Problemløsning i norske og kinesiske lærebøker i matematikk for ungdomsskolen

----En sammenlignende studie av eksempler fra norske og kinesiske lærebøker i matematikk på ungdomsskolen

HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Masteroppgave i skolerettet utdanningsvitenskap med fordypning i matematikk og matematikkdidaktikk

SKUT5910

(Yan Qin)

Kandidat nr. 917

Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier
OsloMet – storbyuniversitetet

15. Mai. 2018

Sammendrag

Denne studien er en sammenligning av hvordan eksempler i utvalgte norske og kinesiske lærebøker i matematikk for ungdomsskolen presenterer problemløsning og problemløsningsmetoder. Problemstillingen i denne masteroppgaven har vært følgende: Hvilke forskjeller og likheter finnes i eksempler fra norske og kinesiske lærebøker med hensyn til problemløsningsmetoder?

Jeg har brukt både kvalitative og kvantitative metoder. I tillegg har jeg brukt dokumentanalyse som datainnsamlingsmetode. Jeg har analysert tre utvalgte norske lærebøker (Faktor 8, 9. 10) og seks obligatoriske lærebøker fra Kina (Matematikk 7A, 7B, 8A, 8B, 9A, 9B). Analysen er utført for alle tre ungdomstrinn, men er begrenset til eksempler med fokus på problemløsningsmetoder.

I den første delen av hjelpeundersøkelsen kommer jeg inn på noen elementer fra begge land sine læreplaner som kan påvirke både læring og undervisning i problemløsning. I den andre delen av hjelpeundersøkelsen sammenligner jeg både synlige og usynlige egenskaper til de norske og kinesiske lærebøkene ved å bruke rammeverket til Hong og Choi og Veilande og tilpasser dette til min oppgave. I hovedundersøkelsen ser jeg både på generelle metoder basert på Pólyas fire-fases modell og spesifikke problemløsningsheuristikker basert på Kongelfs kodingsordning. Kodingsordningen består av kodingsinnholdsliste og kodingsmanual som er en liste over ni problemløsningsmetoder med tilhørende beskrivelse, og blir tilpasset min analyse med 12 metoder.

Jeg oppdaget at de norske lærebøkene legger mer vekt på eksplisitt presentasjon av problemløsningsmetoder enn de kinesiske, mens de kinesiske lærebøkene viser fire faser i problemløsningsprosessen mer eksplisitt enn de norske. Lærebøkene har veldig lignende oppdeling av eksemplene og problemløsningsmetodene i de tre hovedområdene i læreplanene. De kinesiske lærebøkene presenterer den mest utbredte distribusjonen av metodebruken som omfatter bruk av alle problemløsningsmetoder, mens de norske lærebøkene presenterer den mest konsentrerte distribusjonen med en dominert metode som utgjør over halvparten av totalt antall metoder brukt. Bruken av problemløsningsmetoder i eksemplene er veldig ujevnt fordelt. I de norske og kinesiske lærebøkene utgjør de fire mest brukte metodene 80-83% av totalt antall metoder brukt. Samtidig er det stor forskjell mellom de kinesiske og norske lærebøkene, når det gjelder oppdelingen av disse mest brukte metodene.

Forord

For ca. 2500 år siden sa den mest berømte pedagogen i Kina -Konfucius: «三人行，必有我师焉。择其善者而从之，其不善者而改之。» Dette betyr at når jeg går sammen med to andre personer på en vei, kan i hvert fall en eller kanskje begge være min lærer. Jeg bør bli influert, og lære av deres positive og riktige tanker og teorier, og unngå deres uriktige. Dette har alltid vært mitt prinsipp om læring og forskning.

Takk for alle forskere som tidligere har undersøkt problemløsing og lærebøker i matematikk. På grunn av dem har jeg vært i stand til å legge ned en ny stein på den lille matematiske stigen. For å gjøre «denne steinen» stabil og pålitelig slik at etterkommere også kan gå på den uten å falle ned, har jeg analysert 616 eksempler og samlet inn statistiske data i totalt tre runder i hoved- dataanalysen min. Dette er gjort for å sikre at problemløsningsmetodene i hvert eksempel kommer i riktig kategori og blir regnet med.

Jeg må si at prosessen med å skrive masteroppgaven min er en vanskelig prosess som kan sammenlignes med «Den lange marsjen». Den har vært både utfordrende og frustrerende, men også inspirerende. Heldigvis har jeg fått en veileder som er både profesjonell og snill - George Harry Hitching. Først og fremst vil jeg si tusen hjertelig takk for hans gode innspill, oppmuntring og konstruktive kommentarer gjennom hele prosessen. Jeg vil også si tusen takk til bi-veilederen min - Camilla Rodal. Takk for alle gode råd, særlig hennes tålmodighet når det gjelder rettingen av mine språkfeil.

Takk til redaksjonen for ungdomsskolen, fra både det kinesiske forlaget-People’s Education Press og det norske forlaget-Cappelen Damm, som tillot meg å bruke og reprodusere læreverkene deres i masteroppgaven min. En særlig takk til Redaktør Li og Hilde Bjørklund som har sendt og svart på mailer og spørsmål.

Til slutt vil jeg takke mannen min – Morten Steen. Uten hans hjelp hadde jeg ikke klart å levere oppgaven min på «god» norsk. Takk også til moren min – Yang xiumei som alltid oppmuntrer meg.

Innholdsfortegnelse

Kapittel 1 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Det var da jeg leste *«The Teaching Gap»* (Stigler & Hiebert, 2009) at jeg fikk den første ideen om å sammenligne matematikkopplæringen mellom Norge og Kina i masteroppgaven min. I boka brukte Stigler & Hiebert USA og Japan til å vise forskjellene i matematikkundervisningen mellom asiatiske og vestlige land. Etter lesingen fant jeg ut at Norge har mange fellestrekk i matematikkundervisningen med USA. Japan og Kina har også lignende undervisnings- og læringskultur i matematikk. Derfor synes jeg at det er veldig interessant å sammenligne matematikkopplæringen mellom Norge og Kina og kanskje avdekke noen interessante funn.

Ifølge Kinesisk National Bureau of Statistics (2017) og Utdanningsdepartementets læreravdeling og avdelingen for grunnskoleutdanning (2017), er det ifølge tall fra 2016, 15,78 millioner fulltidslærere i alle slags skoler over hele landet, og blant disse lærerne er det 9,3 millioner grunnskolelærere. Samtidig er det ca. 260 millioner fulltidsstudenter og elever i alle slags skoler over hele landet, og blant disse elevene er det 143 millioner grunnskoleelever (Ministry of education of P.R.C [MOE], 2017). Dette er verdens største utdanningssystem, som utdanner 260 millioner unge mennesker, og som sysselsetter nesten 16 millioner lærere. Jeg ble ferdig med min grunnskoleopplæring, videregåendeopplæring og min første bachelor som maskiningeniør i Kina, og fikk min andre bachelor som tospråklig faglærer (med matematikk som fokusfag) ved OsloMet Universitet i Norge. Jeg hadde vært matematikklærer på en grunnskole (1-10 skole) i Oslo før jeg begynte på dette fulltids masterstudium som fokuserer på matematikk på grunnskolenivå. Derfor har jeg fått muligheten til å observere matematikkutdanningen fra forskjellige synsvinkler basert på mine kunnskaper og erfaringer, og se på matematikkopplæringen i grunnskolen både fra et norsk og kinesisk perspektiv.

I dansk kabel TV (DR1) ble det vist et program av DR-dokumentar med tittelen «9.z MOD KINA» i 2013. Resultatene viser at de kinesiske elevene på 9. trinn på Harbin Nummer 6 ungdomsskole fikk tre ganger bedre resultater i matematikktesten enn de danske elevene i klasse 9z på Holmer ungdomsskole. Samtidig viser undersøkelsen at de kinesiske elevene også har bedre innovative og praktiske evner. Mange land fra Øst-Asia, som for eksempel Kina og Singapore, har veldig gode resultater i internasjonale matematikkonkurranser, for eksempel PISA (Programme for International Student Assessment), TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) og IMO (International Mathematical Olympiad), mens mange vestlige land som for eksempel England og Norge, har fått lite tilfredsstillende resultater i disse konkurransene.

Grunnene til en slik situasjon i matematikkopplæringen på grunnskolenivå er mange og komplekse. Derfor var min opprinnelige plan å sammenligne hele matematikkopplæringen på grunnskolenivå mellom Norge og Kina og finne ut hva som leder til de store resultatforskjellene i disse internasjonale eksamenene og konkurransene. Jeg planla først å sammenligne læreplan og læreverk i matematikk på grunnskolenivå. I tillegg skulle jeg gjøre observasjon av matematikklæreres undervisningsmetoder i klasserommet og arbeidsmåtene utenfor klasserommet. Jeg ville ha intervjuer med norske og kinesiske lærere, og matematikklærernes utdanning skulle også være med i undersøkelsen min. Men lærerne mine minnet meg på at det ville være umulig for meg å bli ferdig med en så stor og ambisiøs forskningsplan med de begrensninger en masteroppgave har når det gjelder tid og ressurser.

En nyhet fra kinesiske aviser (xinhuanet.com; sohu.com, 2017) fanget min oppmerksomhet. Så tidlig som i 2015 ble det kinesiske læreverket i matematikk «en klasse en øvelse» "eksportert" til Storbritannia, og så langt har mer enn 400 britiske skoler brukt den. I september 2017 ville Storbritannia gjøre en full "import" av Kinas «Ekte Shanghai Matematikk» som er et læreverk som inkluderer elevbøker, lærerbøker og arbeidsbøker. I januar 2018 kom dette settet som et offisielt valgt matematikklæreverk for den britiske grunnskolen. Hva er det egentlig i det kinesiske læreverket som tiltrekker Storbritannia til å bruke dette i sin egen matematikkopplæring? Dette engasjerte meg veldig mye, og fikk meg til å undersøke og sammenligne kinesiske og norske matematikklærebøker på grunnskolenivå. Videre har jeg fått inspirasjon av studier av Fan og Zhu (2007) og Kongelf (2011). Jeg har også fått mange gode tanker fra Aaseths (2016) og Harders (2013) masteroppgaver.

Ifølge Pólya (1981) og Schoenfeld (1992) står problemløsning sentralt i matematikken. Samfunnet har behov for mennesker som kan løse problemer og håndtere ukjente situasjoner, og dette blir da et større fokusområde i skolen (Nordberg & Engstrand, 1992). Ifølge analyseresultater av TIMSS *«sier fra rundt 90 % til nærmere 100 % av lærerne i Norge og Sverige at de bruker læreboka som undervisningsgrunnlag»* (Grønmo, Borge & Onstad, 2013, s. 165). Kongelf (2011) har funnet ut at problemløsningsmetoder i matematikklærebøkene for ungdomsskolen, samt med lærebøkene selv, spiller en sentral rolle i undervisningen i norske klasserom. Ifølge Zhu & Fan (2006) har presentasjon av problemløsningsmetoder i lærebøker en stor innflytelse på både undervisning og læring, særlig på elevenes utvikling av problemløsningsevne. De (2006, s.612) har skrevet at "*The main reason for the study to focus on this particular school level is that, as we believe, the lower secondary grade level is a key stage in the development of student's ability in problem solving*". Derfor velger jeg å fokusere på problemløsningsmetoder i lærebøkene for ungdomsskolen i min undersøkelse.

Ifølge Lithner (2003) er det vanlig at elever bruker eksemplene i læreboken til å finne lignende løsningsmetoder når elever løser oppgaver. Der kan de bruke løsningsmetoden presentert i eksemplet til å løse sin oppgave. Eksempler i matematiske lærebøker har derfor en stor betydning for hva elevene lærer i faget, hevder Lithner. Ifølge Viholainen et al. (2013, s.347) sier 61% av de finske elevene at de ganske ofte bruker eksempler i lærebøkene som hjelpemiddel for å løse oppgaver. På den første, er eksempler som bærere for problemløsningsmetoder gjennom presentasjon i lærebøker. På den andre, som Fan & Zhu (2007, s.62) har skrevet at "*many classroom-based studies have indicated that appropriate instruction on problem-solving procedures, especially problem-solving heuristics, benefits the development of students' ability in problem-solving"*. Derfor har jeg også bestemt meg for å fokusere på bruk av spesifikke heuristiske metoder i eksemplene i analysen min som Fan & Zhu (2007) og Kongelf (2011) har valgt og gjort i deres studier.

Til slutt spisset jeg mitt tema og begrenset min forskning til et komparativt forsøk av eksempler om problemløsning i de utvalgte norske og kinesiske matematikklærebøkene for ungdomsskolen.

1.2 Forskjellige opplæringsresultater i matematikk for Kina og Norge

1.2.1 PISA og IMO

PISA (Programme for International Student Assessment) er en internasjonal undersøkelse som gjennomføres hvert tredje år, og studerer 15-åringers kompetanser på et tidspunkt som i de fleste land representerer avslutningen av den obligatoriske skolegangen. Det legges vekt på at elevene må være i stand til å ta i bruk egne kunnskaper og kompetanser. Siden 2003 begynte det for første gang med et område som ble kalt problemløsning i PISA, der er oppgaver knyttet til et problem som man kan anta å møte det i dagliglivet (OECD.org, 2017 og OECD, 2013). OECD beskriver definisjonen til problemløsing slik i rammeverket for PISA 2012: *"… an individual's capacity to engage in cognitive processing to understand and resolve problem situations where a method of solution is not immediately obvious. It includes the willingness to engage with such situations in order to achieve one's potential…"* (OECD, 2013, s. 125).

Nortvedt (2013, s. 48) påpeker at i PISA tar man utgangspunkt i Niss & Jensen (2002) sine matematiske kompetanser og opererer med sju kompetanser som er å kunne: – *kommunisere med, i og om matematikk – matematisere og modellere både matematiske og virkelige situasjoner – representere matematiske størrelser, velge, veksle mellom å bruke matematiske representasjoner i oppgaveløsing – resonnere og argumentere matematisk – planlegge, velge ut og bruke problemløsingsstrategier – bruke symbol- og formalspråk, regler og formelle matematiske metoder – velge ut og bruke matematiske verktøy og hjelpemidler*. Tre av dem omhandler problemløsning som er: 1) Å kunne matematisere og modellere både matematiske og virkelige situasjoner; 2) Å kunne resonnere og argumentere matematisk; 3) Å kunne planlegge, velge ut og bruke problemløsingsstrategier. Det vi har diskutert ovenfor viser at PISA vektlegger på vurderingen av elevenes problemløsningsevner i faget. Jeg bruker derfor resultatene fra PISA for å sammenligne elevers problemløsningsevner mellom Kina og Norge.

IMO (International Mathematical Olympiade) er en 59 år gammel matematikkonkurranse der de elevene fra forskjellige land møtes for å finne ut hvem som er best/flinkest i problemløsning. Dette kan sammenlignes med idrettens olympiske leker. Rett før konkurransen blir det både i Kina og Norge arrangert en treningsleir for de utvalgte elevene som er vinnerne av de nasjonale konkurransene. Der lærer de viktige teoremer og trener problemløsningsteknikker.

Siden IMO-resultatene kun viser matematikkompetansen blant de høyt presenterende elevene, som er på et høyere nivå enn den gjennomsnittlige eleven på grunnskolen, blir resultatene i stor grad oversett i forskningen på grunnskolenivå. Fokuset til IMOs vurdering ligger på problemløsning, som er det samme hovedfokuset som oppgaven min. Derfor velger jeg likevel å bruke IMOs resultater for å sammenligne problemløsningsnivå på de høyt presenterende elevene i Kina og Norge.

1.2.2 Sammenligningen av resultater fra IMO og PISA mellom Kina og Norge

For å se resultatene av elevenes matematikkompetanse og problemløsningsevner mellom Kina og Norge, har jeg laget to tabeller og en figur nedenfor. Jeg har brukt statistiske tall som er tatt fra hjemmesidene til PISA og IMO.

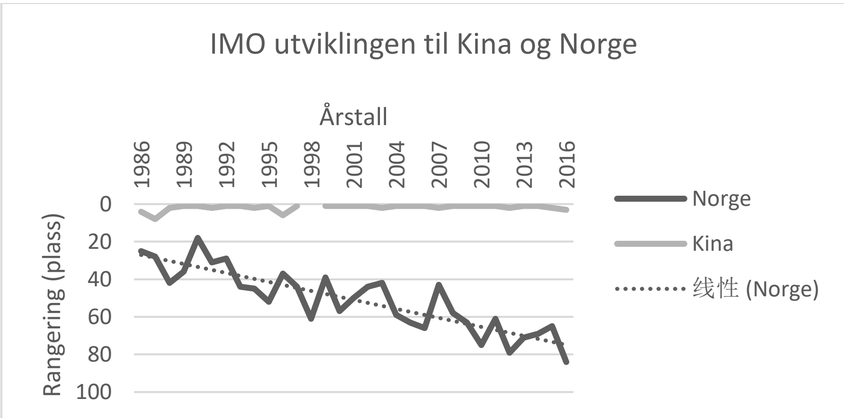
Tabell 1. Norges og Kinas rangering av IMO i de siste 30 årene

(Året er representert ved sine to siste siffer)

År	16	15	14	13	12	11	10	09	08	07	06	05	04	03	02	01	00	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90	89	88	87	86
Kina	3	2	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1		1	6	1	2	1	1	2	1	1	2	8	4
Norge	84	65	69	71	79	61	75	63	58	43	66	63	59	42	44	50	57	39	61	44	37	52	45	44	29	31	18	36	42	28	25

(imo-official.org, 2017)

Figur 1. Norges og Kinas rangering av IMO i de siste 30 årene



(imo-official.org, 2017)

Siden Norges befolkning er mye lavere enn Kinas, er det naturlig at Kina har hatt flere høyt presenterende elever. Samtidig kan vi se fra tabell 1 og figur 1 at i løpet av de siste 30 årene, er det en veldig tydelig tendens at Norges rangering har hatt en negativ utvikling. For 27 år siden var Norge oppe på en 18. plass, men i fjor fikk Norge 84. plass. Rankingen falt fra 25. til 37. mellom1986 og 1996, fra 37. til 66. mellom 1996 og 2006, og fra 66. til 84. mellom 2006 og 2016. Resultatene viser også at norske elever på de høyeste nivåene i problemløsning blir færre og færre. Kina har imidlertid vært på et stabilt høyt nivå alle disse årene.

Det finnes korrelasjon mellom resultatene fra PISA og IMO. Likevel må vi legge merke til at IMO-resultatene kun brukes for å sammenligne nivåforskjeller mellom de norske og kinesiske elevene med høy problemløsningskompetanse, og resultatene gjelder ikke for alle skoleelever.

Tabell 2. Norges og Kinas poeng og rangering i PISA

PISA- resultater i matematikk	2006	2009	2012	2015
OECD gjennomsnittet	**498** poeng	**496** poeng	**489** poeng	**490** poeng
Norge	490 poeng ***-8 poeng** **29. plass**	498 poeng ***+2 poeng** **21. plass**	494 poeng ***+5 poeng** **30. plass**	502 poeng ***+12 poeng** **19. plass**
Shanghai		600 ***+104 poeng** **1. plass**	613 ***+124 poeng** **1. plass**	
Kina (Beijing, Shanghai, Jiangsu og Guangdong)				531 poeng ***+41 poeng** **6. plass**
Kina (Macau)	525 poeng ***+22 poeng** **8. plass**	525 poeng ***+29 poeng** **12. plass**	538 poeng ***+49 poeng** **6. plass**	544 poeng ***+54 poeng** **3. plass**
Kina (Hongkong)	547 poeng ***+49 poeng** **3. plass**	555 poeng ***+59 poeng** **3. plass**	561 poeng ***+72 poeng** **3. plass**	548 poeng ***+58 poeng** **2. plass**
Kina (Taiwan)	549 poeng ***+51 poeng** **1. plass**	543 poeng ***+47 poeng** **5. plass**	560 poeng ***+51 poeng** **4. plass**	542 poeng ***+52 poeng** **4. plass**

(Oecd.org, 2017)

Tabell 2 og 3 viser at gjennomsnittsnivået i matematikk for norske 15- åringer lå under OECD (oecd.org, 2017) sitt gjennomsnitt i 2009. I 2015 ligger Norge litt over gjennomsnittet. De andre årene ligger Norge nesten på gjennomsnittet. *I PISA grupperes elevenes prestasjoner i matematikk og naturfag inn i seks ulike nivåer. Nivå 5 og 6 anses som høye prestasjonsnivåer der elevene har høy faglig kompetanse, som de er i stand til å anvende på ulike typer problemstillinger. Elever på nivå 5 og 6 omtales heretter som elever som presterer på høyt nivå, eller som høytpresterende elever.* (Udir, 2017, s.2). Kjærnsli, Nortvedt & Jensen (2013, s.20) påpeker at spredningen i elevenes prestasjoner er større innenfor problemløsning enn i de andre fagområdene. Ifølge Kjærnsli et al. (2013) har Norge færre elever på de høyeste nivåene i matematikk, og andelen lavt presterende norske elever er høyt. For eksempel ligger 9% av norske elever (Kjærnsli & Jensen, 2016) og 55 % kinesiske elever (Sheng, 2013) på et høyt nivå i PISA undersøkelsen fra 2012. I samme undersøkelse lå 22 % av de norske (Kjærnsli & Jensen, 2016) og 4% av de kinesiske elevene (Sheng, 2013) på et lavt nivå. Denne tendensen har også blitt gjenspeilet av IMOs resultater ovenfor.

Elevene fra Shanghai kom på førsteplass i matematikk med poengsummen på 613 i 2012 og 600 i 2009. Dette var 119 poeng over gjennomsnittet, og er 29 plasser høyere enn Norge. Andre fylker for eksempel Hongkong, Macau og Taiwan ligger også veldig høyt oppe på PISA-rangeringen. Tabellene og figuren ovenfor viser at forskjellene mellom Kina og Norge når det gjelder matematikkferdigheter, og særlig problemløsningsevner er signifikante.

1.3 Kapitteloppbygging

Kapittel 2 presentasjon av problemstillingen.

Kapittel 3 presentasjon av relevante teorier og viktige definisjoner og begreper som brukes i oppgaven. Det har blitt diskutert problemløsning og problemløsningsmetoder, problemløsningsprosesser, elevers problemløsningskompetanse og didaktiske forhold mellom lærebøker, elevers læring i problemløsning og lærers undervisning i problemløsning.

I kapittel 4 diskuterer jeg bakgrunnen for valg av bøker, skoletrinn og eksempler. Så nevner jeg hvilke forskningsmetoder og analyseverktøy som er blitt benyttet og tilpasset i oppgaven. Dessuten diskuteres det noen utvalgte og spesielle eksempler for å vise problemløsningsmetoder og metodeklassifisering.

I Kapittel 5 har hjelpeundersøkelsen blitt gjort. Først blir de norske og kinesiske læreplanene presentert og sammenlignet med fokus på formål og læringsmål om problemløsning og problemløsningskompetanse. Den andre og tredje delen av hjelpeundersøkelsen er en generell oversikt over de utvalgte lærebøkene som inkluderer utseende, antall sider, antall eksempler, innhold, kapitteloppbygging osv.

I kapittel 6 har hovedanalysen blitt gjort. Først analyserer jeg alle eksempler i de utvalgte lærebøkene etter Pólyas fire-fases modell. Så analyserer jeg alle eksemplene basert på Kongelfs kodingsordning med en utvidet og tilpasset versjon for å finne ut hvordan spesifikke problemløsningsheuristikker blir presentert i lærebøkene, og hvordan metodene blir brukt i de tre hovedområdene. Funnene presenteres ved bruk av tabeller, diagrammer og figurer.

I Kapittel 7 fremhever og drøfter jeg alle funnene i kapittel 5 og 6, og diskuterer også hvilke begrensninger studien min har.

Kapittel 8 er konklusjonen av oppgaven min. Problemstillingen blir besvart, og noen mulige spørsmål for videre forskning blir også diskutert.

Kapittel 2 Problemstillingen

Målet for denne oppgaven er å finne ut hvilke forskjeller og likheter som finnes i de norske og kinesiske lærebøkene når de presenterer problemløsning og benytter problemløsningsmetoder. Alle land har forskjellige krav til matematikklæreverket sitt. Jeg håper derfor at funnene i oppgaven min kan hjelpe oss med å oppdage hvilke styrker og mangler læreverkene i de to landene har i deres problemløsning. Jeg ønsker også at funnene mine kan forklare oss hvilken rolle lærebøker spiller i forbindelse med de ulike prestasjonene i de internasjonale undersøkelsene.

Schoenfeld (1992) hevder at spesifikke problemløsningsmetoder ofte er mer praktiske i konkret problemløsning for elever enn generelle heuristiske strategier. Ifølge Fan & Zhu (2007) er spesifikke problemløsningsmetoder særlig nyttige når det gjelder utviklingen av grunnskoleelevers problemløsningsevner. Derfor vil jeg analysere både generelle heuristiske strategier og spesifikke problemløsningsmetoder for å få et helhetlig bilde av problemløsning og problemløsningsmetoder i lærebøkene.

Problemstillingen min har vært: Hvilke forskjeller og likheter finnes i eksempler fra norske og kinesiske lærebøker med hensyn til problemløsningsmetoder?

For å besvare denne problemstillingen har jeg formulert følgende forskningsspørsmål:

1. Hvordan blir Pólyas fire-fases modell presentert i eksemplene i de norske og kinesiske lærebøkene?
2. Hvordan blir problemløsningsmetoder benyttet i eksemplene i de norske og kinesiske lærebøkene?

Først i oppgaven skriver jeg om bakgrunnen for valget av tema, så diskuterer jeg forskjellige situasjoner i forbindelse med norske og kinesiske elevers matematikkompetanse og problemløsningskompetanse med hensyn til resultatene i IMO og PISA. Etter dette, kommer jeg inn på teorier fra Pólya (1971,1981, 2009), Schoenfeld (1985, 1992), Björkqvist (2003) og Carlson & Blooms (2005), som omhandler problemløsning. Dette gjelder også teorier om matematikkompetanse fra Niss & Jensen (2002, referert i Skott, Jess & Hansen, 2015) og Kilpatrick, Swafford & Findell (2001, referert i Valenta, 2016). Så avklarer jeg om hva problem og problemløsning betyr i denne oppgaven, og hva elevenes problemløsningskompetanse innebærer. Deretter diskuterer jeg didaktiske forhold mellom problemløsning i matematikklærebøker, elevenes læring i problemløsning og lærerens undervisning i problemløsning, og hvilke pedagogiske implikasjoner dette bringer. Denne diskusjonen er basert på følgende teorier: Rezats (2010, 2012) tetraedermodell av lærebokbruk, Streitliens (2009) undersøkende og oppfølgende undervisning, Bolers (2002, 2003) læringstriade, Jaworskis (1994, referert i Streitlien, 2009) undervisningstriade, Lithners (2003, 2008) kreativ og imiterende resonnering, Lesters (1996) fire nødvendige forutsetninger og Mayers (1985, referert i Björkqvist, 2003) fire typer effektiv trening.

Etter dette smaler jeg forskningsresultater om lærebøker i problemløsning og problemløsningsmetoder i det siste som «bakteppe» for analysen min. Så beskriver jeg utvalget av forskningsmetoder og utvalget før og i analysegjennomføring, og analyseverktøy til både hjelpeundersøkelsen og hovedundersøkelsen blir tilpasset. Det er vanskelig å sammenligne lærebøkene fra to forskjellige land uten å ta i betraktning de forskjellige læreplanene i Norge og Kina. Derfor gjør jeg en hjelpeundersøkelse før hovedundersøkelsen. Der blir det diskutert forskjeller i de nåværende norske og kinesiske læreplanene med hensyn til formål og læringsmål i problemløsning og undervisningstimer. Det blir også presentert noen synlige og usynlige egenskaper i lærebøkene som kan påvirke og som er tett knyttet til hovedundersøkelsen.

I hovedundersøkelsen har jeg analysert alle eksemplene i de utvalgte lærebøkene for å finne ut hvordan Pólyas fire-fases modell blir presentert, hvilke problemløsningsmetoder, og hvor ofte, metodene har blitt benyttet i eksemplene. I tillegg har jeg også sammenlignet metodebruk i tre forskjellige hovedområder i de kinesiske og norske lærebøkene. Hovedområdene er «Tall, algebra og funksjoner», «Geometri og måling» og «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet». Gjennom analysen presenterer jeg funnene ved bruk av tabeller, diagrammer og figurer. Dessuten diskuterer jeg noen utvalgte eksempler med hensyn til forskjellige problemløsningsmetoder og Pólyas fire-fase modell. Så basert på alle funnene drøfter jeg og konkluderer med hvilke forskjeller og likheter de nåværende norske og kinesiske lærebøkene har når det gjelder problemløsning og problemløsningsmetoder. Noen mulige negative og positive påvirkninger fra lærebøkene blir også diskutert når det gjelder elevers læring og lærers undervisning i problemløsning. Til slutt kommer jeg til konklusjonen av oppgaven min. Problemstillingen blir besvart, og noen mulige spørsmål for videre forskning blir også diskutert.

Kapittel 3 Teori

3.1 Problem og problemløsning

3.1.1. Hva betyr problem og problemløsning?

Det finnes mange ulike definisjoner på problem og problemløsning. Derfor vil jeg avklare hvilke definisjoner av de to begrepene jeg har valgt i denne oppgaven.

Tradisjonelt sett, har problemer i matematikk blitt identifisert som matematiske oppgaver som skal utføres i skolen (Schoenfeld, 1992, s.337). Oppgaver som fokuserer på trening i en bestemt løsningsteknikk. Dette har ofte blitt kalt rutineoppgaver, og har dermed også blitt regnet som problemer. I tillegg har det ofte vært fortolket som at et problem er en tekstoppgave, noe som har ført til at de to begrepene har blitt brukt synonymt (Björkqvist, 2003, s. 54).

Historisk sett, må to viktige navn bli nevnt. En er George Pólya, og den andre er Alan Schoenfeld. De har vært spesielt sentrale innenfor forskning på matematisk problemløsning. I boka «How to Solve It» gir Pólya generell heuristikk om hvordan man løser en rekke problemer.. Han definerer at en person som har et problem betyr: "*to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim"* (Pólya, 1981, s. 117). Ifølge Pólya (1981) er problem dermed individrelatert og et relativt begrep som avhenger av forholdet mellom problemet og problemløseren. Pólya (1973, 1981, 2009) ser på problemløsning som en praktisk ferdighet, på samme måte som å svømme, må imiteres og praktiseres. Kort sagt ifølge Pólya er problemløsning en intelligens som kan læres ved imitasjon og øvelse med veiledning.

Schoenfeld (1985, 1989) forsker på en matematiker og hans elever, og lager 100 videoer. Han har laget to kriterier som definerer hva som er et matematisk problem for en elev. En oppgave er kun et problem når det er *a) in which the student is interested and engaged and for which he wishes to obtain a resolution;* b) *for which the student does not have a readily accessible mathematical means by which to achieve that resolution* (Schoenfeld, 1989, s.87). En oppgave som ikke oppfyller definisjonen av et matematisk problem kaller Schoenfeld øvelse (exercise). Han hevder at «*in most textbooks, the majority of practice tasks can be solved by the direct application of a procedure illustrated in the chapter*» (Schoenfeld, 1989, s.88). Ifølge Schoenfeld er det eleven selv som har gjort en oppgave til sitt problem, og en vellykket problemløser må kunne bruke en rekke heuristiske tilnærminger (1992, s.71).

Boesen (2006, s.31) definerer et problem slik: "*a task in which she or he doesn't know how to proceed and no complete known solution procedure can be used. The student has to construct something new (something non-routine), apply their knowledge in a new situation. … what might be a problem for one student might not be so for another.*" Ifølge Björkqvist (2003, s.54) betyr et matematisk problem at *en matematisk oppgave som skal utføres, med det tilleggsvilkåret at det i den innledende fasen skal være uklart for problemløseren hvilke løsningsmetoder som kan brukes.* Han påpeker også at når elever skal bygge opp egne matematiske kunnskaper, fremgår problemløsning som svært hensiktsmessig.

3.1.2. Sammenligningen av ulike synsvinkler og definisjoner av problem og problemløsning

Branca (1980) hevder ar problemløsning kan tolkes på tre måter: 1) Problemløsning som mål; 2) Problemløsning som prosess; 3) Problemløsning som grunnleggende ferdighet. Ifølge Branca er begrunnelsen til «problemløsning som mål» at det å lære å løse problemer er et viktig mål i matematikklæring. «Problemløsning som prosess» innebærer et fokus på metodene, prosedyrene og strategiene problemløseren bruker for å løse et problem. «Problemløsning som grunnleggende ferdighet» betyr at man ser på innholdet i et problem, problemtyper og løsningsmetoder. Man fokuserer på det essensielle ved problemløsningen som alle elever må lære (Branca, 1980, s. 3-4). Ifølge Branca er «Problemløsning som mål» ofte tolket i læreplan; «Problemløsning som prosess» brukes ofte i problemløsningsforskning; «Problemløsning som grunnleggende ferdighet» anvendes ofte lærings- og undervisningssituasjon.

I sammenligningen av flere synsvinkler fra forskere som vi har diskutert ovenfor, ser vi at de ulike definisjonene av et problem og problemløsning har mange fellestrekk, men også ulikheter. Pólya (1973) og Schoenfeld (1985) hevder at problemer oppleves som individrelatert og dynamiske. I likhet med Schoenfeld hevder Boesen (2006) at en oppgave ikke er et problem dersom eleven kan løse problemet med kjente metoder. Forskjellen mellom Boesen og Schoenfeld er at Schoenfeld trekker inn affektive faktorer som en del av definisjonen. Björkqvist (2003, s. 54) beskriver: *Den innledende fasen skal være uklart for problemløseren*. Björkqvist og Boesen trekker kun inn relasjonen mellom problem og problemløser i sine begreper, mens både Pólya og Schoenfeld i tillegg trekker inn problemløserens ønsker, engasjement og interesse som en affektiv dimensjon og faktor for å finne en løsning i sine begreper.

Siden jeg skal analysere eksempler fra norske og kinesiske matematikklærebøker, er det vanskelig å bruke den individrelaterte definisjonen av begrepet «problem», fordi den individrelaterte definisjonen knytter problemet til problemløseren og problemløserens perspektiv.

