponenter av et læreverk rettet mot et spesifikt årstrinn i skolen. Nettstedet har også det samme korresponderende kapittelinndelingen som læreboka. I lærebøkene presenteres elevnettstedene som et ekstraprodukt som kan være fint å ha (Nilssen, 2015). Det forklares derfor ikke som et produkt som må tas i bruk for elevens læringsutbytte, og heller ingen andre av de andre komponentene nevnes som essensielle.

Generelt sett byr elevnettstedene i mitt datamateriale på interaktive oppgaver og drilloppgaver i ulike former. Dette er for eksempel flervalgsoppgaver og fyll inn-oppgaver med og uten forhåndsgitte svaralternativer. De tilhørende elevnettstedene presenterer elevene for oppgaver i emnet, verken introduksjon eller nyttig informasjon til tema blir gitt. Lærerne i Nilssen (2015) sin studie omtaler de digitale læremidlene som fine ekstraressurser. En læringsressurs blir av Gilje (2017) beskrevet som annet materiale som ikke har hensikt å dekke ett eller flere kompetansemål i et spesifikt fag og på et bestemt nivå i grunnopplæringen. De er dermed ikke læremidler, men heller ressurser for læring. Grunnen til at de digitale læremidlene ikke blir riktig omtalt, kan forklares i at utformingen av nettstedene er enkle og nettopp fordi de kun likner en oppgavebank.

Selv om elevnettstedene ikke blir beskrevet som en essensiell komponent til læreverket, slik læreboken er, ser vi likevel noen tilfeller av at elevnettstedet inkluderer aspekter av brøk som ikke blir presentert i læreboka, eller har et påfyll av tekstoppgaver innen et aspekt som ble dårlig representert i boka. Et eksempel på dette er Faktor som i sin lærebok har få oppgaver dedikert til brøk som operator. Denne tendensen blir derimot snudd i elevnettstedet, hvor 58,3% av oppgavene er brøk som operator. På bakgrunn av at elevnettstedet til Faktor bidrar til en total jevnere fordeling av brøkaspektene, kan man anta at elevnettstedet til Faktor fungerer som en viktig komponent til boken. Det samme gjelder i Nummer lærebok hvor vi finner få oppgaver som tar for seg brøk som del av en helhet, henholdsvis 5,4%, men på elevnettstedet finner vi at 38,1% av oppgavene faller innenfor dette brøkaspektet. På denne måten kan vi konkludere med at lærebok og tilhørende elevnettsted utfylte hverandre godt.

Om vi skal rette fokuset på vanskelighetsgraden til oppgavene presentert i boka versus elevnettstedet, finner vi interessante funn. I Faktor er fire av seks kompetanseområder kodet til nivå 2. Som først presentert i delkapittel 5.3.1, er det i tre av disse fire tilfellene Faktors elevnettsted som har større prosentandel enn Faktor lærebok kodet til nivå 2, ifølge tabellene 24-29. Det er mulig at prosentfordelingen mellom nivåbeskrivelsene i MEG-rammeverket er misvisende ettersom det er store forskjeller i antall oppgaver mellom læremidlene. Se tabell 15 på side 60. Til tross for større prosentandel av tekstoppgavene kodet til nivå 2, er det ikke nødvendigvis et større antall oppgaver som er kodet til nivå 2. Derfor bruker jeg i tillegg de kognitive kategorienes gjennomsnittlige MEG-verdi, for å støtte mine antakelser om forskjellene mellom læremidlene. Denne verdien refererer til den gjennomsnittlige oppgaven i læremiddelet, og er dermed kun et annet mål på utfordringsnivået. Den gjennomsnittlige MEG-verdien til kompetanseområdet *Problem solving* i Faktor viser at til tross for at kun 1,6% av tekstoppgavene i læreboken er kodet til nivå 2, er den gjennomsnittlige MEG-verdien til den samme kognitive kategorien betydelig høyere enn på elevnettstedet. Dette gir pekepinn på at utfordringsnivået i kompetanseområdet ikke nødvendigvis er utpreget høyere i elevnettstedet. Kompetanseområdet *Representation* er derimot det ene tilfellet hvor boka har størst prosentandel kodet til nivå 2.

Tetras lærebok har en mer utpreget, faglig tyngde. Her finner vi god fordeling mellom tre aspekter, samt flere oppgaver som tar for seg brøk som forhold. Dermed er fire av fem brøkaspekt dekket av læreboken. Det er i tillegg en jevn fordeling av de tre modellene. På elevnettstedet går lengdemodellen går fra å være mest fremtredende til minst. Det samme gjelder for aspektet brøk som tallstørrelse. Dessuten er det ingen registrerte tilfeller av brøk som forhold inne på elevnettstedet. Elevnettstedet i Tetra dekker derfor tre av fem aspekter, med en skjevere fordeling av brøkmodellene. Denne ulike fremstillingen av brøk, til tross for samme læreverk, kan forklares med at det er ulike forfattere bak læremidlene. Inne på elevnettstedet står det skrevet at ansvarlig redaktør for nettsiden er Thomas Bergesen, og han ble ikke oppgitt i læreboka. Det er derfor mulig å anta at forskjellene mellom læremidlene tyder på at disse ikke er blitt utformet som en helhet, men heller laget hver for seg uavhengig av hverandre. Dette støtter Nilssen (2015) sin oppfatning om forholdet mellom lærebok og tilhørende elevnettsted.

