MASTEROPPGAVE

Masterstudium i skolerettet utdanningsvitenskap med fordypning i begynneropplæringen

Mai 2019

Algebraisk tenkning på småtrinnet

Vera Fjelltveit

OsloMet – storbyuniversitetet

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier

Institutt for grunnskole- og faglærerutdanning

Det fine ved at lære noget er, at ingen kan tage det fra dig.

Dansk oversettelse, B. B King

Forord:

Denne masteroppgaven markerer slutten på min lærerutdannelse på OsloMet. I løpet av de fem årene har jeg stadig fått øynene opp for formidling av matematikkfaget. Jeg har blitt inspirert av flere av mine prakislærere som brenner for at elever skal forstå og bruke matematikken i hverdagssituasjoner.

I denne oppgaven har jeg valgt å fordype meg i algebraisk tenkning på småtrinnet. Prosessen med arbeidet kan sammenlignes med et stort fjell som skal bestiges. Det har kjentes uoppnåelig til tider. Det har vært krevende å starte, vanskelig å jevnlig produsere noe, og ikke alltid lett å se progresjonen i arbeidet. Gleden av å lære noe og interessante funn har hjulpet meg til å fortsette å vandre videre, og til å stadig nærme meg toppen. Det har vært en lærerik og spennende reise.

Det er mange som fortjener en takk for å ha vært gode støttespillere for meg underveis i prosessen med å skrive oppgaven.

Takk til min hovedveileder Bjørn Smestad for konstruktive og gode tilbakemeldinger. Du har hjulpet meg til å navigere meg på riktig kurs når jeg har trengt det. Du er lyttende og ønsker å gi meg de riktige verktøyene for å komme fram til målet. Takk for det.

Takk til mine andre veiledere. Dere har også hjulpet meg i prosessen.

Takk til Kaj Østergaard som er lektor i matematikk for lærerutdannelsen i Aarhus. Du har vært til stor hjelp for å forstå den danske folkeskolen, og hjulpet meg til å finne informanter til mitt forskningsarbeid.

Jeg vil også gi en ekstra takk til lærerne som har vært meg i dette forskningsarbeidet. Dere har alle inspirert meg og jeg er veldig takknemlig for at jeg fikk muligheten til å observere dere.

Takk til mor og far som har lest gjennom teksten og har vært gode støttespillere. Takk til administrasjonen på ARoS Aarhus Kunstmuseum som har gitt meg en fast leseplass, gratis kaffe og latt meg bruke deres kopimaskin.

Aarhus, mai 2019

Vera Fjelltveit

Innholdsfortegnelse:

Sammendrag:

Denne oppgaven handler om algebraisk tenkning på småtrinnet. Arbeidet er gjort i Danmark. Mitt forskningsspørsmål er: *Hvordan tilrettelegger og forstår lærere algebraisk tenkning på småtrinnet?*

For å finne ut av dette har jeg valgt å bruke kvalitativ forskningsmetode. Jeg har valgt å gjøre klasseromsobervasjon og intervju med fire danske lærere. Under observasjonen fokuserer jeg på fire områder innen algebraisk tenkning. Disse områdene er også underbygget i mitt teoretiske rammeverk (Kiran, 2007, Rivera, 2006, Knuth, m.fl, 2016). Hvordan læreren:

A) Tilrettelegger for en eller flere generaliseringsstratgier.

B) Presenterer en relasjon mellom to størrelser.

C) Hjelper elevene til å oppdage og se mønstre.

D) Arbeider med ukjente eller størrelser som varier.

Resultatet viser fire forskjellige måter å tilrettelegge for algebraisk tenkning på småtrinnet. Lærerne integrerer algebraisk tenkning i stor grad inn i deres undervisning. Det er forskjellig hvor mye de fokuserer på de ulike områdene nevnt ovenfor. Forståelsen av begrepet algebraisk tenkning er også nokså ulikt.

Undervisningsoppleggene kan vise at det er mulig for yngre elever å forstå variabler og variasjoner i matematikken. Det ene undervisningsopplegget er i en dansk tredjeklasse. Her tilrettelegger læreren for et opplegg som medfører at elevene bruker flere generaliseringsstratgier. Det viser til at elever forstår og kan bruke symbolspråk i tidlig alder hvis læren fokuserer på forståelse. Det blir også drøftet om det egentlig er nødvendig at læreren tilrettelegger for symbolspråk for at elevene skal forstå den algebraiske tenkningen.

Summary:

This task is about algebraic thinking from grade 1-4. The work has been done in Denmark. My research question is: *How do teachers facilitate and understand algebraic thinking from grade 1- 4 ?*

To find out this, I have chosen to use qualitative research method. I have chosen to do class -observation and interview with four danish teachers. During the observation I focus on four areas of algebraic thinking. These areas are also a part of my theoretical framework (Kiran, 2007, Rivera, 2006, Knuth, m.fl, 2016) How the teacher:

A) Facilitates one or more generalization strategies.

B) Presents a relationship between two sizes.

C) Help students discover and see patterns.

D) Working with unkown or sizes that vary.

The result shows four different ways to adapt algebraic thinking in grade 1-4. The teachers integrate algebraic thinking into their teaching. It`s different how much they focus on the different areas mentioned above. The understanding of the term algebraic thinking is also quite different. It also indicates that students understand and can use symbolism in early age if the lesson focuses on understanding. It will also be discussed if is necessary for the teacher to arrange symbolism for students to understand the algebraic thinking.

Kapittel 1

1. 0 Innledning:

Temaet for forskningen er tidlig algebra. Begrepet har vokst ut fra algebra, og skilt seg som et eget emne innen forskningen på matematikk i skolen. Det er et forholdsvis nytt emne. Det aller meste av litteraturen om tidlig algebra er skrevet de siste 10-15 årene. Tidlig algebra er en direkte oversettelse av ”early algebra” som i de siste årene har kommet opp som et eget begrep i forskningslitteraturen.

1.1 Bakgrunn for valg av oppgave:

Etter mine fire første år som lærerstudent var matematikkdidaktikk noe som stadig vekket min interesse. I april 2018 fikk jeg muligheten til å være med på en matematikkonferanse i Oslo. Her ble blant annet det første utkastet for den nye revideringen av læreplanen i matematikk også presentert. I utkastet var det fokusert på at abstraksjon og generalisering skal være kjerneelementer. Formålet er at elevene skal forstå representasjoner og fremgangsmåter av økende abstraksjonsgrad. Elevene skal derfor oppdage sammenhengen og ikke bli presentert for en ferdig løsning. Det ble også påpekt at disse kjernelementente skal sees i sammenheng med kunnskapsområdene tall og algebra, siden algebraisk tenkning er en viktig framgangsmåte og forutsetning for abstraksjon og generalisering (Utdanningsdirektoratet, 2018).

På ungdomskolen var algebra noe som vekket min interesse. Det var den delen av matematikken jeg tok fort. Selv om jeg var en elev som syntes matematikkfaget var vanskelig både på barneskolen og ungdomskolen. At barn blir introdusert for algebra i tidlig alder synes jeg er spennende. I noen andre land har man allerede begynt å introdusere for algebra på småtrinnet. Et av de landene er Danmark. Derfor fant jeg ut at det det kunne vært interessant å gjøre mitt forskningsarbeid der. Tall og algebra har vært en del av den danske trinnmålbeskrivelsen i leseplanen for 1-3 klasse siden 2009 (UVM, 2009, s 20). Det var likevel ikke før ″ Fælles Mål 2014″ kom at det ble tydelig fokus på tidlig algebra i den danske skolen. Det betyr at allerede fra førsteklasse skal det arbeides med algebraisk tenkning. Her er fokuset spesielt på elevenes tenking om mønstre, sammenheng og matematiske strukturer. Det handler blant annet om at elevene skal kjenne igjen regneoperasjoner, lære å identifisere, analysere, og beskrive hvordan størrelser varierer i forhold til hverandre (Undervisningsministeriet, 2014, Knuth, m. fl, 2016).

Dette er ikke en studie som sammenligner Norge og Danmark i forhold til tidlig algebra. Hensikten er å se konkrete undervisningsopplegg og få et innblikk hvordan lærerne forstår algebraisk tenking. Siden Danmark er kommet litt nærmere enn Norge kan det være med på å gi en interessant datamateriale.

1.2 Mitt forskningsspørsmål

I algebra må elevene ta i bruk kunnskaper de har utviklet i aritmetikken. Denne kunnskapen skal da generaliseres til kunnskap i algebra. For at overgangen mellom aritmetikk til algebra skal kunne skje, må elever ha en god forståelse for tallbegrep og kunne beherske ferdigheter i tallbehandling (Utdanningsdirektoratet, 2012).

Mitt forskningsspørsmål er: hvordan tilrettelegger og forstår lærere algebraisk tenkning på småtrinnet?

Forskningsspørsmålet er todelt. De handler om hvordan lærerne tilrettelegger for algebraisk tenkning. Det handler også hvordan de forstår begrepet. For å finne ut av dette har jeg valgt å bruke kvalitativ forskningsmetode. Jeg har valgt å gjøre klasseromsobservasjon og intervju med fire danske lærere. Under observasjonen fokuserer jeg på fire områder innen algebraisk tenkning. Disse områdene er også underbygget i mitt teoretiske rammeverk (Kiran, 2007, Rivera, 2006, Knuth, m. fl, 2016).

Hvordan læreren:

A) Tilrettelegger for en eller flere generaliseringsstrategier.

B) Presenterer en relasjon mellom to størrelser.

C) Hjelper elevene til å oppdage og se mønstre.

D) Arbeider med ukjente eller størrelser som varierer.

1.3 Algebraisk tenking i en dansk kontekst

Undervisningsministeriet (2014) har beskrevet tre kjerneområder som den danske folkeskolen har fokus på. Denne beskrivelsen av algebra dreier seg om undervisning i algebra som helhet og ikke kun i undervisningen i barneskolen. Den er også i tråd med de fire hovedområdene jeg har valgt å fokusere på under min observasjon:

De tre kjerneområdene er:

1. At bruge variable til at repræsentere ubekendte eller størrelser, der varierer.
2. At lighedstegnet repræsenterer en relation mellem to lige store størrelser.
3. At opdage og generere mønstre og generalisere ved hjælp af symbolsprog.

I følge Knuth m. fl. (2016) handler algebra i grunnskolen om at elevene identifisere og representerer grunnleggende aritmetiske kjennetegn. Når elevene arbeider undersøkende med å regne med hele tall har de mulighet for å utvikle kunnskap om forskjellige kjennetegn ved relasjoner mellom tall. Dette er også presentert under kjerneområdene i den danske læreplanen. Det betyr likevel ikke at dette er implementert blant lærere ute i den danske folkeskolen.

1.4 Oppgavens oppbygging

Oppgaven består av fem kapitler. I kapittel 1 har jeg beskrevet bakgrunn for oppgaven. Her har jeg også formulert et forskningsspørsmål og utdyper det. Videre forklarer jeg algebraisk tenking i en dansk kontekst.

I kapittel 2 vil jeg presentere mitt teoretiske rammeverk for oppgaven. Her vil jeg belyse ulike teorier om algebraisk tenkning, forholdet mellom aritmetikk og algebra og noen ulike perspektiver ved den algebraiske tenkning. Det pedagogiske aspektet er også tilstede i mitt teoretiske rammeverk.

I kapittel 3 beskrives metodene jeg har brukt til innsamling, bearbeidelse og analyse av empiri. I forbindelse med oppgaven har jeg tatt en del valg før og underveis i arbeidet. Jeg vil også beskrive utvalget, prosessen som har vært med datainnsamlingen og hvordan data har blitt analysert.

I kapittel 4 presenterer jeg funnene mine. Det inneholder to deler. I den første delen tar jeg utgangpunkt i lærerens undervisningsopplegg. I den andre delen tar jeg utgangpunkt i hver enkelt lærer. Her går jeg mer i dybden på hvilke av områdene som er mest tilstede i lærenes undervisning.

I kapittel 5 drøfter jeg mine hovedfunn. Her vil jeg trekke sammen trådene, og drøfte hva jeg har funnet ut. Jeg oppsummerer med en drøftings konklusjon. Dette kapittel inneholder også refleksjon og en ettertanke over forskningen jeg har gjort.

Kapittel 2

2.0 Teoretisk bakgrunn

Her vil jeg presentere mitt teoretiske rammeverk for oppgaven. Jeg vil belyse ulike teorier om algebraisk tenkning, forholdet mellom aritmetikk og algebra og noen ulike perspektiver ved den algebraiske tenkning. Det pedagogiske aspektet er også tilstede i mitt teoretiske rammeverk.

2.1 Algebra i et historisk perspektiv

Algebra er en svært gammel disiplin. I følge Kirean (2004) har algebra siden 1200 år blitt sett på som vitenskapen om likningsløsning**.** Det vi også vet er at babylonerne utviklet algebraiske systemer og løste ligninger. Ordet algebra er latinsk og betyr gjenforening. Det var likevel ikke før moderne tid at den algebraiske tallteorien ble dannet. Dette synet har ikke forandret seg opp gjennom årene. Det har derimot tidspunktet for når elever blir presentert for algebra. Kieran (2007) mener at elever bør bli eksponert for algebraiske ideer samtidig som de utvikler sine aritmetiske ferdigheter. Det vanlige har vært at elevene har først fokus på aritmetikk i barneskolen, og deretter møter algebra i ungdomsskolen.

Det at man skal lære seg aritmetikk før en kan lære seg algebra har vært den ledene tankegangen i mange år. På 1970 – tallet pekte man på forskjellige vanskeligheter elever hadde med algebra. Det var her tanken om å introdusere algebra tidligere ble brakt fram på banen. Formålet var å gjøre algebraen tilgjengelig for en større gruppe elever (Kieran, 2007). Det ble også påpekt at det at er en enighet om at måten å utvikle slike algebraiske ideer ikke er å dytte ungdomsskolepensum ned i barneskolen. I følge Kirean (2007) krever utvikling av algebraiske ideer en fundamental endring i hvordan aritmetikk ses på og undervises. En må utvikle en bedre forståelse omkring de faktorene som er med på å gjøre overgangen fra aritmetikk til algebra så vanskelig for elevene (Kieran, 2007).

Forskning om tidlig algebra har fått økende interesse (Kaput, J & Blanton, M, 2001, Rivera, 2006, Kieran 2017). Slike ideer går imot den tradisjonelle læreplanen om at algebra kan læres etter at elevene har tilstrekkelig kunnskap om aritmetikk. Det utelukker algebra fra grunnskolen i mange læreplaner rundt om i verden. Det har blitt diskutert når elever bør introduseres for algebra og hva som skal inkluderes i introduksjonen når elever lærer algebra. I tillegg har det kommet mange ulike definisjoner på hva som er algebra.

I følge Thomas Kaas (2018) kan litteraturen om tidlig algebra deles inn i to typer begrunnelser (s 11). På den ene siden er tidlig algebra et svar på de problemer elever har eller har hatt med å utvikle algebraiske forståelser. En slik begrunnelse baserer seg på forskning i 1980 årene og 1990 årene. Forskningen har dokumentert elevers misoppfatninger til algebra. Denne type forskning har vokst ut i fra en amerikansk kontekst. På 1990 – tallet ble algebra innført i undervisningen fra 1 til 12 klassetrinn i de amerikanske skoler (Kaas, 2018, s 2). Hensikten var å integrere algebra med andre fagområder. Den andre type begrunnelse baserer seg på Vygotsksis teori om læring og utvikling. Denne type forskning har vokst ut fra en russisk kontekst. Den fremheves ofte mindre i litteraturen, men har gitt grunnlag for flere forskningsprosjekter. Deriblant i Nord-Amerika og Europa (Kaas, 2018, s 11).

Siden da har det blitt mer fokus på å intregere algebra i hele skoleforløpet i en rekke land. I 2017 ble det påpekt av Stephens, Ellis, Blanton og Brizuela (2017) at selv om det ikke er helt enighet blant forskere om hva som er algebra og algebraisk tenkning, så gir empirisk forskning solide argumenter for at 6- 12 årige barn kan og bør utvikle algebraisk tenkning. (Kaas, 2018, s 2). Videre påpeker Kaas (2018) at det er stadig gradvis bevegelse blant forskere i synet på algebralæring og undervisning i algebra. Adskillelsen av algebra og andre matematiske fagområder kan sees som en snever oppfattelse av det faglige innholdet i algebra. Algebra kan f.eks også være et redskap for å forstå den teoretiske tenkningen (Kaas, s 11).

2.2 Hvordan definerer man algebra?

Carraher og Schliemann (2007) mener algebra eksisterer i alle matematiske emner. Algebraen skal derfor ikke introduseres som et eget emne, men den skal gjennomsyre aritmetikken og andre matematiske emner allerede fra den første opplæringen i matematikk begynner. Hovedideen er at algebra er en del av aritmetikken og at aritmetikken inneholder mange algebraiske elementer, bare uten bruk av algebraisk notasjon. I følge dem er gapet mellom aritmetikk og algebra noe som ikke trenger å eksistere (Carraher og Schliemann, 2007).

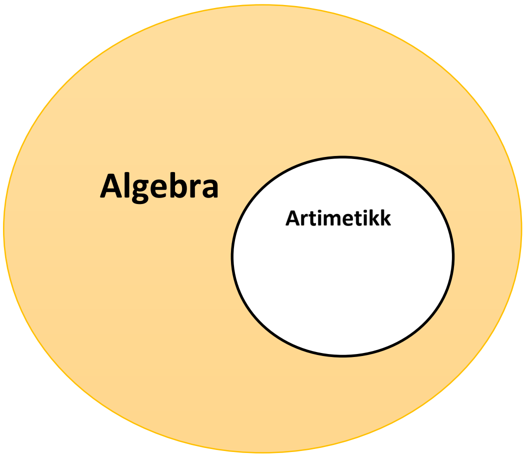
For å vise hvor komplekst algebra er, og hvor vanskelig det er å komme med en klar definisjon viser Kirean (2007) til et internasjonalt kollokvium for algebra. Her var både matematikere, studenter, lærere og forskere tilstede. De som var tilstede skulle definere algebra. Det førte til syv ulike definisjoner om hva algebra kan innebære. Det kunne være et: skolefag, generalisert aritmetikk, et verktøy, en måte å tenke på, et språk, en kultur, og en aktivitet. Det finnes mange definisjoner og tilnærminger til hva tidlig algebra kan være. Disse definisjonene vil påvirke hvordan vi tilnærmer oss algebraen didaktisk. Det noen vil godta som utrykk for algebraisk tenkning vil andre kanskje hevde ikke oppfyller kravene til hva som er algebra (Kieran, 2017, s 125 - 126).

Carraher og Schliemann (2017) forventer ikke at det skal være en universell enighet om definisjonen tidlig algebraisk tenkning (Kieran, 2017, s 123). Hvilke deler av algebraen som er mest hensiktsmessig for unge elever, er et av spørsmålene de stiller seg. De mener at algebraisk tenkning kan ha ulike former. Det omfatter blant et språk, tabellform og diagram. For flere år siden utviklet Schleimann & Schwartz et nært samarbeid med matematikere og fysikere. Det var et intensivt program for lærerutdanningen på tre semester. Her kom det fram at funksjoner og tidlig algebraisk tenkning spiller en sentral rolle i å intrigere ellers isolerte emner i det tidlige matematikk pensumet (s 123).

2.3 To ulike syn på algebra

Schliemann (2007) mener det er to ulike syn på algebra. Det ene synet ser på algebraen som noe som kommer etter aritmetikken. Tilhengere av en slik tankegang vil at man skal bygge en bro mellom aritmetikken og algebraen. Fundamentet for denne broen skulle finne sted mot slutten av perioden av aritmetikkundervisningen og i starten av algebraundervisningen (Schliemann, 2007).

Det andre synet handler om at aritmetikken er en del av algebraen. I stedet for å fokusere på å finne eller kjenne igjen mønstre, og generalisere aritmetikken. Det handler ikke om når algebraen skal innføres, men hva, hvor og hvordan den skal innføres. Tilhengere av en slik tankegang erkjenner at matematiske symboler brukes forskjellig for artimetikk og algebra (Carraher & Schliemann, 2007). De mener at algebra beveger seg mot abstrakte objekter og relasjoner, og omfatter teknikker og representasjonsformer. De mener videre at vanskelighetene ved å forstå algebraen handler i stor grad om grunnleggende mangler i den elementære matematikken (Petersen &Mortensen, 2011, s 11).



Figur 1: Aritmetikken som en del av algebraen (Schliemann, 2007)

2.4 Algebraisk tenkning

Kirean (2004) sier at algebraisk tenkemåte kan læres gjennom å analysere forhold mellom ulike størrelser, undersøke strukturen i oppgaver eller arbeide med relasjoner mellom mengder i tekstoppgaver. Kirean mener algebraisk tenkning på de tidlige trinn involverer utviklingen av tenkemåter innenfor aktiviteter hvor bokstav og symboler kan brukes som et verktøy. Dette er aktiviteter som ikke er eksklusiv for algebra, men likevel kan bidra til algebraisk tenkning. Hun trekker fram blant annet å analysere forholdet mellom størrelser, studere endring, generalisere, problematisere, modellere, bevise og forutse (Kiran, 2004, s 140- 141, egen oversettelse). Hun fokuserer også på disse områdene:

1) Tenke på det generelle i det spesielle.
2) Tenke på hvordan man kan presentere sammenhenger i problemer.
3) Tenke på prosesser som begreper.
4) Kunne forvente, stille hypoteser og grunngi.
5) Kunne visualisere, gestikulere og formulere.

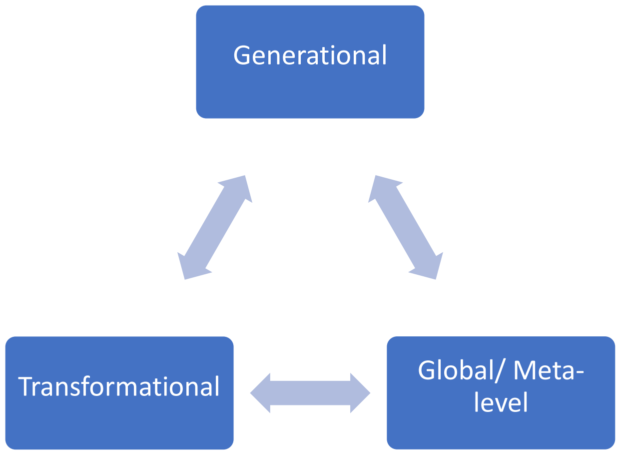
Mens Rivera (2006) har noen andre områder hun mener læreren bør fokusere på. Hun gir noen klare føringer på hvordan undervisningen kan være. Dette er en oppsummering av det hun fokuserer på:

1) Aritmetikken må undervises slik at elevene blir gjort oppmerksomme på at det finnes relasjoner og sammenhenger som må kommuniseres.
2) Eleven må lære å sette pris på uformelle og formelle representasjoner. Et mål med undervisningen vil være å føre sammen elevenes egne symboler med formelle matematikkspråket.
3) Lære elevene funksjoner så de tidlig kan begynne å utvikle evnen til matematisk modellering.
4) De må få oppgaver der det er flere løsninger.