Derfor velger jeg å bruke definisjonen av «problem» som Fan & Zhu (2007) og Kongelf (2011) har brukt i sine studier. De definerer alle situasjoner som krever en løsning i lærebøker som problemer. Dette betyr at jeg skal se på alle eksemplene som er presentert i lærebøkene som «problemer», uansett hvordan eleven ser på og løser de problemene.

Her må jeg påpeke at valget av mine eksempler/problemer ligner både på Kongelfs (2011), Fan & Zhus (2007) og Aaseths (2016), men de er ikke helt de samme. Mine eksempler har et mindre utvalg og inkluderer verken oppgaver eller problemer/eksempler som blir presentert med mye tekstforklaring i teoridelen av lærebøkene. Jeg analyserer bare eksempler som blir tydelig merket «eksempel» i de utvalgte lærebøkene. Det vil si at problemene i analysen min er de merkede eksemplene i lærebøkene.

3.1.3. Problemløsning og problemløsningsheuristikk

Heuristisk kommer fra det greske ordet «heuresis» som betyr å oppdage. Et viktig aspekt ved problemløsning er heuristikk (Pólya, 1981; Schoenfeld, 1985). I litteraturen blir problemløsning ofte kalt heuristikk, som betyr oppfinnelseskunst (Solvang, 1992, s. 134). Schoenfeld (1985, s.23) skriver: «*once nearly forgotten, heuristics have become nearly synonymous with mathematical problem solving*». Videre hevder han at det ikke er sikkert at undervisning i generelle heuristikker fører til at elevene blir i stand til å overføre teknikkene til nye situasjoner. Tvert imot, kan elever dra nytte av å lære seg mer spesifikke metoder, som for eksempel de heuristiske metodene. Studien min tar utgangspunkt i Schoenfelds teorier, og heuristikk eller heuristiske metoder forstås i denne oppgaven som strategier eller metoder for å hjelpe til å løse (matematiske) problemer, og forekomsten av heuristiske metoder i lærebøkene indikerer hvorvidt bøkene formidler problemløsning.

3.1.4. Pólyas problemløsningsheuristikker

Tabell 3. Pólyas problemløsningsheuristikker ifølge problemløsningsprosessen

problemløsningsprosessen	**Strategiske heuristikker**
1. Forstå problemet	Hva er ukjent? - Hva vet du? - Hvilke betingelser er oppgitt? - Har du tilstrekkelige opplysninger, eller kanskje flere opplysninger enn du trenger? - Tegn en figur. Bruk formålstjenlige betegnelser - Vi kan:

	• Gjette på en løsning, og teste gjettingen • Trekke ut og organisere informasjon • Finne en representasjon: et diagram, en formel, en figur, et skjema • Finne passende symboler eller en måte å skrive det ned på
2. Legg en plan	Har du sett et liknende problem før? Kan du i så fall bruke det? - Kjenner du til et teorem som kan være nyttig? - Se på den ukjente. Har du løst et annet problem før, med en tilsvarende ukjent? - Kan du formulere problemet på en annen måte? På enda en annen måte? - Kan du introdusere et «hjelpe-element»? - Bruk definisjonene! - Kan du løse et enklere problem som likner? Et spesialtilfelle? Et mer generelt tilfelle? - Kan du løse deler av problemet? - Hva skjer hvis du dropper noen av betingelsene i oppgaven? I hvor stor grad kan du nå bestemme den ukjente, og hvordan vil den variere? - Har du brukt alle opplysningene i oppgaven? - Kan du gjøre antakelser som forenkler problemet? - Kan du endre de variable og holde de andre fast? - Kan du teste de variable systematisk?
3. Gjennomfør planen	Utfør det du har planlagt. Kan du se klart at hvert enkelt trinn i løsningen er riktig? Kan du bevise det?
4. Se tilbake	Reflekter over løsningen. Kan du sjekke at resultatet stemmer? Kan du sjekke argumentene? - Kan vi kontrollere hvert skritt? - Kan du finne en annen løsningsmetode? - Kan du bruke resultatet eller løsningsmetoden i andre problemer? - Har oppgaven alltid en løsning? - Har det flere løsninger? - Hva kan vi lære av løsningen? - Kan vi utvide – fins det en mer generell løsning?

(Birkeland, Breiteig & Venheim 2012, s. 304 og Pólya, 2004, s. 16-17).

Fan & Zhu (2007) har konkludert og definert Pólyas generelle heuristikk og laget et skjema.

Tabell 4. Definisjon for Pólyas generelle heuristikk

Problemløsningsfaser	Definisjon for Pólyas heuristikker
1. Understanding the problem	*Extracting and assimilating information from the givens, determining the goal of the problem, reconstructing the problem if necessary, and introducing suitable notations whenever possible for easy reference and manipulations.*
2. Devising a plan	*Making a general plan and selecting relevant methods, or more appropriately, heuristics, that might be useful for solving the problem based on the understanding of the problem at the first stage.*
3. Carrying out the plan	*Carrying out the plan devised at the preceding stage, and keeping the track to obtain the answer.*
4. Looking back	*Checking the correctness of the solutions, reflecting on key ideas and processes of problem solutions, and generalizing or extending the methods or results.*

(Fan & Zhu, 2007, s. 66)

Sammenligner med Schoenfelds (1985, 1992) teorier som kommer fra eksperiment og 100 videoer, har Pólyas (1973) heuristiske metoder ikke streng og forskriftskritisk standard i problemløsningsprosessen fordi de ikke kommer fra eksperimentelle resultater. Den fire-fases modellen fungerer derfor mer som et veiledende rammeverk som skal hjelpe problemløseren med å finne mulige og passende heuristiske metoder blant disse heuristikkene. Fan & Zhu (2007) har brukt Pólyas fire-fases modell i forskningen sin for å analyse eksempler. Jeg gjør det samme som Fan & Zhu har gjort. Modellen brukes senere i analysen min i kapittel 6.

Schoenfeld hevder (1985, 1992) at Pólyas heuristikker muligens krever et visst høyt nivå i matematisk læring. For eksempel brukte den australsk amerikanske matematikeren Terence Tao Pólyas bok- «How to Solve It» som en lærebok til å forberede seg på IMO (George Pólya, 2018). Det vil si at matematikere og de som med rike kunnskaper om problemløsning kan gjenkjenne og velge forskjellige heuristikker i problemløsningsprosessen, men det er vanskelig for grunnskoleelevene å finne og velge løsningsmetoder og lære problemløsning direkte gjennom de beskrivende metodene. Kongelf (2011, s.15) skriver også at *elevene som ikke kjenner disse heuristiske metodene fra før, får ikke de nødvendige detaljene utfra heuristikkene, og derfor er de ikke i stand til å bruke de heuristiske metodene for å løse problemer*. Silver (1985, s. 353 referert i Björkqvist, 2003, s. 60) påpeker at Pólyas heuristiske metoder gjelder *problemløsing, ikke undervisning i problemløsning.*

Schoenfeld (1993, s. 353 referert i Björkqvist, 2003, s. 60) påpekte også at Pólyas generelle heuristikk *oppviser en svak positiv korrelasjon med prestasjonene i den anvendte testen*. Ifølge disse forskerne eksisterer det en gap mellom disse generelle metodene og anvendelsen av metodene i praktisk læring og undervisning.

3.2 Problemløsningsprosessen

Pólya (1973, 2009) deler problemløsningsprosessen inn i fire faser: Forstå problemet--> Legg en plan --> Gjennomfør planen--> Se tilbake. I hver fase deler Pólya generelle heuristikker opp i flere spesifikke strategiske spørsmål /metoder som kan hjelpe i problemløsningen (Pólya, 1973, 2009). Schoenfeld (1985) deler problemløsningsprosessen inn i 6 faser: lese-->analysere--> utforske--> planlegge-- > implementere--> sjekke, mens Carlson & Bloom (2005) hevder at problemløsningsprosessen inneholder 4 faser: Orientere--> Planlegge --> Utføre --> Sjekke.

Tabell 5. Forskjellige fasedelinger i problemløsningsprosessen

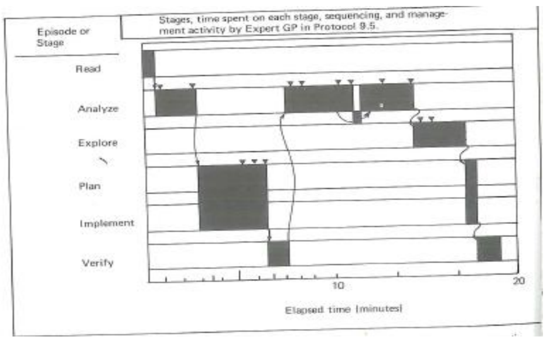
Fase	Pólyas (1973)	Carlson & Bloom (2005)	Schoenfeld (1992)
1	Forstå problemet	Orientere	Lese
2	Legg en plan	Planlegge	Analysere
3	Gjennomfør planen	Utføre	Utforske
4	Se tilbake	Sjekke	Planlegge
5			Implementere
6			Sjekke

*Fire forskjellige farger representerer fire faser av Pólya i problemløsningsprosessen.

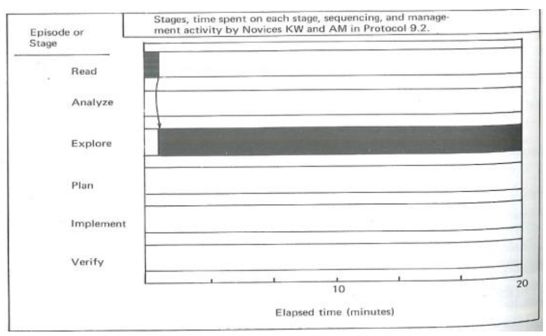
Ifølge Pólya (1973,1981), dersom en elev skal løse et problem, er det en avgjørende forutsetning at han først forstår problemet. Dette ligner veldig på Carlson & Blooms (2005) orientere - fasen. De hevder også at et hovedproblem ved oppgaveløsing er å få klarhet i hva oppgaven egentlig spør om. Pólya påpeker at eleven må ha en plan på forhånd når han blir ferdig med å sjekke all informasjon om problemet og finner ut hvordan man kan løse problemet. Videre er den tredje fasen - å gjennomføre planen mye enklere enn den andre fasen - å lage den, men eleven må imidlertid sjekke hvert trinn i løsningsprosessen og være klart over at han er på vei i riktig retning. I den fjerde fasen av problemløsningsprosessen påpeker Pólya at eleven må se tilbake på den fullstendige løsningen og vurdere både resultatet og løsningsmetodene.

I Schoenfelds (1985) forskning bruker en erfaren matematiker mer enn halvparten av tiden på å forstå problemet inkludert en betydelig mengde av analyse. Det vil si at matematikeren bruker mer enn halvparten av tiden i fase en og to – lese og analysere. Schoenfeld påpeker at Matematikeren begynner ikke å utforske, planlegge og implementere de tre fasene før han er overbevist om at problemløsningen er på vei i riktig retning. Etter at matematikeren har blitt ferdig med utforskning og implementeringen, gjør han/hun alltid den sjette fasen-å sjekke, påpeker Schoenfeld. I elevundersøkelsen viser forskningsresultater tvert imot at elevene ofte bruker metoder i følgende rekkefølgen når de løser problemet: *read, make a decision quickly, and pursue that direction come hell or high water.*, og det er mer enn 60 % av elevene som forsøker å løse et problem på den nevnte måten ovenfor (Schoenfeld, 1992, s. 356). Han påpeker at selv om elevene har kunnskapene de trenger for å løse problemet, klarer elevene noen ganger allikevel ikke å løse problemet fordi de ofte hopper over noen faser i problemløsningsprosessen. Dette gjelder for eksempel å analysere forutsetninger for å forstå problemet, å legge en plan og å sjekke metoder og resultater. Schoenfeld (1992) påpeker at det ikke er valg av feil strategier og metoder som er hovedproblemet i problem-løsningsprosessen, det er elevenes mangel i å sjekke og revurdere strategier og metoder som leder til at elevene ikke kan finne en løsning.

Carlson & Bloom (2005) har studert tolv matematikere og hvordan de løser matematiske problemer. De deler problemløsningsprosessen inn i fire faser (ifølge forskningsresultater): 1) Orientere, 2) Planlegge, 3) Utføre og 4) Sjekke. De påpeker at etter at matematikerne har orientert seg om hva problemet innebærer, blir en planlegge-utføre-sjekke syklus repetert gjennom resten av problemløsningsprosessen. Det er sjelden at oppgaver blir løst på en lineær måte uten syklus repetisjoner, og matematikerne reflekterer jevnlig over egne problemløsing i alle de fire fasene, påpeker de. Faktisk gjenspeiler av Carlson & Blooms forskningsresultater og Schoenfelds (1985) hverandre.



Figur 2. Matematiker som jobber med et vanskelig problem (Schoenfeld 1985, s. 312)



Figur 3. Elever som prøver å løse et vanskelig problem (Schoenfeld 1985, s. 294)

De små trekantene i figur 2 representerer matematikerens egne kommentarer vedrørende løsningsprosessen i Schoenfelds (1985) forskning. Denne figuren viser tydelig at matematikeren med lang erfaring og gode kunnskaper i problemløsning har gjentatt enkelte faser som planlegge-utføre-sjekke-syklusen. I motsetning til figur 2, viser figur 3 at de elevene som mangler kunnskaper i problem-løsning har løst oppgaver på en lineær måte uten en syklus av repetisjoner.

Generelt sagt er de tre typene faseinndelinger i problemløsningsprosessen ganske like. Carlson & Bloom (2005) sin faseinndeling ligner mest på Pólyas (1973). De har like mange faser og et lignende fokus i hver fase. Carlson & Bloom påpeker at enkelte faser gjentas som planlegge-utføre-sjekke-syklusen, men Pólyas har ikke påpekt dette så tydelig. Carlson & Blooms teori om syklus repetisjoner gjenspeiler Schoenfelds (1985) tanker om sjekking og gradvis revurdering i problemløsningsprosessen. Når vi sammenligner Pólyas fire-fases modell og Schoenfeld 6-fase modell i problemløsningsprosessen, ser vi straks at Pólya fokuserer mer på konkrete metoder og strategier i problemløsingsprosessen. De to første fasene (lese, analysere) av Schoenfelds modell ligner mye på Pólyas første fase - forstå problemet, og på Carlson & Blooms første trinn – orientere. Samtidig ligner de tre siste fasene av Schoenfelds modell på de tre siste fasene til Pólya og Carlson & Bloom. (se tabellen 4.)

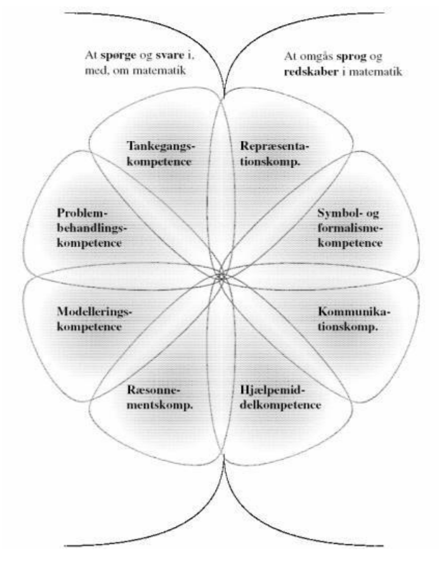
Didaktisk sett, har alle teoriene ovenfor beskrevet den siste fasen «sjekke», som «se tilbake», mindre om «se fremover». Hitching og Mørch (2014) har skrevet «Problemløsning i matematikk» og i denne kilden (s.763) anbefales problemløseren både å sjekke løsningen og å finne ut hvilke andre oppgaver som kan løses ved hjelp av den nye metoden. Dette presenterer tydelig den siste fasen med både «se tilbake» og «se fremover».

3.3 Matematisk problemløsingskompetanse

Problemløsing er en del av den matematiske kompetansen. Hvordan en elev oppfatter matematikk, hvordan eleven velger strategier, metoder, hvor mye tid eleven bruker på å løse problemer, sier noe om elevens problemløsningskompetanse. Denne kompetansen kan vises gjennom vurdering i problemløsning, f. eks. PISA og IMO. Det hjelper derfor å ha et mer helhetlig bilde av problemløsning ved å se på hva slags kompetanse man trenger for å løse problemer.
Niss og Jensen (2002, s. 43. referert i Skott, Jess & Hansen, 2015, s. 295) definerer: *Matematisk kompetence består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende og kunne tage stilling til matematikk og matematiske virksomhed i en mangfoldighed af sammenhenge, hvori matematikk indgår eller kan*

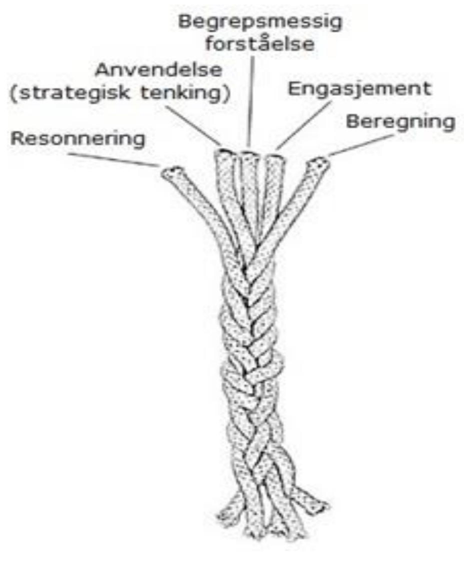
indgå. Niss and Jensen deler den matematiske kompetansen inn i åtte typer kompetanser som er fordelt i to hovedgrupper: 1) Kompetanser for å spørre og svare i, med og om matematikk, 2) Kompetanser innen det å omgå språk og redskaper i matematikk. De følgende fire kompetansene tilhører den første gruppen: Tankegangskompetanse, Problembehandlingskompetanse, Modelleringskompetanse og Resonnementkompetanse. Den andre gruppen inkluderer Representasjonskompetanse, Symbol- og formalismekompetanse, Kommunikasjonskompetanse og Hjelpemiddelkompetanse. Ifølge Niss og Jensen (2002, referert i Skott, Jess & Hansen, 2015) inneholder problembehandlingskompetanse det å kunne finne og formulere matematiske problemstillinger, kunne løse matematiske problemstillinger og etter hvert også kunne løse dem på forskjellige måter.

Kilpatrick, Swafford & Findell (2001, referert i Valenta, 2016, s. 10) beskriver matematisk kompetanse som består av fem komponenter: De fem komponentene omfatter 1) Begrepsmessig forståelse; 2) Beregning; 3) Anvendelse; 4) Resonnering; 5) Engasjement. Komponentene to, tre og fire handler direkte om problemløsning.



Figur 4. Kompetanseblomst

(Niss & Jensen, 2002, referert i Skott, Jess & Hansen, 2015, s. 296)



Figur 5. Fem komponenter av matematisk kompetanse

(Kilpatrick et al., 2001, referert i Valenta, 2016, s.10)

De fem komponentene av matematisk kompetanse er tett sammenflettet og avhengige av hverandre, mens de åtte kompetansene fra Niss & Jensen (2002, referert i Skott, Jess & Hansen, 2015) viser bare overlappingsmåter (se figur 5). Nortvedt (2013) påpeker at i PISA bruker elever ofte problemløsningskompetanse, modelleringskompetanse og resonnementskompetanse sammen for å løse problemet. Det vil si at de tre kompetansene har mye felles og går tett sammen med i problemløsning. Kilpatrick et al. hevder at komponentene er vevd tett sammen og at de er avhengige av hverandre. Både Niss & Jensen og Kilpatrick et al. (2001, referert i Valenta, 2016) påpeker at en type kompetanse/ komponent kan ikke bli utviklet isolert fra andre typer kompetanser, og komponentene/kompetansene støtter hverandre og utvikle samtidig. Derfor er det viktig å ta alle typer komponenter og kompetanser i betraktning når man snakker om problemløsningskompetanse. Utviklingen av problemløsningskompetanse bidrar samtidig også til utviklingen av generell matematisk kompetanse.

3.4 Hvordan får vi et godt læringsutbytte i problemløsning?

3.4.1 Problemløsning i lærebøker og lærebokforskning

Kongelf (2011), Harder (2013) og Aaseth (2016) har påpekt at det sjelden finnes tydelige temaer og definisjoner i problemløsning og problemløsningsheuristikk selv i lærebøkene. Ifølge Fan & Zhu (2007), Kongelf, Hader og Karimzadeh (2014), består problemløsning i lærebøker av tre forskjellige typer. Den første typen er beskrivelser og forklaringer av generelle og (eller) spesifikke problemløsningsstrategier i tekstdelen, og den andre typen er problemløsning presentert ved å bruke spesifikke problemløsningsheuristikker gjennom eksempler. Den tredje typen viser problemløsning på en skjult måte gjennom all slags oppgaver/øvelser i lærebøker.

Fan & Zhu (2006, 2007) påpeker at forskningen om hvordan problemløsning er representert på i matematikklærebøker har fått større oppmerksomhet enn tidligere, men i dette forskningsområdet som gjelder hvordan lærebøker representerer problemløsningsmetoder har det ikke vært så mye forskning. Jeg har søkt i både oria.no, scholar.google.com og researchgate.net for å lage tabell 7. nedenfor. Den viser resultatet av forskning angående presentasjon av problemløsning og problemløsningsmetoder i lærebøker. Søkeresultatene gjenspeiler det Fan & Zhu har påpekt, at det er veldig lite forskning som handler om akkurat dette temaet.

Tabell 6. Noen studier/ komparative studier om presentasjon av problemløsning i lærebøker

(oria. no. 2018 og researchgate.net. 2018)

Forskernes navn (år) (trinn)	Forskningstema	Beskrivelsen av forskningsresultatene
Mayer et al. (1995) (7. trinn)	Presentasjon av problemløsning (sammenlignende studie)	Lærebøker i Japan er mer fokus med å vektlegge problemløsningsprosessen, mens lærebøker i USA er mer rettet mot det endelige svaret.

Zhu & Fan (2006) (7. & 8. trinn)	Presentasjon av ulike typer matematikkproblemer og problemløsningsprosesser (sammenlignende studie)	Problemene i kinesiske lærebøker er generelt mer utfordrende og involverer flere trinn i problemløsningsprosessen, mens amerikansk lærebøker har flere problemer med visuell informasjon.
Fan & Zhu (2007) (7. & 8. trinn)	Presentasjon av problemløsningsmetoder (sammenlignende studie)	«Tegn et diagram», «bruk en ligning» og «omformuler problemet» er de mest brukte problemløsningsmetodene i lærebøkene fra Kina, Singapore og USA. I de kinesiske lærebøkene er problemløsningsprosessen mest eksplisitt.
Kongelf (2011) (9. trinn)	Presentasjon av problemløsningsmetoder	De heuristiske metodene er hovedsakelig ikke bevisst presentert i norske ungdomsskoles lærebøker, men er heller et resultat av ubevisst kulturell praksis. I tillegg er utvalget av metoder ensartet: enkelte metoder blir brukt mye, andre er nesten totalt fraværende.
Reinhardtsen (2012) (6. 7. & 8. trinn)	Presentasjon og introduksjon av algebra (sammenlignende studie)	Alle bøker fokuserer på algebra som språk. I motsetning til de amerikanske, svenske og norske lærebøkene, bruker den finske læreboken problemløsningsoppgaver for å introdusere algebra.
Harder (2013) (VR1&V1T)	Presentasjon av problemløsningsmetoder	Eksemplene i de norske matematikklærebøkene belyser i liten grad problemløsning.
Jones and Fujita (2013) (8. trinn)	Resonnering og bevis (sammenlignende studie)	Resonnering og bevis er utbredt distribuert i engelske lærebøker, mens i japanske lærebøker er det mer konsentrerte distribusjonen. De engelske lærebøkene gir et bredere innhold enn de japanske lærebøkene når det gjelder problemløsning i undervisning.
Aaseth (2016) (VR1&V1T)	Presentasjon av problemløsningsmetoder (sammenlignende studie)	Verken de norske eller de russiske lærebøkene legger stor vekt på eksplisitt presentasjon av problemløsnings-heuristikker. De norske lærebøkene har

		mer fokus på noen konkrete problemløsningsteknikker, mens de russiske lærebøkene fokuserer mer på kreativ problemløsning. Metodene som ble brukt i de russiske lærebøkene, var mer komplekse og gjennomtenkte.

* I kategorier «Forskningstema» og «Beskrivelsen av forskningsresultatene» har jeg kun valgt å fokusere på forskningsresultatene som direkte handler om problemløsning og problemløsningsmetoder i lærebøker, selv om det eksisterer flere temaer og resultater i forskningen.

3.4.2 Lærerens undervisning i problemløsning

Haapasalos (1989, referert i Björkqvist 2003, s.65) hevder at lærerens funksjon omfatter fire ulike nivåer i relasjon til elevens problemløsning.

1. *Læreren fungerer som en modell for dette. Det vil si at eleven har ingen forestilling om hvordan han eller hun kan gå fram i forbindelse med problemløsning.*
2. *Læreren fungerer som støtte eller «protese». Det vil si at eleven forstår betydning av problemløsning og tør å angripe problemer som virker kjente til en viss grad, ofte som medlem av en gruppe.*
3. *Læreren er leverandør av problemer. Det vil si at eleven har en god forestilling om hva problemløsning er, og tør å prøve nye strategier.*
4. *Læreren fungerer som fremmer av kreativt elevarbeid. Det vil si at eleven er i stand til å velge passende strategier og produserer nye løsningsmåter. Han eller hun ser muligheter til variasjon og generalisering og presenterer dem for andre.*

Björkqvist (2003, s.66) skriver at «*En elev som er i stand til å drive med kreativ problemløsning, kan godt trenge tilfeldig støtte eller å få demonstrert spesielle løsningsmåter.*» *… en lærer må kunne fungere på flere nivåer samtidig i relasjon til ulike elever, bør også kunne variere funksjonsnivået sitt i relasjon til de enkelte elevene*». Ifølge Ball (2008) må læreren beherske både matematiske kunnskaper for eksempel kunnskaper om mange problemløsningsmetoder, og matematikkdidaktiske kunnskaper om hvordan læreren underviser disse problemløsningsmetodene gjennom forskjellige eksempler. I tillegg kommer kunnskaper om elevene når det gjelder deres forkunnskaper og erfaringer i forbindelse med problemløsning, nivå på problemløsningsevnene, osv.

3.4.3 Elevers læring i problemløsning

En elevs læring omfatter både tilegnelse og deltakelse. Schoenfeld (1985) har utviklet et rammeverk for analyse av matematisk atferd i boken «Mathematical Problem Solving». Der består matematisk kunnskap og atferd (mathematical knowledge and behavior) av fire kategorier: 1) *Evner/ressurser (resources).* 2) *Heuristikk (heuristics).* 3) *Kontroll (control).* 4) *Oppfatningssystemer (belief systems).* (Schoenfeld, 1985, s.44-45). Schoenfeld hevder at disse fire kategoriene som delvis overlapper hverandre kan forklare hvorfor problemløseren lykkes eller feiler når de prøver å løse matematiske problemer. Ifølge Schoenfeld (1992) er hovedgrunnen til at elevene ikke kan løse problemet at de ikke kan revurdere og reversere valgene sine dersom valgene de gjorde i begynnelsen av problemløsningsprosessen var feil. Når elevene mangler slike evner, vil valg av feil strategi føre til at elevene ikke finner en løsning. (Schoenfeld, 1992, s.356).

Lithner (2008, s.258 og s.265) deler matematisk resonnering inn i to hovedtyper: 1) Kreativ resonnering (creative mathematically founded reasoning[CMR]); 2) Imiterende resonnering (imitative reasoning). Han definerer (2008 s.258) at imiterende resonnering *«imitates a solution procedure memorised from the textbook»*, og den kan ytterligere deles inn i to hovedkategorier: minnebasert resonnering (memorised reasoning) og algoritmisk resonnering (algorithmic reasoning[AR]). Lithner (2003) hevder at elever ofte bruke imiterende resonnering ved å kopiere algoritmer eller gjenkalle fakta. Han (2003, s.38) påpeker også at strategivalget som brukes i tekster i lærebøker kjennetegnes som guidet algoritmisk resonnering ved «*identifying similar surface properties in an example, theorem, rule, or some other situation described earlier in the text.*» Ifølge Lithner (s.266) er kreativ resonnering *1. Novelty. A new (to the reasoner) reasoning sequence is created, or a forgotten one is re-created. 2. Plausibility. There are arguments supporting the strategy choice and/or strategy implementation motivating why the conclusions are true or plausible. 3. Mathematicalfoundation. The arguments are anchored inintrinsic mathematical properties of the components involved in the reasoning.* Han (s.266-267) påpeker at: *CMR does not, as problem solving, have to be a challenge. ... Still, in most studies CMR is rare and AR is dominating.* Han skriver: "*There is a pressure on textbooks to be self-contained (so students do not have to ask the teacher many questions) by providing guiding examples to most exercises. … the textbook … leads to text-guided AR …*"

Bergqvist (2007, s. 368) skriver: *Even though imitative reasoning is an obvious part of mathematics, just as memorizing vocabulary is a part of learning a new language, it is not the only part. The students could be given more opportunities to learn creative reasoning and thereby become familiar with the situation of solving unfamiliar tasks.* Mayer (1985, s.126, referert i Björkqvist 2003, s.61) hevder at effektiv trening både kan hjelpe læreren til å forbedre undervisning og utvikle elevenes problemløsningsevne. Slike treninger inkluderer overføringstrening, skjematrening, strategitrening og automatisering av algoritmer og basiskunnskaper.

Solomon & Croft (2015) påpeker at studenter blir uengasjert i matematikk på høyere nivå etter at de har blitt ferdige med grunnskoleutdanningen. De (2015, s.3) hevder at grunnen til dette er at skolen favoriserer en type matematikkundervisning som omfatter ett sett med regler og algoritmer. Derfor blir ofte elever som er flinke til å pugge formler ansett som dyktige i faget på grunnskolen. Solomon & Croft (s.12) påpeker at disse elevene ikke har dype forståelse for hva de holder på, og kan derfor slite med matematikk etter grunnskolen fordi det er krav om bevis og forståelse for hva man holder på med. Delvin (2012, S.12) hevder at "*all the time schools devote to the teaching of mathematics, very little (if any) isspent trying to convey just what the subject is about. Instead, the focus is on learning and applying various procedures to solve math problems."* Når det gjelder bruk av abstrakt notasjon i bevis, skriver han (2012,16) "*the reason for the abstract notation is the abstract nature of the patterns that mathematics helps us identify and study*." Ifølge Solomon & Croft, Delvin, Lithner (2003, 2008) og Bergqvist (2007)) bør enkle oppgaver angående bevis kunne bli trukket inn i grunnskolens matematikkundervisning slik at elevene kan utvikle egne problemløsningskompetanse gjennom øvelser i kreativ resonnering.

Lester (1996, s.87) diskuterer også om hvordan elever kan utvikler sine egne problemløsningsevner.

Tabell 7. Lesters teori om utviklingen av elevers problemløsningsevner

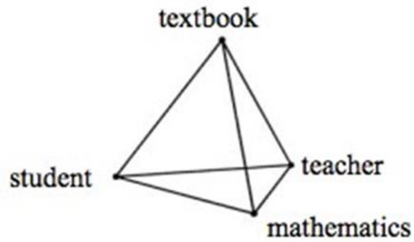
1. Elever må løse mange problemer for å forbedre seg
2. Elever må tro på at læreren deres synes at problemløsning er viktig, for at de skal ta til seg læringen
3. Elever tjener på systematisk undervisning i problemløsning
4. Problemløsningsevnen utvikles langsomt og over en lang periode
Når elever behersker problemløsningskompetanse, er de i stand til å fremme og løse matematiske problemer på flere ulike måter.

(Lesters, 1996. s. 87)

3.4.4 Didaktiske forhold i problemløsning mellom lærebøker, elevers læring og lærers undervisning

Generelt sagt, ifølge Pólya (1973, 1981, 2009) og Schoenfeld (1985, 1992), krever problemløsing at elevene først har et engasjement til å forstå problemet. Deretter planlegger og gjennomfører de en løsningsprosess, samtidig overvåker de progresjonen og vurderer de ulike løsningsalternativene. Til slutt finner de nye løsningene underveis. Ifølge Lesters (1996) og Lithner (2003, 2008) er elever med høy problemløsningskompetanse de som behersker kreativ resonnering med kritisk matematisk tenkning og er i stand til å fremme og løse matematiske problemer på flere ulike måter.

Det finnes faktisk en rød tråd igjennom alle ovenfor teoriene i problemløsning, nemlig utviklingen av elevenes problemløsningskompetanse. Derfor påpeker Fan & Zhu (2007) at problemløsning ikke bør behandles som et isolert tema, men være integrert både i lærebøker, i vanlig matematikkundervisning og i vanlig elevenes matematikklæring. Rezat (2010) redegjør for hvordan læreboka, eleven, læreren og matematikken danner et tetraeder bygd over det didaktiske triangelet.



Figur 6. Rezats tetraedermodell av lærebokbruk (Rezat, 2010, s.1261)

Figur 6. viser forholdet mellom læreboka, lærer, elever og matematikk i matematikkdidaktikk. Rezat (2010) hevder at læreboka er implementert som et instrument på tre sider i tetraederet. Det didaktiske tetraederet fra Rezats minner meg også om to andre teorier, en er «undervisningens triade» fra Jaworski (1994. referert i Streitlien, 2009. s.45) og en er «lærings triade» fra Boaler (2002, s.10-11). Ifølge Jaworski (1994) finnes det tre karakteristiske kategorier for en undersøkende matematikkundervisning: læreren som læringsleder, en følsomhet overfor eleven og matematisk utfordring, såkalt «undervisningens triade». Boler bruker en trekant av kunnskap, identitet og praksis for å representere læringsprosessen, og hun hevder at noen elever går videre gjennom "Dance of agency" (Pickering 1995, s.116. referert i Boler, 2003, s.9), som betyr utvekslingen mellom menneskelig og disiplinært «agency», mens andre gjennomgår et mer passivt forhold.