Det er likevel større prosentandeler kodet til nivå 2 i Tetras elevnettsted sammenliknet med Tetra lærebok. I tre av fem kompetanseområder kodet til nivå 2 finner vi en større prosentandel på elevnettstedet. De gjennomsnittlige MEG-verdiene i de kognitive kategoriene er jevnere mellom læremidlene, og dette antyder at oppgaveantallet er større i Tetra lærebok. Vi finner dermed totalt flere tekstoppgaver kodet til nivå 2 i læreboken enn elevnettstedet. Det er også tydeligere i Tetras læreverk at eleven finner det viktige i læreboken, nettopp på bakgrunn av utformingen av elevnettstedet. Den inneholder kun oppgaver, ingen forklaring eller annen viktig informasjon for eleven. Mine resultater viser altså at læreboken inneholder en god fordeling mellom aspektene og modellene, i tillegg til en større fordeling av utfordrende oppgaver. Læreboken er selvbærende og uavhengig av den tilhørende elevnettsiden. Dermed stemmer Tetra med hva Nilssen (2015) finner i sin studie.

Nummer elevnettsted har størst prosentandel kodet til nivå 2 i fem av seks kompetanseområder, hvor læreboken kun har én. Dette leser jeg av tabellene 24-29. De gjennomsnittlige MEG-verdiene støtter antakelsen om at mer utfordrende oppgaver finnes på elevnettstedet. Elevnettstedet besår av oppgaver merket som «mer øving» og «Flere utfordringer», som ytterlige støtter tanken om at vanskeligere oppgaver i brøk finnes på elevnettstedet. Elevnettstedet inneholder flere tekstoppgaver om brøk som del av en helhet og operator, men det er fortsatt en stor andel oppgaver som omhandler aspektet tallstørrelse. Fordelingen mellom dem er derimot jevnere på elevnettstedet enn hva læreboken tilbyr, hvor det var en utpreget bruk av tallstørrelse og lengdemodell.

Til tross for at elevnettstedet byr på vanskeligere oppgaver og jevner ut skjevheten til Nummers lærebok ved større bruk av brøkaspektene og brøkmodellene, er det likevel læreboken som bærer faget og kan fungere veiledende for eleven. Dette gjelder alle elevnettstedene der det er i læreboken elevene finner informasjon, eksempler, forklaringer, har tilgang på flere oppgaver i emnet, samt løsningsforslag, m.m. På denne måten er læreboken et velfungerende læremiddel uten elevnettstedet, men dette gjelder ikke motsatt vei. Ingen av de overnevnte elevnettstedene ville fungert som gode, selvstendige læremidler for elevene. Desto viktigere er det at dette blir tilfellet i fremtiden, hvor digitale læremidler muligens vil få større betydning. Det blir derfor viktig at disse elevnettstedene på forhånd blir kvalitetssikret og dermed utviklet i retning av et optimalt, selvstendig og velfungerende læremiddel for elevene. De tilhørende elevnettstedene tilbyr som nevnt oppgaver og fungerer på mange måter kun som en oppgavebank. Slik overflødighet øker ikke bruken av digitale læringsressurser i skolen, og skaper heller ikke en holistisk digital kompetanse. Derfor er det nødvendig med en kvalitetssikring av det tilhørende elevnettstedet og det didaktiske samspillet mellom disse læremidlene. På denne måten kan vi utnytte et potensiale mellom disse læremidlene som foreløpig er lite brukt, i følge Gilje et al. (2016) sin forskning.

## 5.6 Kreative oppgaver

Vi vet at for mange nåværende og tidligere elever, er skolefaget matematikk forbundet med nederlag, oppgaver som ikke inngår i noen sammenheng og manglende interesse. Spiralprinsippet i skolen bidrar til et fragmentert fag der det sentrale målet har vært å lære algoritmer og metoder (Rosenlund & Gulaker, 2018). For mange elever har dette svekket motivasjonen for å lære matematikk. Det har gjennom forskning blitt dokumentert at det finnes andre utgangspunkt for undervisning og læring i matematikk, for eksempel RME beskrevet av Gravemeijer and Doorman (1999).