I litteraturen om tidlig algebra er det likevel ikke helt enighet om hva som betegnes som algebraisk tenking. Radford (2014) mener det er nødvendig at vi har et bevisst forhold til om det er aritmetikk eller algebra vi holder på med. Dersom vi har mål om å jobbe med elevens algebraiske tenking, er det dermed nettopp det vi gjør. Han mener det er nødvendig å være klar over at aritmetikk og algebra er forskjellige.

Hvordan kan vi vite hva som ikke betegnes som algebraisk tenkning? Radford (2014) mener at notasjon ikke karakteriserer algebraisk tenkning. Det alfanumeriske tallsystem vi bruker i dag er en ny oppfinnelse. Flere gamle kulturer har brukt algebra uten notasjon. Dermed mener han at bruk av bokstaver i algebra er verken nødvendig eller tilstrekkelig for å tenke algebraisk. Det gjør heller ikke bruken av variabler eller ubestemte størrelser. Han bruker eksempler med en likning: $2x + 2 = 10 + x$. Denne likningen vil nok flere løse ved prøving og feiling. Det vil inkludere en eller annen form for notasjon. Likningen dreier seg om å finne en ubestemt eller ukjent størrelse. Han mener at det likevel er en prøv – feil metode som ikke er en algebraisk prosedyre. En slik metode mener dermed Radford (2014) ikke betegnes som algebraisk.

2.5 GTG – modellen



På bakgrunn av idéen om algebra som en aktivitet, skapte Kieran GTG- modellen (Kieran, 2007). Modellen deler algebraiske aktiviteter inn i tre kategorier: *generative activity, transformational activity and global/meta-level activity*. I ”generative activity” fortolkes sitasjoner, verdier, mønstre og forhold for så å bli representert med algebraiske symboler i utrykk og likninger. Typiske aktiviteter med ”generative activity” inkluderer arbeid med likninger med ukjente eller variabler som representerer en problemsituasjon, utrykk for generaliserte geometriske mønstre eller utrykk for styrende regler for numeriske forhold (Kieran, 2007). Videre mener hun at det forutsetter at en har kjennskap til det algebraiske språket og symboler for å arbeide med ”generative activity”. Spesielt gjelder det variabler, ukjente og likhetstegnet. Typiske eksempler på slike aktiviteter er:

- Likninger med ukjente eller variabler for å representere en problemsituasjon.

- Uttrykk for generaliserte geometriske mønstre eller numeriske følger.

- Uttrykk for styrende regler for numeriske forhold.

De ”transformational activity” er de regnetekniske prosessen i algebra. De refereres ofte som de ” regel- baserte ” aktivitetene (Kieran, 2007). En stor del av denne type aktiviteter handler om å forandre formen til et utrykk eller likning for å ivareta likeverdighet. Dette er prosesser som foregår i den abstrakte matematikken. Typiske eksempler på ”transformational activity” er: samle like utrykk, faktorisere, utvide, substituere, addere, og multiplisere eller forenkle utrykk (Kieran, 2007).

Mens de ”global/meta-level activity” gir ofte grunn og motivasjon for å jobbe med generende objekter og transformerende prosesser (Kieran, 2007). Felles for alle de ”global/meta-level activity” er at det finnes flere måter å komme frem til et svar på, og det skal være mulig å komme frem til svaret uten å bruke formell algebra. Eksempler på slike aktiviteter kan være problemløsning, arbeid med generaliserte mønstre, argumentasjon og bevis, og modellering (Kieran, 2007).

2.6 Relasjonell tenkemåte

Flere forskere betegner relasjonell tenkemåte som en samlende idé for å engasjere lærere i samtaler som støtter algebraisk resonnering med elever. Relasjonell tenkemåte innebærer en forståelse av relasjoner mellom to tall. Knuth (2006) har en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Han mener man bør se likhetstegnet som “det samme som”. Videre argumenterer han for en relasjonell forståelse av likhetstegnet er viktig for at transformasjoner man utfører på likninger skal være meningsfulle (Knuth, 2006). Jacobs m.fl (2007) mener at en relasjonell forståelse av likhetstegnet involverer at man ser tegnet som indikator på en relasjon mellom to uttrykk. Videre bør man forstå at ved å utføre de samme transformasjonene på begge uttrykkene vil relasjonen mellom dem være uendret (Jacobs m.fl, 2007). Mens Warren (2003) sier det slik:

”Mathematical structure is concerned with the (i) relationships between quantities (for example, are the quantities equivalent, is one less than or greater than the other); (ii) group properties of operations (for example, is the operation associative and/or commutative, do inverses and identities exist); (iii) relationships between the operations (for example, does one operation distribute over the other); and (iv) relationships across the quantities (for example, transitivity of equality and inequality) (Warren 2003 , p. 123) *”.*

Kieran (2017) mener derimot at en burde utvikle et rasjonelt syn på likhetstegnet for å lære at algebra kan være en stor hindring for elever når de skal bevege seg fra aritmetikk til algebra. Hvis elever ikke ser på likhetstegnet som en indikator på en relasjon, vil det å transformere likninger ha lite mening og kun kan læres som memorerte regler (s 75). Et eksempel kan være at elever løser ligningen $57 + 36 = \square + 34$ ved å sette tallet 93 i boksen. Det viser seg at mange elever mangler forståelse for likhetstegnet. En av grunnene for det kan være at likhetstegnet ofte brukes i forbindelse med oppgaver hvor det handler om å regne et stykke eller hvor selve operasjonen står på venstre side og svaret på høyre side. Det betyr at elever kan komme til å betrakte likhetstegnet som et symbol på at de skal regne ut et svar. Derfor er det sentralt at elevene utvikler en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Det vil si at regneutrykkene på begge sider av likhetstegnet har samme verdi.

2.7 Generalisering

Generalisering er en sentral del av algebraisk tenkning (Kaput 2008, Mason,1996, Kieran, 2004). Kieran hevder at det dominerende fokuset på generalisering i utviklingen av algebraisk tenkning har i stor grad skjult prosessen med å se på strukturer. Kieran (2004) påpeker:

" Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing.." (Kieran, 2004, s 149).

I Kieran definisjon er det verdt å merke seg at det tradisjonelle fokuset på bokstaver som plassholdere for tall ikke er i fokus for forskningen. Hun beskriver også en del faglige emner som har vært fokus i forskningen. Kaput (2008) derimot påpeker på to hovedaspekter ved algebraisk tenkning:

A) Algebra as systematically symbolizing generalizations of regularities and constraint.

B) Algebra as syntactically guided reasoning and action son generalizations expressed in conventional symbol systems.

Det er noen forskjeller mellom Kaput og Kieran fremstillinger av tidlig algebra. For eksempel ser konvensjonelle symbol ut til å spille en større rolle enn i Kaputs framstilling enn i Kieran fremstilling. Begge forskere ser blant annet på å generalisere, og resonnere som sentrale aspekter av algebraisk tenkning (Kaas, 2018, 4-5).

I følge Lannin (2005) finnes det en rekke bevis for å vise at holdbarheten av et generelt utrykk er vanskelig for elevene. Dette antas å skyldes et større fokus på å finne bestemte tilfeller av en situasjon istedenfor å bestemme en generell relasjon til problemet. Selv om generalisering er en sentral matematisk aktivitet, er det ofte at elevene ikke får oppgaver som gir rom for dette. For eksempel regnefortellingen: ″Hvor mye koster 12 tennisballer hvis hver tennisball koster 10 kr? ″. I en slik oppgave blir ikke elevene spurt om eller utfordret til å se det generelle i oppgaven. Den gir ikke rom for å se på hva som skjer hvis prisen på tennisballene eller antallet endres (Lannin, 2005).

2.8 Å oppdage mønstre

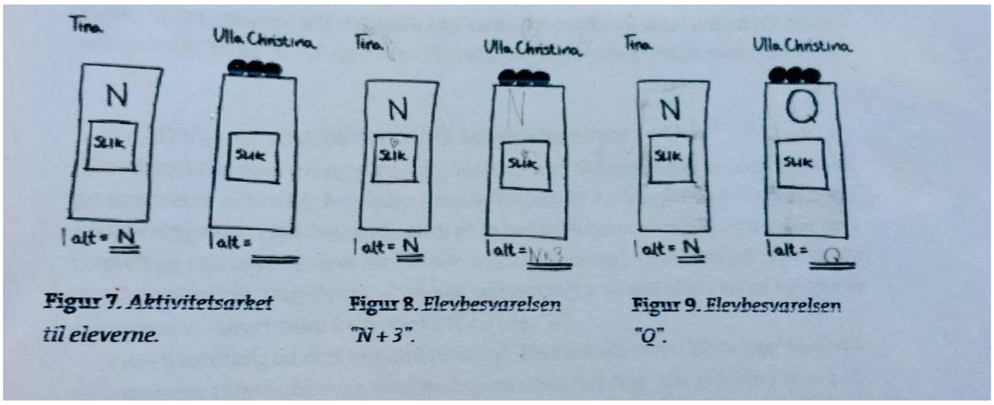
Kieran (2017) påpeker at det finnes mange forskjellige typer algebraiske mønstre. Hun sier også: *”While many different types of patterns have been used in early algebraic activity, one of the most widely used types is that of the growing figural ”* (s 81). Videre trekker Kieran (2017) fram at øyet må lære seg å se etter strukturelle funksjoner i en rekke matematiske objekter, f.eks figurtall. Det er dermed ikke figurtallene i selv, men strukturen i mønsteret elevene skal oppdage. Her viser hun videre til et prosjekt av Radford (2011) . Han har sett på utviklingen på ulike typer figurer. Han trekker fram fra studiet:

” Generally speaking, to extend a figural sequence, the students need to grasp a regularity that involves the linkage of two different structures: one spatial and the other numerica; from the spatial structure emerges a sense of the figures' spatial position , whereas their numerosity emerges from a numerical structure.(Kieran, 2017 s 81)”.

For å fram til geometriske mønstre er elevene nødt til å resonnere. Det som er felles for de resonnerende aktiviteter er at det finnes flere måter å komme frem til svaret (Kieran, 2007). Hun nevner problemløsing, modellering, arbeide med generaliserte mønstre, argumentasjon, studering av forandring og å lete etter forhold etter strukturer som resonnerende aktiviteter (Kieran, 2007).

Å oppdage mønstre innenfor algebraisk tenking kan bety mye forskjellig. Petersen & Mortensen (2011) har undersøkt om det er mulig for yngre elever å forstå variabler og variasjoner i matematikken. Oppgaven legger opp til at elevene kan arbeide med variabler. Denne samtalen utvikler seg til en fellesdiskusjon i klassen der de lager et skjema sammen. Der de sammen ser et mønster eller en form for struktur i tallene i skjemaet (Petersen & Mortensen, 2011, s 20 - 21). Det er disse strukturene som kan få elevene til å tenke algebraisk.

Petersen og Mortensen (2011) fant ut at introduksjonen av den såkalte mere ″abstrakte ″ matematikken fungerte også på småtrinnet. Elevene får vite at i de to godteriboksene er det like mange godteri. Læreren lurer så på hvor mange godteri Ulla og Tina får i alt. Denne utfordringen tar elevene veldig forskjellig:



Figur 7. Aktivitetsarket til eleverne. Figur 8. Elevbesvarelsen "N + 3". Figur 9. Elevbesvarelsen "Q".

Elevene kommer med mange forskjellige forslag om hva antallet til Ulla sine godteri heter. Noen kaller det for: "N + 3". Videre er det andre som kaller det for: "Q". Denne besvarelsen overrasker Mortensen og Petersen (2011, s 21). Det viser seg at de elever som har brukt bokstaven "Q" har telt frem fra " N " til " Q " i alfabetet, og har addert tre ekstra godteri. Mortensen og Petersen (2011) tror at elever som kaller antall godteri med bokstaven" Q " identifiserer dette med et ukjent tall. Videre at elever som skriver plassholderen med "N + 3" identifisere den med variabel (s 22). Dermed viser elevene at det ulike mønstre og strukturer en kan oppdage ved en slik oppgave.

2.9 Lærerens rolle for å tilrettelegge for algebraisk tenking

I følge Bednarz & Janvier (1996) har den tidlige algebraen sitt fundament i problemorienterende kontekster (Petersen & Mortensen, 2011, s 10). Her blir algebraen sett som et problemløsende verktøy hvor hverdagsrelaterende situasjoner blir tatt opp til diskusjon. Videre gir det et utgangpunkt til å bruke algebraen som et modelleringsverktøy. Den formelle notasjonen skal introduseres gradvis for å unngå bruk av formalisering uten at elevene har en forståelse av den, og hva den skal brukes til. Videre at man kan ikke forvente at elevene skal oppdage algebra på egenhånd uten veiledning av læreren. Dermed har læreren en sentral rolle for den algebraiske tenkingen. Videre mener Petersen & Mortensen (2011) at den pre- algebraiske tankegangen har preget den danske algebraundervisningen i mange år (s 11). Med en slik tilgang mener de det er mulig å innføre algebra i mindre klasse med utgangpunkt i arbeide med algebra. Videre at den kan være en god måte for elevene å møte algebraiske notasjoner i tidlig alder

Kaput og Blanton (2001) mener at dersom elevene begynner å bruke begreper i sammenhenger som er naturlige selv om de ikke forstår betydningen, så kan det føre til at begrepene blir mer meningsfulle for elevene. Videre er to hovedområder de legger spesielt vekt på:

a) Det første området handler om at lærerne skaper muligheter for algebraisk tenkning. Da spesielt muligheter for å generalisere. Da spesielt læremidler man har og ved å algebraisere oppgaver.

b) Kunne skape en klasseromskultur som oppmuntrer og understøtter elever til å generalisere, formalisere, komme med hypoteser og argumenter.

2.10 Utvikle et begrepsapparat

Vygotsky mener at en utvikler begreper gjennom sosiale erfaringer i naturlige situasjoner i hverdagslivet. På den måten blir de også omtalt som hverdagslivets begreper. Barn møter deres liv med erfaring og møtet med konkrete situasjoner. Spontane begreper er ifølge Vygotsky ubevisste begreper fordi de er usystematiske. Deres utvikling begynner med det konkrete og deretter går videre til det generelle.

Det er sentralt i Vygotskys språksyn at språk og tenkning er uatskillelige. Til å begynne med befinner barns tenking seg på et nonverbalt stadium. Senere blir tenking og språk til noe man gjør, og Vygotsky velger å tale om språklig tenking frem for språk og tenking. Han anser den kognitive utviklingen hos barn som noe som henger nøye sammen med barnets mestring av tenkingens sosiale middel, altså språket (Ivar Bråten, 2006, s 162- 165).

2.11 Undringens pedagogikk i matematikk

Den lekende tilnærmingen til matematikkfaget som ivaretar det undrende barnet er noe blant annet Hana (2014) er opptatt av. Men hvilken betydning har det egentlig at barn undrer seg over fenomener i matematikkfaget? Hana (2014) mener at matematikk er et undersøkende fenomen. Her blir blant annet undringen nevnt som en del av den undersøkende virksomheten. Barnet kan også møte den matematiske verden ved å være utprøvende, utforskende og undersøkende (Hana, 2014, s17). Dette er også egenskaper mennesker benytter seg av i møte med verden. Å delta i en undersøkende virksomhet innebærer et fokus på å formulere, drøfte, reflektere over, evaluere spørsmål, argumentere og forklare. Ut i fra Garvey (1977) er utforskende eller undersøkende atferd noe som skiller seg fra leken. Undersøkende atferd fremkalles av ytre stimuli. Når et barn leker er det derimot barnets egnes motiver som bestemmer. Videre mener hun at når barn undersøker ting, er de mer spente i sitt handlingsmønster. Utforskingen har sitt utgangspunkt i det nysgjerrige. ″ Hva er dette?″ eller ″Hva kan det brukes til?″ er spørsmål barn kan stille seg når det utforsker. I leken vil barnet heller stille seg følgende spørsmål ut i fra Garvey:″ Hva kan jeg gjøre med denne?″ (Olofsson, 1994, s 44). Hun beskriver også utviklingen av barns kontakt med nye ting i fire trinn. Først oppdager de noe, deretter skjer en nøye inspeksjon eller studering av tingen. Deretter bruker de tingen slik den skal brukes, og til slutt leker de med den (s 44). Det at barn er undersøkende i sin matematiske virksomhet innebærer et fokus på å formulere, drøfte, og reflektere over matematiske spørsmål og hypoteser. Det er da ifølge Garvey ikke noe som betegnes som lek. [1]

2.12 Samfunnsmessige begrunnelser for tidlig algebra

Mason (2008) mener at en borger i demokratisk samfunn har bruk for å kunne være i situasjoner der involverer algebra (Kaas, 2018). Det som kommer fram er en kritikk på at den eksisterende algebraundervisningen, og en tiltro til at det er mulig å tilby elever algebrakunnskaper som er relevant for samfunnet. Hvordan læreren tilrettelegger for algebraisk undervisning har dermed også betydning for samfunnet. Dette perspektivet viser til en algebraundervisning som sikter bredere enn den eksisterende og utgjør en integrert del av matematikkundervisningen igjennom hele skoleforløpet.

"One of the consequences of failing to make use of children's powers over many generations is that those who have not succeeded with algebra question its value, thinking that for them, arithmetic is sufficient. After all, they were successful without algebra, so why impose it on everyone? Reflection on the presence of arithmetic and algebra in everyday life soon reveals that customers want numbers: They want the price they are to pay. By contrast, entrepreneurs need policies, which are essentially algebraic formulae or at least general procedures for working out prices to be charged, taxes, and so on.." (Mason, 2008, 79).

Mason (2008) gir også et eksempel med et bakeri som selger bollepakke med 6 stykker for 90 pund. En spesiell avtale gir deg en ekstra pakke til halv pris. På en bestemt dag reduseres pakken til 40 pund. Så blir følgende spørsmål stilt: Hva betaler jeg for to av disse pakkene? Svaret viser seg å være 35 pund. Fordi datamaskinen er programmert til å trekke 45 pund fra den andre. Dermed blir det billigere å kjøpe to og kaste unna enn å bare kjøpe bare en. Dette eksempelet illustrerer at entreprenørene trenger å tenke generalitet for å få sine formler korrekte. Mason (2008) påpeker dette er en oppgave man kan bruke i klasserommet for å hjelpe elevene til å se at algebraisk tenkning er samfunnsnyttig.

Mason (2008) sier videre:

[1] Hentet fra egen fagartikkel: *" Lek i skolen? "*, høsten 2018.

"Algebra should not be taught because some people who become entrepreneurs will need to think that way. Algebra should be taught to everyone because it is the natural outcome of the use and development of the relevant powers. Put another way, no one should be confined to arithmetic calculations as their basic numeracy because to do so stunts or even blocks their access to the kind of thinking that is essential for participation in a democratic society: recognition and use of general methods, testing and challenging of generalizations, and questioning the modeling assumptions on which such generalizations are often made " (79).

I Norge er det et ønske om å tilgjengeliggjøre algebra som igjen er med på å demokratisere deler av utdannelsessystemet og arbeidsmarkedet med å utdanne samfunnsborgere. Grønmo og Helgesen (2018) mener at det det er norsk, engelsk og algebra som er de tre viktigste språkene for å møte fremtidenes utfordringer innen miljø, teknologi og økonomi. Algebra mener de er et matematisk basispråk som handler om strukturer, relasjoner og kvantiteter. Algebra fremmer logisk tenking og symbolforståelse. De mener å beherske algebra legger et godt grunnlag for mange typer læring. Matematisk forståelse er viktig både i akademiske utdanninger og i fagutdanninger.

Grønmo og Helgesen (2018) mener også at algebra er nyttig basiskunnskap for å lære programmering. Programmering i matematikkfaget vil være et enormt behov etter videreutdanning i programmering hos lærere. Dette mener de vil igjen gå på bekostning av det skrikende behovet for etterutdanning innen algebra. Videre at hvis Norge skal raskt ta i bruk ny teknologi og få mer miljøvennlige næringer vil behovet for algebrakunnskap øke (Grønmo og Helgesen , 2018).

Kapittel 3

3. 0 Metode

I det følgende kapittelet beskrives metodene jeg har brukt til innsamling, bearbeidelse og analyse av empiri. I forbindelse med oppgaven har jeg tatt en del valg før og underveis i arbeidet. Jeg vil også beskrive utvalget, prosessen som har vært med datainnsamlingen og hvordan data har blitt analysert.

3.1 Metodisk tilnærming

Formålet med forskningsarbeidet er å finne ut hvordan lærere tilrettelegger og forstår algebraisk tekning. For å finne ut av dette har jeg valgt å bruke kvalitativ forskningsmetode. Jeg har valgt å gjøre klasseromsobservasjon og intervju med fire lærere. Intervjuene vil bli gjort i etterkant av observasjonene. Fordelen med kvalitative metoder er at de er mer fleksible (Christoffersen & Johannessen, 2012). Den gir i større grad rom for at spontanitet og tilpasning mellom forsker og informant som fokuserer på et mindre antall (s 17). Kvantitative metoder vektlegger mer utbredelse og et større antall informanter enn kvalitative metoder. Videre er jeg ikke ute etter å tallfeste svar eller sammenligne svarene med hverandre, slik det er naturlig å gjøre i kvantitativ metode (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Forskningsspørsmålet mitt er todelt. Siden jeg skal både finne ut hvordan lærerne tilrettelegger og forstår algebraisk tenkning. Når jeg observerer ser jeg hvordan lærerne tilrettelegger. Når jeg intervjuer kan jeg forstå mer hvordan læreren tenker og forstår begrepet. Dermed mener jeg at ved å kombinere klasseromsobservasjon og intervju, så har jeg et godt grunnlag for å finne ut av mitt forskningsspørsmål.