I følge Rezat (2010, 2012), Boler (2002, 2003), Björkqvist (2003), Streilien (2009) og Jaworski (1994, referert i Streitlien, 2009) så er det viktig at læreboka med store krav om problemløsning, læreres bruk av læreboka med hensyn til kombinasjon av formidlende og undersøkende problemundervisning, og elevers bruk av læreboka gjennom «Dance of angecy» og deltakelse i matematikk praksisfelleskap må få en balanse, slik at vi kan rekke et godt læringsutbytte i problemløsning. For å få elever med høye problemløsningskompetanse og som kan beherske kreativ resonnering og heuristiske metoder, må man ifølge Lithner (2003, 2008), Lester (1996), Mayer (1985, referert i Björkqvist, 2003), gi en systematisk undervisning i problemløsning gjennom hele skoleløpet. Samtidig bør elevene få nok trening i overføringstrening, skjematrening, strategitrening og automatisering av algoritmer og basiskunnskaper gjennom mange øvelser med spesifikke problemløsningsmetoder.

Kapittel 4. Utvalg av analysegjennomføring og forskningsmetoder

4.1Utvalg før analysegjennomføring

4.1.1 Hvilke skoletrinn?

Jeg velger å analysere lærebøker for ungdomsskolen. Hovedgrunnen til dette valget er at Zhu & Fan (2006, s.612) har påpekt at elever på ungdomsskolenivå, som er mellom 13-16 år gamle, er i en sentral fase i utviklingen av problemløsningskompetanse. I Kina begynner barn på barneskolen når de er fylt 7 år, mens man i Norge begynner på skolen når de er fylt 6 år. Den norske grunnskolen inkluderer 7 år på barneskolen og 3 år på ungdomsskolen. Ungdomstrinnet omfatter 8. trinn, 9. trinn og 10.trinn. Den kinesiske grunnskolen inkluderer 6 år på barneskolen og 3 år på ungdomsskolen. Ungdomstrinnet i Kina omfatter 7. trinn, 8 trinn og 9. trinn, slik det var i Norge tidligere. Selv om trinnene er ulike mellom Kina og Norge, er alderen den samme, fra 13 til 15år.

4.1.2 Hvilke bøker?

Tre utvalgte norske lærebøker, (Faktor 8, 9, 10), og seks kinesiske obligatorisk lærebøker (matematikk 7AB, 8AB, 9AB) ble analysert. Valget av lærebøker i matematikk er veldig begrenset i Kina. Slike bøker må bli godkjent av Pensum Ekspert Committee for lærebøker i grunnskolen som ligger under det kinesiske utdanningsdepartementet. Da jeg begynte å velge lærebøker for min forskning, fantes det bare 10 serier bøker (se vedlegg 3) som man kunne velge fra i hele Kina (MOE, 2011). Unntakene var provinsene Shanghai og Zhejiang som får lov til å bruke egne matematikkbøker (Fan & Zhu, 2007). Serien av lærebøker i matematikk som jeg valgte for analysen, ble publisert av People’s Education Press (PEP). Disse har lengst historie i Kina når det gjelder fagbøker både i grunnskolen og på den videregående skolen. Ifølge Zeng (1997, referert i Fan & Zhu, 2007) brukte rundt 70% av ungdomsskoleelevene PEP-serien, og den var den mest brukte serien i Kina.

I motsetning til Kina, finnes det ingen sentral godkjenningsordning for lærebøker i Norge. Ifølge Kunnskapsdepartementet er det læreplanen som skal være styrende i undervisningen, og valget av læreverk er dermed den enkelte skole og lærers ansvar (Kunnskapsdepartementet. 2013, s.61).

Waagene og Gjerustad (2015) har gjort en undersøkelse når det gjelder norske lærers valg og bruk av læremidler i matematikk.

Tabell 8. Hvilken lærebok benytter elevene i matematikk på 8. – 10. trinn? (N=39)
(N betyr antallskoler i undersøkelsen)

	Andel (%)
SIRKEL (Aschehoug)	26
Faktor (Cappelen)	18
nye MEGA (Cappelen)	13
Maximum (Gyldendal)	3
TETRA (Fagbokforlaget)	3
Ingen av disse	39
Totalt	100

(Waagene og Gjerustad, 2015, side 26-27)

Det er «Sirkel» fra Aschehoug forlag og «Faktor» fra Cappelen forlag som er de to mest brukte lærebøkene. Jeg kjenner «Faktor» best og dette gir meg en positiv start i analysen min. Derfor velger jeg «Faktor» som representant for de norske matematikkbøkene.

4.1.3 Hvilke eksempler?

I de utvalgte lærebøkene finnes det ingen heuristiske metoder som er illustrert og presentert i oppgaver i lærebøkene, bare ett enkelt svar er gitt i svarlisten i de norske lærebøkene. Eksempler i lærebøkene presenterer ofte mer enn en heuristisk metode. Noe av tekstdelen inneholder både mye tekstforklaringer og bruk av heuristiske metoder. Slike eksempler finnes i tekstdeler uten å være merket som «eksempel». Disse umerkede eksemplene har jeg valgt å ikke ta med i analysen min. Dette gjør min analyse noe snevrere enn hos Fan & Zhus (2007) og Kongelfs (2011). I hovedanalysen har alle de merkede eksemplene blitt analysert i de utvalgte lærebøkene for hele ungdomstrinnet, med fokus på problemløsningsmetoder.

4.1.4 Hvilke temaer?

Mange forskere blant annet Kongelf (2011), Harder (2013) og Aaseth (2016), fokuserer på «Tall, algebra og funksjoner» i forskningen deres fordi dette området er viktig i matematikk. Samtidig må vi legge merke til at problemløsning eksisterer i alle temaer. Jeg har derfor analysert alle eksemplene som inkluderer alle temaer i lærebøkene. Nedenfor (se tabell 13.) er hovedområde i matematikk i ungdomsskolen ifølge den norske- og den kinesiske læreplanen.

Tabell 9. Oversikt over hovedområde i matematikk i grunnskolen i Norge og Kina

Årssteg	Norge 8.–10.	Kina 7. – 9.
Hovedområde	Tal og algebra, Geometri, Måling, Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk, Funksjoner	Tall og algebra, Geometri, Statistikk og sannsynlighet Omfattende praksis

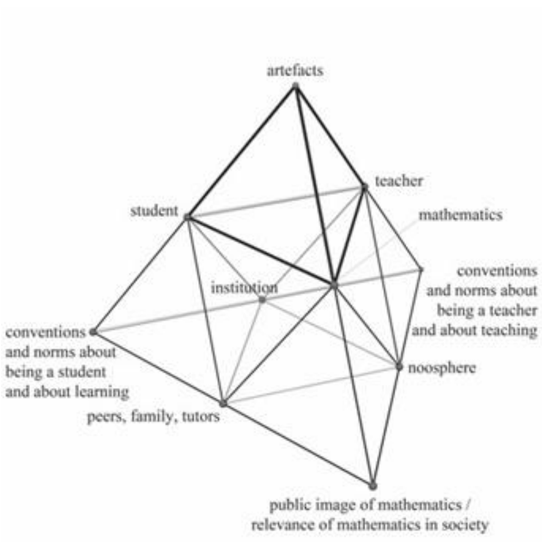
(Utdanningsdirektoratet, 2016, s.9-14 og moe.edu.cn, 2011 med egen oversettelse)

I den kinesiske læreplanen har man fire hovedområder (MOE, 2011), mens det er fem hovedområder i den norske læreplanen (Utdanningsdirektoratet[Udir], 2016). «Omfattende praksis» i den kinesiske læreplanen vises ofte ved delkapitlet «undervisningsaktiviteter» i slutten av hvert kapittel i de kinesiske bøkene. Der får elever problemløsningstrening gjennom praktiske og fysiske aktiviteter. Det finnes ingen eksempler i slike delkapitler i de kinesiske lærebøkene. Derfor inkluderer jeg ikke «Omfattende praksis» i analysen min. Jeg tar utgangspunkt i disse hovedområdene fra både den nåværende norske- og kinesiske læreplanen, og velger tre temaer/grupper som er aktuelle i analysen: 1) «Tall, algebra og funksjon»; 2) Geometri og måling; 3) Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet. Her må jeg påpeke at det finnes et tema i de norske lærebøkene som ikke finnes i de kinesiske lærebøkene: «økonomi». Siden det bare finnes regningseksempler i økonomi, plasserer jeg eksemplene fra «økonomi» i den første gruppen «Tall, algebra og funksjon».

4.2 Utvalget av forskningsmetoder

4.2.1 Lærebokforskning

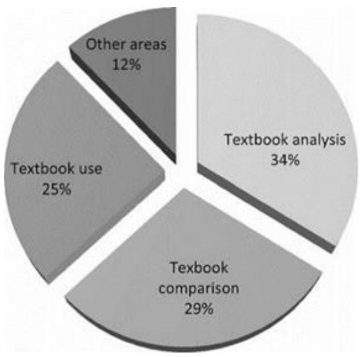
Rezat & Sträßer (2012) utviklet en matematikkdidaktisk modell fra et enkelt tetraeder (se figur 6 i delkapittel 3.4.4.) til et komplisert tetraeder.



Figur 7. Sosio-didaktisk tetraederet (Rezat & Sträßer, 2012, s. 648)

Rezat & Sträßer (2012, s.648) hevder at tetraederet tilbyr *en bestemt måte å rekonstruere mellomrelasjoner til variabler slik at vi er i stand til å sette objekter i læreboksforskning inn i en systematisk struktur*. De påpeker at ved å bruke det sosio-didaktisk tetraederet som en teoretisk linse, kan vi strukturere forskningsområdet for lærebøker i matematikk, dvs. tre hovedgrupper av fenomener i læreboksforskning: *1) forskning på innflytelse på lærebøker; 2) forskning på læreboken selv; og 3) forskning om bruk av lærebøker og dens innvirkning* (Rezat & Sträßer, 2012, s. 648). De påpeker at forskning på (matematikk) lærebøker som analyserer innholdet i lærebøker er det mest utbredt forskningsområdet og denne forskningen er spesielt relevant i Norden. Ifølge Rezat & Sträßer (se figur 7.) tilhører min forskning den andre typen og fokuserer på toppen av tetraederet som faktisk er figur 6. Det vi si at Figur 6 (se delkapittel 3.4.4) faktisk er toppdelen av figur 7.

Rezat & Sträßer (2012, 2015) bruker en tredimensjonal måte for å klassifisere lærebokforskningen, mens Fan, Zhu & Miao (2013) har klassifisert lærebokforskningen i fire kategorier. Fan har samlet og sammenlignet 111 studier og kategorisert lærebokforskning slik: *1) Rollen til lærebøker; 2) Analyse og sammenligninger av lærebøker; 3) Bruk av læreboka; 4) Andre områder*. De første tre kategoriene ligner veldig på Rezat & Sträßers klassifisering, men Fan, Zhu & Miao (2013) har inkludert den fjerde kategorien - «noen andre områder» som er mye mindre omfattende enn de tre andre. Fan et.al. (2013) laget figur. 8 angående de siste tre kategoriene. Vi kan se at det mest utbredte forskningsområdet -lærebokanalyse omfatter 34% av totalen. Forskning på selve læreboken ligger på 63% av alle studiene (34%+29%) som inkluderer både lærebokanalyse og læreboksammenligning. Den omfatter også det største delen av alle empiriske studier av lærebøker i matematikk.



Figur 8. Fordeling av empiriske studier av matematiske lærebøker (N=100) (Fan, Zhu & Miao, 2013, s. 635)

Rezat & Sträßer (2015, s.252) bruker en liste fra Howson (2013, s.653 referert i Rezat & Sträßer, 2015) som inkluderer 11 forskjellige emner/aspekter i diskusjonen av lærebokanalyse. De hevder at selv om alle disse forskjellige emnene krever forskjellige teoretiske rammeverk under forskningen, vil undersøkelsen være basert på samme metode, nemlig innholdsanalyse (content analysis). Dette leder videre til at valget av min forskningsmetode er innholdsanalyse.

Fan, Zhu & Miao (2013) konkluderer med at de har valgt fem emner i lærebokforskningen sin: 1) Matematisk innhold og matematiske emner; 2) Kognitive krav og pedagogikk; 3) Kjønn, etnisitet, økonomi, kultur og verdier; 4) Internasjonale sammenligninger av lærebøker; 5) Konseptualisering og metodiske forhold. Jeg skal sammenligne likheter og forskjeller mellom kinesiske og norske lærebøker i matematikk, derfor handler analysen min om det fjerde emnet- «Internasjonale sammenligninger av lærebøker». I tillegg skal jeg også analysere det første emnet - «Matematisk innhold og matematiske emner» og diskutere det femte emnet - «Kultur og verdi».

4.2.2 Forskningsmetoder

Som jeg har nevnt brukes innholdsanalysen (content analysis) i analysen min (se delkapittel 4.2.1). Ifølge Bryman (2012, s. 289) er innholdsanalyse: «*is a research technique for the objective, systematic and quantitative description of the manifest content of communication.*» Grønmo (1996) beskriver fire strategier for å kombinere kvalitative og kvantitative metoder: *1) Kvalitative undersøkelser som forberedelse til kvantitative undersøkelser; 2) Kvalitative undersøkelser som oppfølging av kvantitative undersøkelser; 3) Parallell utnytting av kvalitative og kvantitative tilnærminger under både datainnsamling og analyse; 4) Innsamling av kvalitative data som kvantifiseres under analysen.*

Grønmo (1996) hevder at disse fire strategiene ikke står i motsetning til hverandre og i forskningen kan de kombineres i ulik grad. Creswell (2012) påpeker at når man har både kvantitative og kvalitative data, og data av begge typer sammen, gir det en bedre forståelse av problemstillingen enn hva den enkelte metoden kan gi. Teorier fra Grønmo og Creswell påvirket metodevalget mitt. Jeg velger derfor å bruke den tredje strategien for å kombinere kvalitative og kvantitative forskningsmetoder i undersøkelsen min.

For å analysere forekomsten av spesifikke problemløsningsheuristikker, bruker jeg kodingsordningen til Kongelf (2011) som analyseverktøy. Det er tydelig at kvantitative tilnærminger brukes i denne delen av hovedundersøkelsen. I den andre delen av hovedundersøkelsen bruker jeg Pólyas fire-fase problemløsnings modell og analyserer hvordan problemløsningsprosessen presenteres i lærebøkene. I hjelpeundersøkelsen sammenligner jeg læreplanene og lærebøkene med fokus på faktorer tett knyttet til hovedundersøkelsen. Siden jeg har jobbet direkte med disse kildene, så påvirker undersøkelsen selvfølgelig av nærhet og mine erfaringer. Dette gjelder særlig de usynlige egenskapene av eksemplene og lærebøkene som analyses i undersøkelsen. På denne måten er disse undersøkelsene kvalitative.

Generelt sagt, for å besvare problemstillingen min, velger jeg å bruke Kongelfs (2011) kodingsordning i den kvantitative tilnærmingen. I den kvalitative tilnærmingen velger jeg å bruke Pólyas (1973) fire-fases modell og et annet rammeverk blandet av Hong & Chois (2014) og Veilandes (2014) teorier. Under et slikt utvalg av forskningsmetoder for lærebøkene går da analysen både i bredden og dybden. Dette kan også lede til at man fanger opp data fra ulike områder og får et helhetlig bilde.

4.2.3 Validitet og reliabilitet i analysen min

Validitet

Cohen, Bell, Manion & Morrison (2011, s.105) hevder at "*validity is based on whether the research appears to be trustworthy … and is a requirement for both quantitative and qualitative research."* De påpeker at hvis analyseverktøyet et utviklet fra teoribakgrunnen, så kan det øke validiteten i forskningen. Ifølge Cohen et al. i analysen min handler validitet derfor om hvor nært teorien er knyttet opp mot kodene og modellene som benyttes i analysen.

Hovedundersøkelsen min er et komparativt forsøk direkte basert på lærebøkene fra Kina og Norge. I analysen bruker jeg både en kvantitativ metode med Kongelfs (2011) kodeordining og en kvalitativ metode med Pólyas fire-fases modell. Fan & Zhu (2007, s.64-65) hevder at Pólyas fire-fases modell er mye brukt innenfor forskning i problemløsning. Analyseverktøyet/ kodene fra Kongelf er utviklet med bakgrunn i teorien og tidligere studier. Derfor kan vi si at disse kodene og denne modellen har nok validitet.

En tydelig begrensing i analysen min er at funnene av analysen er helt avhengig av bøkene som blir analysert. Hvis bøkene er ufullstendige eller ikke representative, så vil problemer som for eksempel lav autentisitet, troverdighet og representativitet til funnene oppstå og redusere validiteten. Av denne grunn har jeg gjort noen forsøk på forhånd med hensyn til om lærebøkene «Faktor» og «Matematikk» er mye brukt i begge landene (se delkapittel. 4.1.2). Resultatene fra denne undersøkelsen gjelder først og fremst bare «Faktor» og «Matematikk», ikke alle norske og kinesiske lærebøker. Ifølge Kvale & Brinkmann (2009) betyr det ikke validiteten reduseres selv om man ikke kan generalisere funnene. Dette betyr at analysen min trenger ikke å være gyldig for alle lærebøker, og funnene mine kan begrenses kun til de undersøkte eksemplene og de utvalgte lærebøkene. I tillegg mangler disse bøkene jeg har analysert ingen sider eller deler, og alle tekster er lesbare. Derfor kan vi si at lærebøkene i analysen min er både fullstendige og har god representativitet som garanterer høy validitet av analyseresultatene.

Reliabilitet

Ifølge Yin (2003, referert i Resvoll, 2014) handler reliabilitet om *hvor pålitelige de resultatene forsker har funnet er*. Yin og Resvoll hevder at de forskningsresultatene med høy reliabilitet betyr at resultatene alltid skal være stabile, uansett hvem som har gjort undersøkelsen/analysen og hvor mange ganger den har blitt gjort.

Generelt har analysen min høy reliabilitet, fordi eksemplene og lærebøkene kan undersøkes flere ganger og de forandrer seg ikke over tid. Samtidig er analysen enkel å gjenta og å kvalitetssikre. Jeg har for eksempel gjennomført 616 eksempler og samlet statistiske data i totalt tre runder i hovedanalysen min for å sikre at problemløsningsmetodene i hvert eksempel kommer i riktig kategori og blir regnet med. Jeg har brukt de samme kategoriene for alle 616 eksemplene i hele undersøkelsen uten endring.

Når jeg gjør analysen av lærebøkene, dokumenterer jeg alle prosesser i analysen, slik at de analyseverktøyene jeg har brukt og prosessen jeg har gått igjennom også kan bli sjekket og gjennomgått av andre forskere om de vil gjøre lignende forskning. Slik kan jeg unngå store og systematiske tilfeldigheter i «målingene til problemløsningsmetoder» i analysen, og dette styrker reliabilitet i forskningen min på en annen måte.

I analysen min undersøkes både synlige og usynlige egenskaper i lærebøkene. Synlige egenskaper inkluderer innhold, antall sider, antall av eksempler, utseende, antall av bilder/tegninger, og antall av tankebobler/pekebilder. Usynlige egenskaper omfatter presentasjon av temaet i kapittelet, valget av praktiske eksemplene, oppgavers plassering og kapitlenes organisering. De synlige egenskapene i lærebøkene for eksempel antall pålitelige eksempler som er med på å styrke reliabilitet i analysen, mens de usynlige egenskapene øker ustabiliteten av reliabilitet for eksempel presentasjon av problemløsningsmetoder fordi resultater går tett sammen med forskerens egen erfaring og tolkning av metoder.

Analyseverktøyet fra Kongelf (2011) er ikke designet for en komparativ studie, derfor må jeg tilpasse Kongelfs kodingsordning for å sikre korrekthet, helhetlighet og objektivitet av analyseverktøyet. Jeg har brukt mer enn halvparten av analysetiden på å sikre og tilpasse Kongelfs kodingsinnholdsliste, kodingsunderkategorier og kodingsmanual i analysen min på en best mulig måte (se delkapittel 4.3.2). Cohen et al. (2011, s.105) skriver: *I kvalitative metoder kan validitet fremmes blant annet gjennom ærlighet, dybde og riktighet i dataene, graden av triangulering og objektiviteten til forskeren; I kvantitative metoder styrkes validiteten gjennom å gjøre nøye utvalg, bruke passende instrumenter, og egnede statistiske instrumenter for å behandle* *dataene* (Cohen et al., s.105). Ragin hevder at d*en største trusselen mot pålitelige resultater er store og/eller systematiske tilfeldigheter i målingene*. (Ragin, 1994 referert i Olsen, 2008). Ifølge Cohen og Ragin, når jeg hadde gjennomført datasamlingen i flere runder og hadde tilpasset kodingsordningen på en objektiv og nøyaktig måte, styrkes både validitet og reliabilitet i analysen min.

4.3 Utvalg i analysegjennomføring

4.3.1 Analyseverktøyet og analysetabeller til hjelpeundersøkelsen

Jeg velger et analytisk rammeverk fra Hong og Choi (2014) i hjelpeundersøkelsen min.

Tabell 10. Rammeverket brukt for å analysere lærebokens innhold og problemer fra Hong & Choi

(Hong & Choi, 2014, s.245)

Horizontal analysis	Vertical analysis
• Education systems • Number of lessons • Number of problems • Grade level placement of topics	• Introduction and development of topics • Representations textbooks provide • Worked examples • Cognitive demand of problems • Type of responses

Det består av en horisontal analyse og en vertikal analyse. Den horisontale analysen ser på lærebøkene som en helhet, og gir et bredt bilde av lærebøkene. Dette kan også for eksempel være å finne ut hvor mange eksempler og ulike temaer som finnes innenfor et valgt hovedområde. En vertikal analyse tilbyr forståelse av matematisk innhold (Hong og Choi, 2014, s.244). Det første elementet – «Education system» i den horisontale analysen gir en gyldig grunn til at jeg bør ta i betraktning den nåværende norske og kinesiske læreplanen når jeg gjør analysen.

Veilande (2014, s. 473) deler opp faktorer knyttet til lærebøker inn i to kategorier: synlige og usynlige egenskaper.

Tabell 11. Egenskaper i en lærebok Veilande (2014, s. 473)

Synlig	**Usynlig**
Størrelse, struktur, innhold, bilder, layout, farge	Teoretisk grunnlag, didaktiske ideer, tilgjengelighet, kognitive krav, samhold, konsistens, terminologi, oppgavevalg, balansert teoriøvelser

Blant egenskapene som analyseres i forskningen min er egenskaper som for eksempel antall sider og eksempler (synlige egenskaper), og egenskaper som utvalget av eksempler og presentasjon av problemløsningsmetoder (usynlige egenskaper).

Basert på tanker fra Hong og Choi (2014) og Veilande (2014), lager jeg fire tabeller (Se tabell. 15, 16, 17 og 18 i delkapittel 5.1), og tilpasser disse til hjelpeundersøkelsen min. Den første tabellen fokuserer på forskjellene mellom de norske og kinesiske læreplanene med hensyn til formål og læringsmål i problemløsning og undervisningstimer. Den andre og den tredje fokuserer på de synlige egenskapene i lærebøkene. Den fjerde fokuserer på de usynlige egenskapene i lærebøkene. Alle kategoriene i tabellene er valgt ifølge ett og samme prinsipp: De kan påvirke eller går tett sammen med problemløsningsinnføringen og presentasjonen av eksempler i lærebøkene. Dette vil altså passe godt inn i hovedundersøkelsen min.

4.3.2 Analysemodellen, analyseverktøyet og analyseskjemaet i hovedundersøkelsen

4.3.2.1 Pólyas fire-fases modell som analysemodell

Fan & Zhu (2007, s.64-65) påpeker at Pólyas fire-fases modell er hyppig brukt i matematikkinstruksjon. Denne modellen anvendes faktisk i den kinesiske matematikklæreplanen (MOE, 2011) eksplisitt (se tabell 15 i delkap.5.1). I den første delen av hovedundersøkelsen skal jeg derfor analysere hvordan generell heuristikk brukes i de undersøkte eksemplene ved bruk av fire-fases modell. Jeg vil finne ut om formuleringer av problemløsningsprosessen i eksempler i lærebøkene er knyttet til Pólyas modell, og eventuelt hvordan og hvor ofte (se analysen i delkapittel 6. 1).

4.3.2.2 Kongelfs kodingsordning som analyseverktøy

Kongelf (2011) undersøker bare de norske lærebøkene, mens jeg i min studie skal undersøke og sammenligne både norske og kinesiske lærebøker. Dette krever tilpassing og justering til Kongelfs kodingsordning. Kongelf hevder at utformingen av kodingsordningen har stor betydning for å sikre objektivitet og systematikk på en best mulig måte i forskningen. Dette krever at kategoriene innenfor kodingsordningen ikke bør overlappe og være mest mulig gjensidig utelukkende. Derfor gjør jeg først og fremst noen undersøkelser og observasjoner for å sjekke hvor godt tilpasset kodingsordningen av Kongelf er i analysen min.

For å tilpasse Kongelfs (2011) kodingsordning, måtte jeg utføre gjentagende hypoteser--prøve--sjekke –justere-syklusen i begynnelsen av analysen. Når de små syklusene er gjennomgått flere ganger i tilpasningsprosessen, har hovedanalysen min (analysering av alle eksempler) samtidig gjennomgått tre runder. Den første runden fant jeg ut underkategorier av «Gjør problemet enklere» brukes veldig enkelt i de utvalgte lærebøkene, Jeg fant ut også at jeg ikke kunne ha underkategorier for metoder «Lag en systematisk tabell» og «Lag en illustrasjon». I tillegg fant jeg ut at to nye metoder «Analyse og forstå forutsetninger» og «Se tilbake /fremover» som finnes i lærebøkene, men ikke finnes i Kongelfs kodingsliste. Da de to metodene blir lagt til kodningslisten fra den andre runden. I den andre runden brukte jeg nye manualer til metoden ««Se etter et mønster» og metoden «Tenk på et liknende problem». Samtidig brukte jeg underkategori A- «bruk av resonnering» og underkategori B – «bruk av regel/formel» til metoden «Gjør problemet enklere». Etter de store forandringene i kodingsordningen (se delkapittel nedenfor 4.3.2), fikk jeg ikke de samme statistiske resultatene i den andre runden som i den første. Den tredje runden er gjort for å sikre at problemløsningsmetodene i hvert eksempel kommer i riktig kategori og blir regnet med ifølge den tilpassede og nye kodingsordningen. Resultatene i den tredje runden varierer ikke mye fra den andre, men noen få glemte metoder er blitt lagt til.

I min videre diskusjon bruker jeg noen påstander angående bøkene som er basert på min observasjon og de tre rundene med analyse. Vennligst legg merke til at disse påstandene først og fremst er begrenset til de ni utvalgte norske og kinesiske lærebøkene, og ikke nødvendigvis er representative for andre bøker.

Tilpasning av Kongelfs kodingsinnholdsliste

Det er en selvfølge at kodingsinnholdslisten må omfatte spesifikke problemløsningsmetoder som finnes både i norske og kinesiske lærebøker, slik at vi kan finne ut hvilke forskjeller som finnes når det gjelder presentasjonen av samme problemløsningsmetoder. Samtidig må kodingsordningen også inkludere metoder som brukes mye, men som kun finnes i de norske- eller kinesiske lærebøkene. På denne måten kan vi oppdage interessante forskjeller når det gjelder utvalget av metoder i problemløsningsprosessen.

Jeg sammenligner Kongelfs (2011) kodingsinnholdsliste med Fan & Zhus (2007) og Björkqvists (2003). Selv om alle tre kodingsinnholds-/metodeliste kommer fra Pólyas (1973) generelle heuristiske strategier, ha de likevel forskjeller. Både Fan & Zhu (2007, frs.66) og Kongelf har bygget opp en systematisk kodingsordning som inkluderer kodeinnholdsliste og kodingsmanualen, som har blitt brukt i lærebokanalysen. Björkqvists (2003, s.67) har imidlertid kun laget en metode-/kodingsinnholdsliste uten manual.

Tabell 12. Sammenligningen av heuristiske metoder fra Kongelf, Björkqvist og Fan & Zhu

Fire faser	Heuristiske metoder fra Fan & Zhu	Heuristiske metoder fra Kongelf	Heuristiske metoder fra Björkqvist
Forstå problemet og legg en plan	1. *Look for a pattern*	1. Se etter et mønster	1. Let etter et mønster
	2. *Make a table*	2. Lag en systematisk tabell	2. Konstruer en tabell
	3. *Draw a diagram*	3. Lag en illustrasjon	3. Tegn en tegning, figur eller graf.
	4. *Guess and check*	4. Prøv og feil	4. Gjett og kontroller
	5. *Make a systematic list*		5. Sett opp en liste over alle muligheter
Gjennomfør planen	6. *Solve part of the problem*	5. Løs deler av problemet	6. Fastsett et delmål
	7. *Work backwards*	6. Jobb baklengs	7 Arbeid baklengs
	8. *Think of a related problem*	7. Tenk på et liknende problem	
	9. *Change your point of view*	8. Se problemet fra en annen side	8. Se på problemet fra en annen synsvinkel
	10. *Simplify the problem*	9. Gjør problemet enklere	9. Løs et enklere (eller lignende) problem
	11. *Act it out* 12. *Use a model* 13. *Use before–after concept* 14. *Use an equation* 15. *Logical reasoning*		10. Omformuler problemet til et ekvivalent problem 11. Løs et vanligere problem som det aktuelle utgjør et spesialtilfelle av

	16. Make suppositions 17. *Restate the problem*		12. Bruk et ekstremtilfelle 13. Bruk symmetri- eller paritetsargumenter 14. Velg formålstjenlige betegnelser
Se tilbake			

(Fan & Zhu. 2007, s.66.; Björkqvists. 2003, s.67. og Kongelf. 2011, s.20)

Björkqvists (2003) metodeliste inkluderer 14 heuristiske metoder, mens Fan & Zhus (2007) liste omfatter 17 heuristiske metoder. Begge har dekket og omfattet alle de ni heuristiske metodene fra Kongelf (2011).

Det er seks metoder i Björkqvists (2003) metodeliste som ikke finnes i Kongelfs (2011) liste. Dette inkluderer den femte metoden- «Sett opp en liste over alle muligheter», den 10. metoden «Omformuler problemet til et ekvivalent problem», den 11. metoden «Løs et vanligere problem» som utgjør et spesialtilfelle av den 12. metoden «Bruk et ekstremtilfelle», den 13. metoden «Bruk symmetri- eller paritetsargumenter» og den 14. metoden «Valg av formålstjenlige betegnelser».

Den femte metoden- «Sett opp en liste over alle muligheter» kan overlappe den andre metoden- «Lag en systematisk tabell» i Kongelfs (2011) liste, fordi noen ganger blander man det å lage en tabell med å lage en liste for å legge en plan. De andre fem metodene som ikke finnes i Kongelfs liste kan sees på som fem underkategorier av den 10. metoden «Gjør problemet enklere» i Kongelfs liste.

Det er åtte metoder i Fan & Zhus (2007) kodingsinnholdsliste som ikke finnes i Kongelfs (2011) liste, inkludert den femte metoden «Lage en systematisk liste», den 11. metoden «Act it out», den 12. metoden «Use a model», den 13. metoden «Use before–after concept», den 14. metoden «Use an equation», den 15. metoden «Logical reasoning», den 16. metoden «Make suppositions» og den 17. metoden «Restate the problem».

Den femte metoden «Lage en systematisk liste» ligner på Björkqvists (2003) femte metode- «Sett opp en liste over alle muligheter». Samtidig overlapper begge metodene med Kongelfs (2011) andre metode- «Lag en systematisk tabell». Den 11. metoden «Act it out» betyr *using people or objects to physically show what is exactly described in the problem* (Fan & Zhu 2007, s.66). Denne metoden finnes verken i de utvalgte kinesiske eller de norske eksemplene. De 7 andre metodene kan sees på som sju underkategorier av den åttende metoden «Gjør problemet enklere».

Når det gjelder de fem metodene fra Björkqvist (2003) og de seks metodene fra Fan & Zhu (2007) som kan være underkategoriene av metoden «Gjør problemet enklere», vil jeg gjøre samme som Kongelf (2011) og beholde bare de ni metodene siden disse metodene sjelden brukes i de utvalgte lærebøkene for ungdomsskolen i analysen min.

I kodingsinnholdslisten til Kongelf (2011) finnes det ingen heuristiske metoder i den fjerde fasen - «se tilbake» fra Pólyas modell. Dette er en begrensning av Kongelfs kodingsinnholdsliste. Både Harder (2013) og Aaseth (2016) har brukt kodingsinnholdslisten til Kongelf i hovedundersøkelsene sine. Harder har lagt til en ekstra heuristisk metode som er «bruk av digitale hjelpemidler» i kodingsinnholdslisten sin, mens Aaseth har lagt til en annen heuristisk metode som er «Introduser hjelpeelementer» i kodingsinnholdslisten sin. Her har jeg lagt merk til at begge disse nye metodene som er blir lagt til kodingsinnholdslisten, tilhører den tredje fasen «Gjennomfør planen». Det finnes imidlertid fortsatt ikke noen heuristiske metoder i fjerde fase - «se tilbake» i kodingsinnholdslisten deres.

Det finnes to problemløsningsmetoder som brukes både i de norske og kinesiske lærebøkene, men ikke i Kongelfs (2011) kodingsordning. En er «Analysere og forstå problemet» som tilhører den første fasen – «forstå problemet», og den andre er «se tilbake/fremover» som tilhører den fjerde fasen - «se tilbake». Derfor velger jeg å legge til de to metodene ovenfor til kodingslisten min. Disse vil være min første og siste metode i modellen.

Under arbeidet til Kongelf (2011) kom en ny metode til syne, nemlig «bruk av digitale hjelpemidler». Jeg har valgt å inkludere denne metoden i kodingsinnholdslisten, slik som Harder (2013) har gjort. Den første grunnen er at det «å kunne bruke digitale verktøy» er en av de grunnleggende ferdighetene i henhold til læreplanen. Den andre grunnen er at digitale verktøy har fått en mer og mer sentral plass i skolen den siste tiden (Sjøberg, 2015).

Tilpasning av Kongelfs kodingsunderkategorier

Ifølge min observasjon i eksemplene i de utvalgte lærebøkene for ungdomsskolen blir metoden «Gjør problemet enklere» ofte anvendt ved bruk av formler/regler eller enkelt resonnering, og ikke så mange underkategorier slik som Fan & Zhu (2007) og Björkqvist (2003) har nevnt.