Undervisningsformer som tar utgangspunkt i lek og kreativitet er nødvendig, men har hittil fått liten plass, spesielt på ungdomsskolen (Alseth, Breiteig, & Brekke, 2003). Lærere som bruker flere undervisningsmetoder, og som åpner for samarbeid og involvering av elevene, har elever som oppnår bedre resultater (Kunnskapsdepartementet, 2015). I forskningen til Gilje et al. (2016) ble lærebokas store betydning og rolle i matematikkundervisningen avslørt. Hovedansvaret for variert og kreativ undervisning ligger hos læreren, men lærebøkene legger likevel grunnlaget for undervisningen. Det er derfor fordelaktig om lærebokforfatterne legger opp til kreative oppgaver i bøkene, ettersom vi vet motivasjonseffekten dette gir elevene.

Denne masteroppgaven har tatt utgangspunkt i brøkoppgaver som er satt i kontekst. Likevel tar ikke MEG-rammeverket høyde for kreative oppgaver, kun elevenes kompetanseområder knyttet til løsning av oppgaven. Ved å undersøke kvaliteten til tekstoppgavene i brøkkapitlene på åttende trinn, har jeg underveis støttet mine oppfatninger ut ifra om oppgavene oppfordrer til flere, kreative løsninger. For eksempel har Nummers lærebok som nevnt tidligere et lite omfang oppgaver, men boken setter oppgavene i varierte kontekster som kan oppleves relevant for elevene. Elevene får teste brøkkunnskapene sine i sammenheng med aktiviteter knyttet til kortstokk, stortingsrepresentanter, m.m. Dette gir læremiddelet en ytterligere merverdi som jeg gjerne ville poengtere. Oppgavenes kreative utforming blir ikke tatt høyde for i rammeverket, og er derfor heller ikke med i analysen. I tillegg oppleves brøkoppgavene presentert i Faktors lærebok som lite originale for en som har jobbet mye med brøk i grunnopplæringen. I min analyse av boken ønsket jeg å poengtere dette, men rammeverket brukt i denne studien tar kun for seg kognitive kategorier. Dersom jeg skulle gjennomført enda en innholdsanalyse av lærebøker i matematikk, ville denne studien omhandlet kreative oppgaver i tråd med Fagfornyelsen. Økt motivasjon gir økt kompetanse (Rosenlund & Gulaker, 2018), og sammenhengen mellom motivasjon, kreative oppgaver og kompetanse er interessant.

## 5.7 Videre forskning

I denne innholdsanalysen har jeg kodet brøkkapitler i tre lærebøker på ungdomstrinnet og deres tilhørende elevnettsted. I første del av analysen ble oppgavene kategorisert etter aspekt og modell av brøk. Fra kodingen gjenga jeg hvilke aspekter og modeller som dukket opp flest ganger i de ulike læremidlene, men disse ble ikke sett på i direkte sammenheng. Det kunne derfor vært interessant å bruke informasjonen fra kodingen til å finne ut om for eksempel brøk som del av en helhet fremstilles gjennom arealmodellen i mitt datamateriale, slik som forskere ofte antyder (Bjerke et al., 2013; Van de Walle et al., 2019). Det kunne i tillegg vært spennende å finne ut av hvilken modell som oftest blir brukt i sammenheng med de andre aspektene. Dette er informasjon som er lett tilgjengelige i mitt datamateriale, men ut ifra rammebetingelsene i denne oppgaven fikk jeg ikke mulighet til å undersøke dette i første omgang. Det er derimot mulig å gjennomføre dette ved en senere anledning.

Analysen har også blitt utført gjennom rammeverket utformet av Mathematics Expert Group (MEG), som gjorde det mulig å avsløre vanskelighetsgraden til oppgavene. Jeg hadde ikke noe objektivt mål på å måle hvor vanskelig de analyserte tekstoppgavene oppfattes for elevene, men som et forslag til videre studier kunne det vært interessant å innhente informasjon om hvordan elever skårer på de respektive oppgavene, og sammenliknet dem med den gitte kognitive vanskelighetsgraden. Da vil det være mulig å si noe om hvilke kognitive kategorier, altså deler av den matematiske kompetansen, som elevene oppfatter som spesielt utfordrende. Dette kunne fått implikasjoner for undervisning ved at lærerne kan rette fokus og bygge opp deler av elevenes kompetanse som de mestrer dårlig.

# 6.0 Avslutning

Det blir ofte sagt at brøk er et vanskelig emne for elevene å lære. Brøk blir altså omtalt som et terskelbegrep. Forskning viser at lærerne i stor grad henvender seg til læreboken i undervisningen (Gilje et al., 2016), og det er med andre ord dette som legger grunnlaget for hva elevene blir presentert for. Jeg har derfor ønsket å rette søkelyset mot lærebøkene som blir brukt i undervisningen. Lærebøker med mangelfullt brøkbegrep kan dermed være årsaken til at elevene strever med dette emnet. Undersøkelser viser at mange feil i regning med brøk skyldes manglende brøkforståelse (Bondø & Tokle, 2018). Dersom lærebøkene ikke presenterer brøk gjennom ulike aspekter og modeller, vil heller ikke elevene opparbeide seg en grundig forståelse av brøk, til å senere kunne møte vanskeligere oppgaver i grunnopplæringen. De fem ulike aspektene eller perspektivene av brøk krever tid og modning, og det kan bli problematisk om ikke undervisning tar høyde for dette. For at alle elever skal få en fullverdig forståelse av brøk, må dessuten læreren unngå å innføre algoritmer før forståelse (Bjerke et al., 2013).