3.2 Kvalitativt intervju som metode

Det kvalitative forskningsintervjuet søker å forstå verden fra informantenes side (Kvale & Brinkmann, 2009). I forskningsintervjuer snakker vi med folk fordi vi vil vite hvordan de beskriver opplevelsene sine. Kvale og Brinkmann (2009) mener at informantene er subjekter som er delaktige i det kvalitative forskningsintervjuet. Videre påpeker de at selv om de er subjekter, så indikerer de også at folk er underlagt diskurser, ideologier, oppfatninger som påvirker hvordan vi ser og omfatter omgivelsene rundt oss (s 21). Dette er en faktor som spiller inn når jeg skal se på de danske lærerne. Fordelen med kvalitative metoder er at de i større grad søker å gå i dybden på problemstillingen. Det jeg ikke kan finne ut av ved observasjonen kan jeg få avklart og forstå muligens mer i intervjuene. Videre ved å velge kvalitativt intervju har jeg muligheten til å gå i dybden og forstå lærerens tanker.

3.3 Intervjuguiden

Jeg har valgt semistrukturert intervju. Fordelen med et slikt intervju er at den gir rom for å være fleksibel. Intervjuguiden min fungerte som et utgangspunkt for selve intervjuet, men jeg hadde stor frihet i valg av spørsmål, rekkefølgen og tema (Christoffersen & Johannessen, 2012). Jeg har passet på at intervjuguiden var i tråd med problemstillingen og at den var kort. Videre at det var spørsmål som var utdypende nok. Jeg hadde laget tre hovedemner, men hadde noen oppfølgingsspørsmål der det var naturlig. Det var en behagelig intervjusetting med alle informantene. Grunnen til det kan være at de var trygge og rolige, de hadde en ramme å forholde seg til og at jeg gav dem tid til å dele det de hadde på hjertet. Kvalitativt intervju gir også mulighet til å revurdere egne fordommer og rette på egne formuleringer under intervju og i forkant av neste intervju (Christoffersen & Johannessen, 2012). Det var noe jeg erfarte under intervjuene og måtte derfor justere meg litt underveis.

3.4 Utvelgelse av informanter

Det som kjennetegner kvalitative metoder er at vi forsøker å få mye informasjon om et begrenset antall personer (Christoffersen & Johannessen, 2012, s 49). Jeg har fire informanter, og det er en strategisk utvelgelse (Christoffersen & Johannessen, 2012, s 50). For utvalget mitt er lærere som har erfaringer med å arbeide med algebraisk tenkning i den danske skolen. Når jeg skulle rekruttere mine informanter fikk jeg hjelp fra matematikkseksjonen fra lærerutdannelsen i Aarhus. Fordelen med å få intern hjelp var at vedkommende hadde større oversikt over hvilke lærere som kunne passe til mitt forskningsarbeid enn det jeg selv hadde. En svakhet med utvalget er at det er en nokså homogen gruppe. De er også tilknyttet min kontaktperson på en eller annen måte.

Datamaterialet mitt viser likevel gode og ulike arbeid med tidlig algebra på småtrinnet. Kvaliteten i det arbeidet kan være på grunn av min kontaktperson har håndplukket dyktige matematikklærere. De ulike undervisningsoppleggene viser også en bredde i hva tidlig algebra kan være, og hvordan man kan tilrettelegge algebraisk tenkning i en mangfoldig elevgruppe med ulike behov.

Fordelen ved å ha få informanter er at det kan gi større nærhet til de lærerne som er med. Det vil også være mulighet til å gjøre en grundigere analyse for hver informant. Det kan føre til at forskningsarbeidet har dybde. Hvis antallet hadde vært en del større kan det føre til en overfladisk analyse.

3.5 Anonymisering

Jeg har valgt å gi lærerne fiktive navn. Dette er fordi det vil gjøre det lettere i analysedelen å være mer konkret når jeg henviser til mine informanter. En annen side ved å gi lærerne fiktive navn er at informantene ikke bare er lærere. De er også individer. Det kan være med å skape en større nærhet til mine informanter. Videre kan det kanskje være lettere å plassere de ulike opplysningene om de ulike informantene i analysedelen ved å ha et navn å forholde seg til**.** Derfor mener jeg at man i større grad blir kjent med mine informanter ved å tilegne dem fiktive navn. Det vil også være med noen eleveksempler i resultat og analysedelen. De vil også ha fiktive navn. Her er de fiktive navnene jeg har valgt til lærerne:

Lærer 1	Lærer 2	Lærer 3	Lærer 4
Noah	Ida	Nanna	Pernille

3.6 Observasjon som metode

I følge Christoffersen & Johannessen (2012) egner observasjon seg når forskeren ønsker direkte kontakt med det han skal observere. Observasjonen er strukturert (s. 71). Etter å ha lest mye litteratur om algebraisk tenkning på småtrinnet fant jeg ut at begrepet er vidt og rommer mye. For å ha noe konkret å se etter under observasjonen har jeg trukket fram fire hovedområder som jeg mener er sentrale ved arbeid med algebraisk tenkning på småtrinnet. Disse hovedområdene er underbygget i litteraturen (Kiran, 2011, Rivera, 2006, Knuth, m.fl, 2016). For å unngå å bli for styrt av et skjema, så har jeg også vært åpen for at læreren også kan fokusere på andre aspekter ved algebraen som ikke inngår i de områdene jeg har valgt ut. Dette er de fire hovedområdene:

Læreren:

A) Tilrettelegger for en eller flere generaliseringsstrategier.
B) Presenterer en relasjon mellom to størrelser.
C) Hjelper elevene til å oppdage og se mønstre.
D) Arbeider med ukjente eller størrelser som varierer.

3.7 Dokumentering av observasjonen

De fire hovedområdene jeg har kommet fram til gjør at observasjonen er strukturert (Christoffersen & Johannessen, 2012, s 71). Jeg ønsker likevel ikke å være for styrt av disse kategoriene under observasjonen. Det kan være med på å selv lage et fasitsvar for hva man burde fokusere når det kommer til algebraisk tenkning på småtrinnet. Derfor er det nødvendig at jeg som observatør også er åpen for at det finnes andre måter å arbeide med algebraisk tenkning i klasserommet. Da mener jeg at jeg vil i større grad vil finne ut mitt forskningsspørsmål. Det er lærerens tilrettelegging som er fokus. Hovedområdene kan likevel være til hjelp for å gjøre observasjonen mer konkret.

Et annet valg man må gjøre som forsker, er om man skal være deltakende eller ikke deltakende under selve observasjonen (Christoffersen & Johannessen, 2012, s 69). I mitt forskningsarbeid har jeg funnet ut at det er mest hensiktsmessig å ikke være deltakende. Det betyr at forskeren engasjerer seg i samtaler og intervjuer, men er ikke deltakende under selve observasjonen. Grunnen til at jeg selv ikke er deltakende i observasjonen er at det er lærerens tilrettelegging som er i fokus. Hvis jeg selv er deltakende i undervisningen kan dette være med på å påvirke undervisningen i en eller annen grad. Dessuten kan det være at jeg mister fokus på læreren hvis jeg selv er deltaker i observasjonen. Derfor er det lite hensiktsmessig å skulle delta selv i undervisningen når det er læreren som er i fokus.

Under observasjonen ble jeg utfordret på å ikke være deltakende observatør. Det var noen av lærerne som spurte om jeg hadde lyst å gå rundt å se på hva elevene gjorde. Da pratet jeg litt med elevene. Jeg holdt likevel øye med læreren, og hørte etter hvordan de tilrettela for ulike elever. I den ene timen var læren borte i ca 8 minutter. Elevene ble stadig mer urolige og bråkete. Her ble jeg utfordret til å ikke gripe inn i undervisningen siden jeg var den eneste voksne tilstede. Jeg valgte å ikke gripe inn. Heldigvis kom læreren før det ble en ubehagelig situasjon å være i for meg og elevene som ikke var med å lage bråk.

3.8 Under observasjonene

Under observasjonene oppstod det noen distraksjoner som påvirker mitt datamateriale. I Nanna sin time viste det seg at å være en norsk jente tilstede i undervisningen. Jeg brukte litt tid i starten for å finne ut hvem det var. Det viser seg at hun snakker dansk sammen med de andre elevene. Hennes morfar er rektor på skolen og hun har derfor fått lov til å være tilstede. I matpausen er det plutselig en som snakker vestlandsdialekt, og vi snakker litt sammen. Det at jeg begynte med å fokusere på elevene gjorde at jeg mistet litt fokus på læreren. Jeg får derfor ikke med meg alle detaljene i det arbeidet Nanna gjør i oppstarten.

Jeg skulle møte Pernille før timen startet. Det var ikke så lett å finne skolen. Det førte til at jeg mistet ca 7 min fra undervisningen. Jeg fikk derfor ikke snakket med henne før og viste heller ikke hva som foregikk da jeg kom i klasserommet. Det gjorde at det tok litt tid for meg å forstå hva aktiviteten gikk ut på.

Jeg har også dobbeltsjekket med Ida på e- post om en aktivitet i hennes undervisning. Den het minusloven og vil bli presentert i kapittel 4, del 1. Det var ikke så lett å høre fra lydopptaket hva hun sa når hun forklarte den i klassen.

3.9 Datainnsamling

Til sammen er det 12, 5 timer med datamateriale fra klasseromsobservasjonene. Hos Nanna og Pernille har jeg sett et mindre undervisningsopplegg. Disse to lærerne hadde derimot lengre undervisningsøkter. Deres undervisning varte 1,5 time inkludert en liten fruktpause for elevene. Fordelen ved de lengre øktene var at lærerne hadde bedre tid til å gå i dybden på temaet de skulle arbeide med. Samtalen de hadde med elevene var i større grad utforskende og preget av større faglig tyngde. Selv om jeg fikk sett et mindre undervisningsopplegg mener jeg kvaliteten i deres arbeid er tilstrekkelig til å svare på mitt forskningsspørsmål.

Når det gjelder intervjuene hadde jeg et ønske om å få til et intervju med alle lærerne etter hver undervisningsøkt. Dette var ikke mulig å få til med Pernille. Jeg fikk kun et intervju etter den siste undervisningsøkt med denne læreren. Grunnen til det er blant annet at jeg ikke fikk truffet henne før selve intervjuet. De andre lærerne møtte jeg i forkant av observasjonen. Da fikk jeg også møtt skoleledelsen og fikk en omvisning på skolen.

	Noah	Ida	Nanna	Pernille
Undervisningsøkter	3 økter	3 økter	2 økter	2 økter
Klasseromsobervasjon	3, 5 timer	3 timer	3 timer	3 timer
Intervjuer:	41 min	30 min	20 min	36 min
Klassetrinn	2. Klasse	2. Klasse	1.Klasse	3.Klasse

3.10 Forskningsprosjekt

Pernille var tilknyttet et forskningsprosjekt under mine observasjoner. Jeg får vite at forskningen bygger videre på den undersøkende tilgangen som kjennetegner matematikkundervisningen i hennes klasse. Formålet for denne forskningen er at elevene skal være stand til å bruke algebraisk språk som spiller sammen med bl.a. beskrivelser i et naturlig språk. Videre at elevene kan bruke forskjellige språklige representasjoner. I to undervisningsøktene jeg har observert var målet at elevene skal: *oppdage, beskrive, begrunde, ræsonnere med den funktionelle sammenhæng.* Dette er kun en liten del av dette prosjektet som Pernille er med i. Vedlegg 2 viser resten av opplegget. Det er ikke alle detaljene som er med. Dette er for å gi et overblikk over hvilket aktiviteter som er med. Videre gi et helhetlig oversikt over forskningsprosjektet hun har vært en del av.

3.11 Teoretiske antakelser møter praksisfeltet

En forsker som går ut i feltet, vil møte forskningsfeltet med sin teoretiske bakgrunn (Christoffersen & Johannessen, 2012, s 64). Under perioden med observasjonen har jeg konsekvent ikke lest mer på teori. Dette er fordi jeg ønsker at mine teoretiske antakelser ikke skal påvirke for mye under observasjonene. Hvis jeg hadde lest teori under denne perioden mener jeg at mine antakelser under observasjonen ville påvirket meg i større grad eller blitt endret ut i fra at jeg hadde tilegnet meg kunnskap underveis i perioden. Christoffersen og Johannessen (2012) mener at en kvalitativ forsker også bør tenke induktiv. Grunnen til det er at forskeren må forsøke å være mest mulig åpen for det som ligger i de dataene som samles inn (s 65). Ved en slik tilnærming ønsker jeg å øke muligheten for å få innsikt og undersøkt mitt forskningsspørsmål. Det kan også være at jeg i mindre grad overser noen temaer som jeg ikke hadde tenkt på før datainnsamlingen.

3.12 Forskerens etiske og juridiske ansvar

Jeg som forsker må ivareta en rekke forskningsetiske prinsipper. De dreier seg spesielt om informantens rett til selvbestemmelse, autonomi og forskerens plikt til å respektere informantenes privatliv (Christoffersen & Johannessen, 2012, 47). Jeg har valgt få informanter til mitt forskningsarbeid. Det er derfor mulig å identifisere seg selv eller andre i oppgaven. Når det gjelder informantenes rett til selvbestemmelse og autonomi skal lærerne selv bestemme om sin deltakelse. Jeg har også sendt et skriftlig dokument som alle mine informanter har samtykket. Her blir det også nevnt at det er mulig å trekke seg fra forskningsprosjektet.

3.13 Transkripsjon og validitet

Kvale & Brinkmann (2009) mener at når en skal transskribere stilles det ofte spørsmål om intervjuenes relabilitet i intervjuforskningen (s 211). Han mener at ingen transkripsjon er mer objektiv enn andre (s 212). En bør heller tenke gjennom hvilken type transkripsjon som bevarer validiteten i den forskningen man utarbeider. Datainnsamlingen er totalt 14 timer og 37 minutter. Det er mye data når en skal transkribere. For å iverta validiteten i arbeidet, og samtidig gjøre arbeidet mest mulig håndgripelig og effektivt, er det noen valg og spørsmål som har dukket opp underveis i arbeidet.

Et valg jeg har gjort for å iverta validiteten mest mulig er å skrive det lærerne sier på dansk. Det har jeg gjort fordi hvis jeg oversetter fra dansk til norsk når jeg transkriberer vil deres meninger og refleksjoner i større grad bli fortolket av meg som forsker. Siden datamengden er såpass stor har jeg også utelukket de delene der læreren ikke snakker direkte om algebra eller som ikke svarer på mitt forskningsspørsmål. Jeg har også fått hjelp til å transkribere klasseromsobservasjonene slik at den danske talen blir korrekt formulert språklig. Når det kommer til intervjuene har jeg selv transkribert alt, men har fått noen danske venner til å høre gjennom for at finne ut om det er oppstått noen misforståelser underveis i intervjuet på grunn av språket.

Kapittel 4

4. 0 Funn

Funnene mine består av to deler. I den første delen tar jeg utgangpunkt i lærerens undervisningsopplegg. Jeg har kategorisert funnene ut i fra "de fire hovedområdene". Her presenterer jeg ulike aktiviteter som lærerne tilrettelegger for. Deretter viser jeg også undervisningsopplegg der flere av områdene er med samtidig.

I den andre delen tar jeg utgangpunkt i hver enkelt lærer. Her går jeg mer i dybden på hvilke av områdene som er mest tilstede i lærenes undervisning. Her kommer også lærerens egne refleksjoner fra intervjuet. Deretter drøfter jeg hovedfunn knyttet til lærerens forståelse av begrepet algebraisk tenkning.

Del 1

4.1 Læreren tilrettelegger for en eller flere generaliseringsstrategier

Å introdusere for generaliseringsstrategier kan gjøres på ulike måter. I mitt materiale er det ingen eksempler på at lærerne eksplisitt viser elevene en eller flere generaliseringsstrategier.

Derimot blir elevene oppmuntret til å generalisere blant annet gjennom oppgavene de får og lærerens spørsmål. Under dette området er det tatt med to eksempler fra dette i undervisningen.

a) Minusloven

I de to undervisningsøktene med Ida er ikke guttene i klassen hennes tilstede. De har sosialundervisning med en annen lærer. Det er dermed bare jentene i klassen som har denne undervisningen. Det er noen av jentene som er litt forsiktige. Det kan være fordi jeg er tilstede og lytter til deres svar. En annen faktor som kan spille inn her er ″flinkpike″ syndromet; frykten for å svare feil. Det er flere av jentene som ikke kommer med det riktige svaret. Ida er dyktig til å hjelpe disse elevene, og sammen med de andre jentene finner de fram til det riktige svaret. Ida er opptatt av at det ikke er svaret i seg selv, men hvordan jentene kommer fram til svaret som er viktig. De skal se på noen regnestykker. Hun skriver på tavlen.

8 – 6 =

En av jentene svarer med en gang at svaret er to. Eleven sier at hun teller ned fra åtte, til sju, og så seks. Hun sier hun bruker *"tælle ned metode"*. Da spør Ida om det er andre måter man kan gjøre det på. En elev sier at man kan gjøre det i hodet. Det bekrefter Ida at det kan man jo også gjøre. Så spør hun igjen: *"Er der andre måder å gør det på? "*. Da sier en elev at man kan telle opp. Ida spør igjen. *"Hvordan gør man det da? "*. Ida er opptatt av hvordan jentene tenker og at de kan forklare hvordan de kommer fram til regnestykket. Andre forslag som kommer fram er at man kan bruke konkreter, eller teller med fingrene. Så sier en elev at man kan bruke minusloven. Dette er noe de kjenner godt til, men hun spør likevel en av elevene hva den går ut på. Da sier en av elevene et tall pluss tallet seks skal gi åtte. Ida forklarer resten av klassen at en skal finne det tallet som skal stå i den tomme ruten ved å plusse til tallet seks for å få åtte. [2]

I intervjuet med Ida lurer jeg på hvorfor hun tenker det er en sammenheng mellom minusloven og algebraisk tenkning. Da sier hun:

" Det er fordi at hvis man får forståelse av den der minuslov så får man jo..faktisk en lille ligning som man løser…så jeg tænker overgangen til ligningløsning såsom tradtionel algebra..med bogstaver er kortere når man bruger minusloven….det er min erfaring…det er jo ikke første gang jeg har en andenklasse.. ".

Etter at jentene har regnet ut en del regnestykker på tavlen spør Ida*: "Gælder minusloven altid?"*. Et slikt spørsmål inviterer jentene til generalisering. En av jentene mener at den ikke gjelder alltid. En annen sier at hvis man prøver seg fram vil den til slutt stemme. En annen elev gjør minusstykkene om til plussstykke. Når hun prøver seg fram på denne måten vil hun tilslutt finne ut av at regnestykket passer. Ida lurer så på om hun kan komme med et eksempel. Eleven sliter litt med å komme med noen tall, så Ida skriver tallet 18 på tavlen. Deretter skriver Ida *"minus.."* og den samme eleven innskyter *" 22 "*. Så sier Ida *" Kan man så det?"*.

---

[2] Minusloven: Det er noe Ida selv kaller denne aktiviteten. Forholdet mellom tallene skal være det samme på begge sider, der: $a – b = c$, når $b + c = a$

Og eleven sier ja. De tester så ut om dette regnestykket stemmer. Svaret de så kommer til er svaret – 4.

Ida lurer så hva dette betyr, og ønsker at de skal finne en regnehistorie. Det kan hjelpe de elevene som ikke helt vet hva som foregår. Den samme eleven sier at historien bak er at man ikke har nok penger. Hun sier at hun er med sin far til godteributikken. Hun skal kjøpe en is. Den koster 22 kroner, men hun har bare 18 kroner. Så hun har da 4 kroner for lite til å kjøpe den isen. Da spør Ida: *″Gælder minusloven her*? *″*. En av jentene innskyter. *″NEJ! Det kan den, ikke″*. Det er tydelig at denne eleven er helt sikker på at det kan ikke stemme. Ida lar de så tenke litt til. Så spør Ida om det kan være noen muligheter for at den kan passe. En annen av jentene sier: *″ AHH, det kan den! ″*. Hun er meget begeistret. Hun har tydelig oppdaget noe, og de andre jentene blir nysgjerrige. *″Altså hvis man tager fire fra de 22 kroner, så vil det passe ″*. Noen av de andre jentene sier *″WOW″*. De andre jentene er også begeistret for at minusloven passer.

Ida understreker at den passer, det er bare omvendt enn de andre regnestykkene de har arbeidet med. Spørsmålet *″ Gælder minusloven altid? ″* er et godt eksempel på generalisering i Idas undervisning. Hun introduserer ikke for noen strategier som de skal følge. Hun vil at de selv skal komme med løsninger og tenke gjennom selv om dette er en lov som kan gjelde alltid. Dermed utfordrer hun dem til å undersøke selv, og finne ut om dette kan være riktig. Elevene er nok ikke selv klar over at de generaliserer, men samtalen de har viser at elevene har evner til å generalisere, være kritisk og finne ut om påstanden til Ida stemmer.

b) Tenke på et tall

"Tænk på et tal…inden i hovedet.. Det er større end 0 og mindre end halvtreds[3]" sier Pernille.

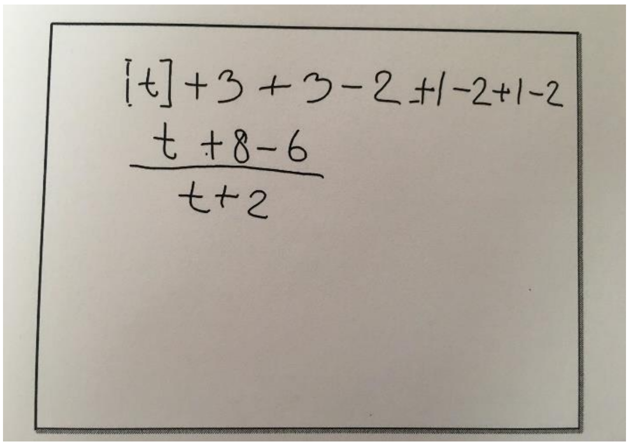
Når elevene har tenkt litt skriver hun + 3. Deretter fortsetter hun med en rekke tall. Det blir et regnestykket til slutt som elevene skal gjøre inne i hodet med det tallet de har tenkt på.