Solomon & Croft (2015) hevder at grunnskoleelever også bør ha bevis/resonnerings kunnskaper. I analysen min vil jeg derfor finne ut hvor mange eksempler som har brukt «resonnering» som metode, Derfor vil jeg tilpasse to underkategorier for «Gjør problemet enklere» i analysen min: underkategori A - «Bruk av resonnering» og underkategori B - «Bruk av formel/regel».

I litteraturen av Kongelf (2011) jeg har lest finnes det ikke detaljert oppdelingen av underkategoriene. Informasjonen om underkategoriene av Kongelf nedenfor hentes fra Harders masteroppgaven (s.29-30).

Både Kongelf (2011), Harder (2013) og Aaseth (2016) har delt metoden «Lag en systematisk tabell» og metoden «Lag en illustrasjon» opp i flere underkategorier. Harder (2013) velger underkategoriene «Del av problemtekst, informativ», «Del av problemtekst, dekorativ», «Direkte etterspurt» og «Del av løsningsprosessen». I begynnelsen av analysen hadde jeg gjort det samme som Harder og delt de to metodene inn i fire underkategorier. Etter den første runden av grundig hovedanalyse, oppdaget jeg en stor konflikt når det gjelder slike underkategorier i analysen. En viktig grunn er at analysen min har tre forskjellige hovedområder (se delkapittel 4.1.4), men Kongelf, Harder og Aaseth fokuserer bare på et område - algebra. Det er vanskelig å bruke de fire underkategoriene til å identifisere en tabell eller et valgtre i et eksempel som handler om statistikk og kombinatorikk, eller en hjelpefigur i et eksempel som handler om konstruksjon. Slike tabeller og figurer er både «Informative», «Direkte etterspurt» og «Del av løsningsprosessen», kan ikke deles inn i de tre forskjellige underkategoriene.

Kongelf (2011) hevder i forskningen sin at det for enkelte av metodene danner seg naturlige underkategorier. Denne tanken er veldig nyttig når analysen av problemløsningsmetoder fokuserer på bare ett tema eller ett område. Når man gjør en slik analyse med flere områder og temaer, bør underkategorier vurderes grundig. Noen ganger trenger vi flere detaljerte underkategorier for metoden, mens andre ganger trenger vi et mer inkluderende og generelt navn på metoden.

De fire underkategoriene vi har diskutert ovenfor leder til redusert korrekthet og stabilitet i datasamlingen i analysen min. Grunnen til dette er at etter den første runden av analysen vises det at identifiseringen til underkategoriene ikke passer for alle eksempler i alle områder. Både tabell og illustrasjon er tydelige elementer som kan telles og identifiseres eksplisitt uten noen underkategorier i metodeanalysen min, velger jeg derfor å ikke bruke noen underkategorier i den andre metoden «Lag en systematisk tabell» og den tredje metoden «Lag en illustrasjon». I analyseskjemaet (se vedlegg 10-12) bruker jeg «u» etterfulgt av et eksempelstall for å vise hvor de 19 dekorative illustrasjonene ligger og hvilke eksempler de referer til. Disse telles imidlertid ikke som illustrasjoner i problemløsningsskjemaet. For å tilpasse eksempler fra de tre forskjellige områdene og for å unngå overlapping mellom underkategorier i den andre metoden, forandrer jeg navn på den andre metoden fra «Lag en systematisk tabell» til «Lag en systematisk liste og/eller tabell».

Kongelf (2011, referert i Harder, 2013) skiller ut «trinnvis utførelse» som en underkategori av metoden «løs deler av problemet». Harder (2013) har valgt å ekskludere denne underkategorien i analysen. Dette betyr at denne metoden kun inkludere eksempler som presenterer to uavhengige inndelinger i en problemløsningsprosess for en oppgave, ikke en trinnvis utregning som er avhengig av hverandre. En viktig grunn er at denne underkategorien er for omfattende fordi all slags problemløsning er «trinnvis utførelse» på en måte. Dette kan lede til at underkategorien er lett å overlappe med andre metoder. Derfor ekskludere jeg også «trinnvis utførelse» som Harder har gjort.

Kongelf (2011 referert i Harder, 2013) påpeker videre at «å forandre uttrykksform» er en underkategori i den niende metoden «se problemet fra en annen side». Han gir et eksempel som viser at man kan skrive 0,5 som ½ for å forenkle videre regning. Harder (2013) har valgt å ekskludere «å forandre uttrykksform» i kodingen av denne metoden i sin masteroppgave. Jeg har også gjort det samme valget som Harder. En viktig grunn til dette er at det finnes mange eventuelle forandringer av uttrykksform i brøkregning, for eksempel omforming mellom brøk og desimaltall, forkorting og utviding. Slike forandringer gjør faktisk den videre utregningen enklere, og tilhører derfor den niende metoden «Gjør problemet enklere». Dette betyr at den niende metoden «se det fra en annen side» kun omfatter eksempler som presenterer problemløsningsmetoder med en annen ekstra vinkling eller en ekstra tilnærming, for eksempel presentasjon av to ulike løsningsmåter i ett eksempel.

Basert på Kongelfs (2011) kodingsinnholdsliste, har jeg etter sammenligningen (se tabell 12.) og diskusjonen ovenfor kommet fram til en ny kodingsinnholdsliste med følgende tolv heuristiske metoder: 1. «Analysere og forstå forutsetninger»; 2. «Se etter et mønster»; 3. «Lag en systematisk liste og/eller tabell»; 4. «Lag en illustrasjon»; 5. «Prøv og feil»; 6. «Løs deler av problemet»; 7.»Jobb baklengs»; 8. «Tenk på et liknende problem»; 9. «Gjør problemet enklere» (Underkategori A – «bruk av resonnering» og Underkategori B - «bruk av regel/formel»); 10. «Se problemet fra en annen side»; 11. «Bruk digitale hjelpemidler»; 12. «Se tilbake /fremover».

De 12 heuristiske metodene basert på kodingsordningen til Kongelf (2011) som jeg har valgt i studien min er de som blir mest brukt i de utvalgte lærebøkene for ungdomsskolen. Vi må imidlertid anerkjenne at dette ikke kan dekke alle spesifikke heuristiske metoder i lærebøkene, for eksempel i den videregående skolen eller på universitetsnivå. Som Björkqvist (2003, s.67) påpeker, finnes det flere andre heuristiske tilnærmingsmåter i mange verk for eksempel Pólya (1957, referert i Björkqvist 2003, s.67), Larsen (1983, referert i Björkqvist 2003, s.67) og Posamentier og Krulik (1998, referert i Björkqvist 2003, s.67).

Tilpasning av Kongelfs kodingsmanual

Det er to nye metoder som blir lagt til kodingslisten. En er «Analysere og forstå forutsetninger» og den andre er «Se tilbake /fremover». Basert på observasjon av eksempler er manualen til «Analysere og forstå forutsetninger» definert slik: Samle gitt informasjon og forutsetninger, analysere og forstå de forutsetningene, og diskutere mulige problemløsningsmetoder.

Fan & Zhu (2007) har brukt tre underkategorier for metoden «se tilbake»: 1) ser tilbake på de opprinnelige problemene, 2) ser tilbake på problemløsningsprosessen, 3) ser tilbake på de endelige svarene på problemene. De nevner ikke tydelig den andre underkategorien, nemlig «se fremover» som ofte finnes i kinesiske lærebøker. Bruk av sammendrag og spørsmål for å «se tilbake» blir påpekt av Fan & Zhu, men ikke bruk av tankebobler/pekebilder. Derfor bruker jeg navn - «se tilbake/fremover» for den siste metoden. Jeg definerer manualen til «se tilbake/fremover» slik: Bruk sammendrag, spørsmål, tankebobler/pekebilder for å minne elevene på hva som blir gjort i løsningsprosessen, og for å veilede elevene mot hva som kan bli gjort når det gjelder problemløsning videre.

Under analysen kom jeg fram til at kodingsmanualene til to metoder måtte utvikles og forandres for å passe til min forskning. De to metodene er «Se etter et mønster» og «Tenk på et liknende problem». Hvis oppgaven vises i en gruppe tall/figurer, så blir bruken av «se etter et mønster» veldig tydelig. Hvis problemløsning og mønsteret presenteres gjennom ett enkelt uttrykk for eksempel «bruk av kvadratsetningene til å faktorisere algebraiske uttrykk» eller «faktorisering av et flerleddet utrykk», så blir det imidlertid vanskelig å identifisere metoden i analysen min, fordi slike eksempler overlapper med metoden - «Gjør problemet enklere» i de kinesiske lærebøkene. Jeg har derfor forandret manualen slik: Identifisere mønster fra en gruppe figurer/tall. Dette kan for eksempel være å lage et algebraisk uttrykk eller å tegne den neste figuren. Dette betyr at jeg beholder navnet «se etter et mønster», men at jeg bruker en annerledes kodingsmanual som fokuserer på et mindre og snevrere område.

Kodingsmanualen til den syvende metoden «Tenk på et liknende problem» fra Kongelf (2011) er: *Huske eller vurdere liknende problemer som er løst tidligere for å eventuelt kunne bruke samme metoder og resultater i tilnærmingen til problemet.* «*Huske eller vurdere liknende problemer som er løst tidligere …»* innebærer mulige subjektive erfaringer og tanker fra problemløsere (ungdomsskoleelever). Dette krever kvantitative metoder for eksempel bruk av spørreskjemaer for å fange slike subjektive metoder og erfaringer som eksisterer i elevenes hoder. Jeg har imidlertid ikke klart å finne noen forskere som har skrevet om hvordan de fanger data om «Tenk på et liknende problem», verken hos Fan & Zhu (2007) og Kongelf eller Harder (2013) og Aaseth (2016).

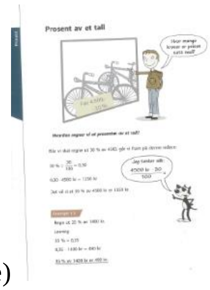
Solomon & Croft (2015) påpeker at skolen favoriserer en matematikkundervisning som et sett med regler og algoritmer. Derfor blir ofte elever som er flinke til å pugge formler ansett som dyktige i faget på grunnskolen, selv om de i realiteten ikke har dype forståelse for hva de holder på med. Ifølge Bergqvist (2007) bør elever få flere muligheter til å lære kreativ begrunnelse istedenfor imiterende resonnering og dermed bli kjent med situasjonen for å løse ukjente problemer. Viholainen et al. (2014) påpeker i deres forskning at elever har en tendens til å kopiere problemløsingsteknikker fra eksempler, mens de unngår matematisk tenking og lesing. Higgins (1997, referert i Fan and Zhu, 2007) hevder at læring i problemløsning er lett for eleven å likestille med kun en liste over spesifikke heuristikker og å behandle problemløsningsheuristikker bare som regler. Et viktig grunnfokus i forskningen min bli derfor hvilken rolle lærebøker spiller i mekanisk læring i problemløsning.

Lithner definerer (2008, s.258) imiterende resonnering slik: «*imitates a solution procedure memorised from the textbook*». Han deler imiterende resonnering inn i to hovedkategorier: minnebasert resonnering og algoritmisk resonnering. Lithner (2003, s.38) definerer også algoritmisk resonnering i lærebøker følgende: «*å lete etter likheter mellom oppgaven og et eksempel, en definisjon, et teorem, en regel eller noe annet i en tekstkilde.*» Basert på begreper imiterende og algoritmisk resonnering fra Lithner, i tillegg manualen til «Tenk på et liknende problem» fra Kongelf (2011), forandrer og tilpasser jeg beskrivelsen til «Tenk på et liknende problem» slik: Lete etter liknende problemer som blir presentert eller løst i tilhørende kapitler i læreboka for å eventuelt kunne kopiere samme metoder og resultater i tilnærmingen til problemet.

Lithner (2008, s.266-267) påpeker i hans forskning at: kreative resonnering brukes sjelden og algoritmisk resonnering er dominert i problemløsningen i lærebøker. Jeg fikk lignende resultat fra observasjonen og analysen min etter den første runden. Ifølge manualen til «Tenk på et liknende problem» representerer denne metoden en typisk mekanisk problemløsningsmetode i analysen min som ikke trenger dyp læring og forståelse i problemløsningen. Dette er en av de viktigste forandringene når det gjelder tilpassingen og justeringen av kodningsordningen, fordi denne forandringen leder til at analysen min har to store forskjeller med andre forskernes.

1) Det finnes mange flere eksempler som kan analyseres i lærebøkene.

(Se vedlegg 22 med bilder i A4 størrelse)



Figur 9. Eksempel (1) som kommer direkte til svaret («Matematikk 8B», 2012, s.8)

Figur 10. Eksempel (2) som kommer direkte til svaret («Faktor 8», 2015, s.96)

Det finnes mange eksempler (se figur 9 og 10) som bare bruker den tredje fasen i Pólyas fire-fases modell for å løse problemet. Denne typen problemløsning kommer direkte til svaret. Mange forskere, som for eksempel Fan & Zhus (2007) og Harder (2013), hevder at slike eksempler bør vurderes som uten metodebruk. Fan & Zhu (2007, s.69) skriver: …*the data revealed that overall only 14.2% of all the solved problems in the Chinese textbooks (111 vs. 783), 14.2% in the Singapore ones (128 vs. 899), and 25.5% in the US ones (237 vs. 930) were solved or modeled using those specific heuristics…Most of problems could be solved in a straightforward way, without using specific problem-solving heuristics*. Eksempler uten metodebruk omfatter 150 av 417 eksempler i Harders forskning (2013, s. 39). Etter tilpasningen jeg har foretatt, så finnes det imidlertid en passende kodingsmanual til slike eksempler i min analyse. Derfor kan disse eksemplene som kommer direkte til svaret telles som metodebruk i min analyse.

2) Det finnes en mekanisk og passiv problemløsningsmetode i kodingslisten min

I de ni utvalgte lærebøkene for ungdomsskolen brukes det ganske ofte slike eksempler som kommer rett til svaret for å lære eller trene elever i bruk av regler/formler. Det vil si at slike typer problemløsning også telles som en type metodebruk, nemlig «Tenk på et liknende problem», i analysen min. De to figurene ovenfor (se figur 9 og 10) viser at problemer løses ved å direkte kopiere regler/formler som står på de samme sidene. «Tenk på et liknende problem» er en metode som kan hjelpe for å analysere hvilken rolle lærebøkene spiller i mekanisk læring i problemløsning på en eksplisitt måte. Det vil si at hvis forfattere av lærebøkene vil lære elever regler/formler ved å direkte kopiere fra boka som kommer direkte til svaret, så vil denne metoden ha en naturlig høy forekomst.

Tabell 13. Den nye kodingsordningen basert på Kongelfs

* Alle forskjeller og forandringer er merket med understek.

Heuristiske metoder	**Beskrivelsen fra Kongelf**	**Den nye beskrivelsen**
1. Analysere og forstå forutsetninger		Samle gitt informasjon og forutsetninger, analysere og forstå de forutsetningene, og diskutere mulige problemløsningsspor/metoder.
2. Se etter et mønster	Identifisere mønster i den gitte informasjonen ved nøyaktig observasjon av felles egenskaper, variasjoner eller forskjeller ved tall, former og liknende i problemet.	Identifisere mønster fra en gruppe/serie figurer/tall. Dette kan for eksempel være å lage et algebraisk uttrykk eller å tegn den neste figuren.
3. Lag en systematisk liste og/eller tabell	Lage en systematisk liste eller tabell som inneholder den gitte informasjonen eller de ulike mulighetene.	Lag en systematisk liste og/eller tabell som inneholder den gitte informasjonen, eller de ulike mulighetene. (Uten underkategorier i analysen min)
4. Lag en illustrasjon	Bruke den gitte informasjonen til å lage en illustrasjon/visualisering for å presentere problemet visuelt.	Uten underkategorier i analysen min), ellers den samme som Kongelfs
5. Prøv og feil	Gjøre en rimelig antakelse om hva svaret er, og så sjekke om resultatet blir riktig. Gjenta prosedyren hvis nødvendig for å finne svaret eller en god tilnærming.	Den samme som Kongelfs
6. Løs deler av problemet	Dele et problem i flere delproblemer, for så å løse disse ett etter ett, og fine løsningen på det opprinnelige problemet.	Ekskludering av en underkategori- «trinnvis utførelse», ellers den samme som Kongelfs.

7. Jobb baklengs	Tilnærme seg problemet baklengs fra dets resultat eller løsninger for å finne hvilke krav som må tilfredsstilles.	Den samme som Kongelfs
8.Tenk på et liknende problem	Huske eller vurdere liknende problemer som er løst tidligere for å eventuelt kunne bruke samme metoder og resultater i tilnærmingen til problemet.	Lete etter liknende problemer som blir presentert eller er løst i tilhørende kapitler i læreboka for å eventuelt kunne bruke samme metoder og resultater i tilnærmingen til problemet.
9. Gjør problemet enklere	Forenkle vanskelige tall eller forhold i problemet uten å endre problemet matematisk.	Forenkle vanskelige tall eller forhold i problemet ved å bruke resonnering (Underkategori A) eller ved å bruke regel/formel (Underkategori B). Forenklingen skal ikke endre problemet matematisk.
10. Se problemet fra en annen side	Tilnærme seg problemet med en annen vinkling når tidligere tilnærminger ikke fører frem og løs det med flere enn en måte.	Ekskludering av en underkategori «å forandre uttrykksform», ellers den samme som Kongelfs
11. Bruk av digitale hjelpemidler	Bruke digitale hjelpemidler som grafisk kalkulator, regneark eller andre programmer for å løse problemet. (Harder, 2013)	Den samme som Harders
12. Se tilbake og (eller) fremover		Bruke sammendrag, spørsmål, tankebobler og/eller pekebilder for å minne elevene på hva som må gjøres i løsningsprosessen, og for å veilede elevene mot hva som kan bli gjort i fremtidens problemløsning.

4.4 Eksempler på klassifisering

Jeg vil vise og forklare hvordan jeg koder eksemplene i analysen ifølge den nye kodingsordningen. Metodene 1,2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 og 12 presenteres siden disse metodene er justert eller ikke finnes i den opprinnelige kodingsordningen til Kongelf (2011). Alle metodene i presentasjonen nedenfor vil inneholde en del konkrete eksempler. (Alle bilder av eksemplene i størrelse A4 vennligst se vedlegg 25). Alle figurene i oppgaven som er hentet fra de ni utvalgte bøkene er reprodusert etter tillatelse (vis til vedlegg 1 og 2).

Metode 1. «Analyse og forstå forutsetninger»

Blant slike eksempler skal man samle gitt informasjon og forutsetninger, og diskutere mulige problemløsningsmetoder. I de kinesiske lærebøkene, blir ordet «analyse» (分析) ofte uthevet i begynnelsen av løsningen. Blant de kinesiske eksemplene som er tekstoppgaver, kan man nesten alltid finne ordet «analyse» (分析) i begynnelsen av problemløsningen.

 (Se vedlegg 23 med bildet i A4 størrelse)

Figur 11. To eksempler på metode 1 («Matematikk 7A», 2014, s.100)

Oversettelsen av eksempel 1: En fabrikk har 22 arbeidere. Hver dag kan hver arbeider lage 1200 skruer eller 2000 muttere. En skru og to muttere er en full sett. Hvor mange arbeidere skal være i «skru gruppe», og hvor mange arbeidere skal være i «mutter gruppe» slik at fabrikken kan få produsere fulle sett hver dag?

Oversettelsen av analysen (分析) i eksempel 1: Ifølge forutsetningen vet vi at det må produseres dobbelt så mange muttere som skruer for å få fulle sett.

Oversettelsen av eksempel 2: Noen bøker på biblioteket trenges å rydde opp. En person trenger 40 timer for å bli ferdig. Nå begynner noen personer å rydde opp i 4 timer, så kommer to personer til å jobbe sammen med dem i 8 timer, da blir hele jobben ferdig. Vi antar at alle personer jobber på samme måte og i samme fart. Prøv å finne ut hvor mange «noen» er.

Oversettelsen av analysen (分析) i eksempel 2: Først antar vi at jobben som skal bli ferdig er 1. Siden det trengs 40 timer for en person å bli ferdig med jobben, blir en person som jobber i en time ferdig med 1/40 av hele jobben.

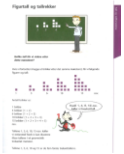
x personer som jobber i 4 timer kan bli ferdig med $4x/40$ av hele jobben. Etter disse 4 timene, legges det til 2 ekstra personer. Da $(x+2)$ personer forsetter å jobbe i 8 timer igjen til hele jobben blir ferdig. Så har de jobbet $8(x+2)/40$ av hele jobben.

Derfor er summen av hele jobben $4x/40$ og $8(x+2)/40$.

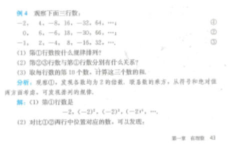
Det første eksempelet bruker metode 1 for å forstå forutsetninger. Det andre eksemplet bruker metoden for å både forstå og analyse forutsetninger. Begge eksemplene bruker metoden - «Analysere og forstå forutsetninger» eksplisitt.

Metode 2. «Se etter et mønster»

Når man har slike eksempler skal man identifisere mønster fra en gruppe/serie tallrekker eller geometriske figurer med eller uten tall. I denne kategorien må man observere felles kjennetegn, former og formler for å finne løsningen. Figurtall i figur 12 og tre tallrekker i figur 13 er eksempler som bruker «se etter mønster» i løsningen.



(Se vedlegg 23 med bildet i A4 størrelse)



Figur 12. Eksempel (1) på «Se etter et mønster» («Faktor 9», 2014, s.27)

Figur 13. Eksempel (2) på «Se etter et mønster» («Matematikk 9A», 2014, s.42)

Metode 3 «Lag en systematisk liste og/eller tabell» og metode 4 «Lag en illustrasjon»

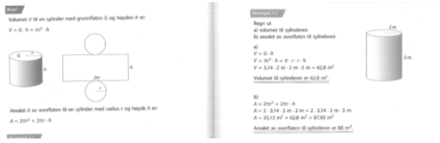
Jeg presenterer «Lag en systematisk liste og/eller tabell» og «Lag en illustrasjon» sammen fordi min bruk av de to metodene i analysen skilles seg tydelig ut fra de andre forskernes bruk av disse metodene. Jeg har ikke valgt noen underkategorier fordi jeg undersøker flere temaer i lærebøkene. (se delkapittel 4.3.2.2). Blant slike eksempler skal man lage en illustrasjon for å presentere problemet visuelt, eller en systematisk liste og/eller tabell som inneholder den gitte informasjonen og de ulike mulighetene. Vi kan se av figur 14 nedenfor at eksempelet bruker både liste, tabell og illustrasjon i problemløsningen. Pekebilder blir brukt to ganger, både for å «forstå problemet» og å «se tilbake».

(Se vedlegg 23 med bildet i A4 størrelse)

Figur 14. Eksempelet på metode 3 og metode 4 («Matematikk 8B», 2013, s.119)

Metode 6. «Løs deler av problemet»

Blant slike eksempler skal man dele et problem opp i flere delproblemer, for så å løse ett problem om gangen. Til slutt vil man finne løsningen på det opprinnelige problemet. I figur15 må man for eksempel dele oppgaven opp i tre delproblemer for å kunne regne ut arealet av overflaten til sylinderen. Først skal man regne ut arealet av toppflaten og grunnflaten som er arealet av to like sirkler. Deretter skal man regne ut arealet av sideflaten som er det samme som arealet av et rektangel. Til slutt legger man de to arealene sammen og får arealet av overflaten til sylinderen.



(Se vedlegg 23 med bildet i A4 størrelse)

Figur 15. Eksempelet på metode 6 («Faktor 10», 2014, s.185)

Metode 8. «Tenk på et liknende problem»

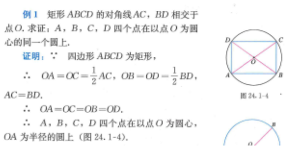
I denne metoden har jeg forandret manualen fra Kongelf (2011). (Se diskusjonen i delkapittel 4.3.3.2). Blant slike eksempler skal man lete etter liknende problemer som står i boka for å eventuelt kunne kopiere samme metoder, regler og formler til å løse problemet. Figur 17 nedenfor er et typisk eksempel på dette. Omkretsen og arealet til sirkelen blir løst ved å kopiere regler som står på samme side.

(Se vedlegg 23 med bildet i A4 størrelse)

Figur 16. Eksempel på metode 8 («Faktor 9», 2014, s.85)

Metode 9. «Gjør problemet enklere»

I denne metoden bruker jeg samme forklaring som Kongelfs (2011), men jeg har lagt til nye underkategorier: Underkategori A – «bruk av resonnering» og Underkategori B - «bruk av formler/regler» (Se delkapittel 4.3.3.2). Blant slike eksempler skal man forenkle vanskelige tall eller forhold i problemet ved å bruke grunnleggende matematikkunnskaper og resonnering (Underkategori A) eller ved å bruke regler og formler. (Underkategori B).



例 1　矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O. 求证：A，B，C，D 四个点在以点 O 为圆心的同一个圆上.

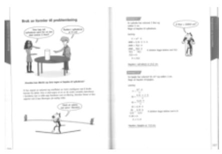
证明：∵　四边形 $ABCD$ 为矩形，

∴　$OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$.

∴　$OA=OC=OB=OD$.

∴　A，B，C，D 四个点在以点 O 为圆心，OA 为半径的圆上（图 24.1-4）.

(Se vedlegg 23 med bildet i A4 størrelse)



Figur 17. Eksempelet på metode 9 underkategori A («Matematikk 9A», 2014, s.80)

Figur 18. To eksempler på metode 9 underkategori B («Faktor 10», 2014, s.206-207)

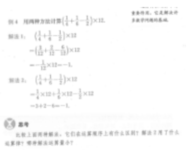
<u>Oversettelsen til eksempelet i figur 17</u>: Trekk to diagonaler AC og BD i rektangelet ABCD og få et krysspunkt O. Bevis at A, B, C og D er i en samme sirkel med O som sentrum.

I figur 17 blir underkategori A i metode 9 brukt. Dette er et beviseksempel som løses ved bruk av resonnering. I figur 18 blir to eksempler løst ved å gjøre problemene enklere gjennom bruk av formler. Det første eksemplet bruker formelen til volumet av en sylinder og det andre eksemplet bruker formelen for volumet av en kjegle.

Når det gjelder underkategori B må vi legge merke til at vi ikke kan blande den med metode 8 - «Tenk på et liknende problem». Der kopierer man ofte regler og formler for å løse problemet. Når man bruker metode 8, følger eksempler ofte direkte etter regler og formler, og eksemplene, reglene og formlene må være i tilhørende kapittel. I tillegg blir formelen eller regelen direkte kopiert. Det vil si at hvis formelen handler om volum, så handler problemløsningen også om dette. I figur 18 der man bruker underkategori B av metode 9, kan vi tydelig se at det ikke finnes noen formler og regler i samme tilhørende kapittel som direkte kan kopieres. Formler for volumet av en sylinder og kjegle brukes for å gjøre problemløsningen enklere og finne ut høyden til sylinderen eller kjeglen, men ikke volumet. Det vil si at i underkategori B av metode 9 bruker man ofte omforming av formler. Med andre ord, i underkategori B av «Gjør problemet enklere» brukes regler og formler på en kreativ og aktiv måte, mens i «Tenk på et liknende problem» bruker man regler og formler passivt og bare for å kopiere.

Metode 10. «Se problemet fra en annen side»

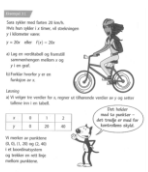
Blant slike eksempler ser man problemet fra flere synsvinkler og løser de på flere enn en måte. I figur 19 er problemet løst med to forskjellige metoder. De to metodene er uavhengige av hverandre. Derfor passer dette eksempelet inn i metode 10.



(Se vedlegg 23 med bildet i A4 størrelse)

Figur 19. Eksempelet på metode 10 («Matematikk 7A», 2012, s.33)

Metode 12. Se tilbake og/eller fremover



(Se vedlegg 23 med bildet i A4 størrelse)

Figur 20. Eksempelet på metode 12 («Faktor 10», 2014, s.108)

Blant slike eksempler bruker man sammendrag, spørsmål, tankebobler og pekebilder for å minne elevene på hva som blir gjort i løsningsprosessen, og for å inspirere elevene til å forstå hva de kan gjøre i fremtidens problemløsning. I figur 20 brukes tankeboblen til å se tilbake på problemløsningsmetoder, og eksemplet bruker derfor metoden - «se tilbake og/eller fremover».

4.5 Analyseskjema i Excel

I hovedanalysen har jeg analysert heuristiske metoder og laget ni hovedanalyseskjemaer. Ett skjema representerer en lærebok. Tabell 20 viser et utsnitt av analyseskjemaet til «Matematikk 9A» (før utfylling). Oppbyggingen av skjemaet er slik: Hvis et eksempel inneholder noen metoder, så markerer jeg disse metodene ved å fylle inn flere «ett-tall» i noen kolonner tilsvarende metodene. Jeg har gjentatt denne fremgangsmåten for alle de 616 eksemplene i de ni utvalgte lærebøkene. Jeg velger å lage disse skjemaene i Excel, slik at jeg kan se summen av hver kolonne med en gang. Denne summen indikerer hvor mange ganger denne metoden har blitt brukt i boken. I tillegg kan jeg også se den prosentvise andelen av denne metoden i forhold til antall metoder.

Jeg vil spesielt minne om to spesielle grupper eksempler i analysen min. Den første gruppen er et eksempel som omfatter flere oppgaver. Dette kan for eksempel være en oppgave der man må regne ut både omkrets og areal. Slike eksempler kalles «sammensatte» eksempler i analysen min. Den andre gruppen er eksempler som inneholder flere lignende eksempler og blir så løst sammen for å kunne sammenlignes med hverandre. Etter å ha funnet løsningen på slike eksempler kan man generalisere egenskapene (se figur 42-45 i delkapittel 6.4), dette fører til at slike eksempler henger sammen «se fremover». I min analyse kalles slike eksempler for «komparativ studie». Siden eksemplene i de to gruppene ofte bruker en løsningsmetode eller flere løsningsmetoder flere ganger, blir det flere «ett-tall» i en kolonne for å tilsvare antall metoder.

Tabell 14. Utsnitt av analyseskjema (PEP, Matematikk 9A)

									"Matematikk" 9A									
						Heuristske metoder												
						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Delkap	undertema	Eksempel	Side	Analys og forstå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list eller/og tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpemidler	Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
Ligning og funksjon	21. Kvadratiske ligninger	21.1	Kvadratiske ligninger															
		21.2	Løs kvadratiske ligninger															
	22. Kvadratisk funksjon	22.1	Grafen og naturen av kvadratisk funksjon															
		22.2	Kvadratiske funksjoner og kvadratiske ligninger i en ukjent															

Alle de ni grunnleggende analyseskjemaene har blitt ferdig utfylt og vedlagt (se vedlegg 3-11). Disse skjemaene brukes til å lage ytterligere tabeller, figurer og diagrammer for å besvare forskningsspørsmålene. Jeg undersøker bare grunnboken, ikke oppgaveboken og lærerens bok. Derfor gjelder alle funnene først og fremst de ni utvalgte kinesiske og norske grunnbøkene. I tillegg merker jeg noen «u» «k» eller «s» etter sidetall på eksempler i skjemaene. «U» betyr at eksempelet bruker et dekorativt bilde uten matematisk innhold, «s» betyr at eksemplet er et «sammensatt» eksempel mens «k» betyr at eksemplet er et «komparative studie» eksempel.

Kapittel 5 Hjelpeundersøkelsen

5.1 Problemløsning i den nåværende norske og kinesiske læreplanen

Læreplananalysen er en del av problemstillingen i Kongelfs (2011), Harders (2013) og Aaseths (2016) forskning. De har for eksempel analysert problemløsning i læreplanene M87, L97og i LK06. Både Harder og Aaseth hevder at den nyreviderte norske læreplanen i matematikk fellesfag har lagt større vekt på problemløsning enn de gamle læreplanene, men at lærerne fortsatt trenger mer veiledning i problemløsning og spesifikke problemløsningsmetoder. Jeg har kun sett på hvordan problemløsning blir presentert i den nåværende norske og kinesiske læreplanen, slik at jeg bedre kan forstå og gjøre videre analyse for hovedundersøkelsen min.

Tabell 15. Problemløsning i den nåværende norske og kinesiske læreplanen

(Utdanningsdirektoratet, 2016, s.1-14 og moe.edu.cn, 2011, s. 1-23 med egen oversettelse fra kinesisk)

Problemløsing i læreplanene	**Den norske læreplanen**	**Den kinesiske læreplanen**
Undervisnings timer	313 timer *en time = 60 min.	383 timer (510 klassetimer) *en klassetime = 45 min.
Formål til matematikk	1.Muntlig ferdigheter i matematikk 2. Å kunne skrive i matematikk 3. Å kunne lese i matematikk 4. Å kunne regne i matematikk 5. Digitale ferdigheter i matematikk	1. Matematisk kunnskaper 2. Matematisk tenkning 3. Problemløsning 4. Utviklingen av personale følelser og holdninger
Elevers Læringsmål til	Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til	I problemløsning bør elevene kunne: 1. Lære å finne problemer og stille

problemløsnings -kompetanse	matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er. Å kunne rekne i matematikk inneber å bruke symbolspråk, matematiske omgrep, framgangsmåtar og varierte strategiar til problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt både i praktiske, daglegdagse situasjonar og i matematiske problem. Dette inneber å kjenne att og beskrive situasjonar der matematikk inngår, og bruke matematiske metodar til å behandle problemstillingar. Eleven må òg kommunisere og vurdere kor gyldige løysingane er. Utvikling av å rekne i matematikk går frå grunnleggjande talforståing og å kjenne att og løyse problem ut frå enkle situasjonar til å analysere og løyse eit spekter av komplekse problem med eit variert utval av strategiar og metodar. Vidare inneber dette i aukande grad å bruke ulike hjelpemiddel i berekningar, modellering og kommunikasjon.	spørsmål fra matematisk perspektiv i en bestemt situasjon, og bruk matematisk kunnskap og metoder for å løse enkle praktiske problemer, øke bevisstheten av praktisk anvendelse og forbedre praktisk problemløsningsevne. 2. Opplev problemløsningsprosessen ved å søke og analysere problemer fra ulike perspektiver; ved å erkjenne mangfoldet av problemløsningsmetoder; og ved å mestre noen grunnleggende heuristikker for å løse problemer. 3. Forstå andres tankemetoder og konklusjoner gjennom samarbeid og kommunikasjon med andre. 4. Kan reflektere over problemstillinger som andre har opparbeidet og i utgangspunktet danne bevissthet om evaluering og kritisk tenkning.