Ingen av læremidlene i denne studien presenterer ungdomsskoleelevene for et fullverdig brøkbegrep. Likevel kommer læreboken Tetra best ut av analysen ettersom den presenterer elevene for fire av fem brøkaspekt og har en god fordeling av modellene. Det samme gjelder for så vidt Nummer lærebok, men her er 75% av oppgavene kodet til aspektet tallstørrelse. Det kan argumenteres for at dette ikke nødvendigvis er negativt, ettersom japanske elever i hovedsak bruker mål-aspektet og tallinje i arbeid med emnet brøk (Watanabe, 2007). Disse elevene skårer godt på internasjonale prøver i matematikk.

Min analyse av tekstoppgaver i brøkkapitlene i Faktor 8, Tetra 8 og Nummer 8, samt deres tilhørende elevnettsteder viser at elevene som tar i bruk disse læremidlene blir testet på et lavt kognitivt nivå ut ifra en kategorisering i rammeverket utviklet i MEG-studien. Læremidlene inkludert i studien skiller seg generelt lite fra hverandre når det kommer til nivåfordelingen i de kognitive kategoriene, ettersom de fleste oppgavene er kodet til de to laveste nivåene, 0 og 1. Ut ifra resultatene av kategoriseringen i MEG-rammeverket, ser det ut til at det er stor enighet i nivået på brøkoppgavene blant læremidlene på åttende trinn, men jeg er usikker på om dette er et nivå det er lurt å være enige om.

Til tross for at denne studien ikke har mulighet til å generalisere til andre læremidler brukt i ungdomsskolen, er det likevel interessant å spørre seg om elever sliter med emnet brøk fordi de presenteres for et begrenset brøkbegrep, eller om emnet brøk er vanskelig i seg selv. Min analyse i MEG-rammeverket viser at det er et lavt utfordringsnivå i tekstoppgavene i brøkkapitlene på åttende trinn. Det er derfor interessant at elevene har vansker med et tema som er kodet til de laveste nivåene i samtlige kompetanseområder i matematikk, presentert gjennom MEG-rammeverket. Det er nødvendig at elevene får arbeidet med oppgaver med ulik vanskelighetsgrad for å kunne hevde seg i emnet. Det er mulig at vanskelighetsgraden på brøkoppgavene tar seg opp i løpet av de senere årene på ungdomsskolen.

Funnene i denne studien er interessante som del av en kartlegging av hvilke brøkaspekter, modeller og matematisk kompetanse som vektlegges i ulike læremidler på åttende trinn. Studien gir imidlertid kun innblikk i deler av læremidlene. Jeg mener at dette kan være et viktig innspill i en diskusjon om læremidlenes vanskelighetsgrad og variasjon i fremstillingen av brøkbegrepet. Dette kan også brukes for å rette fokus på det faglige innholdet i læremidlene. Mine resultater viser at læremidlene har en vei å gå, men ved å øke bevissthet rundt læremidlene og hvordan denne legger frem matematisk kompetanse kan dette kanskje bidra til en systematisk kvalitetssikring.

Denne oppgaven er med på å sette et søkelys på læremidlenes fremstilling av brøkbegrepet og fungerer som et eksempel på hvordan oppgavenes vanskelighetsgrad kan avsløres. Mine analyser viser at fremstillingen er begrenset, og som lærer er det nødvendig å være oppmerksom og kritisk til læremidlene. Dette innebærer bruk av aspekt, modell og vanskelighetsgrad i tekstoppgavene i brøk. MEG-rammeverket vil dessuten være relevant for meg videre i yrket når jeg tildeler ulike matematikkoppgaver til mine elever.

# Litteraturliste


Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003). *Evaluering av reform 97*. Notodden: Telemarksforskning

Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense*. London: Continuum International Publishing Group.

Askew, M. (2001). What does it mean to learn? What is effective teaching? In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic teaching* (pp. 134-146). Buckingham: Open University Press.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag - Resultater og analyser fra TIMSS 2015*: Universitetsforlaget.

Bezuk, N. S., & Bieck, M. (1993). Current research on rational numbers and common fractions: Summary and implications for teachers. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 118-136). New York, NY: Macmillian.

Birkeland, P. A., Breiteig, T., & Venheim, R. (2005). *Matematikk for lærere 1* (Vol. 5). Oslo: Universitetsforlaget.