□+ 3+3-2+1-2+1-2

Deretter regner de ut regnestykket sammen i klassen. De blir enige om å kalle den tomme ruten for "T". Dette er tall de er godt kjent med. Pernille skriver på tavlen hva de har kommet fram til:

T + 8 – 6

Elevene har tenkt på mange ulike tall. Det er en fin aktivitet som fokuserer på hoderegning. Samtidig øver den elevene på generalisering. Så spør Pernille *"8 – 6, hvad er det?" Hvordan kan jeg skrive dette endnu kortere?* " Da er det en av elevene som sier at det blir to, og at en kan skrive: t + 2. Dette er regnestykket fra Smartboarden til Pernille:

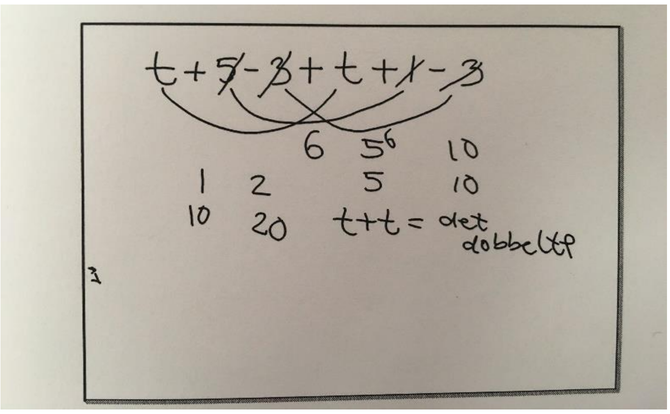


[3] Halvtreds (Dansk) = seksti (Norsk)

Denne aktiviteten engasjerer elevene. De blir skikkelig ivrige og lurer på om de kan gjøre det en gang til. Det kan de, og Pernille sier: " *Denne gang skal I tænke på et tal som er større end nul og mindre end ti* ". Da er det en som lurer på om man kan starte på ti. Da sier Pernille: " *Okay, da skal tallet være mindre end 11* ". Regnestykket denne gangen er:

T + 5-3+t + 1 – 3

Så spør hun Isak om hvilket tall han tenkte på. Han svarer: *"Jeg tænkte på 1, og landede på 2 ".* Videre sier Sannah: "*Jeg startede på ti og landede på tyve* ". Så lurer Pernille om man kan forenkle det. Da kommer   en elev opp på tavlen og forenkler regnestykket. Han finner ut at man tilslutt sitter igjen med t+t = det dobbelte. Dette er en faglig sterk elev. Jeg blir likevel overrasket hvor fort denne eleven anvender dette til symbolspråk.



Videre spør Pernille resten av klassen om hans forslag stemmer. Da svarer noen først nei. Deretter tenker de seg litt om og flere svarer *"Jo"*. Pernille bekrefter at det stemmer. Hun det virker som hun ønsker at alle skal selv finne ut dette stemmer. Denne aktiviteten inviterer til at elevene kan lage generaliseringsstrategier. Dette gjør Pernille blant ved at hun ønsker at elevene skal forenkle utrykket. Videre at de kan bruke symbolspråk for å forenkle utrykket.

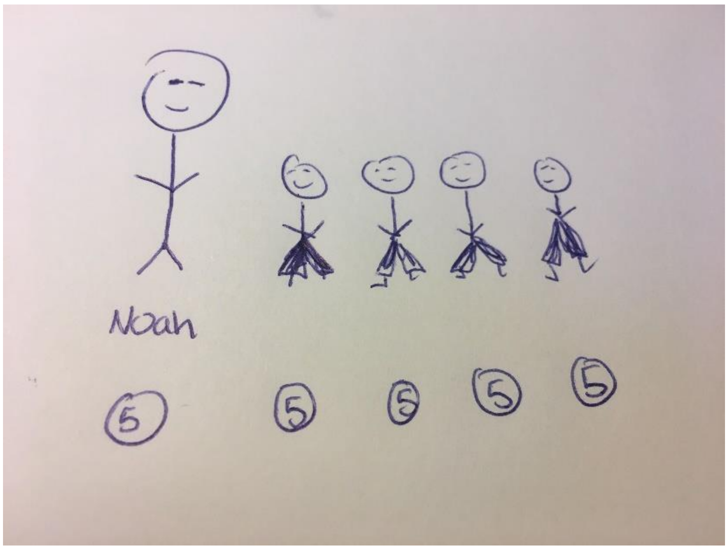
4.2 Læreren presenterer en relasjon mellom to størrelser

Det er flere eksempler på at lærerne presenterer en relasjon mellom størrelser i sin undervisning. Under dette området har jeg tatt med et eksempel fra Noah sin undervisning.

Noah og hans fire søsken

Noah venter til alle elevene har funnet sin plass. De ser bak og oppdager meg. Noah forklarer at jeg skal observere og at jeg er fra Norge. De første minuttene er det mange av elevene som kikker bak. De er nysgjerrig på denne piken som snakker litt annerledes enn dem. Jeg setter på lydopptakeren. Det er ikke så mange av elevene som rekker opp hånden når Noah stiller et spørsmål. Det kan være på grunn av det. Etter noen minutter blir flere av elevene mer deltakende i timen. Det er også få av elevene som kikker bak. For nå begynner Noah å fortelle en spennende regnefortelling. Den handler om Noah og hans fire søsken. Da han og de andre barna i familien skulle til skolen fikk de penger med seg fra foreldrene. Det gjorde de hver dag. Hans foreldre gav bare de myntene de hadde som til sammen ble 30 kr. *"Det kunne være en tier og tyve kr. Det kunne være tre tiere og det kunne være enere og femmere…det kunne være hvad som helst. Det de havde lagde der"*.

Så forteller Noah videre at søsknene måtte finne ut selv hvor mange kroner det skulle være til hver. Noah og hans storebror var de eldste. De kunne regne, så av og til lurte de de andre søsknene som ikke kunne regne. *"Hvor mange kroner skulle vi have? "*spør han så klassen. Theodor rekker opp hånden, og sier fem kroner. Da tegner Noah opp hans fire søsken og han selv opp på tavlen.



” Her er jeg og mine søkende.” Noah skriver opp at alle får fem kroner hver. Noen av elevene påpeker at han er så mye større enn de andre. Da sier han at han har lange bein og er litt større enn de andre. Så spør Noah samme elev om det er riktig at han og søsknene får fem kroner hver. Videre spør han *”Hvor mange penge er det så i krukken?”*. Da sier Theodor at de får seks kroner hver. Det er riktig svar, men Noah ønsker å få resten av klassen med på dette. Dermed spør han igjen hvor mange kroner som ligger igjen i krukken. Da er det en elev som sier det fem kroner igjen. Noah lurer så på ” *Hvad skal vi så gjøre med dem?* ”. Mathilda sier kan de veksle. Noah sier så *”Ja, veksle til hvad da?* ”. Hun sier så fem enkroner. Det er riktig, nå er krukken tom.

I denne regnefortellingen er det en relasjon mellom tallene. Det at Noah tegner det opp gjør det mer konkret for elevene. Han kunne også ha skrevet det opp slik på tavlen:

6+6+6+6 +6 = 30

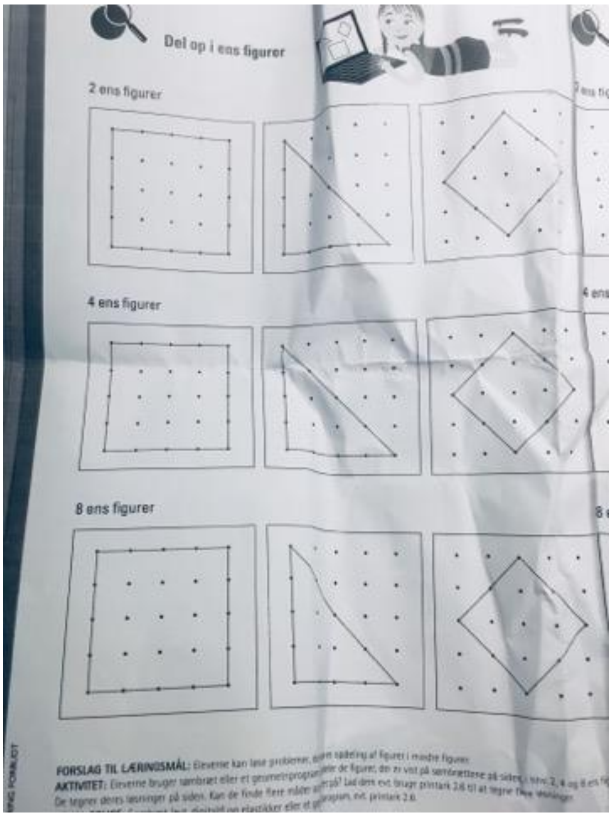
Det muntlige matematikkspråket er i fokus. Noah er grundig og ønsker å få med alle elevene. Tallforståelsen er også i fokus. Dermed er det kanskje ikke nødvendig å også skrive på tavlen. For hoderegning er de gode på, og de forstår forholdet mellom tall. Derimot kunne det vært en tydeligere sammenheng til algebraisk tenkning i denne regnefortellingen. Den algebraiske tenkningen blir mindre framtredende ved at beløpet er det samme hele tiden. Det er vanskeligere å forstå relasjoner mellom to størrelser når man får kun får ett regnestykke å forholde seg til.

4.3 Læreren hjelper elevene til å oppdage og se mønstre

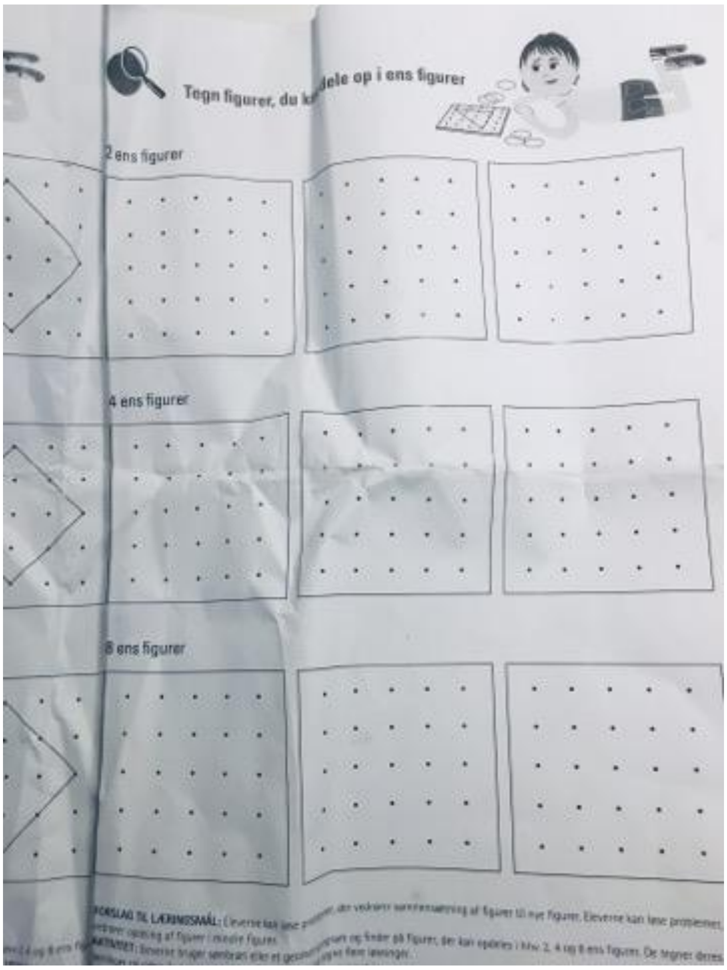
Dette området har lærerne har minst fokus på. Det er fordi lærerne hjelper ikke elevene til å oppdage disse mønstrene. I de aller fleste aktivitetene som lærerne har tilrettelagt for er det mønstre som elevene kan oppdage. Under dette området har jeg tatt med et eksempel fra Nanna sin undervisning. Det er en aktivitet som man kunne utnyttet i større grad slik at elevene kunne ha oppdaget mønstre. Det er også med et eksempel fra Noah sin undervisning.

a) Geometri og tall

Undervisningen til Nanna handler om tall og figurer. Elevene skal bruke geobrett. De skal ta gummistrikk på brettene for å lage figurer. Formålet med aktiviteten er å løse problemer som vedrører en oppdeling av figurer. Det er også et arbeidshefte som er tilknyttet oppgaven. Den ene oppgaven handler om at man skal dele opp ulike figurer. De skal først dele opp i to figurer, så fire figurer og deretter åtte figurer.

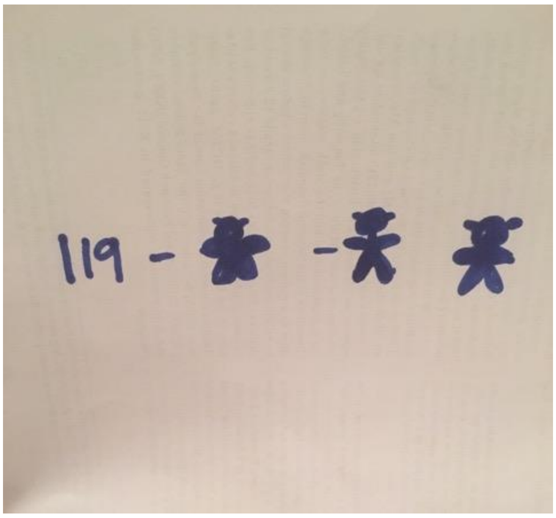


Det er også en oppgave der de skal bygge forskjellige figurer. De skal blant annet bygge forskjellige rektangler og forskjellige kvadrater. Så skal de bygge firkanter som ikke er rektangler og tilslutt bygge forskjellige trekanter som der ikke har to like sider. I læringsmålet står det: *" Eleverne bygger forskellige firkanter, der ikke er trekanter, der ikke har to lige lange sider på sømbræt eller i et geometriprogram".* Deretter skal de finne mønstre og figurer. Det er et eksempel på en undervisning med lite fokus på samtale med elevene. Det er også lite koblet til algebraisk tenkning. Dette er derfor et eksempel på undervisning som har et potensial til å oppdage mønstre. Videre er det et eksempel der den algebraiske tenkningen ikke kommer så tydelig fram.



b) Bamser på en tallinje

Et annet eksempel på å oppdage mønster er fra Noahs time. Han skrur på Smartboarden og finner fram en tallinje. Det er en bamse som er plassert sammen med noen tall. Det varierer fra oppgave til oppgave hvor mange bamser som er med. Bak bamsene er det et tall som skjuler seg. Dermed må elevene selv finne ut av mønsteret. Det er tydelig at elevene synes det er vanskeligere å finne ut av mønsteret når det er mange bamser på tallinje. I en av de siste oppgavene finner en av elevene fort ut at det siste tallet i tallrekken skal være 122. Selv om dette er den første oppgaven med kun et tall og resten bamser. Så har elevene oppdaget et mønster fra de tidligere oppgavene. Dette var tallrekken:



Da spør Noah hvor mye han skal ha i mynter og sedler for tallet 122. Så forsetter det med noen flere slike oppgaver der han tester elevene hele tiden hvor mye de skal gi han i mynter og sedler med de tallene som gjemmer seg bak bamsene. Tallforståelsen til elevene er viktig for Noah. I denne oppgaven hjelper Noah elevene til å oppdage og se mønstre, og er et arbeid med ukjente. Det er likevel ikke en videre samtale om hva bamsene kan symbolisere. Det er likevel mulig for å elevene å oppdage et mønster.

4.4 Arbeider med ukjente eller størrelser som varierer

Under dette området arbeider lærerne ulikt med hvordan elevene kan oppdage ukjente eller størrelser som varierer. Som vi har sett, har Ida fokus på at de skal utforske størrelser som varierer gjennom minusloven. Etter aktiviteten med minusloven arbeider elevene med ulike regnestrategier. Tallene de arbeider med har ulike størrelser. Det er likevel hvordan Ida tilrettelegger oppgaven som er sentral i dette eksemplet. Noah har også en samtale med elevene sine om busser som har ulike størrelser. Det skal vi først se på:

a) Hjulene på bussen

Noah forteller at klassen skal kjøre med en buss som har åtte hjul. *"Hvor mange hjul er der på hver side? "* spør han så. Da svarer en av elevene at det er fire hjul på bussen. Noah bekrefter at det stemmer. Da spør Noah videre *" Hvad hvis der så kommer en stor bus. Den har 16 hjul totalt. Hvor mange hjul har bussen på hver side? ".* Så spør han direkte en elev: *"Hvordan kan det være, Mathilda".* Hun tenker litt og sier: *"Hvis man deler 16 med 2 bliver det 8".* "Ja" sier Noah. *"Men hvis nu der var 10 på den ene side og 6 på den anden "* sier han.

Da svarer Mathilda at bussen ville vært litt skeiv. *" Ja, det er rigtig"* sier Noah. *"Og vi vil jo helst at det skal være lige mange hjul på hver side".* Så sier han: *" Hvad er det så for et tal vi skal finde for at finde ud hvormange der er. Hvis der er totalt 16 hjul på bussen? "* Den sist nevnte setningen Noah sier peker på det ukjente. Det er for så vidt et enkelt stykke. Det er en ligning som elevene skal løse. *"Hvad gør man så?* spør Noah*." Man deler 16 op i to"* sier Benjamin*. "Det er riktig, men hvad er 8 i forhold til 16? Hvordan kan man hurtig sige at det er åtte? Jeg ved godt I*[4] *ved at man skal dele det opp. Men jeg vil gjerne at dere skal bruge et ord her. Og I vet alle sammen hvad slags ord det er. Jeg vil bare at I skal finde det fram "* sier Noah. Da er det en av elevene som sier*: " Man tar halvdelen"*. Da sier Noah begeistret: *" Ja, man tar halvdelen"*. Videre forteller Noah at annen buss har fem hjul på den ene siden. Så spør han:*" Hvor mange har denne bussen i alt? "*. Da sier Samantha at den har i alt 10 hjul i alt, og Noah bekrefter at det stemmer.

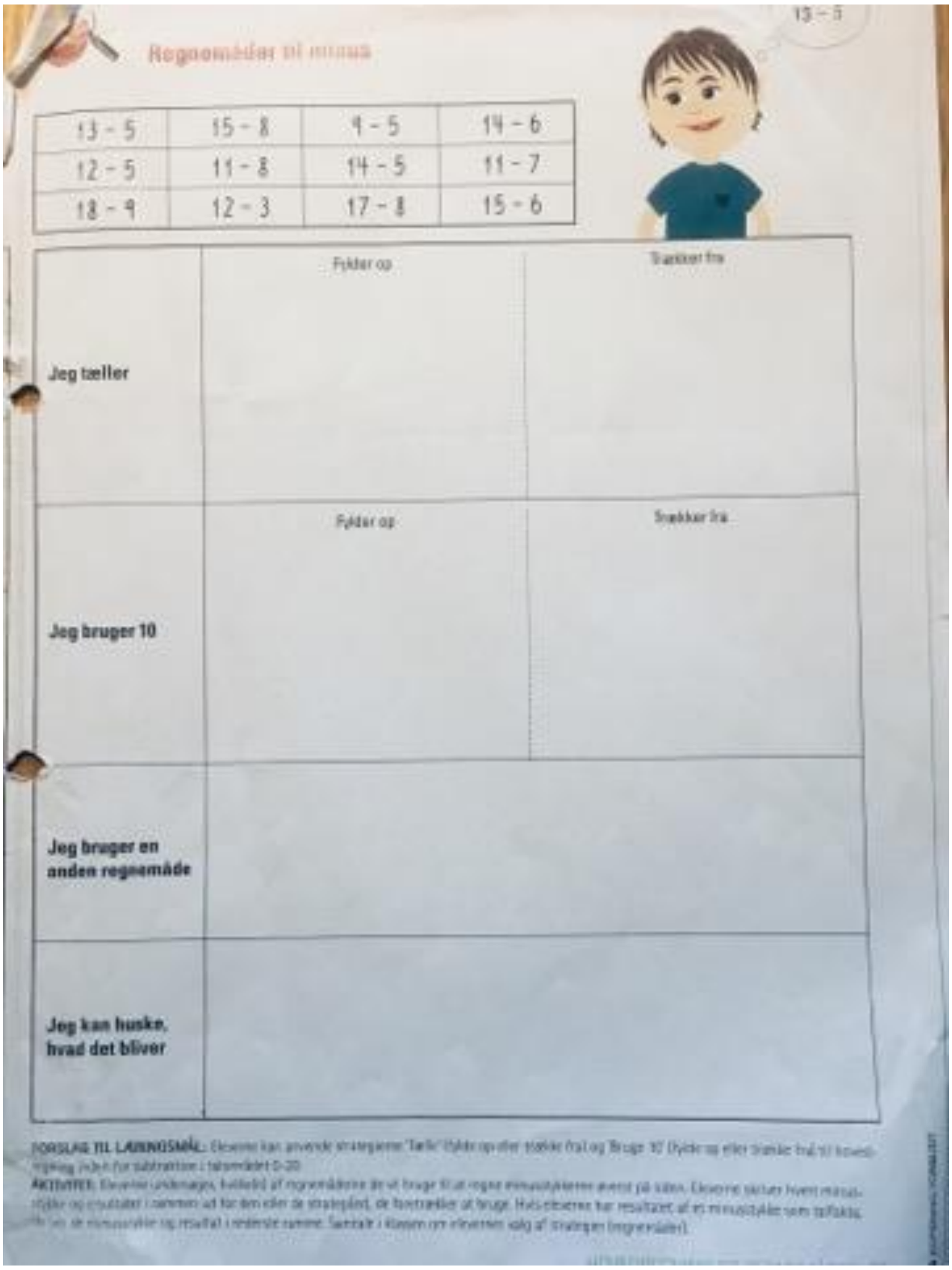
[4] I (dansk) = dere (norsk)

I denne regnehistorien arbeider Noah og klassen med størrelser som varierer. Bussene har antall hjul som varierer ut i fra hvor stor bussen er. Elevenes oppgave er å finne ut forholdet mellom dem. Det er dermed også viktig at elevene forstår relasjonen mellom størrelsene. Noah påpeker for klassen at det er nødvendig at det er like mange hjul på hver side. Det er dermed en liten ligning elevene skal løse. Noah påpeker også at bussen blir skeiv hvis det ikke er like mange hjul på begge sider. Jeg får ikke spurt Noah om han selv var klar over at denne regnehistorien inviterer til algebraisk tenkning. Begrepene *"halvdelen"*, *"i forhold til" og "lige mange"* er sentrale i regnefortellingen. I intervjuet med Noah kommer det tydelig fram at dette er begreper som Noah arbeider aktivt med i sin klasse. Dermed er dette begreper som elevene har godt kjennskap til. Grunnen til at jeg valgte å plassere dette eksemplet under dette området er at denne regnefortellingen har størst fokus på størrelser som varierer. Dette kommer fram med hjulene som endrer størrelser. Videre spørsmålene som Noah stiller elevene sine i samtalen om historien hans. Det er et eksempel som kunne vært plassert under relasjoner mellom ulike størrelser. Funnene mine viser også at noen av aktivitetene inneholder flere av områdene. Denne regnefortellingen er et eksempel på det.

b) " Regnemåder til minus"

Etter aktiviteten med minusloven presenterer Ida et arbeidsark elevene skal arbeide med. Hun forteller at det er 20 regnestykker som de skal klippe ut. Disse regnestykkene skal de plassere i de tomme rutene på arbeidsarket som er utdelt. Videre forteller Ida at det er ulike måter å lage minustykker på. På arbeidsarket er det flere strategier elevene kan bruke. Den første heter: " Jeg tæller". Her forteller hun at en kan telle f.eks forlengs eller baklengs. Den andre strategien heter: " Jeg bruger 10". Videre forklarer hun at de kan bruke tiervenner. Det har jentene tydeligvis godt kjennskap til. I den tredje boksen kan elevene bruke en annen regnemåte. Her forteller Ida at en gjerne kan bruke minusloven. Dermed er det en tydelig sammenheng mellom disse to aktivitetene i hennes undervisning. I den siste boksen kan elevene bruke hoderegning eller plassere et regnestykke uten å regne seg fram. Da sier hun at de kan klippe ut regnestykkene og lime de inn der de vil. Deretter sier Ida at hun vil gå rundt å høre hvorfor de har plassert de ulike minustykker i de ulike boksene. Dette er oppgaver der de skal bruke minusloven. Det er også et eksempel med et arbeid med størrelser som varierer. Tallene på arket er mellom 3- 18. Ida forteller også at det er mulig å bruke høyere tall hvis de ønsker det. Formålet med oppgaven er i hovedsak å trene på ulike regnemåter. De må også forholde seg til tall med ulike størrelser. Dette i seg selv inviterer ikke til algebraisk tenkning.