*Formål og læringsmål som direkte handler om problemløsning understrekes

Etter å ha sammenlignet læreplanene i Norge og Kina, fant jeg ut at kinesiske elever har ca. 22% flere undervisningstimer i matematikk på ungdomsskolen. Jeg bruker «cirka» på grunn av en spesiell regel i Kina. Kinesiske skoler kan selv bestemme antall undervisningstimer med ±5%, i henhold til standard undervisningstimer ifølge læreplanen. (MOE, 2011).

Generelt sagt, har den kinesiske læreplanen en mer eksplisitt og detaljert beskrivelse av problemløsning både i formål og i elevenes læringsmål. Den norske læreplanen inneholder en mer generell beskrivelse. I tillegg er beskrivelsen påvirket av Pólyas fire-fases modell og generell problemløsningsheuristikk i den kinesiske læreplanen. Det blir for eksempel skrevet i «elevers læringsmål på problemløsningskompetanse»: *Opplev problemløsningsprosessen ved å søke og* *analysere problemer … ved å erkjenne mangfoldet av problemløsningsmetoder og ved å mestre noen grunnleggende heuristikker for å løse problemer.*

Verken den kinesiske- eller norske læreplanen har gitt uttrykkelige beskrivelser av spesifikke problemløsningsmetoder. Det finnes heller ikke en generell innføring i dette temaet i læreplanene. I læreplanene blir problemløsningsmetoder integrert i kompetansemålene. Derfor kan vi konkludere med at det forventes at elevene skal utvikle problemløsningskompetanse og bli gode problemløsere i læreplanene, men det finnes ikke direkte veiledning fra læreplanene i noen av landene når det gjelder trening og bruk av spesifikke problemløsningsmetoder.

5.2 En oversikt over de utvalgte norske og kinesiske lærebøkene

Tabell 15, 16 og de fleste delene i Tabell 17 og 18 ble ferdig før hovedanalysen begynner. Antall av «Sammensatt» eksempel, «Komparativ studie» eksempel og «Beviseksempler» i tabell 17 og valget av praktiske eksempler i tabell 18 ble oppfylt etter den andre runden av hovedundersøkelsen. En liten del av elementer i tabell 18 ble supplert etter både den første og andre runden av hovedundersøkelsen.

5.2.1 Sammenligningen av innholdet i de utvalgte norske og kinesiske lærebøkene

Tabell 16. Innholdet i de norske og kinesiske lærebøkene

Innhold	
De norske lærebøkene **«Faktor» 8. 9. 10.**	**De kinesiske lærebøkene** **«Matematikk» 7A.7B. 8A. 8B. 9A. 9B.**
Faktor 8 1. Tall og tallforståelse 2. Brøk 3. Prosent 4. Geometri 5. Statistikk 6. Tall og algebra 7. Måling og enheter **Faktor 9** 1. Tall og tallforståelse 2. Algebra 3. Geometri	**«Matematikk» 7A** 1. Rasjonelle tall 2. Algebraisk addition and subtraction 3. lineær ligning i en ukjent 4. Grunnleggende geometriske figurer **«Matematikk» 7B** 5. Kryssende- og parallelle linjer 6. Ekte nummer 7. Rektangulært koordinatsystem 8. System av lineære ligninger i to ukjente 9. Ulikhet og ulikhetsgruppe 10. Datainnsamling, sortering og beskrivelse

4. Statistikk og sannsynlighetsregning 5. Måling og beregninger 6. Funksjoner 7. Økonomi **Faktor 10** 1. Tall og algebra 2. Geometri og beregninger 3. Funksjoner 4. Ligning og ulikhet 5. Romgeometri og massetetthet 6. Statistikk. kombinatorikk og sannsynlighet 7. Økonomi	**«Matematikk» 8A** 11. Trekanten 12. Kongruent trekant 13. Aksesymmetri 14. Multiplikasjon og faktorisering av integraluttrykk 15. Brøkligning **«Matematikk» 8B** 16.Kvadratisk radikal 17. Pytagoras setning 18. Parallellogram 19. Lineær funksjon 20. Dataanalyse **«Matematikk» 9A** 21. Kvadratiske ligninger 22. Kvadratiske funksjoner 23. Rotasjon 24. sirkel 25. Grunnleggende sannsynlighet **«Matematikk» 9B** 26. Invers proporsjonal funksjon 27. Likheten 28. Trigonometriske funksjoner av spisse vinkler 29. Projeksjon og visning

De kinesiske bøkene har åtte kapitler flere enn de norske, og alle de åtte kapitlene tilhører hovedområdet – «Tall, algebra og funksjoner». I de norske lærebøkene tilhører åtte kapitler «Tall, algebra og funksjoner», seks kapitler tilhører «Geometri og måling» og syv kapitler tilhører «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet». I de kinesiske lærebøkene tilhører 16 kapitler «Tall, algebra og funksjon», 10 kapitler tilhører «Geometri og måling» og tre kapitler tilhører «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet».

Det finnes ikke store forskjeller når det gjelder matematiske hovedområder i de norske og kinesiske lærebøkene, men i de norske lærebøkene finnes det færre temaer innenfor hvert hovedområde. Samtidig er innholdet i de utvalgte kinesiske lærebøkene både bredere og dypere enn i de norske. Det finnes for eksempel ikke «Trigonometriske funksjoner» i de norske lærebøkene for ungdomsskolen. Når det gjelder kvadratiske funksjoner, finnes det bare ett delkapittel «Grafen til kvadratiske funksjoner» i kapittel 3 i «Faktor 10» som handler om dette temaet. Totalt er det fem sider og et eksempel. I den kinesiske læreboka, «Matematikk 9A», finnes det et helt kapittel som kalles - «kvadratiske funksjoner». Dette kapittelet (kap. 22) har totalt 30 sider og fem eksempler.

5.2.2 Forskjeller mellom de synlige egenskapene i de norske og kinesiske lærebøkene

Tabell 17. De synlige egenskapene i de norske og kinesiske lærebøkene

De synlige egenskapene	De norske lærebøkene	De kinesiske lærebøkene
Antall sider	924	879
Antall oppgavesider	393 (43% av antall sider)	344 (39% av antall sider)
Antall av eksempler	231	385
«Sammensatt» eksempel	33	50
«Komparativ studie» eksempel	0	14
«Beviseksempler»	0	25
Utseende	Høy trykkvalitet med stive permer. Bøkene er tykke og tunge, siden en bok er laget for å holde i flere skoleår.	Enkel trykkvalitet med myke permer. Bøkene er tynne og lette fordi en bok er laget for å holde i bare ett semester.
Dekorative bilder/tegninger (i eksemplene)	225 (19)	2 (1)
Tankebobler og pekebilder (i eksemplene)	572 (77)	313 (141)

Tabell 17 viser at de kinesiske lærebøkene har 154 flere problemeksempler, 45 flere sider og 8 kapitler mer (se tabell 16) enn de norske lærebøkene. Det finnes mange flere bilder i de norske bøkene. Noen av disse bildene har ingen eller veldig lite matematisk innhold. Slike bilder kaller Kongelf (2011) og Harder (2013) for «dekorativ» og Aaseth (2016) for «irrelevant». Alle bilder og tegninger som finnes i de kinesiske lærebøkene er knyttet til matematikk, og de tar veldig sjelden mye plass på siden. I de ni utvalgte lærebøkene finnes det mange små tankebobler/samtalebobler/pekebilder både i temapresentasjon, teoriforklaringer og i eksempler. Bruken av disse tankeboblene/pekebildene i eksemplene er ofte inspirerende spørsmål og påminnelse. De norske lærebøkene har brukt 259 flere tankebobler og pekebilder enn de kinesiske, men de kinesiske lærebøkene har brukt 64 flere tankebobler/pekebilder i eksemplene.

5.2.3 Sammenligningen mellom de usynlige egenskapene i de norske og kinesiske lærebøkene

Tabell 18. De usynlige egenskapene i de norske og kinesiske lærebøkene

De usynlige egenskapene	**De norske lærebøkene**	**De kinesiske lærebøkene**
Presentasjon av temaet i kapittelet	Det brukes et stort bilde (en hel side) som er knyttet til temaet for å begynne kapittelet. Samtidig brukes det ofte en kort tekstforklaring og en konkret problemløsningsoppgave for å introdusere temaet.   (To eksempler figur 21 og 22 med store bilder se vedlegg 24)	Det brukes en stor grubletegning (to hele sider) med læringsmål på temaet for å begynne kapittelet. Samtidig bruker man ofte tankebobler eller samtalebobler fra ungdommene, som er tegneseriefigurer i bøkene, for å introdusere viktige begrep.   (To eksempler figur 23 og 24 med store bilder se vedlegg 24)
Valget av praktiske eksemplene	Praktiske eksempler finner vi i tekstoppgaver. Disse handler ofte om forskjellige yrker og ingeniørfag. Det finnes 28 slike eksempler (to slike oppgaver kan vi finne i figur 11 i delkapittel 4.4). Eksemplene fokuserer mye på hvordan man kan anvende matematiske kunnskaper for samfunnet, for eksempel lag en bro, en løs del av en maskin eller en bygning. Valget av eksemplene er under kollektivistisk samfunnskultur.	Praktiske eksempler finner vi i tekstoppgaver. Disse handler ofte om personlig dagligliv. Det finnes to hele kapitler som kalles «økonomi» i både «Faktor 9» og «Faktor 10», der handler eksempler ofte om hvordan man regner ut rabatt, skatt, lån, valuta, budsjett, osv. Slike kapitler finnes ikke i de kinesiske lærebøkene. Valget av eksemplene er under individualistisk samfunnskultur.
Oppgavers plassering	Lignende på de norske lærebøkene	Oppgavene står både i selve lærebøkene og oppgavebøkene. Oppgavene plasseres

		underveis etter eksempler, delkapitler og kapitler.
Kapitlenes organisering	Hvert kapittel avsluttes med en liten test «Prøv deg selv», så kommer det «Noe å lure på» som er et sett problemløsningsoppgaver angående temaet på dette kapittelet. Etter dette er det «Oppsummering». Bakerst i grunnboka er en «Digital manual» som kan veileder og hjelpe elevene til å løse oppgaver med kalkulator eller regneark.	Hvert kapittel avsluttes med «Undervisningsaktiviteter» som er trening i praktisk problemløsning. Etter dette er det «Oppsummering», etterfulgt av et sett problemløsningsoppgaver tilhørende temaet i dette kapittelet. Bakerst i grunnboka er det en «Kinesisk og engelsk matematisk vokabularindeks» som kan hjelpe elevene til å finne ut hvordan man oversetter og skriver matematiske faguttrykk på engelsk.

Forfatterne av «Faktor» følger godt med i utviklingen av datateknologi ved å vedlegge «Manual for digitale verktøy». Bakerst i de kinesiske lærebøkene er det en «Kinesisk/engelsk matematisk vokabularindeks». Dette viser at forfatterne av «Matematikk» har et tverrfaglig internasjonalt perspektiv.

Kapittel 6 Hovedundersøkelsen

Nedenfor har jeg valgt å presentere både de norske og de kinesiske lærebøkene i samme typer figurer slik at det blir lettere å sammenligne. Siden det eksisterer store forskjeller i antall eksempler og metoder, må jeg ofte bruke den prosentvise andelen av metodene for å sammenligne, istedenfor direkte antall i hovedundersøkelsen.

6.1 Analysen av kinesiske og norske eksempler basert på Pólyas fire-fases modell

Ifølge Schoenfeld (1985) bruker en erfaren matematiker mer enn halvparten av tiden for å forstå problemet, inkludert en betydelig mengde av analyse. Schoenfeld (1992) påpeker at hovedgrunnen til at de elevene som ikke kan løse problemet i hans forskning er at de mangler noen faser i problemløsningsprosessen, for eksempel fasene «Forstå problemet» og «Se tilbake». Dette leder til at elevene ikke kan revurdere og reversere om valgene de har gjort i begynnelsen av problemløsningsprosessen (se delkapittel 3.2). Dette forklarer hvor viktig de to fasene er for å utvikle elevers problemløsningskompetanse. Derfor har jeg utført en analyse som er forskjellig fra Fan & Zhus (2007). De fokuserer mye på den fjerde fasen «Se tilbake» med 3 underkategorier (se delkapittel 4.3.2) i forskningen deres, mens jeg fokuserer både på den første og den fjerde fasen.

Tabell 19. Antall eksempler som har gjennomgått den første-, den siste- eller alle fire faser

Problemløsningsfaser	Antall av eksempler Norge (%)	Antall av eksempler Kina (%)
Analysere og forstå problemet	35 (15%)	115 (30%)
Se tilbake	22 (10%)	224 (58%)
Gjennomgått alle fire faser	4 (5%)	67 (17%)

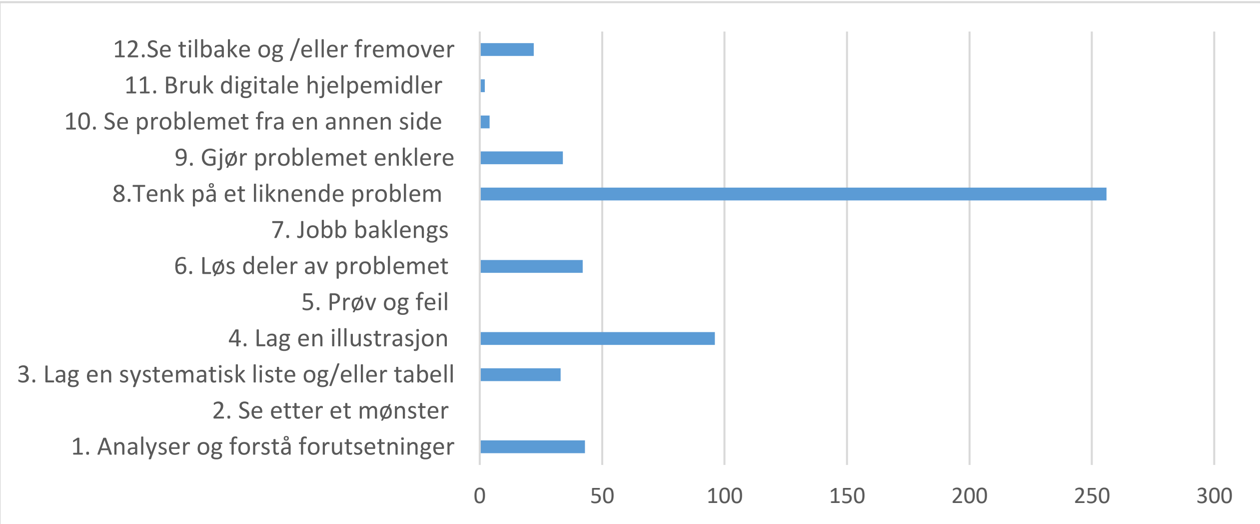
Tabell 19 viser at det bare er 15% av alle eksemplene i de norske lærebøkene som har gjennomført den første fasen, mens det i de kinesiske lærebøkene er dobbelt så stor andel. Vi ser tydelig at det også eksisterer en stor forskjell mellom de kinesiske og norsk lærebøkene når det gjelder den siste fasen av problemløsningen. I de norske lærebøkene blir fasen «se tilbake» kun brukt i 10% av eksemplene i problemløsningen, mens det i de kinesiske lærebøkene blir brukt i 58% av eksemplene. Kun 5% av alle eksemplene har gjennomgått alle de fire fasene i problemløsningsprosessen i de norske lærebøkene, mens det samme tallet i de kinesiske lærebøkene er 17%. Dette betyr at slike eksempler forekommer 4,2 ganger så ofte i de kinesiske lærebøkene. I Fan & Zhus (2007, s.67) forskning, som ble gjort for 11 år siden, omfatter slike eksempler bare 2.9% i de kinesiske lærebøkene, 0.9% i de Singaporske, og 1.7% i de Amerikanske. De to tallene fra analysen min, 5% og 17%, viser at i de siste årene har det hatt en positiv økning når det gjelder presentasjonen av problemløsningsprosessen i lærebøker i matematikk. Tallene viser at de fleste eksemplene i de ni utvalgte lærebøkene kan løses på en enkel måte uten å bruke alle de fire fasene.

I begynnelsen av problemløsningen bruker de kinesiske eksemplene ofte (30%) et avsnitt som heter "analyse" for å representere «forstå problemet» og/eller «legge en plan». Deretter blir «gjennomføre planen» merket "løsning" tydelig. Til slutt bruker de kinesiske eksemplene ofte (58%) flere forskjellige seksjoner som heter 'tanker', 'videre forsøk' eller 'oppsummering 'for å representere «se tilbake». Dette ligner både på tilnærmingen til matematikeren i Schoenfelds (1985) forskning, og på matematikernes i Carlson & Blooms (2005) forskning. Ifølge Schoenfeld og Carlson & Bloom kan en moden problemløser orientere seg i hva problemet innebærer først og «se tilbake» etter løsningen. De påpeker at det å gjøre planlegge-utføre-sjekke syklus eller revurdere strategier og metoder er avgjørende for å løse problemet (se delkapittel 3.2). Hvis problemløsningsprosessen, særlig «Analysere og forstå problemet» og «Se tilbake» vises eksplisitt, kan det være lettere for problemløseren å revurdere sine metoder. Dette kan være hovedgrunnen til at matematikeren i Schoenfelds forskning ofte skriver ned kommentarer underveis i problemløsningsprosessen (se figur 2 i delkapittel 3.2). I mange tilfeller bruker de kinesiske eksemplene også tankebobler og pekebilder for å «se tilbake». I de norske eksemplene blir noen ganger «gjennomføre planen» merket som «løsning», men ingen tydelig merking i den første og den fjerde fasen. Den fjerde fasen - «se tilbake» brukes bare av og til (10%), og vises ofte som tankebobler fra en hund som er en av tegneseriefigurene som blir brukt gjennomgående i «Faktor». Vi kan konkludere med at de kinesiske eksemplene har mer identifiserbar struktur for å presentere ulike faser i problemløsningsprosessen. Mine funn er i samsvar med resultatet fra Fan & Zhus (2007) forskning, der påpeker de at i de kinesiske lærebøkene er tilnærming til problemløsningsprosessen mer systematisk og eksplisitt i generelt.

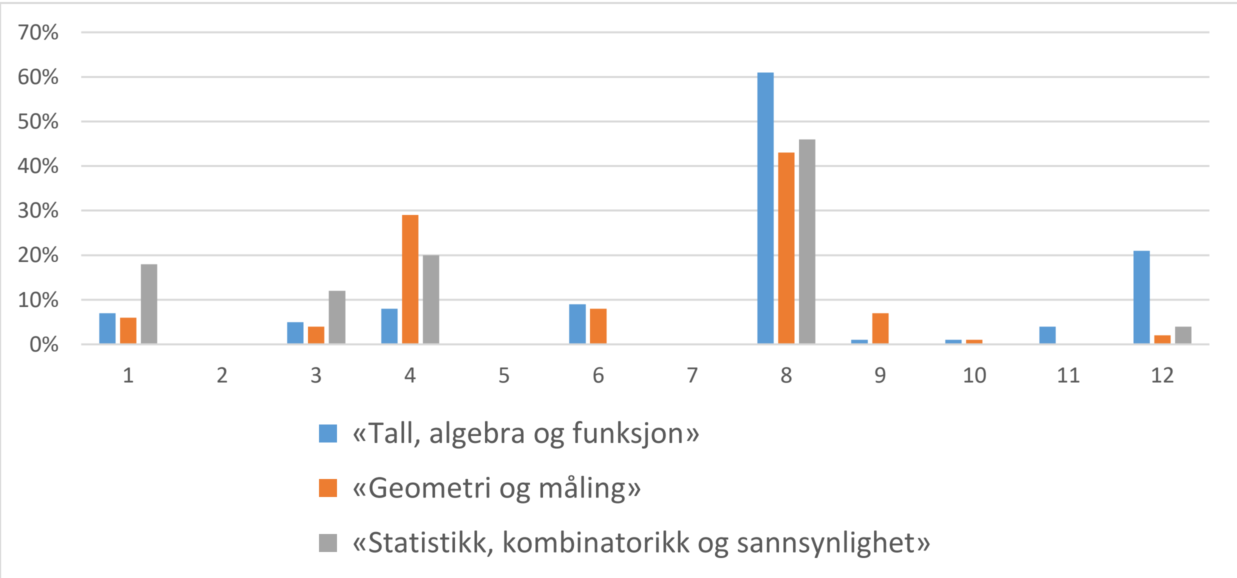
6.2 Analysen av alle eksempler basert på Kongelfs kodingsordning

6.2.1 Metoder brukt i de norske lærebøkene

Figur 25. Metodebruk i de norske lærebøkene



Figur 26. Metodebruk i tre hovedområder i de norske lærebøkene



Jeg har funnet 540 tilfeller av metodebruk fordelt på de 231 analyserte eksemplene i de norske lærebøkene.

Tabell 20. Metodebruk i tre hovedområder i de norske lærebøkene

Metodebruk i tre hovedområder		**«Tall, algebra og funksjon»**		**«Geometri og måling»**		**«Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet»**	
Antall av eksempler		**155 (67%)**		**53 (23%)**		**23 (10%)**	
1. Analyser og forstå forutsetninger		21	7%	13	6%	9	12%
2. Se etter et mønster		0	0%	0	0%	0	0%
3. Lag en systematisk liste / tabell		15	5%	7	4%	11	15%
4. Lag en illustrasjon		30	10%	56	29%	18	25%
5. Prøv og feil		0	0%	0	0%	0	0%
6. Løs deler av problemet		26	9%	16	8%	0	0%
7. Jobb baklengs		0	0%	0	0%	0	0%
8.Tenk på et liknende problem		157	56%	68	43%	31	43%
9. Gjør problemet enklere	ved bruk av resonnering	8	3%	13	5%	0	0%
	ved bruk av formler/regler	8	3%	5	2%	0	0%
10. Se problemet fra en annen side		2	1%	2	1%	0	0%
11. Bruk digitale hjelpemidler		2	1%	0	0%	0	0%
12.Se tilbake og /eller fremover		13	5%	5	2%	4	5%
Antall metoder		282	100%	185	100%	73	100%

I tabell 20 merker jeg de største variasjonene, høye taller med lyse oransje farge og lavere taller med lyseblå farge.

Tabell 20 viser at den største variasjonen av metodebruk finnes i bruk av «Lag en illustrasjon» med 19% forskjell mellom «Tall, algebra og funksjon» og «Geometri og måling», selv om denne metoden ikke er den mest brukte metoden. Det betyr at blant de tre områdene brukes metoden - «Lag en illustrasjon» færreste i området - «Tall, algebra og funksjon». «Tenk på et liknende problem» som den mest brukte i området «Tall, algebra og funksjon» med 13% mer enn i «Geometri og måling» og «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet»

Tabell 21. De fire mest brukte metodene i «Faktor»

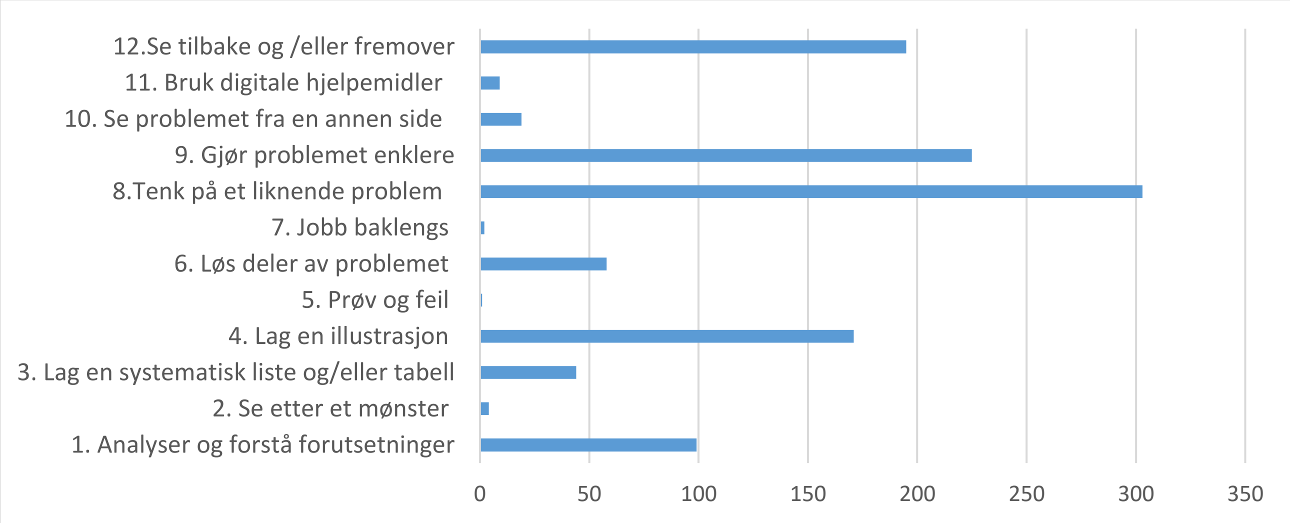
De fire mest brukte metodene i «Faktor»	**«Tall, algebra og funksjon»**	**«Geometri og måling»**	**«Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet»**
1. Tenk på et liknende problem (51%)	Tenk på et liknende problem (61%)	Tenk på et liknende problem (43%)	Tenk på et liknende problem (46%)
2. Lag en illustrasjon (17%)	Løs deler av problemet (9%)	Lag en illustrasjon (29%)	Lag en illustrasjon (20%)
3. Løs deler av problemet (8%)	Lag en illustrasjon (8%)	Løs deler av problemet (8%)	Analyser og forstå forutsetninger (18%)
4. Analyser og forstå forutsetninger (7%)	Analyser og forstå forutsetninger (7%)	Gjør problemet enklere (7%)	Lag en systematisk liste og/eller tabell (12%)

Det finnes ingen områder som har helt lik rangering som rangeringen av de fire mest brukte metodene i hele boka. Det finnes ingen lik rangering med hverandre i de tre hovedområdene heller. «Tenk på et liknende problem» er mest brukte metoden i alle de tre hovedområdene. «Lag en illustrasjon» er den nest mest brukte metoden i «Geometri og måling» og «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet», mens i «Tall, algebra og funksjon» er «Løs deler av problemet» på den andre plassen. «Analyser og forstå forutsetninger» er mye brukt i «Tall, algebra og funksjon» og «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet», men sjelden brukt i «Geometri og måling».

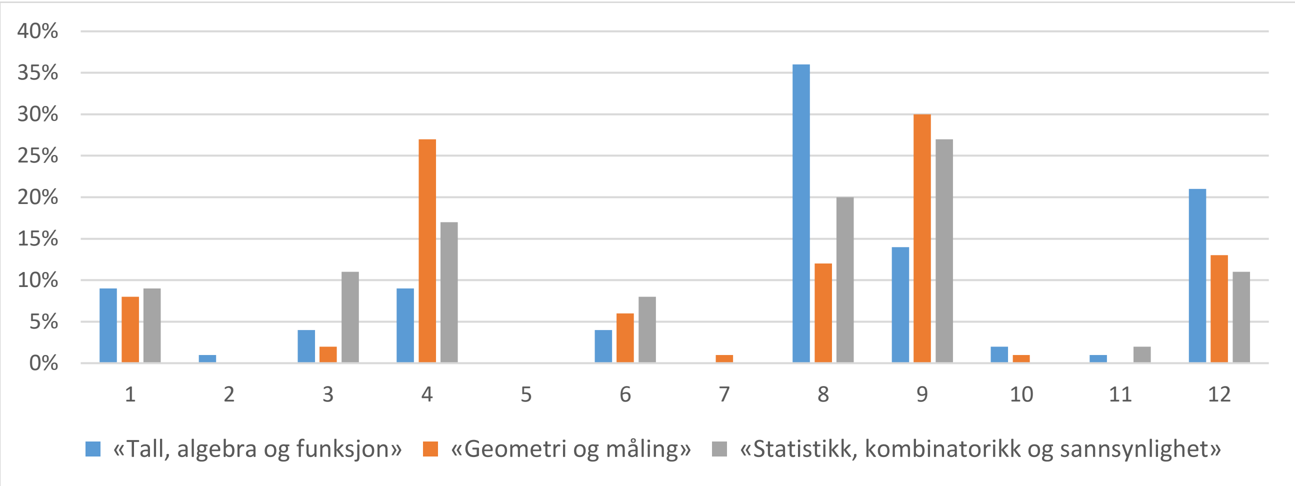
6.2.2 Metoder brukt i de kinesiske lærebøkene

Jeg har funnet 1130 tilfeller av metodebruk fordelt på de 385 analyserte eksemplene i de kinesiske lærebøkene.

Figur 27. Metodebruk i de kinesiske lærebøkene



Figur 28. Metodebruk i de tre områdene i de kinesiske lærebøkene



I tabell 22ned merker jeg de største variasjonene, høye taller med lyse oransje farge og lavere taller med lyseblå farge.

Tabell 22. Metodebruk i tre hovedområder i de kinesiske lærebøkene

Metodebruk i tre hovedområder	**«Tall, algebra og funksjon»**		**«Geometri og måling»**		**«Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet»**	
Antall av eksempler	**283 (74%)**		**87 (22%)**		**15 (4%)**	
1. Analyser og forstå forutsetninger	60	9%	30	8%	9	12%
2. Se etter et mønster	4	1%	0	0%	0	0%

3. Lag en systematisk liste/tabell		26	4%	6	2%	13	17%
4. Lag en illustrasjon		58	9%	108	28%	5	7%
5. Prøv og feil		1	0%	0	0%	0	0%
6. Løs deler av problemet		27	4%	28	7%	3	4%
7. Jobb baklengs		0	0%	2	0%	0	0%
8.Tenk på et liknende problem		239	36%	47	12%	18	24%
9. Gjør problemet enklere	ved bruk av resonnering	46	7%	79	20%	4	5%
	ved bruk av formler/regler	43	7%	41	10%	12	16%
10. Se problemet fra en annen side		16	2%	3	1%	0	0%
11. Bruk digitale hjelpemidler		7	1%	0	0%	2	2%
12.Se tilbake og /eller fremover		138	21%	47	12%	10	13%
Antall metoder		665	100%	391	100%	76	100%

Tabell 22 viser at i de kinesiske lærebøkene finnes det fire metoder der forskjellen på metodebruken i de tre hovedområdene er over 10%. De fire metodene er «Lag en illustrasjon», «Tenk på et liknende problem», «Gjør problemet enklere» og «Se tilbake og /eller fremover». Tabell 22 viser også at den største variasjonen i de kinesiske lærebøkene finnes i bruken av «Tenk på et liknende problem», med 24% forskjell mellom områdene «Tall, algebra og funksjon» og «Geometri og måling». Dette betyr at i området «Tall, algebra og funksjon» brukes det mange flere mekaniske problemløsningsmetoder enn i «Geometri og måling». Den nest mest brukte variasjonen finnes i bruken av «Lag en illustrasjon» med 19% forskjell mellom områdene «Tall, algebra og funksjon» og «Geometri og måling». Vi har en veldig lignende situasjon i bruken av «Lag en illustrasjon» i de norske lærebøkene også, der er forskjellen på 17%.

Tabell 23 viser at i de kinesiske lærebøkene er metoden - «Tenk på et liknende problem» mest brukt i «Tall, algebra og funksjon», mens metoden - «Gjør problemet enklere» er den mest brukte metoden i «Geometri og måling» og «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet». Dette viser at det i de kinesiske lærebøkene brukes flere aktive problemløsningsmetoder i områdene «Geometri og måling» og «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet», mens det i området - «Tall, algebra og funksjon» brukes flere av den passive problemløsningsmetoden.

Tabell 23. De fire mest brukte metodene i «Matematikk»

De fire mest brukte metodene i «Matematikk»	**«Tall, algebra og funksjon»**	**«Geometri og måling»**	**«Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet»**
1. Tenk på et liknende problem (27%)	Tenk på et liknende problem (36%)	Gjør problemet enklere (30%)	Gjør problemet enklere (27%)
2. Gjør problemet enklere (20%)	«Se tilbake og /eller fremover» (21%)	Lag en illustrasjon (27%)	Tenk på et liknende problem (20%)
3. «Se tilbake og /eller fremover» (17%)	Gjør problemet enklere (14%)	«Se tilbake og /eller fremover» (13%)	Lag en illustrasjon (17%)
4. Lag en illustrasjon (16%)	Lag en illustrasjon (9%)	Tenk på et liknende problem (12%)	«Se tilbake og /eller fremover» (11%)

6.3 Sammenligningen mellom de norske og kinesiske lærebøkene

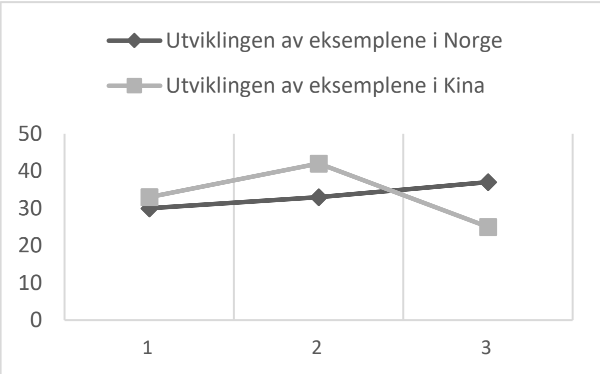
6.3.1 Utviklingen av kvantitet til eksemplene og metodene

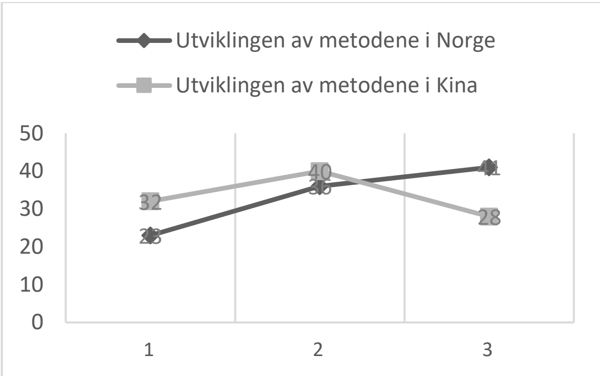
Tabell 24. Utviklingen av kvantitet til eksemplene og metodene i Norge og Kina

Skoleår i ungdomsskolen	**Eksempler**		**Metoder**	
	Norge	**Kina**	**Norge**	**Kina**
1. skoleår	72 (31%)	147 (38%)	121 (22%)	365 (32%)
2. skoleår	80 (35%)	164 (43%)	199 (37%)	451 (40%)
3. skoleår	79 (34%)	74 (19%)	220 (41%)	314 (28%)
Antall	231	385	540	1130

Tabell 24, figur 29 og figur 30 viser at i de tre norske lærebøkene er antall av eksempler og problemløsningsmetoder stabil uten stor forandring. I de norske lærebøkene er forskjellen mellom det andre- og det tredje ungdomsskoleåret 1% i eksemplene og 4% i metodene, mens i de kinesiske lærebøkene er forskjellen 24% i eksemplene og 18% i metodene. I de kinesiske lærebøkene reduserer mengden av både eksemplene og problemløsningsmetodene ganske mye når elever kommer til det siste året i ungdomsskolen.