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C., & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke er tall - eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. In I. Pareliussen, B. B. Moen, & T. Solhaug (Eds.), *FoU i praksis 2012 conference proceedings* (pp. 28-36). Trondheim: Akademika forlag.

Blikstad-Balas, M. (2012). Digital Literacy in Upper Secondary School - What Do Students Use Their Laptops for During Teacher Instruction? *Nordic Journal of Digital Literacy, 7*(2), 81-96.

Bondø, A., & Tokle, O. D. (2018). Problemområder knyttet til brøk. Retrieved from http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-04/Bondø%2C%20Tokle%20-%20Problemområder%20knyttet%20til%20brøk_0.pdf

Brekke, G. (2002). *Kartlegging av matematikkforståelse: Introduskjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Retrieved from http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/Bestillingstorg/PDF/59447_KAR_MAT_007_innmat.pdf

Buckingham, D. (2006). Defining digital literacy: What do young people need to know about digital media? *Nordic Journal of Digital Literacy, 1*(4), 263-277.

Clements, D. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(1), 45-60.

Cohen, L., Manoin, L., & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*. London: Routledge.

Cramer, K., & Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition of fractions. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 41-48). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dahlum, S. (2015). Innholdsanalyser. *Store norske leksikon*. Retrieved from https://snl.no/innholdsanalyse

Dahlum, S. (2018). validitet. *Store norske leksikon*. Retrieved from https://snl.no/validitet

Dahlum, S., & Wæhle, E. (2018). *Case-studie*. Retrieved from https://snl.no/case-studie

DIM. (2015-2018). Prosjekbeskrivelse: Digital interaktiv matematikkundervisning (DIM) Søknad til RFF Agder - Regionalt offentlig prosjekt. Retrieved from http://www.dim2015-18.no/sites/default/files/Prosjektbeskrivels.pdf

Drijvers, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or doesn´t). In S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135-151). Cham: Springer International Publishing.
Empson, S. B., & Levi, L. (2011). *Extending children`s mathematics fractions and decimals: innovations in cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.
Erstad, O. (2005). *Digital kompetanse i skolen - en innføring*. Oslo: Universitetsforlaget.
Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Developement status and directions. *ZDM - The international Journal on Mathematics Education, 45*(5), 633-646.
Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young Mathematicians at Work: constructing fractions, decimals, and percents*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.
Ganson, R. E., & Kieren, T. E. (1980). Operator and ratio thinking structures with rational numbers - A theoretical and empirical exploration. *The Alberta Journal of Educational Research*.
George, D., & Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference* (4th ed.). Boston: Allyn & Bacon.
Gilje, Ø. (2017). *Læremidler og arbeidsformer i den digitale skolen*. Bergen: Fagbokforlaget.
Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., . . . Skarpaas, K. G. (2016). *Med ark og app : Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer*. Retrieved from Universitetet i Oslo: https://www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/arkapp_syntese_endelig_til_trykk.pdf
Gleinsvik, A., Lunde, M., & El-Amrani, S. (2016). Universell utforming av digitale læremidler - en samfunnsøkonomisk analyse. *regjeringen.no, Rapport 2016 - 02*. Retrieved from https://www.regjeringen.no/contentassets/9e60d42090f34a32b5f910744b506336/universell_utforming_av_digitale_laeremidler.pdf
Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 77-155.
Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1), 111-129.
Gray, J., & Ånestad, G. (2016). Aspekter ved brøk i en nasjonal prøve. In E. Hovik & B. Kleve (Eds.), *Undervisningskunnskap i matematikk* (pp. 61-77). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.
Hagen, M. B., Carlsson, S., Hake, K. B., & Öberg, B. (2006). *Tetra 8 : matematikk for ungdomstrinnet* (1 ed.). Oslo: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.
Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge. The case of mathematics*. Hillsdale: Lawrence Earlbaum.
Hinna, K. R. C., Rinvold, R. A., & Gustavsen, T. S. (2011). *QED 5-10 : matematikk for grunnskolelærerutdanningen : B. 1* (Vol. B. 1). Kristiansand: Høyskoleforlaget.
Hjardar, E., & Pedersen, J. E. (2014). *Faktor 8: Grunnbok: matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Cappelen.
Hole, A., Jensen, R., Tellefsen, H. K., & Wallace, A. K. (2014). *Nummer 8: matematikk for ungdomstrinnet* (Bokmål 1 ed.). Oslo: Aschehoug.
Imsen, G. (2004). *Det ustyrlige klasserommet*. Oslo: Universitetsforlaget.
Johannesen, M., Øgrim, L., & Giæver, T. H. (2014). Notion in Motion: Teachers Digital Competence. *Nordic Journal of Digital Litercay, 9*(4), 300-312.