Det er spørsmålene til Ida som gjør det i en viss grad. For hun ønsker at de skal begrunne, resonnere og lete seg fram. Videre er minusloven en strategi de kan bruke for å løse oppgavene. Derfor kan en slik aktivitet invitere til algebraisk tenkning. Dette eksempelet viser også at hvordan læreren forklarer og hvilke spørsmål hun eller han stiller, er avgjørende om det blir en aktivitet med fokus på algebra. Videre kan de formelle regnestrategiene også være til hjelp for den algebraiske tenkningen.



4.5 Undervisningsopplegg med flere av områdene tilstede

Under dette området vil jeg ta utgangpunkt i undervisningsopplegget til Pernille. I hennes undervisningsopplegg var det vanskelig å trekke fram kun et av områdene. Derfor er det meste av hennes undervisningsopplegg under dette avsnittet. Hun klarer å integrerer alle områdene inn i sin undervisningen.

a) Aktivitet med klipping av snorer

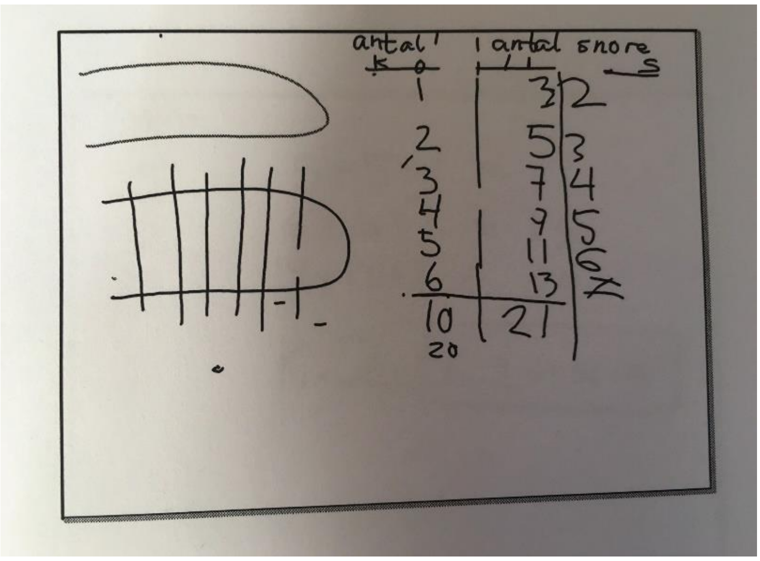
Pernille samler sin tredjeklasse. De sitter i en hestesko på gulvet og ser opp på smartboarden når jeg kommer inn i klasserommet. De skal være med på noe spennende. De skal nemlig være med på et forskningsprosjekt om algebra som går over åtte undervisningsøkter. Formålet med undervisningen er at den skal gi elevene mulighet til å gjenskape og videreutvikle de praksiser som allerede er etablert i slutten av 2. klasse. I en samtale med Pernille etter timen får jeg vite at et av målene ved timen, er at elevene skal bli i stand til å bruke algebraisk språk som en representasjon for funksjonelle sammenhenger. De forskjellige språklige representasjonene skal derfor ha en mulighet for å eksistere side om side.

Pernille kobler så elevene på hva de skal gjøre i timen. Hun sier: ”*Husker I forleden at Marcus sagde at det garantert vil være en opgave med et mønster? Det stemmer. Vi skal også se på et mønster i dag”*. Hun forteller en historie fra sin egen hverdag. Hun forteller at hun har snart fødselsdag. Det har også flere av hennes venner. Hun forteller at hun skulle for noen dager siden pakke inn noen gaver. I den forbindelse fant hun fram et gavebånd. Pernille har et langt tau framme ved tavlen som hun finner fram. Hun trenger gavebånd til to pakker. Dermed finner hun fram et snor, lage en bue og klipper over en gang. Elevene følger nøye med. *”Nej, for søren”* sier Pernille. Hun ser ned på gulvet og tauet har blitt delt opp i tre biter.

En elev påpeker at hun har klippet tvers over og har foldet tauet slik at det blir tre deler.

"Ja, det var en fjollet måde". Da lurer Pernille på hvordan hun så skulle ha klippet for å få kun to stykker. Da sier en annen elev at hun måtte ha klippet ovenfra. Pernille tegner på tavlen, og lurer på det er sånn eleven tenker. Det bekrefter eleven.

Aktiviteten elevene skulle gjøre første time handlet om å klippe snorer. Pernille forklarer hva de skal gjøre. Den første dagen klippet elevene en snor ved å lage en bue hver gang de klippet. Den andre dagen gjorde de samme aktivitet, men denne gangen klippet de to buer. I klassesamtalen etter den første timen snakket de om de ulike mønstrene de hadde oppdaget. Pernille lager en tabell i slutten av timen:



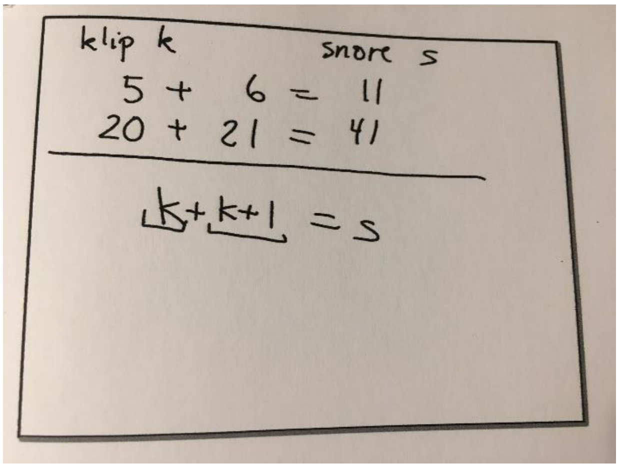
Undervisningsdag 1

Så lurer Pernille på hva hvis hun fortsatt klipper på denne fjollete måten, men nå med to klipp istedenfor enn ett. *"Hvor mange stykker får jeg så? Er det andre måder å gjøre det på?"*. Da sier en elev at man kan telle opp. Ida spør igjen: *"Hvordan gør man det da? "*. Hun lager dermed en tabell på Smart Boarden. Hun skriver så antall klipp og antall snorer inn i skjemaet. *" Er der så et type mønster her? "*. De kommer med ulike påstander. Et annet forslag er at det er noe med dobling. Et annet forslag vi kan kalle snorer med bokstaven C. Det undrer en annen elev seg over. *"Hvorfor C? "* sier han. *"Hvorfor ikke x? Eller y"*. Det er symboler man ofte bruker i matematikken sier han. I intervjuet kan Pernille bekrefte at han er faglig sterk elev. Han har kommet lengre enn de andre elevene. Videre bekrefter hun overrasket at elevene kommer inn på bokstaver før de har begynt på selve oppgaven.

a) Bruk av bokstaver

Deretter kunne elevene oppdage et gjentakende mønster. Variabelen, eller da i dette eksemplet snorene, pluss seg selv en gang. Videre at variabelen øker med 1. Dermed kom elevene fram til et generaliserende uttrykk:

En elev ser et mønster og lager en generalisert formel *”dobbelt + 1”*.



Denne undervisningen skiller seg fra de andre undervisningsopplegg jeg har sett. Elevene lager generalisert uttrykk med bokstaver. Det bør nevnes at dette er en del av et forskningsprosjekt. Det er en del av dette forskningsprosjektet å se ut om det faktisk er mulig å gjøre dette allerede i tredjeklasse. Pernille blir vist overrasket hva elevene kommer fram til. Dette sier hun etter undervisningen:

"Jeg havde forventet at det ville være rimelig let for dem at se i går at den vokser med to når vi klipper den en gang mere. Og jeg havde også forventet at de i dag skulle se at den vokser med tre... Jeg havde ikke forventet at det gik så hurtig for dem at lave generalisering.. det vandtætte møster i tabellen…Det havde jeg ikke forventet skulle gå så hurtig for dem. "

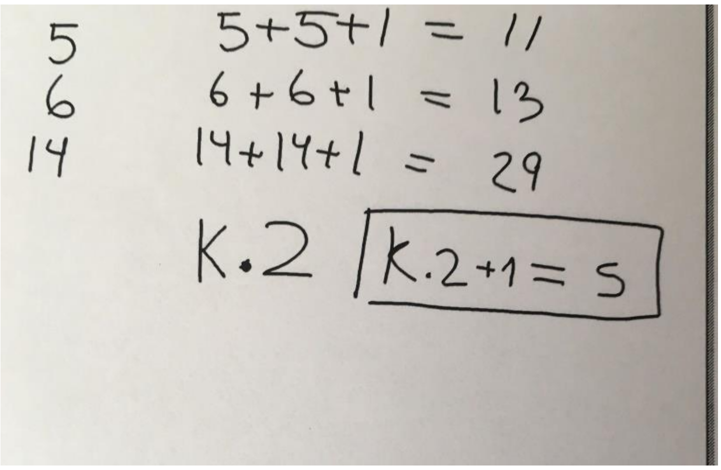
I undervisningen er Pernille opptatt av at alle skal være med å oppdage mønsteret. Videre vil hun at elevene skal finne flere måter å komme fram til svaret på. Pernille forteller meg i intervjuet at det er noe hun har aktivt jobbet med i undervisningen sin. Dette er noe elevene er veldig vant med. Hun ønsker at de skal være detektiver som stadig finner fram til nye måter å se problemet eller oppgaven på.

P: " Jeg havde ikke forventet i går at de på den måden skulle lave en forbindelse mellem tegningen og tabellen…og det sprolige utryk. Altså det dobbelte plus en.…Så de faktisk kunne bruge tegningen til at forklare…og kunne se koblinger mellem representationene. Det er igen noget som er typisk for mig å ha ulike representationer som de kan tænke igennem. Det synes jeg var utrolig flot at de kunne gjøre det. Jeg havde virkelig forventet at det ville være svært..vanskelig for dem for å finde denne sammenhæng."

b) Videre arbeid med snorer

Dagen etter skal de arbeide videre med aktiviteten med snorene. Når alle elevene har plassert seg i hesteskoen, sier Pernille: *"God morgen. Da jeg gik hjem i går følte jeg mig faktisk som Danmarks heldigste matematiklærer. Jeg synes I oppdaget så mange spænende og simpelthen svære ting. I var nogle dyktige matematikdetektiver. I kunne forstå hindanens ideer og løsninger. "*

Pernille tar opp tråden fra forrige time. Så lurer hun på hva bokstaven *"S"* kan stå for. Da sier en av elevene: *"Fordi det står for alle mulige tal.. "* Pernille*: " Ja, alle mulige tal..og hvad handler det om i den her historie vi har gang i her? "* Da sier Gilbert: *" Det handler om snore.. "* Pernille bekrefter at det stemmer. Videre lurer hun på hva formelen: K * 2 + 1 = S betyr. Hun inkluderer meg, og lurer på hva jeg kan fortelle mine venner i Norge hva de har funnet ut i timen. *" Hva skal hun så si til de der Normændene der oppe?"* Sier Pernille.



En elev ser på de første tallene i tabellene. Og sier så: *”Hvis man har ti. Så plusser man bare med en. ”* Pernille nikker og lurer videre på hva K* 2 + 1 = S betyr. Da blir det litt stille i klassen. Plutselig innskyter en av elevene at: *”Er det ikke fordi du tager to af det samme + 1 ?”*. Det bekrefter Pernille stemmer og forteller hvor dyktige detektiver de er.

De skal gjøre samme aktiviteten, men Pernille har i dag økt vanskelighetsgraden. De skal nemlig finne et mønster ved å lage to buer og deretter klippe over. Pernille går rundt og ser på elevenes funn og mønstre. Det er også flere som kommer løpende bort til Pernille for å fortelle det spennende mønsteret de har funnet. Etter oppgaven møtes de igjen i hesteskoen. De skal presentere til hverandre hvordan de har løst oppgaven.

Aktiviteten med klipping av snorer viser at det er mulig å tilrettelegge for flere av de fire områdene i samme undervisningsopplegg. Det er en aktivitet som hjelper elevene til å oppdage og se mønstre. Elevene er veldig engasjerte. Det ser ut som elevene liker godt å være detektiver og finne nye og spennende mønster. Pernille tilrettelegger også for at elevene kan bruke en eller flere generaliseringsstrategier etter de har finnet mønsteret. Ved hjelp av generalisering kan elevene forenkle utrykket. Det hjelper også elevene til å sett ord på hvordan mønsteret utvikler seg. Det er mange av elevene som forstår og kan bruke symbolspråk. For å forstå mønstret med klipping av snorer, er de også nødt til å forstå forholdet mellom tallene. Videre at størrelsen varierer ut i fra hvor mange buer en klipper i snoren.

Oppsummering fra del 1

Under dette avsnittet vil jeg trekke fram hovedfunn fra del 1. Her vil jeg se på hvilke tendenser som er mest framtredende under hvert hovedområde. I del 2 vil jeg gå nærmere inn på hver enkelt lærere. Her vil jeg se på både hvordan de tilrettelegger og hvordan de forstår begrepet.

Område 1

Det er ingen av lærerne som tilrettelegger for generaliseringsstratgier i sin undervisning. Pernille og Ida tilrettelegger for oppgaver og stiller spørsmål som er med på at elevene lager generaliseringsstrategier. Dermed har de begge samtaler med elevene sine som fører til at elevene bruker en eller flere generaliseringsstrategier.

Pernille har mest fokus på generaliseringsstrategier i sin undervisning. Noen av spørsmålene som Ida bruker inviterer også til å bruke generaliseringsstrategier. Et godt eksempel på å tilrettelegge for at elevene skal generalisere, er fra Ida sin time. Hun spør: *"Gælder minusloven altid? ".* Mitt materiale viser også at ikke alle lærerne har dette tilstede i sin undervisning. Noah og Nanna tilrettelegger ikke for generalisering i sin undervisning.

Det er en stor enighet om at generalisering er en sentral del av algebraisk tenking (Cooper and Warren, 2011, Kaput 2008 Mason,1996, Kieran, 2004). For at elevene skal forstå den algebraiske tenkningen, er det nødvendig at læreren tilrettelegger for at elevene bruker generaliseringsstrategier. I mitt datamateriale er det varierende i hvor stor grad lærerne tilrettelegger for dette i sin undervisning.

Område 2

Det er flere eksempler på at lærerne presenterer en relasjon mellom størrelser i sin undervisning. Det er likevel en lærer som skiller seg fra de andre når det kommer til dette området. Det er Noah. Han fokuserer veldig på å fortelle elevene regneforellinger. Her tester han om elevene klarer å forstå relasjonen mellom to størrelser.

Relasjonell tenkemåte innebærer en forståelse av relasjoner mellom to tall. Litteraturen peker på at det nødvendig med en relasjonell forståelse av likhetstegnet (Knuth, 2006, Jacobs m.fl, 2007). I regnefortellingen til Noah er det et potensial til å utdype enda mer slik at elevene får en dypere forståelse for den algebraiske tenkningen. F.eks regnefortellingen om Noah og hans fire søsken. Her kunne det vært enda mer tydeliggjort enda mer. Han skriver dette regnestykket på tavlen:

6+6+6+6 +6 = 30

Relasjonen her mellom tallet 6 og 30. For at elevene skulle fått en dypere forståelse av likhetstegnet kunne han endret pengebeløpet. Han kunne f.eks. økt pengebeløpet som foreldrene gav han og hans søsken. f.eks: *" Hvad hvis det var 40 kroner. Hvor mange kroner hadde vi fått hver?* " Videre: *" Hvad vis det var 70 kroner. Hvor mange kroner havde vi fått hver da?"*. På den måten kunne de i større grad fått en forståelse av relasjonen.

Område 3

Eksempelet som er tatt med under dette området viser ikke hvordan man tilrettelegger for at elevene oppdager mønstre. Eksemplet viser derimot at det er mulighet for å arbeide med algebra og geometri. Det gir også mulighet for at elevene kan oppdage geometriske mønstre. Videre se en utvikling i en figur eller lage et uttrykk for det.

I Noah sin undervisning er det eksemplet med bamsene på tallinjen som i størst grad hjelper elevene til å oppdage mønstre. Derfor er dette eksempelet tatt med her. Aktivitetene om Minusloven og klipping av snorer er også eksempler på å oppdage tallstrukturer og mønstre innenfor algebra.

Område 4

Under dette området arbeider lærerne ulikt med hvordan elevene kan oppdage ukjente eller størrelser som varierer. Dette område ligner litt på område 2. Det er f.eks. flere av regnefortellingene til Noah som inneholder begge disse to områdene.

Regnefortellingene om hjulene er et godt eksempel på at elevene kan oppdage ukjente, men også ulike relasjoner mellom størrelser. Regnefortellingen er en liten ligning som elevene skal løse. Han tydeliggjør dette med å påpeke at bussen blir skeiv hvis det ikke er like mange hjul på begge sider. Jeg får ikke spurt Noah om han selv var klar over at denne regnehistorien inviterer til algebraisk tenkning. Begrepene *"halvdelen"*, *"i forhold til" og "lige mange"* er sentrale i regnefortellingen. Dette kan være med på å gi en større forståelse av likhetstegnet. Derfor passer denne historien også innenfor område 2.

Oppsummering

Undervisningoppleggene inneholder ulike sider ved algebraisk tenkning. Det er noen av aktivitetene som lærerne tilrettelegger for som inneholder flere av de fire områdene. Det er veldig varierende i hvor stor grad det blir tilrettelagt for algebraisk tenkning i deres undervisning. Pernille sitt undervisningsopplegg viser at det mulig å integrere alle de fire områdene inn i undervisningen. Dette gjør at hennes undervisningopplegg i stor grad inviterer til algebraisk tenkning. Undervisningen til Noah og Nanna har i mindre grad elementer av algebraisk tenkning.

Det er også noen av aktivitetene som inneholder flere av områdene. Dette gjelder Pernille, Ida og Noah sin undervisning. F.eks regnefortellingene om hjulene kunne vært plassert både område 2 og 4.

Del 2

4.6 Lærerens tilrettelegging og forståelse

I denne delen vil jeg ta utgangpunkt i hver enkelt lærer. Her går jeg mer i dybden på hvilke av områdene som er mest tilstede i lærenes undervisning. Lærerens egne refleksjoner fra intervjuet vil bli presentert. Deretter vil jeg drøfte hovedfunn knyttet til lærerens forståelse av begrepet algebraisk tenkning.

For å få en bedre oversikt over lærerens tilrettelegging har jeg laget et sektordiagram som beskriver dette. Det er tatt utgangpunkt i de fire områdene fra observasjonen:

Hvordan læreren:

A) Introduserer for en eller flere generaliseringsstrategier.
B) Presenterer en relasjon mellom to størrelser.
C) Hjelper elevene til å oppdage og se mønstre.
D) Arbeider med ukjente eller størrelser som varierer.

Funnene fra observasjonene er sett i sammenheng med det lærerne sier i intervjuene. Jeg har valgt å bruke disse kategoriene:

a) I stor grad
b) Tilstede
c) Liten grad
d) Ikke tilstede

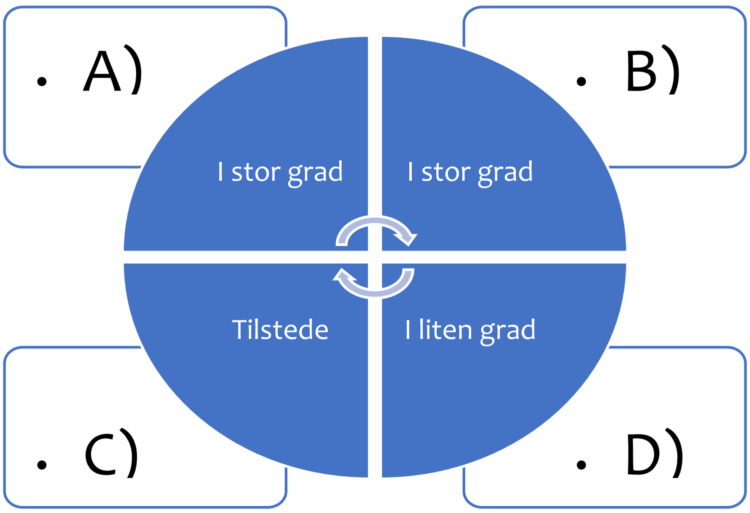
Dette er ikke for å tallfeste mine data. Det kan likevel gi en oversikt over det jeg har funnet ut. De heller er ikke for å sammenligne mine lærere, men får å se hvilke tendenser som går i igjen i datamaterialet mitt.