(Ungdomsskoleåret er representert ved 1,2 og 3)





Figur 29. Sammenligningen av utviklingen av eksemplene Figur 30. Sammenligningen av utviklingen av metodene

6.3.2 Eksemplene og metodene i de tre hovedområdene

Tabell 25. Oppdelingen av eksemplene og metodene i de tre hovedområdene

Temaer	antall av eksempler		antall metoder	
	Norge	Kina	Norge	Kina
Tall, algebra og funksjoner	155 (67%)	283 (74%)	282 (52%)	665 (59%)
Geometri og måling	53 (23%)	87 (22%)	185 (34%)	348 (31%)
Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet	23 (10%)	15 (4%)	73 (14%)	117 (10%)
Antall	231	385	540	1130

Tabell 26 viser at de kinesiske lærebøkene har åtte kapitler mer enn de norske. I tillegg har de kinesiske lærebøkene brukt 1.7 ganger flere eksempler og 2,1 ganger flere metoder enn de norske når det gjelder antall eksempler og totalt antall metoder brukt. Tabell 25 viser at fordelingen likevel er relativ jevn i de tre hovedområdene. Ifølge mitt datamateriale har de ni utvalgte lærebøkene lagt størst vekt på problemløsningen i området – «Tall, algebra og funksjoner» fordi det er ca.67-74% antall av eksempler og 52-59% antall av metodene som brukes i dette området. Detter viser også at hvor viktig område «Tall, algebra og funksjoner» er i lærebøkene når det gjelder problemløsning og problemløsningsmetoder. Ifølge Grønmo et al. (2012, s. 27) regnes algebra sammen med aritmetikk/tall som den viktigste delen av matematikken.

6.3.3 Metodebruk i de norske og de kinesiske lærebøkene

Tabell 26. Metodebruk i de norske og de kinesiske lærebøkene

Heuristiske metoder	Antall i prosentvis		Antall	
Antall av eksempler	**Norge**	**Kina**	**Norge**	**Kina**
1. Analyser og forstå forutsetninger	7%	8%	43	99
2. Se etter et mønster	0%	0%	0	4
3. Lag en systematisk liste og/eller tabell	6%	4%	33	44
4. Lag en illustrasjon	17%	16%	96	171
5. Prøv og feil	0%	0%	0	1
6. Løs deler av problemet	8%	6%	42	58
7. Jobb baklengs	0%	0%	0	2
8.Tenk på et liknende problem	51%	27%	256	303
9A-ved bruk av resonnering	3%	11%	21	129
9B-ved bruk av formler/regler	2%	9%	13	96
10. Se problemet fra en annen side	1%	1%	4	19
11. Bruk digitale hjelpemidler	1%	1%	2	9
12.Se tilbake og /eller fremover	4%	17%	22	195
Antall metoder	100%	100%	540	1130

Jeg har funnet 1670 tilfeller av metodebruk fordelt på de 616 analyserte eksemplene i de ni utvalgte lærebøkene.

For å analysere metoden «Gjør problemet enklere» bruker jeg to underkategorier. Tabell 26 viser at metoden «Gjør problemet enklere» er en av de mest brukte metodene i kinesiske eksemplene men sjelden brukt i de norske. Likevel er de to underkategoriene jevnt delt opp i både de kinesiske og norske lærebøkene. I de kinesiske lærebøkene har 11% av eksemplene blitt kodet som «Gjør problemet enklere» ved bruk av resonnering, og 9% ved bruk av formler/regler. I de norske lærebøkene er oppdelingen av de to underkategoriene 3% og 2%. Det vil si at når man løser problemet ved å bruke «Gjør problemet enklere», blir bruk av resonnering eller formler/regler nesten jevnt fordelt både i de kinesiske og norske lærebøkene. Samtidig tabell 20 og tabell 22 viser at det finnes en ujevn fordeling i de tre hovedområdene. I «Tall, algebra og funksjon» er det alltid en jevn fordeling mellom de to underkategoriene i både de kinesiske og norske lærebøkene. I «Geometri og måling» er bruken av underkategorien A (resonnering) 2-2.5 ganger oftere enn underkategorien B (regler/formler) i de ni utvalgte lærebøkene. I de kinesiske lærebøkene blir underkategorien B brukt tre ganger oftere enn underkategorien A i «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet» enn i «Geometri og måling».

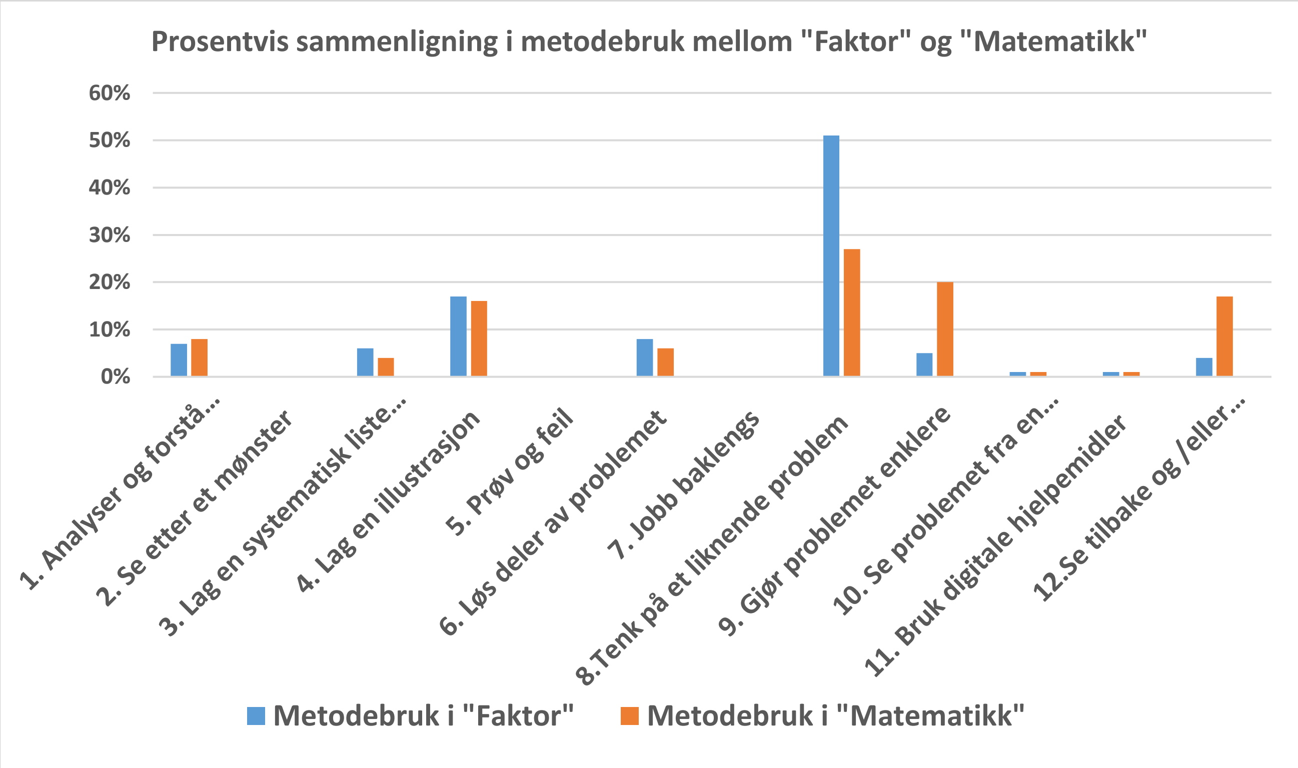
Tabell 27. De mest brukte metodene i de norske og de kinesiske lærebøkene

De fire mest brukte metodene	**Norge**		**Kina**	
	1. Tenk på et liknende problem	51%	**1.** Tenk på et liknende problem	27%
	2. Lag en illustrasjon	17%	**2.** Gjør problemet enklere	20%
	3. Løs deler av problemet	8%	**3.** «Se tilbake / fremover»	17%
	4. Analyser og forstå forutsetninger	7%	**4.** Lag en illustrasjon	16%

Tabell 26 og 27 viser at metode 8 «Tenk på et liknende problem» er den mest brukte metoden i både de kinesiske og norske lærebøkene. Dette resultatet viser at både i de kinesiske og norske eksemplene presenteres problemløsningen ofte ved å kopiere problemløsningsmetoder direkte fra tekstdelen, men de norske lærebøkene (51%) bruker denne mekaniske metoden nesten dobbelt så stor andel som de kinesiske lærebøkene (27%).

Tabell 27 viser at «Lag en illustrasjon» er den nest mest brukte metoden i de norske lærebøkene og det fjerde mest brukte i de kinesiske lærebøkene. Hvis man tenker prosentvis så blir den imidlertid brukt nesten helt likt, med henholdsvis 16% - og 17% av totalt antall metoder brukt. Dette resultatet gjenspeiler andre forskeres resultater. «Lag en illustrasjon» er også en av de mest brukte metodene i Fan & Zhus (2007), Kongelf (2011), Harders (2013) og Aaseths (2016) forskning.

Tabeller 26, 27 og figur 31 viser at blant de fire mest brukte metodene, er det to metoder som skiller seg mest fra hverandre i de norske og kinesiske lærebøkene. De to metodene er «Gjør problemet enklere» og «Se tilbake og /eller fremover». I de kinesiske lærebøkene utgjør metoden - «Gjør problemet enklere» 20% av totalt antall metoder brukt. Dette er fire ganger oftere enn i de norske lærebøkene (5%). «Se tilbake og /eller fremover» utgjør 17% av totalt metoder brukt i de kinesiske lærebøkene. Dette er 4,3 ganger oftere enn i de norske lærebøkene (4%). Det vil si at «Gjør problemet enklere»» og «Se tilbake og /eller fremover» er mye brukt i de kinesiske lærebøkene, men ikke så ofte i de norske.



Figur 31. Sammenligningen av metodebruk mellom de norske og kinesiske lærebøkene

Tabell 26 og 27 viser at faktisk er den tredje og fjerde mest brukte metoden i de norske lærebøkene ikke så ofte bruk, med bare 8% og 7%. av total metoder brukt. En hovedgrunn er at den mest og nest mest brukte metoden allerede utgjør 68% av totalen i de norske lærebøkene. Derfor vil jeg sette «Løs deler av problemet» (8%) og «Analysere og forstå forutsetninger» (7%) i en gruppe sammen med disse tre metodene: «Lag en systematisk liste og/eller tabell» (6%), «Gjør problemet enklere» (5%) og «Se tilbake og /eller fremover» (4%). Metodene i denne gruppen er bare brukt av og til i de norske lærebøkene. I de kinesiske lærebøkene inkluderer de følgende metodene som brukes av og til:

«Analyser og forstå forutsetninger» (8%), «Løs deler av problemet» (6%) og «Lag en systematisk liste og/eller tabell» (4%).

Vi kan konkludere med fra figur 31 at det generelt er liten forskjell i de tre følgende metodene mellom de kinesiske og norske lærebøkene: «Løs deler av problemet», «Lag en systematisk liste og/eller tabell» og «Analyser og forstå forutsetninger». Både «Se problemet fra en annen side» og «Bruk digitale hjelpemidler» er lite brukt. Begge metodene ligger på rundt 1% av totalt antall metoder brukt både i de kinesiske og norske lærebøkene. Metodene «Jobb baklengs», «Se etter et mønster» og «Prøv og feil» forekommer veldig sjelden eller er ubrukte i de norske og kinesiske lærebøkene.

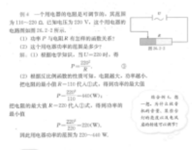
Basert på diskusjonen i delkapittel 6.1, tabell 26, tabell 27 og figur 29, viser datamaterialet at de kinesiske lærebøkene presenterer den mest utbredte distribusjonen av metodebruken som omfatter bruk av alle problemløsningsmetodene, mens de norske lærebøkene presenterer den mest konsentrerte distribusjonen med en metode - «Tenk på et liknende problem» som utgjør 51% av totalt antall metoder brukt. De norske lærebøkene presenterer problemløsning og problemløsningsmetoder eksplisitt som en del av innholdet, mens problemløsningsprosessen i de kinesiske lærebøkene presenteres mer systematisk og eksplisitt. Ifølge Mayer (1995) har forskjellen på lærebøkene mellom Norge og Kina store likheter med forskjellen mellom USA og Japan. Mayer har påpekt at lærebøker i Japan legger større vekt på problemløsningsprosessen, mens lærebøkene i USA er mer rettet mot det endelige svaret (se tabell 6 i delkapittel 3).

6.4 Diskusjon av presentasjonen av problemløsning i noen utvalgte eksempler

Jeg har ikke tatt hensyn til hvilke lærebøker eksemplene er hentet fra, og valget av eksemplene fokuserer bare på presentasjonen av problemløsning og problemløsningsmetoder.

Eksempler A og B – Med tverrfaglig informative bilder

(Se vedlegg 25 med bildet i størrelse A4)



Figur 32. Eksempel A med et tverrfaglig informativt bilde

(«Faktor 10», 2014, s.177)

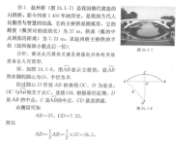
Figur 33. Eksempel B med et tverrfaglig informativt bilde

(«Matematikk 9B», 2014, s.15)

Det finnes noen tverrfaglige informative bilder både i norske- og kinesiske lærebøker. Et bilde av pestbakterier blir for eksempel brukt i et eksempel som handler om forstørring i målestokk (se figur 32). Med noen få ekstra ords introduksjon, får elevene lære kunnskaper både i matematikk, naturfag og samfunnsfag gjennom dette eksempelet. I figur 33 blir en fysisk koblingskrets og kretsens ligning brukt for elevers læring i «Invers proporsjonal funksjon». Da får elever lære både fysikk og matematikk og forstå hvor tett koblingen er mellom disse to fagene.

Eksempler C og D – Med historiske blikk

(Se vedlegg 25 med bildet i størrelse A4)



Figur 34. Eksempel C med historisk kilde

(«Matematikk 7A», 2012, s.2-3)

Figur 35. Eksempel D med historisk kilde

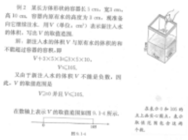
(«Matematikk 9A», 2014, s.82)

<u>Oversettelse til pekebildet i eksempel C:</u> I gamle Kina ble tellestaver brukt for å regne. De røde tellestavene representerer positive tall, mens de svarte representerer negative tall.

I eksempel C settes det «+» og «-» foran tallene for å vise positiv og negativ utvikling. Før eksempelet, på venstre siden av eksempelet, i et pekebilde, introduseres en annen måte som ble brukt i gamle Kina. Denne introduksjon med historisk blikk kan la elever se representasjonen av positive og negative tall fra en annen side.

I eksempel D brukes det en gammel berømt bro (Zhaozhou bro) som ble bygd for 1400 år siden, for å lære elevene hvordan man kan regne ut radiusen av denne Steinhvelvbroen. Her blir eksemplet løst på to metoder med historisk kilde. Ifølge Smestad (2016, 121-125) er den første «arbeid med originalkilder», og den andre «bruk gamle teknikker». Smestad (2016, s.121) har i sin forskning nevnt at det finnes ni metoder der matematikkhistorie kan brukes i matematikkundervisningen. De to metodene over er to av de ni metodene. Smestad (2011) påpeker at matematikkhistorie som et kulturelt element kan tenne den matematiske interessen for elever og gi dem ulike innfallsvinkler på matematikken. Han påpeker også at matematikkhistorie kan være en viktig forutsetning for å gi elevene rikere løsningsmetoder i matematikkopplæringen. De kinesiske lærebøkene bruker matematikkhistorie 34 ganger, mens det forekommer 14 ganger i de norske. Dette viser at både kinesiske og norske lærebokforfattere har et historisk perspektiv i matematikk. I tillegg har jeg funnet ut at i de kinesiske lærebøkene er forholdet mellom kinesiske og europeiske matematikkhistorier jevnt fordelt, mens det i de norske lærebøkene er dominert av europeiske matematikkhistorier. Slike spesielle problemløsningsmetoder med matematikkhistoriske kilder eksisterer i lærebøkene på en skjulte måte.

Eksempler E og F– bruk av alle fire faser og effektiv kombinasjon av metoder

 (Se vedlegg 25 med bildet i størrelse A4)

Figur 36. Eksempel E med bruk av alle fire faser i problemløsningsprosessen («Matematikk 7B», 2012, s.119)

<u>Oversettelse av oppgaven</u>: En kubisk vanntank er 5 cm lang, 3 cm bred og 10 cm høy. Det er allerede vann i tanken. Vannet står 3 cm opp i tanken. Nå skal man fortsette å fylle opp vann. Regn ut intervallet (rekkevidden) av det påfylte vannvolumet.

I dette eksemplet bruker man flere metoder for å løse et praktisk spørsmål om ulikhet. Først blir det diskutert hva det påfylte vannvolumet betyr. I tillegg blir illustrasjonen også brukt for å gi tydeligere informasjon i løsningen. Ved bruk av Pólyas fire-fases modell vet vi at i den første og andre fasen nemlig «forstå problemet» og «legg en plan» blir metodene «Analysere og forstå forutsetninger» og «Lag en illustrasjon» brukt. Etter dette blir volumen skrevet ned og regnet ut to ganger. Først blir V (det påfylte vannvolumet) regnet ut når V må være mindre enn volumen til vanntanken. Den andre gangen er V skrevet ned som må større enn null fordi volumen til vann som blir fylt på ikke kan være mindre enn null. Her blir «Løs deler av problemet» brukt i den tredje fasen – «Gjennomfør planen». Deretter brukes en annen måte å løse problemet på, nemlig å tegne på en tallinje. Til slutt bruker eksempelet et pekebilde for å gi en påminnelse. Påminnelsen er: Når man tegner punktum mellom de to utfallene, betyr det at svaret inkluderer 0 og 103. Hvis de to punktene blir tegnet som små sirkler, så ekskluderes 0 og 103 som svar. I den siste fasen bruker man «Se problemet fra en annen side» og «Se tilbake og /eller fremover».

Som vi har diskutert i delkapitlene 3.2 og 6.1, kan problemløsning ifølge Schoenfeld (1985) og Carlson & Bloom (2005) lettere revurderes og sjekkes om fire faser i problemløsningsprosessen vises eksplisitt. Ifølge Mayer (1985, referert i Björkqvist, 2003) bør elevene få nok strategitrening som er en av de fire effektive øvelsene i elevers læring i problemløsning. Basert på Schoenfelds, Carlson & Blooms og Mayers teorier kan eksempler som har brukt varierte kombinasjoner av problemløsningsmetoder og gjennomgått alle fire faser, gi mer trening i elevers læring i problemløsning. Eksempel E er et slikt eksempel.

Eksempel F ned bruker flere metoder som inkluderer «Tenk på et liknende problem», «Lag en illustrasjon», «Se problemet fra en annen side» og «Se tilbake og /eller fremover». Først blir oppgaven løst ved å kopiere to formler fra tekstdelen. En formel er arealet av grunnflaten i den sylindriske boksen, den andre er volumet av sylinderen. Deretter vises en mer direkte måte å regne ut volumet på, nemlig å omformulere formelen. Til slutt gir hunden med tankeboblen elevene en påminnelse om denne metoden.

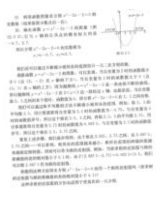
 (Se vedlegg 25 med bildet i størrelsen A4)

Figur 37. Eksempel F med effektiv metodekombinasjon («Faktor 10», 2014, s.119)

I de norske lærebøkene er «Tenk på et liknende problem» mest brukt. Ifølge Higgins (1997, referert i Fan and Zhu, 2007) kan slike metoder lettere lede til mekanisk læring i problemløsning. Lithner (2003, s.266-267) påpeker at *«in most studies of tekstbooks, CMR (kreativ resonnering) is rare and AR* (algoritmisk resonnering - en type imitative reasoning) *is dominating*». Bergqvist (2007, s. 368) skriver slik: *Even though imitative reasoning is an obvious part of mathematics ... The students could be given more opportunities to learn creative reasoning and thereby become familiar with the situation of solving unfamiliar tasks* (se del kapittel 3.4.3). Ifølge Lithner og Bergqvist er det derfor viktig å etterfølge «Tenk på et liknende problem» med passende veiledning og vise andre alternativer for å bruke formler/regler på en mer kreativ måte, for eksempel etterfulgt av metodene «Se tilbake og /eller fremover» og «Se problemet fra en annen side». Eksempel F er et eksempel med en god kombinasjon av disse metodene.

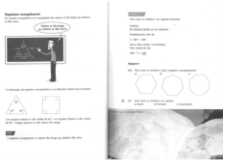
Eksempler G og H – Flere metoder brukt, men kombinasjon med utviklingspotensialet

<u>Oversettelsen av eksempel G</u>: Løs funksjonen $x^2-2x-2=0$ på grafisk måte

 (Se vedlegg 25 med bildet i størrelsen A4)

Figur 38. Eksempel G på grafisk løsning av kvadratiske funksjon («Matematikk 9A», 2014, s. 46)

Her bruker eksemplet først grafisk metode for å løse oppgaven. Etter det blir en annen metode, nemlig «Prøv og feil» introdusert og brukt. Eksemplet bruker flere metoder for å løse en oppgave, men en liste/tabell brukes verken i grafisk metode eller metoden «Prøv og feil». Hvis «Prøv og feil» og grafisk metode kombineres med metoden - «lage en systematisk liste/tabell», så kan det være lettere å sjekke feil, tegne parabelen og revurdere løsningsprosessen. I dette eksempelet finnes det ikke en slik kombinasjon.

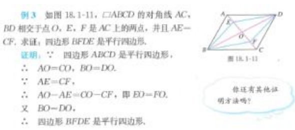
 (Se vedlegg 25 med bildet i størrelsen A4)

Figur 39. Eksempel H på utregning av vinklene i en regulær femkant («Faktor 9», 2014, s.71)

Eksempel H handler om å finne hvor store vinklene er i en regulær femkant. I den første delen av problemløsingen blir regelen - «en femkant består av tre trekanter» brukt, men det blir ikke laget en illustrasjon av en femkant som er delt i tre trekanter for å hjelpe elevene til å forstå denne regelen. På venstre siden av eksempelet (tekstdelen) finnes det ingen regulær femkant som kan «lånes» eller kopieres for å øke forståelsen. Oppgaven kan være vanskelig å forstå for de elevene som ikke behersker og forstår denne regelen. Ifølge Schoenfeld (1985, 1992) kan oppgaven være «en øvelse» for de elevene som forstår regelen, men «et problem» for de elevene som ikke vet eller forstår dette. Uten hjelp fra en illustrasjon kan muligheten for å forstå oppgaven være mindre.

Fan & Zhu (2006, 2007) påpeker at på området som gjelder hvordan lærebøker representerer problemløsningsmetoder, har det ikke vært så mye forskning. Etter å ha søkt på oria.no, researchgate.net og scholar.google.com, fant jeg ut at det finnes enda mindre forskning når det gjelder kombinasjoner av problemløsningsmetoder. I eksempel G forslås metoden - «lag en liste/tabell» i metodekombinasjonen, og i eksempel H forslås metoden - «lag en illustrasjon». De to forslagene kommer faktisk fra analysen min, fordi slike kombinasjoner ofte oppstår i de analyserte eksemplene mine. I de kinesiske lærebøkene finnes det bare ett eksempel blant alle de 385 eksemplene som kun bruker en metode i problemløsningen. I de norske lærebøkene finnes det 30 slike eksempler blant alle de 231 eksemplene. Dette betyr at resten av eksemplene i de ni utvalgte lærebøkene, 630 eksempler av totalt 661, dvs 95% av eksemplene i analysen min, har brukt kombinasjoner av problemløsningsmetoder. De to eksemplene ovenfor representerer noen eksempler fra de utvalgte lærebøkene der flere metoder blir brukt, men kombinasjonen har et mulig utviklingspotensial. Hvilke kombinasjoner brukes oftest i problemløsning? Hvilke kombinasjoner er mest effektiv i problemløsning? Kunnskapen fra eksempel G og H sier at svar er avhengige av videre og dypere forskning om kombinasjoner av problemløsningsmetoder i lærebokforskningen.

Eksempel K – Beviseksempel

 . (Se vedlegg 25 med bildet i størrelse A4)

Figur 40. Eksempel K som beviseksempel («Matematikk 8B», 2013, s. 46)

Oversettelse av oppgaven: Firkant ABCD er et parallellogram, og to diagonaler AC og BD krysser hverandre i O. Punktene E og F er på diagonalen AC og AE=CF. Bevis: firkant BFDE er et parallellogram.
Oversettelse av tankeboblen: «Kan du finne noen andre måter å bevise dette på?»

Dette eksempelet er hentet fra området - «Geometri og måling» og bruker følende fire metoder for å løse problemet: «Gjør problemet enklere», «Lag en illustrasjon», «Se tilbake og /eller fremover» og «Tenk på et liknende problem». «Tenk på et liknende problem» telles fordi bevismåten kopieres direkte fra tekstdelen. De fire metodene er også de fire mest brukte metodene i området - «Geometri og måling» (se tabell 23 i delkapittel 6.2.2).

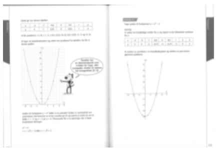
Noen eksempler fra de kinesiske lærebøkene som blir analysert i forskningen min handler om både geometriske bevis og algebraiske bevis. Slike eksempler kalles beviseksempler i oppgaven min. Totalt finnes det 25 beviseksempler i de kinesiske lærebøkene. Alle seks eksemplene i kapittel 12 «Kongruent trekant» fra «Matematikk 8A» er beviseksempler. Solomon & Crofts (2015) påpeker at de elevene som er flinke til å pugge formler ofte blir ansett som dyktige i matematikk i grunnskolen, men at disse elevene kan slite med matematikk i videre matematikklæring etter grunnskole fordi det der er krav om bevis og forståelse. Ifølge Solomon & Crofts (2015) og Delvin (2012) bør enkle oppgaver angående bevis bli trukket inn i grunnskolens matematikkundervisning for å øke elevenes matematikkforståelse og resonneringsevner. (se delkapittel 3.4.3) De kinesiske lærebøkene gjenspeiler godt Solomon & Crofts og Delvins teorier ved å bruke noen enkle beviseksempler. I de norske lærebøkene finnes det imidlertid ikke slike beviseksempler. I læringsmål på elevens matematikkompetanse står det i den norske læreplanen: «… *Eleven må … vurdere kor gyldige løysingane er.*» (Udir, 2016, s.1) Dette innebærer at elever på ungdomsskolen må ha bevisevner/resonneringsevner for å bedømme om løsningene er riktige eller gale. Her vises det at man har et tolkningsgap mellom læreplanen og lærebøkene.

Eksempler på kvadratiske funksjoner:

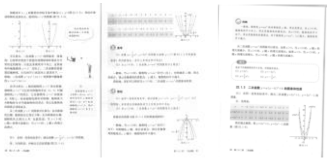
Eksempel L – Passiv læring ved å kopiere direkte

Eksempel M – Aktiv læring med «komparativ studie»

Eksemplet fra «Matematikk 9A» ligner veldig mye på det eksempelet som presenteres i «Faktor 10», fordi begge eksemplene velger samme type kvadratiske funksjon for å tegne parabelen.



(Se vedlegg 25 med bildet i størrelsen A4)



Figur 41. Eksemplet L – løsning ved å kopiere direkte **Figur 42. Eksemplet M – løsning med «komparativ studie»**

(«Faktor 10», 2014, s. 121) («Matematikk 9A», 2014, s.30-32)

<u>Oversettelsen av det kinesiske eksemplet</u>: Tegn grafene til de kvadratiske funksjonene y=$\frac{1}{2}x^2$ og y=2x^2 i samme koordinatsystem

Eksempelet fra «Faktor 10» består kun av en side (s.121). Eksempelet fra «Matematikk 9A» består også av en side (s.31), men i tillegg er det to linjer i den venstre margen (s.30) og noen linjer i den høyre margen (s.32). Jeg viser begge eksemplene, inkludert tekstdelen, på den venstre siden av figuren fordi begge deler har brukt metoden - «Tenk på et liknende problem». Slik kan vi se at begge eksemplene bruker liknende problemløsningsmetoder fra teoridelen i den venstre margen.

Eksemplet i «Faktor 10» (figur 41) har brukt følgende fire heuristiske metoder: «Lag en systematisk liste og/eller tabell», «Lag en illustrasjon», «Tenk på et liknende problem» og «Løs deler av problemet». Eksemplet i «Matematikk 9A» (figur 42) bruker de samme heuristiske metodene som «Faktor 10». I tillegg bruker «Matematikk 9A» en ekstra metode, nemlig «Se tilbake og/eller fremover». Bruk av disse metodene er delt opp slik: «Lag en systematisk liste og/eller tabell» to ganger, «Lag en illustrasjon» fire ganger, «Tenk på et liknende problem» to ganger, «Løs deler av problemet» to ganger, «Se tilbake og/eller fremover» tre ganger. Forskjellen mellom antall metoder mellom det norske eksemplet og det kinesiske eksemplet er ni.

Det eksisterer stor forskjell i antall metoder mellom det kinesiske- og det norske eksemplet. Hovedgrunnen er at det norske eksempelet brukes for å lære bort spesifikke teknikker for å tegne en graf til en kvadratisk funksjon, mens det kinesiske eksemplet blir brukt til både læring i å tegne en graf til en kvadratisk funksjon og «komparativ studie» (se delkapittel 4.5). I dette eksempelet settes flere kvadratiske grafer sammen slik at de kan sammenlignes og brukes videre for å generalisere egenskaper. Dette leder da til at antall metoder brukt har økt.

I figur 41 kan vi se at det norske eksemplet – (Tegn grafen til funksjonen y=x^2-4) bare kopierer løsningen fra eksemplet (Tegn grafen til funksjonen y=x^2) som står i tekstdelen av boka (den venstre margen). I analysen min er det 51% av totalt antall metoder brukt i de norske lærebøkene «Tenk på et liknende problem» ved å kopiere direkte fra tekstdelen. Etter tegningen er det ingen «se tilbake» for å diskutere hva som er forskjellen mellom de to grafene, og heller ikke noe «se fremover» for å finne generelle egenskaper for slike grafer.

Ifølge Lithner (2003, 2008) skal elevene ikke bare bruke kjente løsningsmetoder og svar, men de må også kunne produsere noe nytt, det vil si at elevene må beherske kreativ resonnering istedenfor imiterende resonnering for å kunne løse et problem. Han påpeker også at et fokus på imiterende resonnering kan svekke elevenes problemløsningsevne og forståelse av de underliggende matematiske begrepene. Bergqvist (2007) påpeker også at elevene bør gis flere muligheter til å lære kreative resonnering og dermed bli kjent med situasjonen for å løse ukjente problemer (se delkapittel 3.4.3).

Eksempel M i figur 42 er et «komparativ studie» eksempel. Det inneholder to kvadratiske funksjoner. Først blir noen punkter regnet ut ifølge funksjonenes funksjonsuttrykk. Så lages det to tabeller og punktene blir utfylt. Til slutt blir to parabler tegnet inn i samme koordinatsystem. Her kan vi se at parabelen til y=x^2 fra tekstdelen også blir tegnet med prikkete linje sammen med de andre grafene. Slik kan man sammenligne denne grafen med de to andre parablene. Som vi har diskutert, bruker metoden – «se tilbake/fremover» ofte i slike «komparativ studie» eksempler.

Eksempel M bruker en hel side for den 4. fase – «se tilbake».

Den første delen av «se tilbake og fremover»: Et lyseblått avsnitt som omfatter to spørsmål brukes for å inspirere elevenes videre tenkning om parabelen til y=ax^2, etterfulgt av et kort sammendrag.

Oversettelsen til det lyseblå avsnittet:

Tenk: (1) Hva er forskjeller mellom grafene til y=$\frac{1}{2}x^2$, y=2x^2 og y=x^2 (med prikket linje)? Hvilke likeheter og ulikehetr finner du? (2) Når a > 0, hvilke egenskaper finner vi i y=ax^2 slike kvadratiske funksjoner?

Oversettelsen til det korte sammendraget under det lyseblå avsnittet:

Generelt sagt, når a > 0, skal åpeningen av parabelen til y=a×² være opp (smile fjes, ordet norske matematikklærere liker å bruke i undervisningen). Symetriakse til parabelen her er y akse. Origo er ekstemapunkt for grafen og er det laveste punktet. Jo større verdi «a» får, desto smalere blir grafen.

Ved bruk av lingende sammenligningsmetoder, kan vi også forsøke hva parabelen til y=ax^2 ser ut og hva egenskaper de har når a < 0.

Den andre delen av «se tilbake og fremover»: Et lysegrønt avsnitt som omfatter en forsøkende oppgave og et spørsmål brukes for å inspirere elevenes videre tenkning om parabelen til y= -ax^2, etterfulgt av et annet kort sammendrag.

Oversettelsen til det lysegrønne avsnittet:

Videre forsøk:

(1) Tegn parabeler til kvadratiske funksjoner y= -x^2, y= -$\frac{1}{2}x^2$og y= -2x^2 i et samme koordinatsystem. Hva er forskjeller og likeheter mellom parabelene?