Johnsen, E. B. (1999). *Lærebokkunnskap - innføring i sjanger og bruk*. Oslo: Tano Aschehoug.
Karlsen, L. (2014). *Tenk det! : utforskning, forståelse og samarbeid - elever som tenker sjæl i matematikk : ungdomstrinnet*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.
Kieren, T. E. (1980). The Rational Number Construct - Its Elements and Mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp. 125-150). Columbus: ERIC.
Kilpatrick, J. (2014). Competency Frameworks in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 85-87). Netherlands: Springer Reference.
Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(3), p. 328.
Klette, K. (2004). *Fag og arbeidsmåter i endring? Tidsbilder fra norsk grunnskole*. Oslo: Universitetsforlaget.
Kleve, B. (2014). Kunnskapskvartetten i matematikk. In T. S. Gustavsen, K. R. C. Hinna, I. C. Borge, & P. S. Andersen (Eds.), *QED 5-10 Matematikk for grunnskolelærerutdanningen. B.2.* (pp. 589-620). Oslo: Cappelen Damm AS.
Kleven, T. A., Tveit, K., & Hjardemaal, F. (2014). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: En hjelp til kritisk tolkning og vurdering* (2 ed. Vol. 2). Bergen: Fagbokforlaget.
Kongelf, T. R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge : Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?* (Doktoravhandling). Universitetet i Agder, Retrieved from https://hvlopen.brage.unit.no/hvlopen-xmlui/handle/11250/2616700
Krathwohl, D. R. (2002). A revision of bloom´s taxonomy: An overview. *Theory into Practice, 41*(4), 212-218.
Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: an introduction to its methodology* (2 ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
Kunnskapsdepartementet. (2015). Strategi for ungdomstrinnet. Motivasjon og mestring for bedre læring. *regjeringen.no*. Retrieved from https://www.regjeringen.no/contentassets/ffb297588bfd4ddbbecd18011afdf078/f-4276-b_web-2.pdf
Kunnskapsdepartementet. (2016). *Meld. St. 28 (2015-2016) Fag - Fordypning - Forståelse - En fornyelse av Kunnskapsløftet*. regjeringen.no Retrieved from https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/?ch=1
Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.
Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers* (3 ed.). New York, NY: Routledge.
Matematikk.org. (Udatert). Abels hjørne. Retrieved from https://www.matematikk.org/trinn11-13/abelshjorne/
Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.
Nilssen, J. H. (2015). The Challenge of Raising the Quality of the Textbook and its Companion Website – Just when is Less More? *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 178*(C), 164-168. doi:10.1016/j.sbspro.2015.03.174
Niss, M. (2006). What does it mean to be a compotent matematics teacher? A general problem illustrated by examples from Denmark In *Praktika, 23 o Panellenio Synedrio*

*Mathematikis Paideias, Patra 24-26 Noembriou 2006* (pp. 39-47). Elleniki Mathematiki Etaireia: Patra.
Niss, M. (2015). Mathematical Competencies and PISA. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing Mathematical Literacy: The PISA Experience* (pp. 33-55). Switzerland: Springer International Publishing.
Niss, M., Jensen, T. H., Bai Andersen, T., Whalin Andersen, R., Christoffersen, T., Damgaard, S., . . . Nissen, K. (2002). *Kompetencer og matematikklæring: Ideer og inspirasjon til udvikling af matematikkundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriets forlag.
Nortvedt, G. A. (2013). Matematikk i PISA - matematikkdidaktiske perspektiver. In M. Kjærnsli & R. V. Olsen (Eds.), *Fortsatt en vei å gå: Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012* (pp. 43-62). Oslo: Universitetsforlaget.
OECD. (2009). PISA 2009. Assessment framework. Key competencies in reading, mathematics and science. Retrieved from https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/44455820.pdf
OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy* (Vol. 5): Paris: OECD Publishing.
OECD. (2014). A profile of student performance in mathematics. In *PISA 2012 results: What students know and can do. Student performance in mathematics, reading and science.* (Vol. 1, pp. 31-144). Paris, France: OECD Publishing.
Opplæringsloven. (2010). §17.1 Elevens rett til læremiddel på egen målform. Retrieved from https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2006-06-23-724/KAPITTEL_20#KAPITTEL_20
Pedersen, I. F. (2013). Is TIMSS Advanced an appropriate instrument for evaluating mathematical performance at the advanced level of Norwegian upper secondary school? An analysis of curriculum documents and assessment items. *Acta Didactica Norge*, *7*(1), 1-24. Retrieved from https://journals.uio.no/index.php/adno/article/view/1112
Petit, M. M., Laird, R. E., Marsden, E. L., & Ebby, C. B. (2016). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom*. New York: Routledge.
Reinhardtsen, J. (2020). *Student meaning making in elementary algebra teaching: An indepth study of classrooms in four countries.* (Doktorgradsavhandling). Universitetet i Agder, Kristiansand.
Rosenlund, M. R., & Gulaker, D. T. F. (2018). Hvordan skape motivasjon for matematikk? In T. A. Fiskum, D. T. F. Gulaker, & H. P. Andersen (Eds.), *Den engasjerte eleven. Undrende, urforskende og aktiviserende undervisning i skolen.* Bodø: Cappelen Damm Akademisk.
Ryghaug, M. (2002). Å bringe tekster i tale-mulige metodiske innfallsvinkler til tekstanalyse i statsvitenskap. *Norsk statsvitenskapelig tidsskrift, 18*(4), 303-327.
Røykenes, K. (2009). Metodetriangulering - et metodisk minefelt eller en berikelse av fenomener? [13.01.2020]. Retrieved from https://sykepleien.no/forskning/2009/03/metodetriangulering-et-metodisk-minefelt-eller-en-berikelse-av-fenomener
Sandvik, E. (2016). dybdelæring. Retrieved from https://snl.no/dybdelæring
Sirnes, S. M. (2005). *Flervalgsoppgaver - konstruksjon og analyse*. Bergen: Fagbokforlaget.
Sjøberg, S. (2014). PISA-syndromet: Hvordan norsk skolepolitikk blir styrt av OECD. *Nytt norsk tidsskrift, 1*(31), 30-43. Retrieved from https://www.uis.no/getfile.php/13217918/HF/PISA-Syndromet_Sjøberg_Nytt_Norsk_Tidsskrift_1-2014.pdf