4.7 Ida

I Idas undervisning er det mye fokus på en relasjon mellom to størrelser. Dette kommer blant annet fram i samtalen om minusloven. Det er en aktivitet som hjelper elevene til å oppdage og se mønstre. Ida ønsker at elevene skal undersøke og finne ut om minusloven alltid gjelder.

Dermed inviterer hun elevene til å generalisere. Videre hjelper hun dem til å lage et uttrykk som gjelder for alle typer regnestykker. Hun introduserer likevel ikke selv for noen generaliseringsstrategier. Hun ønsker at elevene skal oppdage dette selv. Det blir bekreftet i intervjuet med henne etter undervisningen. Algebra og tall henger sammen i hennes forståelse av algebraisk tenkning. Hun synes likevel det er vanskelig å sette ord hva algebraisk tenkning er.

I intervjuet kommer det fram at hun mener en skal vente med symbolspråk. Forståelsen for algebra er viktigere enn symbolene. På skolen til Ida kaller de ikke den ukjente for x før de har kommet litt lengre opp i trinnene. De sier heller at det er et ”hemmelig tal”. Dermed har de et begrep for det, og så kan symbolspråket komme når de er klar for det.



Figur 1: Idas undervisning[5]

A) Introduserer for en eller flere generaliseringsstrategier, B) Presenterer en relasjon mellom to størrelser, C) Arbeider med ukjente eller størrelser som varierer. D) Hjelper elevene til å oppdage og se mønstre.

Ut i fra GTG- modellen til Kieran (2007) har Ida til en viss grad ”generative activity ” i hennes undervisning. Det er fordi Ida har fokus på likninger med ukjente og variabler gjennom minusloven. Videre mener Kieran (2007) at det forutsetter at en har kjennskap til det algebraiske språket og symboler for å arbeide med ”generative activity”. Dette gjør Ida til en viss grad. Et eksempel på det er at hun bruker tomme bokser ved arbeid med minusloven. Hun fokuserer på at det er noe ukjent som elevene skal finne ut av. Selv om hun ikke fokuserer på symbolspråk. Gjennom samtalen med minusloven er det også en ” transformational activity”. De regnetekniske prosessene i algebraen er også tilstede. Elevene trenger å forstå betydningen av likhetstegnet. Det er også nødvendig at de har evnen til å regne seg fram til svaret på egenhånd.

Minusloven er også et eksempel på en ”global/meta-level activity” . Det som er felles for slike aktiviteter er at det finnes flere måter å komme frem til et svar på (Kieran, 2007). Det virker som at Ida ønsker at elevene skal undersøke selv og se at det alltid er flere løsninger til samme svar. Dette kombinert med en samtale som bygger på elevenes tallforståelse, hjelper elevene til å forstå og bruke minusloven.

Ida sin ”minuslov”

Denne aktiviteten ble tatt med under det første hovedområdet som heter ” læreren introduserer for en eller flere generaliseringsstratgier ”. Det er likevel en aktivitet som også inneholder de andre områdene. Dermed ved hjelp av denne minusloven tilrettelegger Ida i stor grad for algebraisk tenking.

Minusloven har også tydelig fokus på relasjonell forståelse av likhetstegnet. Samtalen Ida har med elevene i timen gir dem også muligheten til å oppdage at det er relasjonell forståelse av likhetstegnet. Dermed er ikke bokstavutrykket nødvendig for å forstå relasjonen mellom tallene i regnestykket. For å dobbeltsjekke om at jeg har forstått minusloven sender jeg Ida en e- post. Hun kommer med et regnestykke:

$30 - 8 = \square$

Videre skriver hun *”Find det tal, der skal stå i kassen ved at finde det tal du skal plusse til 8 for at få 30*”.

I denne forklaringen har hun også skrevet en formel.

$a - b = c$, når $b + c = a$

Ved denne forklaringen forstår jeg i større grad hvorfor Ida påpeker at minusloven kan være en likning. Når hun sier: *”Det er faktisk en lille ligning som man løser … så jeg tænker overgangen til ligningløsning såsom tradisjonell algebra…med bogstaver er kortere når man bruger minusloven….det er faktisk min erfaring at …det er jo ikke første gang jeg har en andenklasse..”*. Dermed er det ikke nødvendig med notasjon for at elevene skal forstå den algebraiske tenkningen. Dette støtter teorien til Radford (2014). Han mener at notasjon ikke karakteriserer den algebraiske tenkningen.

Pikeklasse

Det var interessant å observere en klasse med kun jenter. De er flinke til å samarbeide, heie på hverandre og si ifra til Ida hvis det er noe de lurer på. Det virker også som en trygg og rolig jentegruppe som har det godt sammen. Det er spesielt to jenter som er spesielt ekstra faglig sterke. Ida tilrettelegger en ekstra oppgave for dem. Hun har også et ekstra blikk for differensiering. I intervjuet forteller Ida litt mer utdypende om hvorfor guttene har egen undervisning:

I : Det er ikke så sædvanlig at det så stor forksel på pigerne og drengene..

V: okay…

I: som det er i denne her klasse

V: ahh, ok…har du en teori hvorfor det?

I: eh..vi har en psykolog som hjælper med å finde ud af det..

V: ahh, okay..

I: Vores hypotese er at drengene…har riktig brug for å finde ud af hvordan de har hinanden henne..sådan kamarat mæssigt…

V: okay..

I : og der er drengene mere usikre på deres indbyrdesrelation…så de kommer til å bruge en hel del energi på af finde ud af de indbyrdesrelation….hvem som er venner med hvem..

V: ja..

I :.. og så overskygger det alt..og så er der faktisk ikke plads til å lære noget…

V: ok ..

I: Det er i hvert fald den hypotese vi har…og vi skal arbejde med den…vi skal selvfølgelig give den drengegruppe mulighed for å være alene sammen…og lære det de mangler at lære, ikke?

Ut i fra denne samtalen får man inntrykk av at det ikke bare en utfordring i Idas klasse. Det er normalt problem i den danske skole. Det er dermed noe lærerne må tenke på når de skal tilrettelegge for algebraisk tenkning på småtrinnet. Jentene har kommet lengere i den sosiale utvikling. De er også mer fokuserte og klarer å tilegne seg kunnskap.

Jeg spør i intervjuet om hvordan hun hadde tilrettelagt en undervisning om minusloven for guttene. Hun har også undervisning med guttegruppen, men med et mindre nivå og langsommere tempo. Hun påpeker at hun ville brukt flere konkreter som blant annet penger for å ha noe konkret å jobbe med. Hun bruker også mindre tall og det er litt langsommere tempo når hun skal tilrettelegge algebraisk tenkning for guttene. Dette er fordi det tar lengre tid for dem å forstå og regne ut minustykkene på tavlen. Videre mener hun at jentene allerede har dannet seg konkrete bilde i deres hode, så tikronene og femkronene er noe de i større grad har forhold til og har visualisert i sitt hode. Deretter lurer jeg på hva som skiller denne undervisningen kontra enn annen undervisning som hun har.

V: ok..hva forskellen med dette kontra en vanlig time..

I: altså hvis jeg havde pigerne ville det være sådan hær..og jeg havde også lavet den samme didaktikken..

V: mhm..

I:…men jeg ville have fokus på disse to piger så man kunne se noget som var riktigt spændende.. ellers hadde jeg bare ladet dem arbejde selv…

V: men hadde de undersøkt selv?

I: ja, det havde de..de er jo børn..de kan lide at undersøge…også i matematikken.

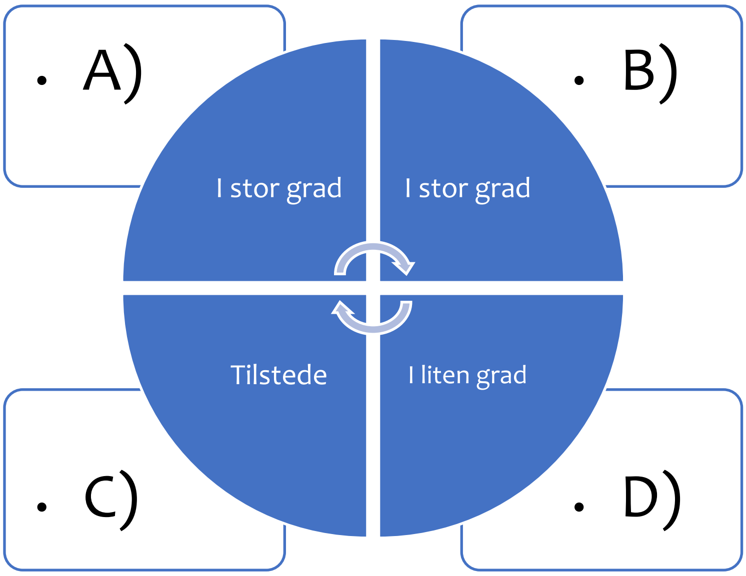
Etter å ha sett Ida undervise i nulteklasse også, er tilnærmingen hennes ganske likt. Det er såklart på et lavere nivå. Det er en undersøkende virksomhet som også foregår her. Det er også en grundig dialog om mynter. Hun stiller mange spørsmål. Det kan være fordi hun ønsker at mange skal delta i samtalen.

4. 8 Noah

I undervisningen til Noah er området om: ”*Læreren representerer en relasjon mellom to størrelser* ” mest tilstede. Dette kommer tydeligst fram i hans regneforellinger. For de representerer en relasjon mellom to størrelser. Grunnen til at denne delen er mest tydelig, er at han tilrettelegger undervisningen slik at elevene skal forstå at det er en relasjon mellom størrelsene. Det er tydelig at han ønsker at elevene skal ha en god tallforståelse og at han bruker disse regnefortellingene aktivt som et verktøy. Dette blir også bekreftet i intervjuet. Dette området utgjør over halvparten av undervisningen jeg har sett til Noah.

Etter å ha sett undervisningen hans tenkte jeg ikke automatisk at det var et tydelig algebraisk fokus. Men å høre hans tanker rundt algebraisk tenkning forstår jeg at det er tydelig fokus på algebraisk tenking likevel. God tallforståelse og algebra henger nært sammen i hans forståelse av algebraisk tenkning. Videre kommer det fram at det abstrakte ved matematikken kan bli mer forenklet i hans regnefortellinger. Hans ønske er at når de møter en ligning seinere i skoleløpet, så vil de bruke en regnefortelling som et verktøy for å forstå forholdet mellom variablene i ligningen. Han bekrefter at relasjonen mellom to størrelser er noe han arbeider mye med gjennom sine fortellinger.

I intervjuet kommer det fram at han er ikke opptatt av å fokusere på symbolspråk. Derfor er generalisering ikke tilstede i hans undervisning. I samtaler med ukjente eller størrelser som varier kommer det fram at han fokuser på elevenes tallforståelse. Det matematiske språket til elevene er i fokus. Han bruker begreper som halvdel, halvparten, like mye og mengde. Det er likevel ikke det som er viktig. Det er at elevene forstå matematikken og kan bruke den i dagliglivet.



Figur 2: Noahs undervisning[6]

Det er lite ”generative activity ” i hans undervisning. Det er i større grad fokus på ”transformational activity” og ”global/meta-level activity” (Kieran, 2007). Dette ser man blant annet i hans regnefortellinger. Det forutsetter at elevene har evnen til å transformere prosessene og forstår betydningene av regneoperasjonen. Samtidig at elevene har evnen til å resonnere seg fram til svaret. Noah er også opptatt av at elevene selv skal finne ut at det er flere løsninger. Dette i seg selv gjør ikke at aktiviteten inviterer til algebraisk tenking. Den resonnerende tilnærmingen er likevel med på å hjelpe til at elevene oppdager mønstrene, se relasjonene mellom tall eller størrelser som varierer.

[6] A) Introduserer for en eller flere generaliseringsstrategier, B) Presenterer en relasjon mellom to størrelser, C) Arbeider med ukjente eller størrelser som varierer. D) Hjelper elevene til å oppdage og se mønstre.

Forskjellen mellom aritmetikk og algebra

Ut i fra Radford (2014) kan det være vanskelig å gjøre et skille mellom aritmetikk og algebra. Han mener det er fort gjort å undervise aritmetikk når vi tror vi underviser algebra (Radford, 2014, s. 258). Det kan dermed diskuteres i hvor stor grad regnefortellingene til Noah er algebraisk. Under observasjonen ble jeg usikker om han har tilrettelagt for algebra. Det kommer likevel fram i hans refleksjoner at han er bevisst på de grepene han gjør. Videre at tallforståelsen og algebra henger sammen.

Refleksjonene til Noah støtter i større grad synet til Schliemann (2007) som handler om at aritmetikken er en del av algebraen. Det handler ikke om når algebraen skal innføres, men hva, hvor og hvordan den skal innføres. Noah har også et ønske om at regnefortellingene skal være et verktøy når de arbeider med likninger seinere i skoleforløpet.

Kaput og Blanton (2001) mener at dersom elevene begynner å bruke begreper i sammenhenger som er naturlige selv om de ikke forstår betydningen, så kan det føre til at begrepene blir mer meningsfulle for elevene. Videre er det to hovedområder de legger spesielt vekt på. Det første området handler om å generalisere. Dette er ikke tilstede i Noahs undervisning. Derimot handler det andre området om å skape en klasseromskultur som oppmuntrer til blant å komme med hypoteser og argumenter. Regnefortellingene hans gjør i viss grad det. Han ønsker at elevene argumenterer for hvordan de forstår fortellingene hans. Videre at de forstår og kan bruke begreper knyttet til algebra slik de blir meningsfulle.

Algebraisk tenkning i en sammensatt elevgruppe

I klassen til Noah er det mange flerspråklige elever. Noah har selv flerspråklig bakgrunn. Det er ingen tvil om at det faglige språket er en utfordring for dem. Derfor påpeker Noah at det er nødvendig å lage regnefortellinger med en konktest som alle kan kjenne seg igjen i. Dette er noe Noah tenker mye på når han lager sine regnefortellinger. Fortellingene handler ofte om klassen eller nære dagligdagse situasjoner. Videre påpeker han at han ønsker å variere læringsformene. Det å for eksempel bruke sansene kan være med å få flere og da spesielt flerspråklige elever med. Dette gjelder ikke bare i Noahs klasse. Det er likevel flest flerspråklige elever i hans klasse.

I intervjuet med Noah lurer jeg på hva han tenker om påstanden om at det er sammenheng mellom elever som er fagligdyktige og elever som tenker algebraisk. Da forteller Noah om et spill som er veldig populær i klassen og på fritiden. Det er noen figurer som man skal flytte over på den ene siden. Dette er et spill som inviterer til algebraisk tenkning mener han. Han poengterer at i det spillet trenger man ikke være fagligdyktig for å løse oppgavene. Han synes likevel at det å kunne forklare seg og holde konsentrasjonen i en historie kan hjelpe elevene til å tenke algebraisk. Videre sier Noah at hvis man har god tallforståelse, så blir man algebraisk bedre.

"Jeg tror procentvis..hvis man tog de børn som var rigtig gode til tal, så tror jeg også de var algebraisk bedre. Fordi de har lært at gennomskue algebraen senere..ikke fordi lærerne har nødvendigvis vist dem hvordan man gør det. Men de har lært det gennom tallene. Det behøver jo ikke at være sådan. Jeg tror alligevel at god talforståelse kan være med til algebraisk forståelse ".

I intervjuet kommer det også fram at Noahs undervisning skiller seg fra de andre lærere på skolen. Det kommer blant annet fram at han fokuserer mer på et emne og går i dybden i det. Han er opptatt av at alle elevene skal være med, og deltakende i hans arbeid. Han involverer også foreldrene i det arbeidet han gjør. Dette gjør at foreldrene kan i større grad få forståelse for hvor langt barnet deres har kommet, og at de selv kan være med på å utvikle elevens matematiske ferdigheter.

" Jeg inkluderer nok mere forældrene i det arbejde jeg gør og involverer dem i det jeg underviser om..Jeg tror på den måde, så tænker jeg anderledes. Der er også forældre som

henviser til mig og spørger hvordan man gør det der..og så skriver jeg til dem hvordan jeg arbejder med det".

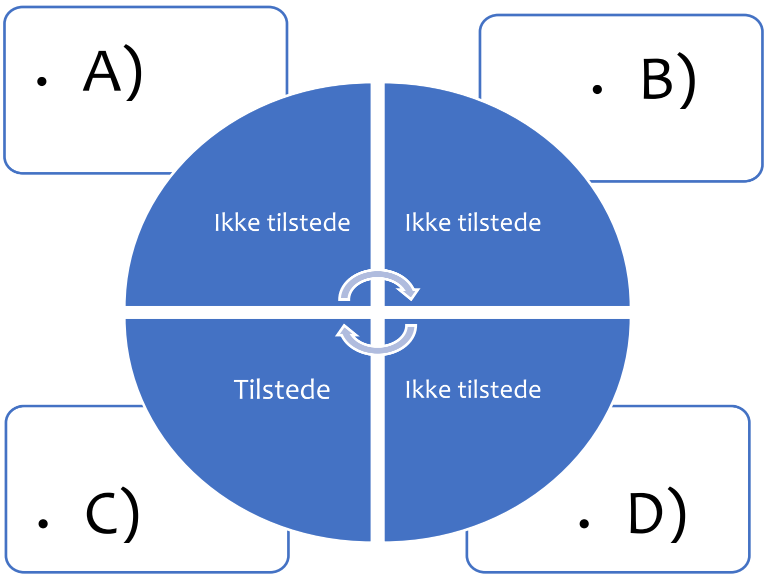
Det hadde også kommet en annen lærer og gått forbi klassen til Noah. Etter cirka 20 min hadde hun gått tilbake, og sett at Noah fortsatt sto og snakket. *"Noah, du er nok en af de som snakker allermest af lærerne på denne skole"*. Da påpeker han: *"Det er fordi jeg er så grundig"*. Han utdyper det ved å si at han ønsker at regnefortellingene skal gjøre at elevene får en bedre forståelse for matematikken. Dermed er han nøye og grundig, og på den måten utvikle en god tallforståelse

4.9 Nanna

Denne undervisningen er minst tilrettelagt for algebraisk tenkning. Det kan være flere grunner til det. Jeg fikk ikke ha en samtale med denne læreren i forkant. Derfor var hun ikke helt sikker på hva jeg skulle observere. Det handler også om at hun er en ny lærer på småtrinnet, og har tydeligvis ikke tilrettelagt for algebraisk tenkning for yngre elever.

De ”generative activity” aktivitetene er ikke tilstede i Nannas undervisning. Det er også lite ”transformational activity*”* i undervisningen. Hovedfokuset er på de ”global/meta-level activity” aktivitetene. Det er ikke en aktivitet i seg selv som inviterer til algebraisk tenkning. Selv om undervisningen inkluderer problemløsing, modellering og bevis som alle er ”global/meta-level activity” (Kieran, 2007).

I intervjuet kommer det fram at Nanna har et ønske om å tilrettelegge for algebraisk tenkning, men at hun synes det er krevende. Dette kombinert med at hun ikke har tidligere erfaringer fra småtrinnet gjør det utfordrende. Det kan være årsaken til at det ikke ligger naturlig for henne å skulle tilrettelegge for algebra i førsteklasse. Videre blir algebra ikke en naturlig del av hennes undervisning.



Figur 3: Nannas undervisning[7]

[7] A) Introduserer for en eller flere generaliseringsstrategier, B) Presenterer en relasjon mellom to størrelser, C) Arbeider med ukjente eller størrelser som varierer. D) Hjelper elevene til å oppdage og se mønstre.

Geobrett og algebra

Under hennes observasjon blir jeg distrahert av det er en norsk elev i klassen. Jeg brukte derfor litt tid i starten for å finne ut hvem av jentene det var. Det spiller inn for datamaterialet mitt hos Nanna. Hun starter med å modellere for oppgaven elevene skal gjøre. De handler om geometriske mønster. Hun bruker Smartboarden og forteller om geometriske mønstre. Etter å ha hørt gjennom lydopptakene oppdager jeg at hennes modellering er gjennomtenkt. Hun bruker et virtuelt geobrett for å vise elevene hva de skal gjøre. Samtalen hun har med elevene har fokus på forståelse og elevene er også forberedt på hva de skal gjøre.

I intervjuet kommer det fram at hun ikke selv mener at det er en tydelig link mellom geobrettet og algebra. Dette kan være at hun ikke har så myer erfaringer på småtrinnet og er ikke vant med å integrere flere matematiske emner sammen. Petersen & Mortensen (2011) mener at den pre- algebraiske tankegangen har preget den danske algebraundervisningen i mange år. Det å oppdage geometriske mønstret er derfor noe en godt kan fokusere på i førsteklasse. Dette kan hjelpe elevene seinere for å forstå strukturen innenfor algebraen. Derfor kan geobrett godt brukes for å tilrettelegge for algebraisk tenkning på smårinnet.

4.10 Pernille

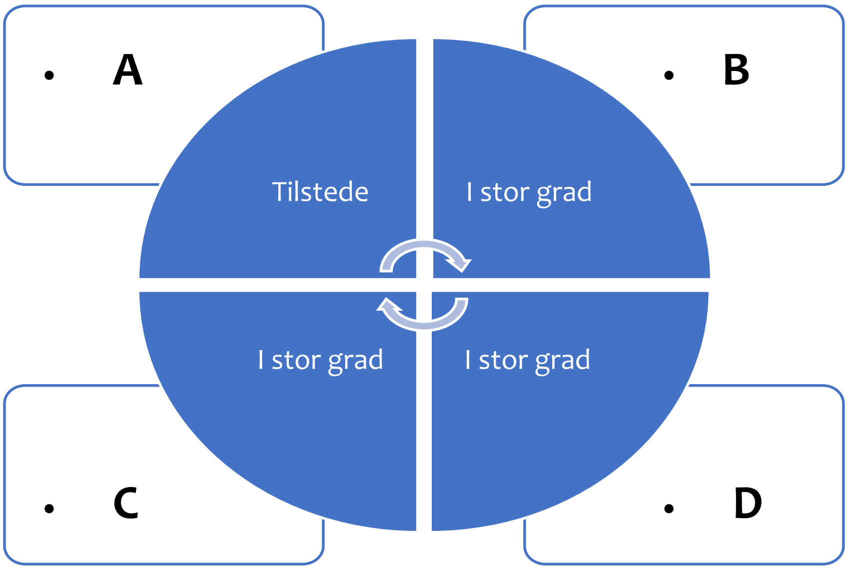
Undervisningsopplegget til Pernille har tydelig fokus på algebraisk tenkning. Det er både tilrettelagt for det og elevene viser i stor grad evnen til å tenke selvstendig algebraisk. Her er det ikke noe tydelig forskjell på de sterke eller de svake elevene i forhold til deltakelse i timen, og deres evne til å oppdage og forstå mønsteret. I intervjuet kommer det fram at elevene er vant med å være detektiver i hennes timer. Videre er de vant med å finne mønstre på egenhånd. De bruker også aktivt selv bokstaver og har god forståelse over hva de gjør. Hun integrerer alle de 4 hovedområdene tydelig i hennes undervisning. I intervjuet kommer det også fram at Pernille introduserte allerede i andreklasse for algebraisk tenking. Det er likevel unaturlig tidlig å starte med symbolspråk.