(2) Når a < 0, hvilke egenskaper finner vi i y= -a×² slike kvadratiske funksjoner?

Oversettelsen til det korte sammendraget under det lysegrønne avsnittet:

Får du samme illustrasjon som figur 22.1.5?

Vi kan konkludere at når a < 0, skal åpeningen av parabelen til y=a×² være ned (surt fjes, ordet norske matematikklærere liker å bruke i undervisningen). Symetriakse til parabelen her er også y akse. Origo er ekstemapunkt for grafen og er det høyeste punktet. Jo mindre verdi «a» får, desto smalere blir grafen.

Den tredje delen av «se tilbake og fremover»: Denne delen omfatter to sammendrag. Et lysegrønt avsnitt som det tredje sammendraget og etterfulgt av et generelt sammendrag for alle diskusjonene.

I de kinesiske lærebøkene kan eksemplet som blir løst selv være en ny læringsressurs for elevenes videre læring i problemløsning. Eksemplet M bruker illustrasjonen fra teoridelen som en hjelpefigur og standard i problemløsningen. Videre blir den nytegnede illustrasjonen fra dette eksempelet brukt i neste eksempel som en hjelpefigur i problemløsningen og den videre komparative læring om kvadratiske funksjoner (se den nederste delen på høyre side av figur 42)

Nortvedt (2013) påpeker at i PISA bruker elever ofte sin problemløsningskompetanse, modelleringskompetanse og resonnementskompetanse samtidig for å løse problemet. Både Niss & Jensen (2002) og Kilpatrick et al. (2001, referert i Valenta, 2016) påpeker at en type kompetanse ikke kan utvikles isolert fra andre typer kompetanser, og kompetansene støtter hverandre og utvikles samtidig (se delkapittel 3.3). Niss & Jensen (2002, s. 43. referert i Skott, Jess & Hansen, 2015, s.

298)) definerer de tre kompetansene slik: 1) *Problembehandlingskompetanse består i å kunne formulere og løse matematiske problemer;* 2) *Modelleringskompetanse består i å kunne analysere og* bygge en matematisk modell; *bygge en matematisk modell;* 3) *Resonnementskompetanse består i å kunne følge matematiske resonnement gitt av andre og kunne gjennomføre resonnement selv.*
I eksempel M må man bruke problemløsningskompetanse for å tegne to parabler for de to kvadratiske funksjonene. For å sammenligne parablene til funksjonene y=$\frac{1}{2}x^2$ og y=2x^2, og videre mellom y=ax^2 og y= -ax^2, må elever gjennomføre en modellbygging. Når elever generaliserer egenskaper til parablene til y=ax^2 og y= -ax^2, må de bruke resonnementskompetanse for å bedømme rekkevidden av konklusjonen og bestemme om konklusjonen er riktig eller gal. Ifølge Lithner (2003, 2008) og Bergqvist (2007) bør elever få en bedre mulighet til å lære seg aktiv resonnering istedenfor imiterende resonnering. Eksempler fra en «komparativ studie», som eksempel M, kan bidra til å øke elevers problemløsningskompetanse, modelleringskompetanse og resonnementskompetanse på samme tid.

Det finnes faktisk «komparativ studie» -oppgaver i oppgavedelen i de norske lærebøkene også (se ned figur 43 - 46), men ikke i eksemplene.

(Se vedlegg 25 med bildet i størrelse A4)

Figur 43-46. «Komparativ studie» fra oppgavedelen («Faktor 10», 2014, s.113,122, 325 og 326)

Kapittel 7 Drøfting av alle funnene

7.1 Noen interessante funn fra hjelpeundersøkelsen

7.1.1 Innhold

Bergem (2016, s. 42) har analysert TIMSS 2015, og funnet ut at norske elever på 9. trinn skårer best i statistikk og svakest i Algebra. Han påpeker at forskjellen mellom «statistikk» og «algebra» er svært mye på hele 69 poeng. Under hjelpeundersøkelsen fanget et fenomen angående innholdet i lærebøkene min oppmerksomhet. Blant «Algebra og funksjon», «Geometri» og «Statistikk og sannsynlighet» som jeg har analysert, er det en jevn fordeling i de norske lærebøkene, ca.1/3 av innholdet i hvert tema. Men det eksisterer en ujevn fordeling av innholdet i de kinesiske lærebøkene nå det gjelder de tre analyserte temaene. Tabell 16 viser at 1/3 av innholdet i de norske lærebøkene handler om «statistikk», mens det er bare 1/10 av innholdet i de kinesiske lærebøkene som handler det samme temaet. Tabell 16 viser også at de kinesiske lærebøkene bruker mer enn halvparten av innholdet på «algebra». De kinesiske bøkene har åtte flere kapitler enn de norske. Alle de åtte kapitlene tilhører området – «Tall, algebra og funksjoner». Det er en stor mulig for at fordelingen av innholdet i lærebøkene har spilt en viktig rolle når det gjelder den store forskjellen i presentasjonene man ser fra TIMMS i algebra og statistikk.

7.1.2 Noter underveis

Norske elever kan ikke notere direkte inn i læreboka si siden de ikke eier bøkene, mens i Kina eier elevene bøkene selv og kan skrive ned egne kommentarer. Dette leder til at de norske elevene må skaffe seg mer tid, bedre teknikker og flere strategier enn de kinesiske elevene for å ta notater. Det blir ekstra vanskelig når de norske elevene får en idé knyttet til løsning av et eksempel i boka og vil skrive dette ned med en gang.

I Schoenfelds (1985, s.312) forskning bruker han en figur (se figur 2 i delkapittel. 3.2) for å vise hvordan matematikeren jobber med et vanskelig problem. Det finnes mange små trekanter som representerer matematikerens egne kommentarer vedrørende løsningsprosessen. I motsetning til figur 2, viser figur 3 at de elevene i Schoenfelds forskning som mangler kunnskaper om problemløsning har løst oppgaver på en lineær måte uten en syklus av repetisjoner og noen egne kommentarer. Hvis elevene kan skrive ned egne kommentarer underveis i problemløsningsprosessen til eksempler som den erfarne matematikeren har gjort, så får de god trening i å utvikle sine problemløsningsevner. Et praktisk spørsmål er: Kan norske elever få nok trening i dette om de ikke kan ta notater og skrive ned kommentarer direkte i lærebøkene både i en undervisningssituasjon og under selvlæring?

7.1.3 Læringskultur i bruk av bilder i lærebøkene

Anne Hammer (2005), førstelektor ved høgskolen i Bergen, hevder at i Norge støtter læringskulturer rundt barn og ungdom ikke så mye opp om matematikkmotivasjon. Hammer (2005) skriver at *mens lærere i Norge må jobbe hardt for å gjøre undervisningen interessant og skape motivasjon for barna, har allerede kinesiske skolebarn nok motivasjon for skolearbeid gjennom den kulturen de er oppvokst opp i*. Telhaugs (2008) kulturkonservativ pedagogikk ligner veldig mye på kinesiske læringskulturer fra konfutsianismen som jeg er oppvokst med. Telhaug hevder også at den som lærer kunnskaper, må ha viljen til å lære og jobbe hardt. De kinesiske elevene vet at læring er meningsfullt og at innsats er avgjørende i læringen. Både Pólya (1981) og Schoenfeld (1992) trekker inn problemløserens ønsker, engasjement og interesse som en affektiv dimensjon og faktor for å finne en løsning (se delkapittel 3.1.2). Forskjellige læringskulturer leder til at de norske lærebøkene må være mer tiltrekkende og morsomme for de norske ungdomsskoleelevene. De norske lærebøkene gjenspeiler Hammers teorier tydelig når det gjelder bruk av bilder og grubletegninger. Det finnes informative bilder og grubletegninger som støtter tekster og oppgaver. Det finnes imidlertid også 225 «spennende» dekorative bilder og grubetegninger som bare skaper motivasjon og interesse uten noe matematisk innhold. I de kinesiske lærebøkene, finnes det bare «formelle» informative bilder og kun to dekorative bilder.

7.1.4. Forskjellige formål i bruk av eksempler

Det finnes forskjellige formål i bruk av eksempler i de utvalgte lærebøkene. Først og fremst presenterer eksemplene problemløsning og problemløsningsmetoder. Slike presentasjoner gjennomføres ofte ved bruk av en mekanisk metode - «Tenk på et lignende problem» både i de kinesiske (27%) og norske (51%) lærebøkene. Ifølge Haapasalos (1989, referert i Björkqvist 2003), når læreren underviser slike eksempler med passiv læring, fungere læreren både som en modell for dette og som støtte eller «protese». Det vil si at *eleven har ingen forestilling om hvordan han eller hun kan gå fram i forbindelse med problemløsning, og videre forstår eleven betydning av problemløsning og tør å angripe problemer som virker kjente til en viss grad, ofte som medlem av en gruppe* (1989, referert i Björkqvist 2003, s.65).

Eksempler kan også brukes for å gjennomføre «komparativ studie» (se figur 42 i delkapittel 6.4) eller «sammensatt eksempel» som ofte trenger en kombinasjon av flere metoder for å løse problemet. Slike eksempler finnes både i de kinesiske og norske lærebøkene, men anvendelsen i «komparativ studie» eksempler finnes bare i de kinesiske lærebøkene. «Komparativ studie» eksempler kan bidra i elevers utvikling av flere matematiske kompetanser samtidig. (se diskusjon om eksempelet M i delkapittel 6.4). Slike eksempler la også lærerne få muligheten til å diskutere egenskaper til en type/gruppe matematisk problem eller forskjellige problemløsningsmetoder i et eksempel, med elevene. Kubat (2014, s.100) har hevdet at elever trenger grundigere forklaringer eller påpekning av metodebruk. Elevene bør også få mulighet til å vurdere og diskutere og sammenligne egne og alternative løsningsmetoder (strategier) for et gitt problem. Dette betyr at elevene selv bør prøve å finne egenskapene til denne gruppen problemer, eller velge de mest passende problemløsningsmetodene. De kan også finne ut hvilke metoder som er mest relevante i et gitt tilfelle. Slik aktiv læring og undervisning av problemløsningsmetoder blir påpekt av mange forskere (se del kapittel 3.4.2 og 3.4.3). Blant annet skriver Björkqvist (2003, s.66) at «*En elev som er i stand til å drive med kreativ problemløsning, kan godt trenge tilfeldig støtte eller å få demonstrert spesielle* *løsningsmåter*». Ifølge Haapasalos (1989, referert i Björkqvist 2003), fungerer læreren som en leverandør av problemer eller en som fremmer kreativt elevarbeid i slik aktiv læring. Det vil si at *eleven har en god forestilling om hva problemløsning er, og tør å prøve nye strategier, videre kan eleven er i stand til å velge passende strategier og produserer nye løsningsmåter* (se delkapittel 3.4.2).

I de kinesiske lærebøkene finnes et annet formål i bruk av eksempler, nemlig å presentere det nye stoffet/regelen/formelen ved å vise hvordan man først kan løse et konkret eksempel. Tabell 18 viser hvordan et kapittel introduseres i de norske og kinesiske lærebøkene (se delkapittel 5.2.3). I kapittel 21 forklarer «Matematikk 9A» tema - «kvadratisk likning» ved å skrive ned en kvadratisk likning om forholdet mellom statuens høyde og høyde fra midjen til fotens. I kapittel 22 introduseres tema - «kvadratisk funksjon» ved å skrive ned en formel og tegne grafen til en kvadratisk funksjon for banen til en vannfontene (Bildene se vedlegg 26). I Reinhardtsens (2012, s.67) forskning av de finske lærebøkene i matematikk for 6. klasse - «Min matematikk» (se tabell 6 i delkapittel 3), finnes det også lignende måter å introdusere algebra på.

7.1.5 «Lineære fremgang» og «spiral fremgang»

Tabeller 16 og 17 (se delkapittel 5.2) viser at de kinesiske lærebøkene har bredere matematisk innhold, flere eksempler og høyere vanskelighetsgrad enn de norske. Det er 4% av antall eksempler som har gått gjennom alle fire faser i problemløsningsprosessen i de norske lærebøkene, mens det er 27% i de kinesiske lærebøkene. Samtidig er det 51% av antall eksempler som løses ved bruk av «Tenk på et lignende problem» som kommer direkte til svar i de norske lærebøkene. Dette er nesten dobbelt så stor andel som i de kinesiske lærebøkene. Det finnes 33 «Sammensatte» eksempler i de norske bøkene, mens det finnes 50 i de kinesiske. Det finnes ingen «Komparativ studie» eksempel og beviseeksempel i de norske lærebøkene, men det finnes 14 «Komparativ studie» eksempler og 25 beviseeksempler i de kinesiske lærebøkene. Disse tallene viser at eksempler i de norske lærebøkene gjennomgående er enklere og kortere mens de kinesiske eksemplene er mer komplekse, og bruker flere metoder med varierte kombinasjoner i forskjellige faser.

De kinesiske lærebøkene fokuserer mye på den dype forståelsen av matematikk og av matematiske begreper. Dette vises ved valget av beviseksempler i de kinesiske lærebøkene. Dette blir også bevist av presise og nøyaktige begreper. Definisjonen av "algebra" i «Faktor 8» (Kapittel 6, s. 180-181) er: «*Algebra er regning med tall og variabler*», mens i «Matematikk 8B» (Delkapittel 16.1, s. 4) definerer "algebra" slik: «*Algebra er regning med tall og variabler i bokstavform ved bruk av grunnleggende operasjonelle symboler, som inkludert addisjon,* *subtraksjon, multiplikasjon, divisjon, involusjon og kvadratrot».* Definisjonen av "algebra" i «Faktor 8» er adekvat når det gjelder ungdomskolenivå. Men for elever på videregående skole eller universitetsnivå, er begrepet ikke presist nok. For eksempel handler både sin x og log x om *«regning med tall og variabler»* som akkurat er den definisjonen som står i «Faktor» 8, men en trigonometrisk funksjon og en logaritme er transcendentale, ikke algebraiske.

Kapitlene i de ni kinesiske lærebøkene starter med kapittel **1**fra første år på ungdomsskolen og fortsetter helt til kapittel **29** når ungdomsskolen slutter. Det er sjelden at man finner allerede gjennomgåtte og overlappede innhold i de kinesiske lærebøkene. Tvert imot finnes det ofte gjennomgått innhold før nye kunnskaper skal innlæres i de norske lærebøkene. De tre norske lærebøkene begynner på nytt kapittel i hver bok. Fra diskusjonen ovenfor kan man konkludere med at de kinesiske lærebøkene fokuserer mer på «lineære fremgang», mens de norske lærebøkene er mer fokusert på pedagogikk der elevenes tilegnelse av matematikkunnskaper blir som en «spiral fremgang».

La oss se tilbake på delkapittel 1.2.2 (figur 1 og tabell 1). Det viser seg at i løpet av de siste 30 årene har de norske elevene hatt en «lineære nedgang» i IMO. I 2012 PISA ligger 9% av de norske elevene (Kjærnsli & Jensen, 2016) på høyt nivå, og på lavt nivå ligger 4 % av de kinesiske elevene (Sheng, 2013). Kan de 9% høyt presterende norske elevene få nok utfordringer i læring av problemløsning om de får lærebøker som «Faktor» med «spiral fremgang».? Kan de 4 % lavt presenterte kinesiske elevene få tilpasset opplæring i problemløsning om de får lærebøker som «Matematikk» med «lineære fremgang»? Dette er et dilemma for både norske og kinesiske lærebokforfattere.

7.2 Problemløsning og problemløsningsmetoder i eksemplene og lærebøkene ved bruk av Pólyas fire-fases modell

Lester (1996) hevder at læreren bør fremstille problemløsning eksplisitt og systematisk, og få elevene til å forstå at dette er viktig. Dette er en avgjørende forutsetning for å skape en vellykket undervisning i problemløsning (se delkapittel 3.4.3). Ifølge Carlson & Bloom (2005) og Schoenfeld (1985) bør problemløsning og problemløsningsmetoder presenteres eksplisitt i elevenes læring (se delkapittel 3.2). Både Fan & Zhu (2007) og Kongelf (2011) har også samme oppfatning. I de norske lærebøkene blir problemløsing og problemløsningsmetoder introdusert eksplisitt med eksempler tre ganger i egne delkapitler. Navnet til delkapitlene er «problemløsning» (s.15-16), «problemløsning og likninger» (s.149-150) og «Bruk av formler til problemløsning» (s.206-207). Alle delkapitlene står i «Faktor 10». Der blir følgende problemløsningsmetoder introdusert: løsning ved hjelp av en tabell,

løsning ved hjelp av likning og løsning ved bruk av formler. Det vil si at i de norske lærebøkene blir problemløsningen behandlet som en del av innholdet. Dette ligner på problemløsningspresentasjoner i singaporske lærebøker (Fan & Zhu, 2007, s.71). Fan & Zhu (2007, s.71-72) påpeker også at i de amerikanske lærebøkene blir en samlingsliste av alle problemløsningsmetodene gitt på en gang. Samtidig minner Fan & Zhu om at lærebokforfattere og lærere må være klar over at det eksisterer negative påvirkninger ved presentasjonen av spesifikke heuristiske metoder i lærebøker, Higgins påpeker at *elevene likestiller problemløsing med en liste over spesifikke problemløsningsmetoder og videre behandler metodene som regler*. (Higgins, 1997, referert i Fan and Zhu, 2007).
I praksis læres problemløsning ofte bort som ferdighet i skolen (Branca, 1980 og Stanic & Kilpatrick, 1989). Selv om den kinesiske læreplanen har lagt mer og tydeligere vekt på dette temaet enn den norske læreplanen, finnes det ingen tydelig introduksjon eller navn på problemløsningsmetoder i de kinesiske lærebøkene. Imidlertid presenterer og merker de kinesiske lærebøkene mye mer eksplisitt de fire forskjellige fasene i problemløsningen enn de norske. Det ser ut som om de kinesiske lærebøkene vil hindre elevenes mekaniske tanker om problemløsningen, og ikke vil derfor definere og kombinere problemløsning direkte med spesifikke problemløsningsmetoder.

Vi kan konkludere med at basert på Pólyas fire-fases modell finnes det forskjellige presentasjoner i de norske og kinesiske lærebøkene når det gjelder problemløsning og problemløsningsmetoder. I de norske lærebøkene blir problemløsning og problemløsningsmetoder presentert eksplisitt som en del av innholdet. I de kinesiske lærebøkene blir problemløsningsmetodene integrert i forskjellige faser i problemløsningsprosessen og vist på en skjult måte.

7.3 Bruken av heuristiske metoder i eksemplene

7.3.1 Den mest brukte metoden - «Tenk på et lignende problem»

Både de norske (51%) og kinesiske (27%) lærebøkene bruker den mekaniske metoden - «Tenk på et lignende problem» mest. Hovedgrunnen er at i begge landene etterfølger eksemplene hovedtekstens forklaring for å vise hvordan regler og formler brukes for å løse problemer (oppgaver). Det betyr også at både Kina og Norge fokuserer mye på automatisering av basiskunnskaper ved å kopiere og gjenta bruk av algoritmer/formler/ regler i problemløsning. Ifølge Mayer (1985, referert i Björkqvist 2003) er slike øvelser en av de fire treningene som inkluderer overføringstrening, skjematrening, strategitrening og automatisering av algoritmer og basiskunnskaper. Sammentidig påpeker mange forskere at man bør unngå mekanisk læring i bruk av slike metoder, Blant annet skriver Bergqvist

(2007, s. 368*): Even though imitative reasoning is an obvious part of mathematics, just as memorizing vocabulary is a part of learning a new language, it is not the only part. The students could be given more opportunities to learn creative reasoning and thereby become familiar with the situation of solving unfamiliar tasks.* Dette betyr at bruken av mekaniske metoder som «Tenk på et lignende problem» er nødvendig i elevers læring i problemløsning, men man må få balanse mellom mekanisk pugging og kreativ læring.

I de kinesiske lærebøkene kombineres ofte «Tenk på et lignende problem» og «se tilbake/fremover» i eksemplene (43%, se tabell 28 i delkapittel 7.4). Gjennom «se tilbake/fremover» får elevene veiledning om løsningsmetoden som de har kopiert, f.eks. hvorfor løsningsmetoden i dette problemet er nyttig, hvordan man kan generalisere løsningsmetoden i slike eksempler og hvordan kan man utvidere løsningsmetoden i andre eksempler (se eksempler M i delkapittel 6.4). Slike kombinasjoner av problemløsningsmetoder kan være effektiv og kreativ i elevers læring i problemløsning.

7.3.2 «Analysere og forstå forutsetninger» og «Se tilbake og/eller fremover»

Ifølge Pólyas fire-fases modell er «Analysere og forstå forutsetninger» og «Se tilbake og/eller fremover» to typiske metoder som brukes i den første fasen og den siste fasen.

Tabell 26 viser at «Se tilbake og/eller fremover» (17%) er en av de fire mest brukte metodene i de kinesiske lærebøkene, mens i de norske lærebøkene brukes denne metoden bare 4% av totalt metoder brukt. «Analysere og forstå forutsetninger» brukes av og til i begge landenes lærebøker med bare 7% i de norske og 8% i de kinesiske. Schoenfelds (1985, 1992) påpeker at noen ganger klarer elevene likevel ikke å løse problemet selv om de har nødvendige kunnskaper. Grunnen er at de ofte mangler noen faser i problemløsningsprosessen når de prøver å løse problemet, for eksempel det å analysere forutsetninger for å forstå problemet. I Schoenfelds (1985, 1992) forskning er den største forskjellen mellom den erfarne matematikeren og elevene at matematikeren bruker over halvparten av problemløsningstida i den første fasen for å analysere og forstå forutsetningene. I Carlson & Blooms (2005) forskning analyserer matematikeren forutsetningene flere ganger i løpet av syklusen. Alle matematikerne gjør «se tilbake» i slutten av problemløsningen.

Slik trening er ikke så praktisk for lærebøker. Først og fremst er «syklusen» nesten ikke mulig å bruke i skriftlige form i lærebøker, fordi lærebøkene vanligvis ikke kan lære elevene en ubrukelig tilnærming før en riktig metode. På den andre side er de fleste eksemplene i lærebøkene presentert ved enkelte eksempler som ikke trenger den første og den siste fasen for å løses. I den forstand er rollen som lærebøker kan spille i å lære elevene de to metodene ganske begrenset. Siden både «Analysere og forstå forutsetninger» og «Se tilbake og/eller fremover» er meningsfulle metoder i elevens utvikling av problemløsningskompetanse, ifølge Rezats (2010) «tetraedermodell av lærebokbruk» (se delkapittel 3.4.4), trenger både lærebøkene og lærere å vektlegge på disse to metodene samtidig for å gi elever et godt læringsutbytte.

7.3.3 De ubrukte/sjelden brukte metodene

Blant de 12 heuristiske metodene i kodningslisten, forekommer nesten halvparten av metodene sjelden både i de norske og de kinesiske lærebøkene. Disse fem metodene er: «Se etter et mønster», «Prøv og feil», «Jobb baklengs», «Se problemet fra en annen side» og «Bruk digitale hjelpemidler». Kongelf (2011, s.194) hevder i hans forskning at *hver elev har rett til å vite noe om metodene «Se etter et mønster», «Prøv og feil», «Jobb baklengs»*. Lærebøkene til «faktor 9», som jeg har analysert overlapper med Kongelfs forskning. Mine funn støtter også konklusjonen i Kongelf om at elevene på ungdomsskolen bør få kjennskap til flere metoder og mer varierte kombinasjoner av disse ubrukte/sjelden brukte metodene.

7.4 Hvilken rolle spiller lærebøkene for de ulike prestasjonene i de internasjonale undersøkelsene

Zhang & Kong (2012) har studert Shanghais PISA-suksess. De hevder at hemmeligheten bak Shanghais suksess er en blanding av "tradisjonelle elementer og moderne elementer ". De fokuserer på hele matematikkopplæringen mens forskningen min bare fokuserer på problemløsningsmetodene i lærebøkene. Ifølge Zhang & Kong, så er det viktig å kombinere den tradisjonelle metodiske bruken og den moderne kreative bruken av metodene i lærebøkene.

Både i de kinesiske- og norske lærebøkene fokuserer man mye på automatiseringstrening når det gjelder matematiske basiskunnskaper og regler/formler. Dette blir bevist av at «Tenk på et liknende problem» blir brukt mest både i de norske og kinesiske lærebøkene. Mange forskere påpeker at (se delkapittel 3.1.3) det eksisterer et gap mellom Pólyas generelle heuristikk og anvendelsen av metodene i praktisk læring og undervisning. Som Stanic & Kilpatrick (1989, s. 17) nevner at de generelle heuristiske metodene reduseres ofte til teknikker eller algoritmer som passer spesifikke problemer i lærebøker og klasserom. Ifølge Lithner (2008) hvis lærebøkene som brukes fokuserer for mye på kun imiterende resonnering, så kan det fort bli mekanisk læring og pugging.

Jeg oppdaget to store forskjeller når det gjelder hvordan lærebøkene håndterer videre læring i problemløsningen etter at «Tenk på et liknende problem» har blitt brukt. Det første er at i de kinesiske lærebøkene blir «Tenk på et liknende problem» ofte etterfulgt av «Se tilbake og /eller fremover». Det vil si at elevene får en videre forklaring og veiledning etter «en passiv kopi». Nedenfor har jeg laget en tabell for å vise hvor ofte de to metodene kombineres i problemløsningen. Det er noen eksempler som har forskjellige tall av metodebruk i «Tenk på et liknende problem» og «Se tilbake og /eller fremover», da er det tallet «Se tilbake og /eller fremover» som telles fordi denne metoden er fokus i dette temaet.

Tabell 28. Kombinasjonen mellom «Se tilbake og /eller fremover» og «Tenk på et liknende problem»

Metodebruk	**Norge**	**Kina**
«Tenk på et liknende problem»	256 (100%)	303 (100%)
«Se tilbake og /eller fremover» og «Tenk på et liknende problem» kombineres	21 (8%)	131 (43%)

Tabellen viser at 43% av de kinesiske eksemplene som bruker «Tenk på et liknende problem» er etterfulgt av «Se tilbake og /eller fremover», mens det bare er 8% av de norske eksemplene som har gjort det samme. Dette betyr at kinesiske elever har over 5,4 ganger så stor (andel, ikke antall) muligheter enn de norske elevene til å få nyttig veiledning etter å ha direkte kopiert problemløsning fra tekstdelen.

Den neste store forskjellen er at i de kinesiske lærebøkene blir «Gjør problemet enklere» mye brukt for å aktivere og utvikle de matematiske kunnskapene/reglene/formlene/ og problemløsnings-metodene som elevene har lært gjennom «Tenk på et liknende problem». I «Tenk på et liknende problem» bruker man regler og formler passivt som er direkte kopiert fra tekstdelen. Som jeg har diskutert før, brukes «Gjør problemet enklere» kunnskaper, regler og formler på en kreativ og aktiv måte (se delkapittel 4.3.3) ved utforming av formler, resonnering og bevis, kombinasjon med forskjellige metoder eller bruk av formler under forskjellige forutsetninger. Når de kinesiske eksemplene bruker «Gjør problemet enklere» 20% (totalt 225 ganger brukt) av totalt antall metoder, bruker de norske eksemplene dette bare 5% (totalt 34 ganger brukt). Dette betyr at gjennom eksemplene som står i lærebøkene kan de kinesiske elevene få fire ganger så stor (andel) øvelser som de norske elevene når det gjelder kreativ bruk av regler/formler og resonnering.

Tabell 26 og min observasjon viser at de kinesiske lærebøkene ofte bruker «Tenk på et liknende problem» (27%) i begynnelsen av læringen i problemløsningen. Deretter kommer «Se tilbake og/eller fremover» (17%) med veiledning. Etter det bruker de kinesiske lærebøkene «Gjør problemet enklere» (20%) for å utvikle og utvide det elevene har lært. «Lag en illustrasjon» (16%) brukes også mye som en effektiv metode i problemløsningen. I tillegg brukes det «Analyser og forstå forutsetninger» (8%), «Løs deler av problemet» (6%) og «Lag en systematisk liste og/eller tabell» (4%) av og til. De fire mest brukte metodene i lærebøkene blir delt jevnt og utgjør 80% av totalt metoder brukt.

«Tenk på et liknende problem» (51%) er den mest brukte metoden i de norske lærebøkene som utgjør over halvparten av totalt antall metoder brukt. Dette er 35% prosent høyere enn den nest mest brukte metoden - «Lag en illustrasjon» (17%). Følgende metoder er brukt av og til: «Løs deler av problemet» (8%), «Analyser og forstå forutsetninger» (7%), «Lag en systematisk liste og/eller tabell» (6%), «Gjør problemet enklere» (5%) og «Se tilbake og /eller fremover» (4%). I de norske lærebøkene er metodedelingen skjev og ujevnt med «Tenk på et liknende problem» som dominant.

Niel Egelund (2013), professor i spesialpedagogikk ved Aarhus Universitet, påpeker at det å legge vekt på nok basiskunnskaper har blitt oversett i læring i mange år, men innovative evner og kreativ tenking er basert på og kommer fra nok basiskunnskaper. Schoenfeld (1993, s.352) har også påpekt at det er viktig å ha gode basiskunnskaper for å kunne prestere godt i problemløsning. Egelund (2013) påstår at elevene får lære mange gode kunnskaper som «punkt» i dansk skole, men det mangler et «ledd» som kan binde «disse punktene» sammen på en systematisk måte.

7.5 Begrensninger i forskningsmetoder og forskningen selv

7.5.1 Begrensninger i hoved forskningsmetode

Hovedundersøkelsen min har blitt gjennomført med en kvantitativ metode. Jeg bruker hovedanalyseverktøyet til Kongelf (2011), men det er mange interessante fenomener i den komparative studien min som den ikke kan fange opp. De vesentligste forskjellene mellom de norske og de kinesiske lærebøkene som har blitt presentert overfor (se kapitel 5, delkapittel 7.1 og 7.2), er at de som kommer av min observasjon. Jeg må bruke kvalitative metoder for å finne ut de usynlige egenskaper i lærebøkene fordi hoved analysemetoden min ikke kan ta tak i dette, men muligheten for å trekke generelle konklusjoner fra den kvalitative analysen - hjelpeundersøkelsen, er mindre enn for den kvantitative - hovedundersøkelsen.

7.5.2 Begrensningen i forskningen selv

Howson, (2013, s. 656) skriver: "*Whatever approach to content analysis is used, whatever phenomenon the research is focusing on and whatever theoretical framework is used, it is important to keep in mind that content analysis only reveals opportunities to learn. No inferences about the actual impact of textbooks on instruction or competencies of students may be drawn. The use and impact of textbooks need additional methods*". Ifølge Brousseaus (1997, s.31, referert i Björkqvist, 2003, s.63) «den opplevde konteksten», har forskningen om problemløsning de siste årene nærmet seg et sosiokulturelt paradigme. Han mener at problemløsning er nært knyttet til problemløseren (eleven), læreren, miljøet og prosessen så kalt problemløsning i «den opplevde konteksten».

Ifølge teorier fra Howson (2013), Brousseaus (1997, referert i Björkqvist, 2003) og Björkqvist (2003), eksisterer det derfor en spenning i min forskning mellom problemløsning i den opplevde konteksten og mitt grunnfokus – problemløsning i lærebøkene. Det vil si at det ligger en forventing og begrensing om at forskningsresultatene mine kun skal brukes direkte når det gjelder problemløsning i læreverkene som statisk element, men bare som en referanse for anvendelser med dynamiske elementer, for eksempel lærers undervisning i problemløsning ved bruk av læreverkene og elevenes læring i problemløsning gjennom læreverkene.

Kapittel 8 Oppsummering

8.1 Konklusjon

Problemstillingen min har vært: Hvilke forskjeller og likheter som finnes i eksempler fra norske og kinesiske lærebøker med hensyn til problemløsningsmetoder?

For å besvare problemstillingen har jeg formulert følgende forskningsspørsmål:

1. Hvordan blir Pólyas fire-fases modell presentert i eksemplene i de norske og kinesiske lærebøkene?
2. Hvordan blir problemløsningsmetoder benyttet i eksemplene i de norske og kinesiske lærebøkene?

Jeg har analysert alle 616 eksempler med totalt 1670 problemløsningsmetoder i de ni utvalgte lærebøkene i matematikk for alle tre ungdomstrinnene for å bevare spørsmålene.

Først blir en hjelpeundersøkelse gjennomført. Noen forskjeller til egenskaper mellom de norske og kinesiske lærebøkene er: De kinesiske lærebøkene har flere eksempler og kapitler, og har mer omfattende og dypere temaer enn de norske. Innholdet i de kinesiske lærebøkene legger mye vekt på algebra, mens i de norske lærebøkene er oppdeling av innholdet jevnt fordelt på de tre hovedområdene. De kinesiske lærebøkene er redigert på en måte som gir «lineære fremgang». De norske lærebøkene er bygd som en «spiral fremgang». Det finnes beviseksempler og «komparativ studie» eksempler i de kinesiske lærebøkene, men ikke i de norske. Eksempler i de norske lærebøkene gjennomgående er enklere og kortere, mens de kinesiske eksemplene er mer komplekse, og bruker flere metoder med varierte kombinasjoner. Både de norske og kinesiske bruker eksemplene for å presentere problemløsning og problemløsningsmetoder, men noen eksempler i de kinesiske lærebøkene brukes også for å gjennomføre «komparativ studie» og presentere det nye stoffet/regelen/formelen. Det finnes mange «spennende» dekorative bilder og grubetegninger som bare skaper motivasjon og interesse uten å ha noe matematisk innhold. I de kinesiske lærebøkene, finnes det bare «formelle» informative bilder.