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E., & Smestad, B. (2017). *Tall og tanke 2: Matematikkundervisning på 5. til 7. trinn* (1 ed. Vol. 1). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Solem, I. H., Alseth, B., & Nordberg, G. (2010). *Tall og tanke. Matematikkundervisning på 1. til 4. trinn*. Oslo: Gyldendal Akademisk.

Stacey, K., & Ross, T. (2015). *Assessing Mathematical Literacy. The PISA Experience.* Switzerland: Springer International Publishing.

Stedøy, I. M. (2018). Matematisk kompetanse. *Realfagsløyper*, 1-13. Retrieved from http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-04/T1.P2.M2A%208-13%20Stedøy%20Matematisk%20kompetanse.pdf

Svartdal, F. (udatert). Konsistens i skårer: Cronbachs alfa. Retrieved from http://www.metoder.info/stat/dataanal_02b.html

Svingen, O., & Gilje, Ø. (2018). Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk. *Utdanningsdirektoratet*. Retrieved from https://www.udir.no/contentassets/9178af2725fd4773a46374be4ba54de9/grunnlagsdokument_kvalitetilareremidler_udir_2018.pdf

Theen, F. (2019). *Does language matter?: sources of inequivalence and demand of reading ability of mathematics tasks in different languages.* (Ph.D). Umeå University, Umeå.

Torkildsen, S. H., & Maugesten, M. (2007). *Sirkel 9: Grunnbok : matematikk for ungdomstrinnet* (1 ed. Vol. A). Oslo: Aschehoug.

Tranøy, K. E. (2019). Metode. *Store norske leksikon*. Retrieved from https://snl.no/metode

Turner, R., Dossey, J., Blum, W., & Niss, M. (2013). Using Mathematical Competencies to Predict Item Difficulty in PISA: A MEG Study. In M. Prenzel, M. Kobarg, K. Schöps, & S. Rönnebeck (Eds.), *Research on PISA: Research Outcomes of the PISA Research Conference 2009* (pp. 23-37). Netherlands: Springer.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet : grunnskolen* (M. Saabye Ed. Midlertidig utg. juni 2006. ed.). Oslo: Kunnskapsdepartementet.

Utdanningsdirektoratet. (2015). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet : grunnskolen* (M. Saabye Ed. [11. utg.]. ed.). Oslo: Pedlex.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Fagfornyelsen. Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05)*. Retrieved from https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Utdanningsdirektoratet. (udatert). RefLex - rettleder for kvalitet i læremidler. Retrieved from https://reflex.udir.no/egenvurdering/oversikt?mode=Veileder

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and middleschool mathematics: teaching developementally* (8 ed.). Essex: Pearson Education Limited.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2019). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally* (10 ed.). Boston: Pearson.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swetz & Zeitlinger B.V.

Watanabe, T. (2007). Initial treatment of fractions in Japanese textbooks. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *29*(2), 41-60.

Waagene, E., & Gjerustad, C. (2015). *Valg og bruk av læremidler*. Retrieved from udir.no: https://www.udir.no/globalassets/filer/tall-og-forskning/forskningsrapporter/Valg_og_bruk_av_laremidler

## Vedlegg: MEG-rammeverket

Hentet fra Turner et al. (2013).