Pernille: " I forbindelse med dette prosjektet er jeg nok især optaget af generalisering…Men det er typisk for mig å have en form for problemløsende oppgave med… at stille de der spørgsmål: gælder det der mon alltid? Er du sikker? Eller kan der være flere løsninger? ".

I intervjuet med Pernille lurer jeg på hvilken deler av algebraen hun tenker en burde fokusere på for elever på småtrinnet. Da sier hun:

"Jeg tror det af finne mønstre mellom tal, lede efter sammenhæng ..hmmm…altså at have nogle oppgaver: "Gælder det altid? ", "Og hvorfor...? " SÅ at man går ud fra det er bare nogle gange, men det er altid. Det tror jeg.. ".

Dette er del av klassekulturen. Hun bekrefter at elevgruppen er en veldig gunstig gruppe å gjøre slike arbeid i. De er en engasjert elevgruppe og er i en viss grad selvstendige. Jeg fikk også være med henne i en annen klasse hun har på trinnet. Det var mest for å se forskjellene. Det var en elevgruppe som i større grad strevde faglig. Hennes tilnærming, og deriblant ved å være utforskende og grublende var også tilstede her.



Figur 4: Pernilles undervisning[8]

Pernille har alle tre aktivitetene til Kieran (2007) tydelig tilstede i hennes undervisning. Det er mye ”generative activity” i undervisning. Blant annet:

- Likninger med ukjente eller variabler for å representere en problemsituasjon.

- Uttrykk for generaliserte geometriske mønstre eller numeriske følger.

De ”transformational activity” er også nødvendig for å forstå aktiviteten med klipping av snorer. Hun fokuserer blant annet at på at de skal samle like uttrykk, addere, og multiplisere og forenkle utrykket (Kieran, 2007). I følge Kieran (2007) gir ofte de ”global/meta-level activity” aktivitetene motivasjon for å jobbe med de to andre aktivitetene. Pernille bruker aktivt problemløsning, arbeid med generaliserte mønstre, argumentasjon som betegnes som ”global/meta-level activity”. Dette kan være med på å motivere elevene til å utvikle algebraisk tenkning.

[8] A) Introduserer for en eller flere generaliseringsstrategier, B) Presenterer en relasjon mellom to størrelser, C) Arbeider med ukjente eller størrelser som varierer. D) Hjelper elevene til å oppdage og se mønstre.

Pernille reflekterer over begrepet tidlig algebra

Pernille sine refleksjoner om tidlig algebra stemmer med det jeg har sett i undervisningen. Jeg spør på slutten hvordan hun selv definerer begrepet. Her er samtalen jeg får med henne:

P: jeg tænker egentlig at der to vinkler på det…

V: ja..

P: Det kan være indholdsmæssigt som går på …ehh…funktioner …symbolsprog…løse ligninger …ehh…finde sammenhænger …noget indholdsmæssig som algebraen kan altså handle om…Men det er også noget som handler om nogle processer…

V: okay..

P:..algebra kan være nogle indholdsområder i matematik..

V: innhold?

P:..altså vi arbejder med ligninger…vi arbejder med bogstaver…vi arbejder med funktioner…vi arbeider med mønstre…altså noget innholdsmæssig…men handler også den dere algebraiske tænking om at kunne opdage nogle sammenhenger….begrunde de sammenhæng..ræssonnere …argrumentere med matematik..generalisere…..de der ting..

..Så jeg tænker det er to ben man bør fokusere på..den algebraiske tænkingen og det faglige inhold.

Denne tankegangen skiller henne fra Ida og Noah. De sliter med å trekke algebraen bort fra aritmetikken. Hun viser derimot et tydelig skille mellom det faglige innholdet og den algebraiske tenkingen. Videre kan en undre seg over hvorfor hun har en slik tankegang. Hvorfor skal det faglige innholdet og den algebraiske tenkingen skal være to ben i matematikken? Denne tankegangen passer ikke inn i Carraher og Schliemann (2007) to syn på algebraen. Den første mener at algebraen kommer etter aritmetikken. Det andre synet er aritmetikken en del av algebraen.

Pernilles tankegang kan heller være en videre forklaring på hvordan Carraher og Schliemann (2007) ser på algebraisk tenkning. De mener at algebraen skal eksistere i alle matematiske emner. Algebraen skal derfor ikke introduseres som et eget emne, men den skal gjennomsyre aritmetikken og andre matematiske emner allerede fra den første opplæringen i matematikk begynner (Carraher og Schliemann, 2007). For å klare det trenger en to bein. Både det faglige innholdet og den algebraiske tenkningen. Dermed trenger ikke hennes tankegang å være en motsetning til deres teori. Heller en bruk av deres teori for å klare å kunne tilrettelegge på småtrinnet.

Algebra som isolerte klumper i matematikkundervisningen

I Intervjuet med Pernille kommer det fram at hun har en fordom om hvordan danske lærere forholder seg til algebra i den danske skole:

P: *″ Jeg tror mange steder i Danmark så ligger meget af algebraundervisningen ofte senere i skolen, ikke? Det er min fordom..at ofte blir algebraundervisningen sådan nogle isolerende klumper …så arbejder vi med likninger…så flytter vi frem og tilbage på siderne….men det er min fordom…lidt isolerende klumper ….måske er også sådan i Norge?. ″*

Det er en interessant påstand Pernille kommer med. Ut ifra det jeg har observert stemmer ikke denne påstanden i stor grad. Det er kun Nanna sin undervisning om geometri som ikke er tydelig koblet til algebra. Hun integrerer dermed i mindre grad enn de andre algebraisk tenkning. Det kan være fordi de andre lærerne har mer erfaring fra småtrinnet. Algebraisk tenkning er i større grad intrigert hos Noah og Ida.

De fant ut at introduksjonen av den såkalte mere ″abstrakte ″ matematikken fungerte også på småtrinnet. Siden tall og algebra har vært en del av den danske trinnmålbeskrivelsen i leseplanen for 1-3 klasse siden 2009 (UVM, 2009, s 20) er det noe Noah og Ida er vant med å arbeide med. I intervjuene jeg har hatt med dem gir de et inntrykk av at tall og algebra henger sammen. Deres refleksjoner peker på en forståelse av at algebra er en naturlig del av matematikken. Dette er i tråd med det Carraher og Schliemann (2007) mener om algebraisk tenkning. For de mener at gapet mellom aritmetikk og algebra er noe som ikke trenger å eksistere.

Selv om Nanna ikke integrerer tydelig algebraisk tenkning i sin undervisning har hun et tydelig ønske og ser verdien av å begynne tidlig. Hun viser også i intervjuet til en forståelse av algebra som ikke er isolerte klumper fra annen undervisning. *"Når man arbejder med omkreds og areal arbejder man med formler. Da kan man jo sige at man arbejder med algebra"* sier Nanna. Videre sier hun at algebra handler om å ta med bokstaver. Når det holder en plass for et eller annet. Påstanden om at algebra er som isolerte klumper stemmer derfor ikke ut i fra det jeg har sett hos Noah og Ida.

Kapittel 5

Så langt i oppgaven har jeg presentert relevant teori ut fra det teoretiske rammeverket. Videre har jeg forklart og drøftet metodene jeg har brukt for å finne svar på forskningsspørsmålet mitt. Deretter presenterer jeg mine funn i to deler. Den første delen var tilretteleggingen og i den andre delen så jeg på lærerne. I denne delen vil jeg trekke sammen trådene og drøfte det jeg har funnet ut.

5.1 En overordnet analyse

Under dette avsnittet vil jeg gi en overordnet analyse over mine funn. Videre vil jeg se på mine hovedfunn, og deretter se på ulike deler av forskningen som har betydning for resultatet jeg har fått.

Pernille integrerer Kaput og Blanton (2001) sine hovedområder. Dette skiller henne fra de andre lærerne. Hun har klart å skape en klasseromskultur som oppmuntrer og understøtter elever til å generalisere, formalisere, komme med hypoteser og argumenter. Pernille har begynt å bruke begreper i sammenhenger som er naturlige for elevene. De er i stand til å forstå dem selv og kan forklare med egne ord hva de betyr. Pernille sin undervisning er også et godt eksempel på en ”generative activity” (Kieran, 2007). Ida og Noah tilrettelegger også for dette i sin undervisning, men i mindre grad enn det Pernille gjør. Hun har disse områdene, som i følge Kieran (2004) bør være tilstede:

1) Tenke på det generelle i det spesielle.
2) Tenke på hvordan man kan presentere sammenhenger i problemer.
3) Tenke på prosesser som begreper.
4) Kunne forvente, stille hypoteser og grunngi.

Ida og Noah viser i sin undervisning at de klarer å tilrettelegge for algebraisk tenking. De hjelper elevene sine til uformelle og formelle representasjoner. De er også opptatt av elevens tallforståelse. Videre at en oppgave kan ha flere løsninger. Dette er mye i tråd med det Rivera (2006) mener en lærer bør fokusere på:

1) Eleven må lære å sette pris på uformelle og formelle representasjoner. Et mål med undervisningen vil være å føre sammen elevenes egne symboler med det formelle matematikkspråket.
2) De må få oppgaver der det er flere løsninger.
3) Lære elevene funksjoner tidlig så de kan begynne å utvikle evnen til matematisk modellering.

Pernille viser også at det er mulig å tilrettelegge for symbolspråk allerede i tredjeklasse. Elevene forstår og kan bruke symbolspråket selv. Kieran (2004) påpeker at bokstaver kan brukes som et verktøy. Det er samtidig ikke nødvendig for at elevene skal forstå den algebraisk tenkning (Kieran, 2004).

Selv om Pernille i større grad har fokus på symbolspråk er det ikke dette som gjør at hun i større grad tilrettelegger for algebraisk tenkning. Det er helheten av Pernille sin undervisning som gjør det. Hun har i større grad integrert alle de fire områdene inn i undervisningen. Dette kombinert med de områdene Kieran (2004) mener bør være tilstede når læreren skal tilrettelegge for algebraisk tenkning. Det gjør hennes undervisning til et eksemplarisk eksempel på hvordan man kan tilrettelegge for algebra på småtrinnet. Ida og Noah viser også undervisningsopplegg som har flere elementer knyttet til algebraisk tenkning. Videre viser Nanna sitt undervisningsopplegg at det kan være vanskelig å tilrettelegge for algebraisk tenkning når en har få erfaringer med dette på småtrinnet.

5.2 Hovedfunn

I dette forskningsprosjektet har jeg prøvd å finne ut følgende spørsmål: *Hvordan tilrettelegger og forstår lærere algebraisk tenking på småtrinnet?*

Det er et todelt spørsmål. Det handler om hvordan læreren tilrettelegger for algebra. Det handler også om hvordan læreren forstår begrepet. Det har vært en utfordring å skille disse to delene fra hverandre når jeg har skrevet oppgaven. I den første delen av funnene mine viser jeg ulike undervisningsopplegg. Hensikten var å vise hvordan lærerne tilrettelegger for algebra i deres undervisning. Lærerens undervisningsopplegg henger også sammen med deres forståelse av begrepet.

Alle lærerne har undervisning med elementer som inneholder algebraisk tenkning. Det er samtidig veldig forskjell i hvor stor grad de tilrettelegger for algebraisk tenkning. Det gjelder også hvordan de forstår begrepet. Lærerens undervisning inneholder i stor grad resonnerende aktiviteter (Kieran 2007).

Det er derimot ikke alle aktiviteter som i stor grad inviterer til algebraisk tenkning. Det gjelder spesielt for Noah og Nanna sine aktiviteter, f.eks: regnefortellingene om Noah og hans søsken. For at elevene skulle fått en dypere forståelse av likhetstegnet kunne han endret pengebeløpet. Funnene fra mitt datamateriale viser dermed at det er et potensial i de aktivitetene som allerede er laget for å tilrettelegge for algebraisk tenkning. Det forutsetter at lærerne er bevisst på den algebraiske tenkningen og utnytter dette mer i sin undervisning. Det er også et behov for en større bevisstgjøring på hva som er algebra og hvordan man kan bruke dette mer i undervisningen.

5.3 ” De fire hovedområdene ”

”De fire hovedområdene” er kategorier jeg selv har kommet fram til etter å ha lest i litteraturen (Kiran, 2007, Rivera, 2006, Knuth, m. fl, 2016). Fordelen ved å gjøre dette var at det var lettere å se etter noe konkret i observasjonen. I kapittel 3 som handler om metode skriver jeg om dette. Her kommer det fram at jeg ønsket ikke å bli for styrt av disse fire områdene. Jeg som forsker skulle være åpen for at læreren også kunne tilrettelegge for andre områder innenfor algebra. Jeg har likevel blitt påvirket av kategoriene under observasjonen siden jeg ikke hadde lest om andre områder innenfor algebra. Det ble derfor vanskelig å se om det var noe annet læreren også fokuserte på.

Det har vært nyttig å bruke de firehovedområdene som et analyseverktøy. Det har hjulpet meg til å sortere funnene mine. Jeg har likevel innsett at hovedområdene: ” *Arbeide med ukjente eller størrelser som varierer* ” og *”Presenterer en relasjon mellom to størrelser”* går litt i hverandre. Den relasjonelle forståelsen er sentral innenfor algebraisk forståelse (Knuth, 2006, Kieran, 2017). Videre er den tilstede i flere av områdene. Det relasjonelle synet er likvel mest synlig i dette området: ”Presentere en relasjon mellom to størrelser”. Her kunne jeg i større grad drøftet det rasjonelle synet på likhetstegnet siden det kommer fram i regnefortellingen til Noah under dette området.

5.4 Algebraisk tenkning

Carraher og Schliemann (2017) forventer ikke at det skal være en universell enighet om definisjonen av tidlig algebraisk tenking (Kieran, 2017, s 123). Datamaterialet viser også at lærerne selv er usikre og lurer på hva egentlig algebra er. I litteraturen finner man mange komplekse og vide teorier om hva algebra er. Videre er det mange argumenter for hvorfor en skal introdusere elever for algebra tidlig. Det jeg synes ofte mangler i litteraturen er det didaktiske perspektivet. Det som omfatter hva læreren kan gjøre konkret i undervisningen. Dette datamaterialet viser eksempler på hvordan det kan se ut. Videre viser funnene stor variasjon. Dette gjenspeiler også det mangfoldet som finner i litteraturen.

Thomas Kaas (2017) har laget en review over ulike tilganger til tidlig algebra. Forskningslitteraturen fra 1995 – 2017 handler mye om å oppdage og se sammenhenger mellom tall og mengder, begrunne dem, resonnere og løse problemer i dagliglivet. Videre at de involverer ukjente størrelser som han mener er sentralt innenfor tidlig algebra (s 26). Dette er i tråd med Kieran (2004, 2007, 2017). Han har også funnet i litteraturen forskjellig forståelse for algebraisk notasjon. F.eks.: Carraher et. al., 2006 og Linchevski, 2001. Han trekker fram to typer aktiviteter innenfor algebraisk tenkning. De to typer aktiviteter involverer ukjente størrelser eller variabler. Begge disse to aktiviteter kan gi basis for at elever kan resonnere og begrunne (s. 17). De er også i tråd med *”De fire hovedområdene”* jeg har tatt utgangpunkt i.

For å finne svar på mitt forskningsspørsmål har GTG- modellen til Kieran (2007) vært til hjelp. Denne modellen kan ikke alene belyse hvordan lærerne tenker og forstår algebra. Den kan imidlertid være med på å besvare hvilke av aktivitetene som lærerne tilrettelegger som inviterer til algebraisk tenkning. Videre hvilke aktiviteter som i mindre grad gjør det. Det er likevel en teori jeg har valgt å fokusere på og har vært sentral i forhold til hvordan lærerne tenker om algebra.

De aktivitetene er ikke tilstede i Nannas undervisning. Det er også lite ”transformational activity*”* i undervisningen. Hovedfokuset er på de ”global/meta-level activity” . Det er ikke en aktivitet i seg selv som inviterer til algebraisk tenkning. Selv om undervisningen inkluderer problemløsing, modellering og bevis som alle er ”global/meta-level activity” (Kieran, 2007).

Mitt forskningsarbeid viser at alle lærerne har mye fokus på ”global/meta-level activity”. Disse aktivitetene gir ofte grunn og motivasjon for å jobbe med ”generative activity” og ”transformational activity*”* (Kieran, 2007). Felles for alle ”global/meta-level activity” er at det finnes flere måter og komme frem til et svar på, og det skal være mulig å komme frem til svaret uten å bruke formell algebra (Kieran, 2007). Eksempler på slike aktiviteter kan være problemløsning, arbeid med generaliserte mønstre, argumentasjon og bevis, og modellering (Kieran, 2007). Det er de som tilrettelegger for ”generative activity” og ”transformational activity*”* som også i større grad bidrar til at elevene kan forstå og bruke algebra. Derfor mener jeg at denne modellen kan være til hjelp for å forstå i hvor stor grad det er algebraisk tenkning tilstede i deres undervisning.

5.5 Algebraisk tenkning er noe alle elever kan få til

Pernille og Noah påpeker at en trenger ikke å være faglig sterk elev for å forstå og anvende algebraisk tenkning. Det er noe alle elever kan få til. I klassen til Pernille var det flere faglig sterke elever. Det var også noen elever som ikke hadde sluttet med å telle på fingrene i Pernille sin klasse. Det blir påpekt at begge disse elevgruppene hadde i stor grad mulighet til å forstå og bruke algebraen i undervisningen. Dette kommer fram i intervjuet med Pernille:

”… Det som er vældig interessant med hele dette prosjekt er at der nogle af de børn som hvor jeg tænker...HOO…HÆÆ…altså som næsten nogle gange har brug for en tælletavle eller tælle på fingrene de kan alligevel.. tænke i sammenhæng eller finde sammenhæng melom tal…”

Pernille så videre:

”SÅ det med at være regneteknisk svag … man kan ofte stemple dem som ikke dygtige i matematik …og det har været en stor øjenåbner ..sådan er det faktisk ikke altid..man kan fullstændig finde sammenhæng mellem tall. Og man kan forklare hvad lighedsstegnet betyder eller hva bogstaver betyder…Og man kan se det modsatte hos nogle børn som er regneteknisk i overskud, men de måske har svært med at være i en problemløsningssitation, ikke? Den vej kan man jo også oppleve.. ”.

Dette er et interessant perspektiv. For de som er ”regneteknisk” sterke trenger ikke nødvendigvis være de elevene som forstår den algebraiske tenkningen. Det handler om en bevissthet om at algebraen ikke nødvendigvis er lettere for de som er fagligsterke elever. Dermed er det nødvendig at læreren tenker gjennom hvilke aktiviteter som fremmer algebra og som er noe alle elever kan få til uavhengig av deres faglige nivå. Pernille forteller videre om hennes refleksjoner rundt dette:

P: ….man kan sagtens udvikle sig meget indenfor algebraisk tænking uden at være så regneteknisk stærk …måske bare nogle hjælpemidler eller jeg ved ikke..jeg skule lave matematiksamtaler med nogle av børnerne forrige skoleår.

V: mmhm

P: " Blant annet med elev 1 …hun er simpelten et godt eksempel. Hvor hun sad med en algebraoppgave ..og jeg må give henne en telletavle så hun kan telle tall. Og når hun hadde den så kunne hun løse oppgaven og se sammenhængen og alt mulig, ikke?.. Så det er også viktig at der ikke er nogle regnetekniske ting som blokerer for at de udvikler algebraisk tænking ".

Videre har Pernille erfaringer med å bruke konkreter i undervisningen. Det kan være et godt hjelpemiddel for de mindre regnetekniske elevene. Dette kommer også fram i intervjuet med de andre lærerne. Noah er blant annet opptatt av at regnefortellingene inkluderer alle elevene hans.

Dette forskningsarbeidet kan tyde på at algebraisk tenkning er noe alle elever kan få til. Pernille påpeker også at det regnetekniske ikke skal være med på å blokkere for at de utvikler algebraiske tenkning. Hun sier også at en kan være regneteknsisk sterk, men ikke forstår den algebraiske tenkningen. Det er dermed avgjørende hvordan læreren tilrettelegger for algebraisk tenkning slik at alle elever får muligheten til å utvikle seg. Pernille sitt undervisningsopplegg er interessant og imponerende. Elevene får til å generalisere og forstår symbolspråk. Dette forskningsarbeidet viser at det ikke er nødvendig at læreren tilrettelegger for symbolspråk for at elevene skal forstå algebra. Derimot viser hennes undervisning at alle elever har mulighet til å forstå symbolspråk. De kan anvende, bruke og forstå strukturer innenfor algebraisk tenking. Det handler ikke om at elevene er regneteknsisk dyktig, midt i mellom eller svak. Videre at det er avgjørende hvordan læreren tilrettelegger for algebra. Det hjelper ikke at elevene ønsker å forstå algebraiske strukturer hvis ikke læreren tilrettelegger for det.

5.6 Variasjon

Denne oppgaven viser variasjon i hvordan man kan tilrettelegge for algebraisk tenkning. Det er fire ulike undervisninger knyttet til algebra. Lærerne har også ulike oppfatninger om hva algebraisk tenkning er. Det er også variasjon mellom klassetrinnene. Dette arbeidet viser at det er mulig å tilrettelegge for algebraisk tenkning i første, andre, og tredjeklasse. Det ser ikke ut som at det er nødvendigvis er enklere å tilrettelegge for algebraisk tenkning jo lengre opp en kommer i skoleforløpet. Videre viser mitt materialet at det er nødvendig at læreren er bevisst på at undervisningen inviterer til algebraisk tenkning.

Elevgruppene er også veldig forskjellige. I Noahs elevgruppe er det mange flerspråklige. I Ida sin gruppe er det kun jenter. Dette påvirker hvordan lærerne tilrettelegger sin undervisning. Videre er det ulike utfordringer de står ovenfor når de skal tilrettelegge for algebraisk tenkning. I Noahs regnefortellinger f.eks. er det nødvendig at han bruker et språk som er forståelig og som alle elevene kan forstå. Det blir også bekreftet i intervjuet at dette er noe han opptatt av.

5. 7 Tilrettelegging over tid

Det virker også ut i fra intervjuene at å tilrettelegge for algebraisk tenkning kan være tidkrevende. Ida, Pernille og Noah påpeker i intervjuet at en må arbeide over tid med at elevene skal forstå den algebraiske tenkningen. Det er deres erfaringer ved de arbeidene de har gjort som gjør at jeg blir overbevist om at dette er noe de arbeider aktivt med. F.eks. sier Ida at hun har god erfaring med å bruke minusloven og dette har hun gjort en rekke år med sine klasser. Videre at hun har gode erfaringer ved å bruke den. Pernille nevner blant annet at hun har holdt på med detektivarbeid med klassen siden andreklasse. Selv om hun har vært med i et forskningsarbeid, er dette noe hun har arbeidet aktivt med sine elever. Det å tilrettelegge for algebraisk tenkning bør derfor arbeides med kontinuerlig. Det tyder også på at det tar tid for elevene å forstå algebra. Det kan derfor være et tidkrevende arbeid. Selv om deres tilrettelegging og forståelse er nokså forskjellig.

Derfor kan det være en fordel å ha en klasse over tid slik at en kan arbeide kontinuerlig med algebraisk tenkning. Funnene tyder også på at dette er noe lærerne ønsker å tilrettelegge for.

Det er ikke noe de bare gjør for å vise den ”norske piken”. Dette har nok likevel påvirket mitt datamateriale i en viss grad.

5.8 Aritmetikk og algebra

Lærerne sin forståelse henger også sammen med hvordan lærerne ser på forholdet mellom aritmetikk og algebra. Ut i fra Ida og Noah sine refleksjoner ser det ut som at de ikke er et skille mellom aritmetikken og algebraen. De ser på algebraen som en del av aritmetikken (Schliemann, 2007). Begge fokuserer mye på tallforståelsen til elevene. Videre for at elevene skal få en god tallforståelsen, er det nødvendig at elevene forstår algebraen. Aritmetikken og algebraen henger sammen i deres forståelse.

Det er derimot vanskeligere å plassere Nanna og Pernille. I intervjuet med Nanna lurer jeg på om hun ser en sammenheng mellom algebra og geometri. Hun sier da at det kan være en fordel å begynne tidlig med algebra for å forstå at det er en naturlig del av matematikken. Jeg spør ikke videre hva hun mener med det. Det peker mot en forståelse om at aritmetikken og algebraen henger sammen. Pernille sin forståelse gjør også det, men har et tydeligere skille mellom innholdet og tenkingen. Hun viser likvel en utypene forklaring på hvorfor artimetikk skal være en del av algebraen. Videre hvordan man konkret skal arbeide med det i undervingen. Det å arbeide med bokstaver i seg kan ikke gjøre at elevene forstår tenkingen. Derfor er det nødvendig at de også argumenterer, resonnere og leter etter sammenhenger. Hun påpeker dette i intervjuet:

P:..altså vi arbeider med likninger…vi arbeider med bokstaver…vi arbeider med funktioner…vi arbeider med mønstre…altså noe innholdsmessig…men handler også den derre algebraiske tænking.. om å kunne oppdage nogle sammenhænger….begrunne de sammenhæng..ressonnere …argrumenter med matematikk..generalisere…..de der ting..

..Så jeg tenker det er en sånn to ben en bør fokusere på..den algebraiske tænkingen og det faglige innholdet.

5. 9 En utforskende tilnærming

Et annet funn fra oppgaven viser at lærerne har en utforskende tilnærming til matematikkfaget. De er opptatt av at elevene selv skal utforske og komme fram til svaret selv. Hana (2014) mener at matematikk er et undersøkende fenomen. Her blir blant annet undringen nevnt som en del av den undersøkende virksomheten (Hana, 2014, s17). Lærerne er også opptatt av problemløsende situasjoner, f.eks regnefortellingen til Noah. I følge Carraher (2008) har den tidlige algebraen sitt fundament i problemorienterende kontekster (Petersen & Mortensen, 2011, s 10).

Videre er det stor fokus på "global/meta-level activity" i lærerens undervisning (Kieran,2007). Dette fører til at elevene utforsker algebra. Et eksempel er Ida sitt spørsmål til jentene om minusloven: *"Er det andre måter å gjøre det på? "*. Da sier en elev at man kan telle opp. Ida spør igjen: *"Hvordan gjør man det da? ".* Her er hun opptatt av at det er flere måter å løse regnestykker ved hjelp av minusloven. I Pernille sin undervisning er det nærmest en konkurranse i å fortelle henne hvilket mønster de har funnet ut av når de arbeider med aktiviteten med klipping av snorer. Materialet mitt viser at når lærerne har en utforskende tilnærming til sin undervisning smitter dette over på elevene. De har selv lyst å undersøke mønsteret, utforske og finne ut av den algebraiske tenkningen.

Lærerne er også opptatt av å utvikle et begrepsapparat innenfor matematikk. Begrepene *"halvdelen"*, *"i forhold til" og "lige mange"* er sentrale i regnefortellingen om hjulene på bussen til Noah. Videre er disse begrepene sentrale for at elevene skal kunne utvikle en god tallforståelse. Ida bruker ikke symbolspråk i timen om minusloven. Hun bruker likevel ord som: *"hemmelig tall"* og *" ukjent tall"*. Dette er ord som kan hjelpe elevene til å forstå den algebraiske tenkningen.

5.10 Drøftnings konkluksjon

Alle lærerne viser at de kan tilrettelegge for algebraisk tenkning i sin undervisning på småtrinnet. Videre at de alle evner å reflektere rundt begrepet. Det er likevel veldig forskjell i hvor stor grad de tilrettelegger for algebraisk tenkning. Det gjelder også hvordan de forstår begrepet. Mitt forskningsarbeid viser at alle lærerne har mye fokus på: "global/meta-level activity" i sin undervisning. De resonnerende aktivitetene gir ofte grunn og motivasjon for å jobbe med generende objekter og transformerende prosesser (Kieran, 2007). Det er likevel de lærerne som også tilrettelegger for "generative activity" og "transformational activity" som i større grad bidrar til at elevene kan forstå og bruke algebra på egenhånd.

Pernille sin undervisning viser at det er mulig å tilrettelegge for symbolspråk allerede i tredjeklasse. Elevene forstår og kan bruke symbolspråket selv. Kieran (2004) påpeker at bokstaver kan brukes som et verktøy. Det er samtidig ikke nødvendig for at elevene skal forstå den algebraisk tenkning (Kieran, 2004). Funnene viser samtidig at dette er noe alle elever kan få til uavhengig hvor regnetekniske de er.

Hvordan lærerne tilrettelegger henger også sammen med hvordan de forstår algebraisk tenkning. Videre henger det sammen med hvordan de ser på forholdet mellom aritmetikk og algebra. Forskningen viser også at det å tilrettelegge for algebraisk tenkning er tidkrevende og må aktivt arbeides med.

Datamaterialet mitt viser at det er et potensial i alle de aktivitetene som lærerne har vist og tilrettelagt for i deres undervisning. Det er et behov for en større bevisstgjøring på hva som er algebraiske tenkning på småtrinnet, og hvordan man kan unytte dette mer i undervisningen.

6.0 Refleksjon og ettertanke

Under dette området reflekterer jeg over mitt forskningsarbeid. Jeg vil si noe om videre arbeid med algebraisk tenkning og forskning. Jeg vil også noe om hva jeg har lært, om motivasjon og begrensinger med arbeidet jeg har gjort.

Mitt forskningsarbeid:

Når jeg leste og søkte etter litteratur knyttet til tidlig algebra handlet mye om hvorfor det er lurt med tidlig algebra. Litteraturen fokuserer i mindre grad på hvordan det faktisk kan se ut i klasserommet. Masteroppgaver de siste årene om tidlig algebra tar også opp det didaktiske ved algebraisk tenkning. Det er samtidig i større grad fokus på elevene. Det som skiller mitt forskningsarbeid fra andre oppgaver jeg har sett er fokuset på tilretteleggingen. Denne oppgaven gir eksempler på ulike undervisningsopplegg knyttet til algebraisk tenking. Dermed gir denne oppgaven konkrete eksempler på hvordan det kan se ut. Videre har jeg sett at de ulike lærerne legger vekt på ulike deler av begrepet algebraisk tenkning, og hvordan ulike lærere klarer å utnytte potensialet i oppleggene sine.

Videre forskning:

Det didaktiske perspektivet ved algebraen har som sagt ikke vært så mye fokus på i litteraturen. Dermed er det mange muligheter ved å se nærmere på hva læreren kan gjøre i matematikkundervisningen på småtrinnet. En kan blant annet se videre på noen elementer ved algebraen. F.eks: symbolspråk og funksjonsuttrykk på småtrinnet, betydningen av likhetstegnet eller oppgaver som inviterer til mønstre innenfor algebraisk tenkning. Dette berører jeg litt i min oppgave, men er områder man kan gå mer i dybden på.

Det hadde også vært spennende å se på noen oppgaver som løses med en sammensatt elevgruppe, f.eks elever i første eller andreklasse. Selv om det ikke er helt enighet blant forskere om hva som er algebra og algebraisk tenkning, så gir empirisk forskning solide argumenter for at 6- 12 årige barn kan og bør utvikle algebraisk tenkning (Kaas, 2018, s 2). Derfor kan elevens forståelse også være interessant for videre forskning.

Pedagogiske implikasjoner

Lins og Kaput (2004) mener forskningen i stor grad opptatt av å finne ut hva elevene ikke kunne gjøre, istedenfor å ha fokus på hva elevene kunne få til og hvilke muligheter de hadde knyttet til algebraisk tenkning (Lins og Kaput, 2004).

Etter å ha arbeidet med dette prosjektet har jeg blitt inspirert til selv å tilrettelegge for algebraisk tenkning på småtrinnet. Det er absolutt mange muligheter en kan gjøre i undervisningen for å tilrettelegge for algebraisk tenkning. Jeg har også blitt overrasket hvor mye elever er i stand til å tenke algebraisk i tidlig alder. Videre at de er i stand til å generalisere og forklare med egne ord hva de gjør. Det er avgjørende hvordan læreren tilrettelegger for at det skje. Videre at det er oppgaver og aktiviteter som inviterer til algebra tenkning. Det er blant annet nødvendig å gjøre elevene oppmerksomme på strukturen i oppgaven og flytte fokuset bort fra svaret. Læreren viser mange spennende aktiviteter som kan være med at elevene forstår algebraen. Et sentralt spørsmål her vil være hva andre lærere kan ta med seg videre og få nytte av ved å tilrettelegge for algebraisk tenkning på småtrinnet. Jeg vil nevne tre implikasjoner som lærere kan ta med videre:

a) Det er mulig å tilrettelegge for algebraisk tenkning på småtrinnet. Lærerne trenger ikke å lage et eget opplegg, men være bevisst på det potensialet som er i den undervisningen de allerede har. Algebraen trenger derfor ikke være noen " isolerte klumper" fra resten av matematikkundervisningen. Det er derfor nødvendig med en bevisstgjøring på hva som er algebraisk tenkning og hvordan den kan integreres i større grad inn i lærerens undervisning.

b) Dette forskningsarbeidet tyder på at algebraisk tenkning er noe alle elever kan få til. Det regnetekniske trenger ikke være med på å blokkere for at elevene utvikler algebraiske tenkning. Samtidig kan en elev være god regneteknsisk, men ikke forstår den algebraiske tenkningen. Derfor bør læreren tenke gjennom hvordan hun eller han tilrettelegger slik at alle elevene kan utvikle seg.

c) En utforskende tilnærming i undervisningen kan være med på at elevene har lyst til å oppdage mønstre, se etter strukturer, anvende og forstå algebraen. Læreren bør derfor tenke gjennom om de aktivitetene og dialogene han eller hun har med elevene sine er med på at de utforsker og motiveres til algebraisk tenkning.

Begrensinger ved forskningen jeg har gjort:

I dette forskningsprosjektet har jeg brukt *"De fire hovedområdene"*. Dette er områder jeg selv har laget ut i fra litteraturen jeg har lest. Fordelen med det er at jeg har avgrenset litteraturen om algebra på småtrinnet. Samtidig begrenser det også hvilke deler av den algebraiske tenkingen læreren bruker og forstår. Det påvirker også hva jeg har funnet ut i oppgaven min. Jeg har blitt for styrt av disse områdene når jeg har observert og i intervjuene. Områdene jeg nevner under videre forskning, altså: symbolspråk og funksjonsuttrykk på småtrinnet, betydningen av likhetstegnet eller oppgaver som inviterer til mønstre innenfor algebraisk tenking, er noe jeg berører jeg litt i min oppgave, men er områder jeg også kunne ha gått mer i dybden på.

Hva har jeg lært:

Jeg har også lært mye i skriveprosessen. Det har vært krevende, lærerikt og gøy. Det har vært krevende å skrive og forstå teorien. Samtidig har jeg utviklet meg underveis, og synes stadig litteraturen om algebra er spennende.

Tidlig algebra var også mye større og omfattende tema enn det jeg var forberedt på. En del av denne prosessen har dermed vært å avgrense oppgaven. Derfor laget jeg fire hovedområder som jeg har satt fokus på. En ting jeg vil ta med meg videre er at en ikke skal undervurdere små barn og deres evne til å forstå matematikken. Videre at de også kan forstå den algebraiske tenkningen. Viktigheten av at algebra og aritmetikk går hånd i hånd fra elevene er små er noe jeg har funnet i litteraturen. Dette er noe jeg ønsker å formilde videre.

Språkutfordringer

Dette skoleåret har jeg bodd i Aarhus. I starten var det utforende med språket. Det tok litt tid i starten å bli kjent med byen og hvordan den danske folkeskolene fungerer. Det tok også litt tid før jeg fikk samlet data. Språkkommunikasjon har også hatt litt betydning for de første observasjonene jeg hadde. Intervjuene gikk overraskende godt. Etter å høre gjennom lydopptakene var det få misforståelser. Det som også bør komme fram er at jeg hadde litt problemer med å forstå det danske tallsystemet. Det var derfor ikke alle tallene jeg fanget under de første observasjonen som ble sagt muntlig. Derfor var det noen av dialogene lærerne hadde med elevene jeg ikke forsto under observasjonene. Det har påvirket litt analysearbeidet. F.eks var det ikke alle regnefortellingene til Noah jeg forsto i timen. Dermed var ikke notatene så gode. Jeg har likevel klart å forstå det meste i ettertid gjennom lydopptakene.

Den danske folkeskolen

Det har vært spennende å gjøre mine observasjoner i Danmark. Det er vanskelig å påpeke ut i fra dette forskningsprosjektet hva som skiller Norge og Danmark angående tilrettelegging for algebraisk tenkning på småtrinnet. Jeg trodde at jeg i større grad ville ha innblikk i den danske folkeskolen etter dette prosjektet. Det har jeg i liten grad oppnådd. Jeg tror det er fordi jeg har konsentrert meg mest om det faglige og lærenes individuelle tanker om begrepet.

En ting som likevel skiller Danmark fra Norge er nulteklasse. Jeg var heldig å få se Ida undervise en time om mynter og sedler. Det har jeg ikke tatt med i dette datamaterialet. Det var interessant å se hvordan de tilrettelegger på dette trinnet. Det er veldig mye fokus på lek og utforskende tilnærming. Videre de bruker mye konkreter og har klasserom som inviterer til lek og læring. Det er hvertfall det innrykket jeg fikk etter å ha sett nulteklasse sammen med Ida.

Samfunnsmessigperspektiv

Det som også kommer fram i litteraturen er en kritikk av den eksisterende algebraundervisningen (Kaas, 2018). Mason (2008) mener det er nødvendig å gi elever algebrakunnskaper som er relevant for samfunnet (79). Hvordan læreren tilrettelegger for algebraisk undervisning har dermed også betydning for samfunnet. Dette perspektivet viser til en algebraundervisning som sikter bredere enn den eksisterende og utgjør en integrert del av matematikkundervisningen igjennom hele skoleforløpet. Dette perspektivet er også nødvendig at læreren tenker gjennom når de skal tilrettelegge undervisning for algebra på småtrinnet. For hva hjelper det hvis læren tilrettelegger f.eks for det relasjonelle synet på likhetstegnet, mens elevene ikke ser nytten av å bruke det i dagliglivet? Eller ikke ser nytten av algebraen seinere i livet? Det er derfor nødvendig at læreren også har et samfunnsperspektiv i sin tilrettelegging av algebra på småtrinnet.

I Norge er det et ønske om å tilgjengeliggjøre algebra som igjen er med på å demokratisere deler av utdannelsessystemet og arbeidsmarkedet med å utdanne samfunnsborgere (Grønmo og Helgesen ,2018). Grønmo og Helgesen (2018) mener at det er norsk, engelsk og algebra som er de tre viktigste språkene for å møte fremtidenes utfordringer innen miljø, teknologi og økonomi. De mener å beherske algebra legger et godt grunnlag for mange typer læring. Matematisk forståelse vil derfor være viktig både i akademiske utdanninger og i fagutdanninger. De mener også at hvis Norge skal raskt ta i bruk ny teknologi og få mer miljøvennlige næringer vil behovet for algebrakunnskap øke (Grønmo og Helgesen , 2018). Derfor er det nødvendig med en økende interesse for algebra på barneskolen. Videre trengs det en større bevisstgjøring om hvordan man utnytter algebraisk tenking enda mer på smårinnet.

7.0 Litteraturliste

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and Development of Algebra as a Problem Solving Tool: Continuities and Discontinuities with Arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. (s 115-136). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Bråten, I (2006) Vygotsky i pædagogikken. I: I. Bråten, I. & A. Moe (2006). *Den nærmeste udviklingszone som udgangspunkt for pædagogisk praksis* (s 143- 168). Frydenlund, u.s.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 669-705). Charlotte, NC: information Age.

Carraher, D. og Schliemann, A. (2017): Cultivating Early Algebraic Thinking. I: C. Kieran (2017): *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice.* (79-105). Canada: Springer International Publishing AG.

Christoffersen, L & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetoder for lærerutdanningene* (s 41 – 75). Oslo: Abstrakt forlag AS.

Grønmo, L.S & Helgesen, R. (2018, 11 mai). Norge trenger algebra! Hentet fra: https://www.aftenposten.no/meninger/debatt/i/qnMnz0/Norge-trenger-algebra--Liv-Sissel-Gronmo-og-Rita-Helgesen

Hana, G. M. (2014). *Matematiske tenkemåter* (s 13-55) Bergen: Caspar Forlag As.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning in Elementary School. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258-288.

Kaas, T (2018). *Begrundelse for og tilgang til tidlig algebra*. Sendt utgiver, men under vurdering.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience: Part I: Transforming task structures. In H. Cick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 344-351). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, (pp. 33-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8 (1). (pp.139-151).

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2017). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. I: C. Kieran (2017): *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*, (79-105). Canada: Springer International Publishing AG.

Knuth, E. m.fl. (2016). Build an early foundation for algebra success. I: *kappanmagazine.org, V95, N6*, s. 65-68.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009*). Det kvalitative forsknings – intervju* (s 47 – 87). Gyldendal Norsk Forlag As (3 utg).

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of Introducing Algebraic Reasoning through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 7(3), 231- 258.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching (pp. 65–86). Dordrecht, NL: Kluwer.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. *Algebra in the early grades*, 57-94. New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Mortensen, U.C. & Petersen, T.O. (2011). Tidlig algebra. MONA, 2011(3).

Olofsson, B. K. (1993). *Lek for livet: observasjoner og forskning om barns lek* (5.utg) Oslo: Forsythia.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.

Rivera, F. D. (2006). Changing the face of arithmetic: Teaching children algebra. *Teaching Children Mathematics*, 12(6), 306-311.

Schliemann, A. D., W.Carraher, D., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic, From Children´s Ideas to Classroom Practice*. London: Lawrence Erlbaum Associates. 12(6), 306-311.

Undervisningsministeriet. *(2009). Fælles Mål 2009 – Matematik, Faghæfte 12.* Undervisningsministeriet.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 15 (2), 122–137.

Vedlegg 1:

Samtykkeerklæring:

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

□ å delta i klasseromsobervasjon □ å delta i intervju □ Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 15 min.

-- (Signert av prosjektdeltaker, og skoleledelse, dato)

Vedlegg 2:

Dato, høsten 2018:	**Aktivitet**	**Mål**
13. 11 14.11	Klip i snore (Cut the string) Først med en bue, så med to.	Oppdage, beskrive, begrunde, ræsonnere med den funktionelle sæmmenhæng. Beskrivelse med tabel, i natruligt sprog og med algebraisk notation (inkl. lighedtegn)
20.11	Sammenhænge tegnet i koordinatsystem. Sammenhæng mellem alder hos mennesker og hunde. F (x) = 7*x. Sammenheng mellem alder hos mennesker og marsvin. F(x) =10 * x.	Eleverne kan markere talpar fra en tabel som punkter i et koordinatsystem. Eleverne kan oversette sammenhænge beskrevet i et koordinatsystem til tabeller og til sproglige repræsentaioner.
4-12	Undersøkelse af længde på kroppen Da Vinci påstår: - Fodlængde = længde af underarm - Vingefang= højde - 5*Længden fra albue til figurspids = højde - 10 *håndens længde = højde	Udgangspunkt i modeller, der beskriver funktionelle sammenhænge. Kan eleverne efterprøve disse sammenhænge og forholde sig kritisk til dem?

11. 12	Ræsonnementer med funktionsudtryk i form af ligninger. Udgangspunkt i problemstilinger: a) Skal jeg købe eller leje skjøter? b) Hvilken skøjtebane er billigst? c) Hvor er det billigst at købe is?	Eleverne kan sammenligne funktionelle sammenhænge, der beskrives i natruligt sprog. Eleverne kan sammenligne funktionelle sammenhænge, der beskrives i algebraisk notation.