| Communication | |
|---|---|
| Variable-definition | **Communication** |
| | [Decoding and **interpreting** statements, questions and tasks; including **imagining** the situation presented so as to **make sense** of the information provided; **presenting and explaining** one's work or reasoning.] |
| Level 0 | Understand a short sentence or phrase relating to a single familiar concept that gives immediate access to the context, where it is clear what information is relevant, and where the order of information matches the required steps of thought. |
| Level 1 | Identify and extract relevant information. Use links or connections within the text that are needed to understand the context and task, or cycle within the text or between the text and other related representation/s. Any constructive communication required is simple, but beyond the presentation of a single numeric result. |
| Level 2 | Use repeated cycling to understand instructions and decode the elements of the context or task; interpret conditional statements or instructions containing diverse elements; or actively communicate a constructed description or explanation. |
| Level 3 | Create an economical, clear, coherent and complete description or explanation of a solution, process or argument; interpret complex logical relations involving multiple ideas and connections. |

| Problem solving | |
|---|---|
| Variable-definition | **Solving problems mathematically** |
| | [Selecting or devising, as well as implementing, a mathematical strategy to solve problems arising from the task or context.] |
| Level 0 | Take direct actions, where the strategy needed is stated or obvious. |
| Level 1 | Decide on a suitable strategy that uses the relevant given information to reach a conclusion. |
| Level 2 | Construct a strategy to transform given information to reach a conclusion. |
| Level 3 | Construct an elaborated strategy to find an exhaustive solution or a generalised conclusion; evaluate or compare strategies. |

| | |
|---|---|
| Modelling Variable-definition | **Modelling**<br>[**Mathematising** an extra-mathematical situation (which includes structuring, idealising, making assumptions, building a model), or **making use** of a given or constructed model by **interpreting** or validating it in relation to the context.] |
| Level 0 | Either the situation is purely intra-mathematical, or the relationship between the real situation and the model is not needed in solving the problem. |
| Level 1 | Interpret and infer directly from a given model; translate directly from a situation into mathematics (for example, structure and conceptualise the situation in a relevant way, identify and select relevant variables, collect relevant measurements, make diagrams). |
| Level 2 | Modify or use a given model to satisfy changed conditions or interpret inferred relationships; or choose a familiar model within limited and clearly articulated constraints; or create a model where the required variables, relationships and constraints are explicit and clear. |
| Level 3 | Create a model in a situation where the assumptions, variables, relationships and constraints are to be identified or defined, and check that the model satisfies the requirements of the task; evaluate or compare models. |

| | |
|---|---|
| Representation Variable-definition | **Representation**<br>[**Interpreting**, translating between, and **making use** of given representations; **selecting** or **devising** representations to capture the situation or to present one's work. The representations referred to are depictions of mathematical objects or relationships, which include equations, formulae, graphs, tables, diagrams, pictures, textual descriptions, concrete materials] |
| Level 0 | Directly handle a given representation, for example going directly from text to numbers, reading a value directly from a graph or table, where minimal interpretation is required in relation to the situation. |
| Level 1 | Select and interpret one standard or familiar representation in relation to a situation. |
| Level 2 | Translate between or use two or more different representations in relation to a situation, including modifying a representation; or devise a simple representation of a situation. |
| Level 3 | Understand and use a non-standard representation that requires substantial decoding and interpretation; or devise a representation that captures the key aspects of a complex situation; or compare or evaluate representations. |

| | |
|---|---|
| Symbols and formalism | |
| Variable-definition | **Symbols and formalism** |
| | [Understanding, **manipulating**, and **making use** of symbolic expressions within a mathematical context (including arithmetic expressions and operations), governed by mathematical **conventions and rules**; understanding and **utilising constructs** based on definitions, rules and **formal systems**.] |
| Level 0 | No mathematical rules or symbolic expressions need to be activated beyond fundamental arithmetic calculations, operating with small or easily tractable numbers. |
| Level 1 | Make direct use of a simple functional relationship, either implicit or explicit (for example, familiar linear relationships); use formal mathematical symbols (for example, by direct substitution or sustained arithmetic calculations involving fractions and decimals) or activate and directly use a formal mathematical definition, convention or symbolic concept. |
| Level 2 | Explicit use and manipulation of symbols (for example, by algebraically rearranging a formula); activate and use mathematical rules, definitions, conventions, procedures or formulae using a combination of multiple relationships or symbolic concepts. |
| Level 3 | Multi-step application of formal mathematical procedures; working flexibly with functional or involved algebraic relationships; using both mathematical technique and knowledge to produce results. |

| | |
|---|---|
| Reasoning and Argumentation | |
| Variable-definition | **Reasoning and argumentation** |
| | [Logically rooted thought processes that explore and link problem elements so as to **make inferences** from them, or to **check a justification that is given** or **provide a justification** of statements.] |
| Level 0 | Make direct inferences from the instructions given. |
| Level 1 | Reflect to join information to make inferences, (for example to link separate components present in the problem, or to use direct reasoning within one aspect of the problem). |
| Level 2 | Analyse information (for example to connect several variables) to follow or create a multi-step argument; reason from linked information sources. |
| Level 3 | Synthesise and evaluate, use or create chains of reasoning to justify inferences or to make generalisations, drawing on and combining multiple elements of information in a sustained and directed way. |