Svaret på problemstillingen: «Hvilke forskjeller og likheter som finnes i eksempler fra norske og kinesiske lærebøker med hensyn til problemløsningsmetoder?» er:

Likheten mellom dem er at både de kinesiske og norske lærebøkene legger mye vekt på trening og automatisering i bruk av regler/formler gjennom løsningen av eksempler. Derfor blir den mekaniske metoden - «Tenk på et liknende problem» brukt mest i læreverkene i begge landene. Bruken av problemløsningsmetoder i eksemplene er veldig ujevnt fordelt i begge landene. Noen få metoder representerte store deler av forekomstene av metodebruk. De fire mest brukte metodene utgjør 80% av den totale metodebruken i de kinesiske lærebøkene, mens i de norske lærebøkene utgjør de 83%. Selv om det finnes flere kapitler, eksempler og problemløsningsmetoder i de kinesiske lærebøkene enn de norske, så har likevel læreverkene i begge landene veldig lignende oppdelingen av eksemplene og problemløsningsmetodene i de tre hovedområdene i læreplanene. Både de norske og kinesiske lærebøkene bruker 67- 74% av eksemplene og 52-59% av problemløsningsmetodene i området – «Tall, algebra og funksjoner». Oppdelingen av eksempler og problemløsningsmetoder i «Geometri og måling» er 22-23% og 31-34%, mens i «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet» er de 4-10% og 10-14%.

Ulikheten mellom dem er at de norske lærebøkene legger mer vekt på eksplisitt presentasjon av problemløsningsmetoder med totalt seks sider og fire eksempler under isolerte temaer av problemløsing og problemløsningsmetoder. En slik presentasjon finnes ikke i de kinesiske lærebøkene. Ved bruk av Pólyas fire-fases modell, ser man at de kinesiske lærebøkene anvender dette veldig eksplisitt i problemløsningsprosessen, men i de norske lærebøkene er denne modellen tilfeldig og lite synlige i eksemplene. I tillegg bruker de kinesiske lærebøkene første fasen – «Forstå problemet» dobbelt så ofte som de norske, og den siste fasen - «Se tilbake» blir brukt seks ganger oftere enn de norske lærebøkene.

De kinesiske lærebøkene presenterer den mest utbredte distribusjonen av metodebruk som omfatter bruk av alle 12 problemløsningsmetodene, og samtidig gjennom en jevn fordeling blant de fire mest brukte metodene og varierte kombinasjoner av forskjellige metoder, klarer de kinesiske lærebøkene å skape en balanse mellom mekanisk pugging og kreative læring. De norske lærebøkene presenterer den mest konsentrerte distribusjonen av den mekaniske metoden - «Tenk på et liknende problem» som utgjør over halvparten av totalt antall metoder brukt. Det vil si at i de norske lærebøkene er denne metoden den dominerende i problemløsningen.

Som vi har diskutert i kapittel 1, har de kinesiske elevene vist et stabilt høyt problemløsningsnivå i over 30 år i IMO og har vært på høyt oppe på rangeringen i PISA siden de begynte å delta. Hvis vi tenker på lærebøkenes sentrale rolle i undervisningen i både norske og kinesiske klasserom, kan man på bakgrunn av de ovennevnte funnene, formode at en mulig faktor til de ulike prestasjonene i de internasjonale undersøkelsene er følgende: De kinesiske lærebøkene har ved å fokusere på bruk av problemløsningsmetoder, skapt en balanse mellom mekanisk pugging og kreative læring som leder til en positiv utvikling av elevenes problemløsningsevner og kreativitet. I de norske lærebøkene trengs det en jevnere fordeling av metodene, og mer varierte kombinasjoner av problemløsningsmetoder. Etter min forståelse er dette «det manglende leddet» (Egelund, 2013) i de norske lærebøkene.

8.2 Fremtidig forskning

Etter at jeg ble ferdig med undersøkelsen, har jeg tenkt på hva som kunne vært gjort annerledes, og hva annet som kunne blitt undersøkt. I de kinesiske lærebøkene reduseres kvantiteten av eksempler og problemløsningsmetoder på det tredje ungdomstrinnet. (se delkapittel 6.3.1). Utviklingen av elevenes problemløsningskompetanse har ikke stoppet siden elevene er høypresenterende i de internasjonale undersøkelsene. Jeg finner ingen litteratur som beskriver og diskuterer dette. Det kan være interessant å gjøre videre forsøke for å finne ut hva er grunnen er til dette fenomenet.

Hvis jeg få sjansen til å gjøre analysen igjen, så vil jeg dele opp metoden- «Tenk på et liknende problem» inn i underkategorier for å undersøke hvilke metoder som blir kopiert oftest i lærebøkene. Jeg vil også dele opp metoden – «se tilbake/fremover» inn i to underkategorier: «se tilbake» og «se fremover». I tillegg vil jeg gjøre videre undersøkelse om kombinasjonen mellom disse metodene. Det kan være interessant å finne ut hvilke metoder kombineres ofte hverandre og hvilken metode som har høyeste konsekvens i kombinasjon.

Jeg har funnet ut at det eksisterer forskjellige oppdelinger i metodebruk når det gjelder til forskjellige hovedtemaer. En liten del av innholdet i de kinesiske lærebøkene er på norske videregående nivå. Jeg har derfor oppdaget at vanskelighetsgraden også kan påvirke metodebruken. Derfor kan det være interessant å undersøke hvilke forskjeller man ser i metodebruk på forskjellige trinn og nivåer. I tillegg kan man også undersøke hvordan ulike problemløsningsmetoder skal innføres og undervises.

Under undersøkelsen finner jeg at det er stor nivåforskjell mellom de kinesiske og de norske oppgavene. Grønmo, Onstad & Pedersen (2010) har påpekt i TIMSS studier at individuelle arbeidsmåter i matematikk overdrives i norsk skole. Dette betyr at oppgaver har blitt brukt mye og er også en veldig viktig del i norske matematikkopplæringen. Det kan også være veldig interessant å sammenligne forskjeller om kognitive krav, vanskelighetsgrad og antall av oppgaver (hjemmelekser) mellom de norske og de kinesiske oppgavene.

Som Howson (2013) og Brousseaus (1997, referert i Björkqvist, 2003) har minnet om - Problemløsningsforskere bør sette seg inn i «den opplevde konteksten». For å finne ut i hvor stor grad en metode som forekommer ofte i læreboka påvirker elevers læring og lærerens undervisning i problemløsning, kan det også være interessant å sammenligne metodebruken i undervisningstimer gjennom observasjon og spørreskjemaer. En slik forskning kan også finne ut hvorfor noen av metodene blir mer brukt og valgt i lærebøkene. Samtidig kunne det være interessant å undersøke flere kinesiske og norske lærebøker som brukes i undervisningen for å sjekke om funnene i min analyse er representative.

Litteraturliste

Aaseth, N. (2016). *Problemløsning i norske og russiske matematikklærebøker for videregående skole* (Masteroppgave). Universitet i Bergen.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching? What makes it special? *Journal of Teacher Education 59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Bergem, O. K. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Oslo: Universitetsforlaget

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *The*

Journal of Mathematical Behavior, 26(4), 348-370. doi: 10.1016/j.jmathb.2007.11.001

Birkeland, P. A., Breiteig, T. & Venheim, R. (2012). *Matematikk for lærere: 2.* Oslo: Universitetsforlaget.

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 51-70). Bergen: Fagbokforlaget.

Boaler, J. (2002) The development of disciplinary relationships: knowledge, practice, and identity in mathematics classrooms. *For the Learning of Mathematics,* 22 (1), 42-47.

Boaler, J. (2003) Studying and capturing the complexity of practice – the case of the 'Dance of Agency'. I N. Pateman, B. Dougherty og J. Zilliox (Red), *Proceedings of the 27th annual conference of the International Group for the Psycology of Mathematics education.* (Vol. 1, s. 3-16) Honolulu, HI: PME.

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact.* Doktoravhandling. Umeå universitet, Umeå. Hentet 14.11.17 fra http://umu.divaportal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:144670

Branca, N. A. (1980). Problem solving as a goal, process, and basic skill. I S. Krulik (Red.), *Problem solving in school mathematics* (s.3-8). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Bryman, A. (2012). *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.

Carlson, M. P. & Bloom, I. (2005). The Cyclic Nature of Problem Solving: An Emergent for videre planlegging og justering - matematikkfaget som kasus. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 45-75. doi: https://doi-org.ezproxy.hioa.no/10.1007/s10649-005-0808-x

Cohen, L., Bell, R. C., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. 7th ed. London: Routledge.

Creswell, J. W. (2012). *Educational research : planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research.* 4th ed. Boston, Mass: Pearson.

Delvin, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking*. Palo Alto, California: Keith Delvin. (s.1-74),

Egelund, N. (2013). 9.z MOD KINA: DR-dokumentar. Sett 8. mars. 2017 fra https://www.youtube.com/watch?v=Z_WSJUNxPZc.

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 61-75. 25. aug. 2017. Hentet fra https://link-springer-com.ezproxy.hioa.no/article/10.1007/s10649-006-9069-6

Fan, L., Zhu, Y. & MIAO, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. ZDM, *Mathematics Education*, 45:633–646. 25. aug. 2017. Hentet fra https://link-springer-com.ezproxy.hioa.no/article/10.1007/s11858-013-0539-x

George Pólya (2018). I *Wikpedia.no*. Hentet 22. april. 2018 fra *https://en.wikipedia.org/wiki/George_P%C3%B3lya*

Grønmo, L. S., (1996). *Forholdet mellom kvalitative og kvantitative tilnærminger i samfunnsforskningen.* Oslo: Universitetsforlaget

Grønmo, L. S., Onstad, T. & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind*. Oslo: Unipub.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika forlag.

Grønmo, L. S., Borge, I. C. & Onstad, T. (2013). Hvor står vi - hvor går vi? I T. Onstad & L. S. Grønmo, (Red.) *Opptur og nedtur: Alalyser av TIMSS-data for Norge og Sverige.* Oslo: Akademika forlag.

Hammer, A. S. E. (2005, 02, oktober). Kinesiske barn - flinkere enn norske? *Bergens Tidende.* Hentet 28. April 2017 fra
http://www.bt.no/btmeninger/kronikk/Kinesiske-barn---flinkere-enn-norske-94515b.html?spid_rel=2

Harder, V. (2013). *Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole* (Masteroppgave). Universitetet i Oslo.

Hitching, G. H. & Mørch, H. W. (2014). Problemløsning i matematikk. I T. S. Gustavsen., K. R. C. Hinna., I. C. Borge & P. S. Andersen (Red)., *QED 5-10: matematikk for grunnskolelærerutdanningen: B.2* (s.745-777). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Hong, D. & Choi, K. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: the case of quadratic equations. *Educational Studies in Mathematics*, 85**,** 241-263. 2. sep. 2017 Hentet fra *https://link-springer-com.ezproxy.hioa.no/article/10.1007/s10649-013-9512-4*

Imo-offcial.org. (2016). *Results-Ranking of countries*. 2. mars 2017 Hentet fra *https://www.imo-official.org/results.aspx*

Jones, K. & Fujita, T. (2013). Interpretations of National Curricula: the case of geometry in textbooks from England and Japan. *ZDM,* 45**,** 671-683. doi: 10.1007/s11858-013-0515-5

Karimzadeh, A. (2014). *Algebra i norske og singaporske matematikklærebøker* (Masteroppgave). Universitetet i Oslo.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Red.), (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (2012). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012,* Oslo: Universitetsforlaget

Kjærnsli, M., Nortvedt, G. & Jensen, F. (2013). *Norske elevers kompetanse i problemløsing i PISA 2012.* Oslo: ILS. Universitetet i Oslo. Hentet 22. januar 2018 https://www.udir.no/globalassets/filer/tall-og-forskning/.../pisa-2012_ps.pdf

Kjærnsli, M og Jensen, F. (red.). (2016). *Stø kurs : norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015.* Oslo: Universitetsforlaget.

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences: research in Nordic and Baltic countries* (s. 155-194). Oslo: Cappelen Damm akademisk..

Kubat, Z. (2014.) *Språkets betydning i matematikkfaget - elevers lesestrategier og løsingsstrategier i arbeid med tekstoppgaver* (Masteroppgave). Norges arktiske universitet.

Kunnskapsdepartementet. (2013). På rett vei: kvalitet og mangfold i fellesskolen. (Melding til Stortinget nr. 20,2012-2013). Oslo: Kunnskapsdepartementet.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju*, Oslo, Gyldendal akademisk.

Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I R. Ahlström & G. R. Emanuelsson (Red.), *Matematik - ett kommunikationsämne.* Mölndal: Nämnaren : Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs Universitet.

Lithner, J. (2003). Student's mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (1), 29–55. doi: 10.1023/a:1023683716659

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. doi: 10.1007/s10649-007-9104-2

Mayer. R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. I E. Silver, (red.). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives.* Hillsdale: Lawrence Erbaum Associate: s.123-138

Ministry of Education of China [MOE]. (2011). *义务教育语文等学科课程标准(2011 年版) [Læreplaner til forskjellige fag for grunnskolen (2011-utg.)]*. Hentet fra http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/s8001/201112/t20111228_167340.html

Ministry of Education of China [MOE]. (2017). *2016 年全国教育事业发展统计公报 (1) [2016 Nasjonal utdanningsstatistikk Bulletin (1)]*. Hentet fra http://www.moe.gov.cn/jyb_sjzl/sjzl_fztjgb/201707/t20170710_309042.html

Ministry of Education of China [MOE]. (2017). *义务教育课程标准教科书（7—9 年级) [De obgatoriske lærebøkene i matematikk for trinnene 7-9 i Kina]*. Hentet fra http://www.moe.gov.cn/jyb_xxgk/zdgk_sxml/sxml_jcjy/jcjy_ywjy/ywjy_kcbz/

National Bureau of Statistics of China. (2017). *普通高等学校在校学生数；普通中学在校学生数；高中在校学生数；初中在校学生数；职业中学在校学生数；普通小学在校学生数；特殊教育学校在校学生数 [Fulltidsstudenter og elever i alle slags skoler over hele landet i 2016, og grunnskoleelever over hele landet i 2016]*. Hentet 8. okt. 2017 fra *http://data.stats.gov.cn/easyquery.htm?cn=C01&zb=A0M08&sj=2016*

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriets forlag.

Nortvedt, G. A. (2013). Matematikk i PISA – matematikkdidaktiske perspektiver. I R. V. Olsen., M. Kjærnsli., G. A. Nortvedt., A. Roe., E. K.Narvhus., A. Eriksen & F. Jensen (Red.), *Fortsatt en vei å gå: norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforlaget.

Nordberg, G., Engstrand, S. (1992). *Problemløsning i matematikk : nye muligheter - nye utfordringer*. Kristiansand: undervisningssektoren i Kristiansand. Pedagogisk Senter

OECD.org. *Hva er PISA?* Hent 28. mars 2017 fra *http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/*

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and analytical framework. Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*, OECD.

Olsen, O. H. I. (2008). *Matematisk modellering: en teoretisk og empirisk belysning av PISA*. Hentet 10. feb. 2018. fra *https://www.duo.uio.no/handle/10852/32343*

Pólya, G. (1973). *How to solve* it (2.utg.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*, New York: Wiley.

Pólya, G. (2009). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2.utg.). New York: Ishi Press International.

Reinhardtsen, J. (2012). *The introduction of algebra : comparative studies of textbooks in Finland, Norway, Sweden and USA*. Masteroppgave. Universitetet i Agder. Hentet 18. feb. 2018. fra *https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/138112*

Resvoll, E. (2014). *Lærebøker i matematikk og læreres bruk av dem: en analyse av karakteristiske trekk ved de mest brukte lærebøkene på ungdomstrinnet og hvordan de blir brukt av tre lærere til palnlegging og gjennomføring av undervisning* (Masteroppgave). Høgskolen i Sør-Trøndelag.

Rezat, S. (2010) The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. Lyon: INRP Hentet 11. november. 2017. fra *http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg7-22-rezat.pdf*

Rezat, S. & Sträßer, R. (2012). From triangle to tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 44 (5), 641–651.

Rezat, S. & Sträßer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education (Nordisk Matematikk Didaktik).* 20. 247-266.

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem-Solving Performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 10***,** 173-187. doi: 10.2307/748805

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. I L. B. Resnick & L. E. Klopfer (Red.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research.* Vancouver: Pacific Educational Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334-370). New York: MacMillan.

Sheng, Z. Y. (2013. 03. desember). 上海又获数学阅读科学三项第一[Shanghai fikk plass 1. igjen i både matematikk, lesing og naturfag]. *China Education Daily*. Hentet 22. aug. 2017 fra *http://paper.jyb.cn/zgjyb/html/2013-12/04/content_335201.htm?div=-1*

Skott, J., Jess, K., & Hansen, H. C. (2008). *Matematik for lærerstuderende Delta Fagdidaktik*. Danmark: Forlaget Samfundslitteratur

Smestad, B. (2011). History of mathematics for primary school teacher education. Or: Can you do something even if you can’t do much? I V. J. Katz & C. Tzanakis (Red.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (s. 201–210): Mathematical Association of America.

Smestad, B. (2016). Matematikkhistorie i matematikkundervisningen? Hvorfor? Og hvordan?. E. K. Hovik & B. Kleve (Red.), *Undervisningskunnskap i matematikk* (s. 117-132). Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Sohu.com. (2017, 20. august). *漂洋过海来虐你！英国将全套引进中国小学生数学教材 [Storbritannia skal importere ett komplett sett kinesisk lærebøker i matematikk for barneskole]*. Hentet 20. okt. 2017 fra *http://www.sohu.com/a/166013531_173903*

Solomon, Y. & Croft, T. (2015). Understanding undergraduate disengagment from mathematics: Addressing alienation. *International Journal of Educational Research* 79, 267-276. Hentet 28. april. 2017 fra *https://dspace.lboro.ac.uk/dspace-jspui/bitstream/2134/20143/3/Solomon%20%26%20Croft%20Undergraduate%20disengagement%20ACCEPTED%20version.pdf*

Solvang, R. (1992). *Matematikk-didaktikk*. Bekkestua: NKI. Solvang (Red.), *Mathema 2000* (s. 111-118). Oslo: NKS-forlaget

Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (1989). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. I R. I. Charles & E. A. Silver (Red.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (s. 1-22). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2009). *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.

Streitlien, Å. (2009) *Hvem får ordet og hvem har svaret? Om elevmedvirkning i matematikkundervisningen*. Oslo: Universitetsforlaget.

Sjøberg, J. (2015. 31. Oktober). Skolen med Ipad til alle. *Aftenposten*. Hentet 10. mai. 2018 fra *https://www.aftenposten.no/okonomi/i/x9zn/Skolen-med-Ipad-til-alle*

Telhaug, A. O. (2008). *Norsk skole i kulturkonservativt perspektiv. Formidling og polemikk* (s. 14-132). Oslo: Abstrakt Forlag.

Utdanningsdirektoratet[Udir]. *Føremål. Læreplan i matematikk fellesfag.* Hentet fra *https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Formaal*

Utdanningsdirektoratet[Udir]. *Kompetansemål etter 10. årssteget. Læreplan i matematikk fellesfag.* Hentet fra *https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget*

Utdanningsdirektoratet[Udir]. G*runnleggende ferdigheter*. *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra *https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter*

Utdanningsdirektoratet[Udir]. *Oversikt over hovudområda*. *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra *https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Hovedomraader*

Utdanningsdirektoratet[Udir]. *Timetal. Læreplan i matematikk fellesfag.* Hentet fra *https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Timetall*

Utdanningsdirektoratet (2017, 28. mars). Mål 3 – flere barn og unge på høyt nivå i realfag. Hentet fra *https://www.udir.no/tall-og-forskning/realfagsbarometeret/mal-3/*

Valenta, A. (2016). Kognitive krav i matematikkoppgaver. Hentet 8. okt 2017 fra *https://www.matematikksenteret.no/grunnskole/kompetanseutvikling/mam/artikler-og-fagtekster*

Veilande, I. (2014). The characteristics of mathematics textbook research: a meta-study of papers from ICME-10, ICME -11, and ICME-12. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences: research in Nordic and Baltic countries* (s. 471-494). Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Viholainen, A., Partanen, M., Piiroinen J., Asikainen, M. & Hirvonen, P. E. (2014). The role of tektbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences: research in Nordic and Baltic countries* (s. 341-362). Oslo: Cappelen Damm akademisk

Waagene, E. & Gjerustad, C. (2015). Valg og bruk av læremidler: Innledende analyser av en spørreundersøkelse til lærere. *NIFU Arbeidsnotat*, 12. Hentet 5.des. 2017 fra https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/297862

Xinhuanet.com. (2017, 16. August). *英国小学教材迎来中国制造" 变学霸不再是梦 [Engelske lærebøker for grunnskole innrømme "Made in China"]*. Hentet 20. okt. 2017 fra http://www.xinhuanet.com/world/2017-08/16/c_129682390.htm

Zhang, M. & Kong, L. (2012). An Exploration of Reasons for Shanghai's Success in the OECD Program for International Student Assessment (PISA) 2009. *Front Educ China* (2012) 7: 124. doi: 10.1007/BF03396938.

Zhu, Y. & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4(4)*, 609-626. doi: 10.1007/s10763-006-9036-9

Bildeliste:

Bilde 1-9. Side 1

Pep.com.cn (2017). *数学 [Matematikk] 7-9.* Hentet 22. aug. 2017 fra http://www.pep.com.cn/products/search/?cid=2,301

Cappelendammundervisning.no (2017). *Faktor 8-10.* Hentet 22. aug. 2017 fra https://www.cappelendammundervisning.no/verk/faktor-106279

Lærebøker

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2014). *Faktor 8 grunnbok* (2. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2014). *Faktor 9 grunnbok* (2. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2014). *Faktor 10 grunnbok* (2. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Li, H. D., Zhang, J. Y., Tian, Z. J., Xue, B., Yu, X. S., Liu, J. Y., … Yuan, S. (2012). *Matematikk 7A oligatoriske lærebok*. Beijing: People's Education Press.

Xue, B., Li, H. D., Li, L. C., Zhang, J. S., Wang, R., Zhang, W. Y., … Lei, X. L. (2012). *Matematikk 7B obligatoriske lærebok.* Beijing: People's Education Press.

Yu, X. S., Xue, B., Song, L. L., Liu, C. M., Li, H. D., Li, L. C., … Feng, W. X. (2013). *Matematikk 8A obligatoriske lærebok*. Beijing: People's Education Press.

Li, L. C., Zhang, J. Y., Yu, Q. S., Zhang, J. S., Tian, Z. J., Wang, R., ... Li, C. G. (2013). *Matematikk 8B obligatoriske lærebok.* Beijing: People's Education Press.

Zhang, J. S., Zhang, J. Y., Xue, B., Yu, Q. S., Li, H. D., Zhang, W. Y., … Huang, B. Y. (2014). *Matematikk 9A obligatoriske lærebok.* Beijing: People's Education Press.

Zhang, J. Y., Zhang, J. S., Song, L. L., Li, L. C., Liu, C. M., Deng, J. H., … Lu., Y. M. (2014). *Matematikk 9B obligatoriske lærebok.* Beijing: People's Education Press.

Liste over figurer

Liste over tabeller

Vedlegg

Vedlegg 1. E-mail fra PEP

Mailen gir meg tillatelsen for å kunne bruke og reprodusere deler av «matematikk» i oppgaven min

SV: 回复：希望我能获得你们的允许，可以在我的硕士论文中使用你们的中学数学教科书
wangcq@pep.com.cn
on. 07.02.2018, 08:51
Til:
kinanor@hotmail.com;

您好！

我们的教材可以在您的硕士论文中引用。

另：人教版初中数学教材的市场占有率每年数据不固定，大约占到全国的百分之六十左右，这个数据并不是官方数据，没有相应的网页或资料考证。

感谢您的来信！

Norsk oversettelse: (Den merkte setningen): Du kan bruke våre lærebøker i masteroppgaven din.

Vedlegg 2. E-mail fra Cappelen Damm

Mailen gir meg tillatelsen for å kunne bruke og reprodusere deler av «faktor» i oppgaven min

Bjørklund, Hilde Margrete <Hilde.Bjorklund@cappelendamm.no>
fr. 26.01.2018, 15:13
Til:
Qin Yan;
Kopi:
Rogstad, Berit;

Hei!

Takk for henvendelsen. Så lenge utdragene fra bøkene kun skal brukes i oppgaven, er det helt uproblematisk. Hvis du senere finner ut at hele eller deler av oppgaven skal publiseres og gjøres tilgjengelig eksternt, er det fint om du kontakter oss igjen.

Si gjerne fra hvis du kommer fram til noen interessante resultater og lykke til med oppgaven!

Med vennlig hilsen
Cappelen Damm Grunnskole
Hilde Bjørklund

Vedlegg 3. De ti serier obgatoriske lærebøkene i matematikk for ungdomsskole i Kina

义务教育课程标准教科书（7—9年级）

学 科	主 编	编写、出版单位	书 名	册 次	使用年级	备 注
数学	马 复	北京师范大学出版社	义务教育教科书 · 数学	七年级上册至九年级下册	七年级至九年级	均有配套教师用书 Den 9. vannlett (merkt som grå farge) er den utvalgte kinesiske serien i oppgaven.
	王燕春	北京教育科学研究院 北京出版社	义务教育教科书 · 数学	七年级上册至九年级下册	七年级至九年级	
	王建磐	华东师范大学出版社	义务教育教科书 · 数学	七年级上册至九年级下册	七年级至九年级	
	杨裕前 董林伟	苏科版初中数学教材编写组 江苏科学技术出版社	义务教育教科书 · 数学	七年级上册至九年级下册	七年级至九年级	
	杨俊英	河北省教育科学研究所 河北教育出版社	义务教育教科书 · 数学	七年级上册至九年级下册	七年级至九年级	
	展 涛	青岛出版社	义务教育教科书 · 数学	七年级上册至九年级下册	七年级至九年级	
	范良火	浙江教育出版社	义务教育教科书 · 数学	七年级上册至九年级下册	七年级至九年级	
	严士健 黄楚芳	湖南教育出版社	义务教育教科书 · 数学	七年级上册至九年级下册	七年级至九年级	
	林 群	人民教育出版社	义务教育教科书 · 数学	七年级上册至九年级下册	七年级至九年级	
	吴之季 苏淳	新时代数学编写组 上海科学技术出版社	义务教育教科书 · 数学	七年级上册至九年级下册	七年级至九年级	

(Moe.gov.cn, 2017)

Vedlegg 4. Analyseskjemaet - «Matematikk» 7A

						"Matematikk" 7A													
						Heuristiske metoder													
						1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Delkap.	Undertema	Eksempel	Side	Analys og fostå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list eller/og tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpemidler	Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
														A	B				
Tall, algebra og funksjon	1. Rasjonelle tall	1.1	Positiv og negativ tall	2	3								2					1	**3**
		1.2	Rasjonelle tall	3	13								3	3				1	**7**
		1.3	Addisjon og subtraksjon av rasjonelle tall	2	18								2					1	**3**
				1	19								1		1			2	**4**
				1	20				1		2				2	1		1	**7**
				4	22								4						**4**
				1	23	1							1					2	**4**
		1.4	Multiplikasjon og divisjon av rasjonelle tall	3	30								3					2	**5**
				1	30								1	1					**2**
				2	31										2			1	**3**
				1	33								1		1	1		2	**5**
				2	34								2						**2**
				2	35k								2					1	**3**
				2	35								2						**2**
				2	36								2						**2**
				1	36-37				2				1	1		1	1		**6**
		1.5	Involusjon av rasjonelle tall	3	42								3						**3**
				1	42				1								2		**3**
				2	43								2						**2**
				1	43-44s	1	3												**4**
				3	45								3						**3**
				4	46				1				4					1	**6**
	2. Algebraisk addition and subtraction	2.1	Algabra utrykk	4	54								4						**4**
				4	55	1			2						4			1	**8**
				5	56-57k								5					1	**6**
				1	58	1			1		1				2				**5**
		2.2	Algebraisk addition and subtraction	3	64								3						**3**
				2	64	1							2			1		1	**5**
				2	65	2							2						**4**
				2	66								2						**2**
				1	67s	1									2				**3**
				2	67	2							2						**4**
				1	68s	2							2			1			**5**
				1	68s	2		1			2		2		2			1	**10**
				1	69								1					1	**2**
	3. Engangsligning	3.1	Fra regningsstykker til ligninger	3	79-80k	3								3				3	**9**
				3	82k	1							3					2	**6**
		3.2	løs engangligning 1	2	87								2						**2**
				1	87	1	1						1					1	**4**
				2	89-90								2						**2**
				1	90	1							1					1	**3**
		3.3	løs engangligning 2	2	94								2						**2**
				1	94-95	1		1					1						**3**
				2	97-98								2						**2**
		3-4	Praktiske problemer og engangligning	1	100	1								1	1			2	**5**
				1	100-101	1		1						1	1			2	**6**
Geometri og måling	4. Grunnleggende geometriske figurer	4.2	Rett linje, ray, linjesegment	1	136	1			1					1	1			1	**5**
				1	136										1			1	**2**
				1	137-138				1					1	1				**3**
				1	138				2					1				1	**4**
				96	SUM	**24**	**4**	**3**	**12**	**0**	**5**	**0**	**78**	**13**	**21**	**5**	**3**	**34**	**202**
				4k og 4s ek	SUM(%)	**11.9%**	**2.0%**	**1.5%**	**5.9%**	**0.0%**	**2.5%**	**0.0%**	**38.6%**	**6.4%**	**10%**	**2.5%**	**1.5%**	**16.8%**	**100.0%**

Vedlegg 5. Analyseskjemaet - «Matematikk» 7B

						Matematikk7 B													
						Heuristiske metoder													
						1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Del kap.	undertema	Eksempel	Side	Analys og forstå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list eller/og tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpemidler	Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
														A	B				
Geometri og måling	5. Kryssende- og parallelle linjer	5.1	Kryssende linjer	1	3				1				3						**4**
				1	7s				1				1	1					**3**
		5.2	Parallelle linjer og	1	14	1			1		1			1				2	**6**
		5.3	Egenskapene til	1	19				1				1	1					**3**
			parallelle linjer	1	21	1			1		1			1				1	**5**
		5.4	Translasjon	1	29	1			2				1	1				1	**6**
Tall, algebra og funksjon	6. Ekte nummer	6.1		3	40								3					1	**4**
				2	42												2	2	**4**
			Kvadratroten	1	43-44	1					1			1	1			1	**5**
				3	45-46								3					3	**6**
				3	46								3					1	**4**
		6.2	Kube rot	3	50								3						**3**
		6.3		4	55								5						**5**
			Ekte nummer	2	56								2						**2**
				2	56								2						**2**
Geometri og måling	7. Rektangulært koordinatsystem	7.1	Rektangulært koordinatsystem	1	67-68k				1				5					1	**7**
		7.2	Enkel anvendelse av koordinatmetode	2	76-77k				3				2	2				3	**10**
Tall, algebra og funksjon	8. System av lineære ligninger i to ukjente	8.2		1	91-92	1					1		1					2	**5**
			Løs binære ligninger -	1	92-93s	1			1		1		1	1				2	**7**
			eliminasjonsmetode	1	95	1					1		1					2	**5**
				1	95-96s	1			1		1		1					1	**5**
		8.4	Løsning ternær	1	104-105	1					1		1					1	**4**
			likning	1	105s	1					1		1						**3**
	9. Ulikhet og ulikhet gruppe	9.1	Ulikhet	4	117-118	1			2				4			2			**9**
				1	119				2					1	1	1		1	**6**
		9.2	Lineær ulikhet i en ukjent	2	122-123				2				2			2		2	**8**
				1	124	1								1	1				**3**
				1	125s	1		1			1			1	1				**5**
		9.3	System av lineær	2	128 s2				2		2		2	2		2		1	**11**
			ulikhet i en ukjent	1	129s	1					1		2		2			1	**7**
Statistikk, kombinatorikk og	10. Datainnsamling, sortering og beskrivelse	10	Histogram	1	148-149s			2	1		1		1					1	**6**
				51	SUM	**14**	**0**	**3**	**22**	**0**	**14**	**0**	**51**	**14**	**6**	**7**	**2**	**30**	**163**
				2k og 7s	SUM(%)	**8.6%**	**0.0%**	**1.8%**	**13.5%**	**0.0%**	**8.6%**	**0.0%**	**31.3%**	**9%**	**4%**	**4.3%**	**1.2%**	**18.4%**	**100.0%**

Vedlegg 6. Analyseskjemaet - «Matematikk» 8A

						"Matematikk" 8A													
						Heuristiske metoder													
						1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Delkap	undertema	Eksempel	Side	Analys og forstå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell eller/og list	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpemidler	Se tilbake eller(og) fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
														A	B				
Geometti og måling	11. Trekanten	11.1	Segmenter relatert til trekant	1	3-4s						1			2	2				**5**
		11.2	Vinkler relatert til trekanten	1	12				1					1					**2**
				1	12s	1			1					2	2			1	**7**
				1	14				1					1					**2**
				1	15				1				1	1				1	**4**
		11.3	Polygoner og deres interne sum	1	22				1				1	1					**3**
				1	23	1			2					1	1	1		2	**8**
	12. Kongruent trekant	12.2	Å bestemme en kongruent trekant	1	36	1			1					1				1	**4**
				1	38	1			1				1	1				2	**6**
				1	40	1			1				1	1					**4**
				1	40-41	1			1				1	1				2	**6**
				1	42				1				1	1					**3**
		12.3	Naturen til vinkel	1	50				1				1	1				1	**4**
	13. Aksesymmetrisk	13.1	Aksesymmetrisk	1	62			1	1		1			1				1	**5**
				1	63	1		1	1		1		1	1				1	**7**
		13.2	Tegn aksisymmetriske figurer	1	67-68	1		1	2		1			1		1		1	**8**
				1	70			2	2		2		2	2				1	**11**
		13.3	Likebent trekant	1	76-77				1				1	1					**3**
				1	78	1			1				1	1					**4**
				1	78			1	1		1			1					**4**
				1	80				1					1				1	**3**
				1	81				1				1	1					**3**
Tall, algebra og funksjon	14. Multiplikasjon og faktorisering av integraluttrykk	14.1	Multiplikasjon av integraluttrykk	4	96								4					1	**5**
				4	96-97								4						**4**
				4	97-98								4						**4**
				2	98-99								2						**2**
				2	100								2					1	**3**
				3	101								3						**3**
				2	103								2						**2**
				3	103-104	1							3						**4**
		14.2	Formeler for multiplikasjon	2	108	1			1				2					1	**5**
				2	108								2					1	**3**
				2	110								2						**2**
				2	110								2					1	**3**
				2	111								2					1	**3**
		14.3	Faktorisering	1	115	1							1					1	**3**
				1	115	1							1					1	**3**
				2	116	2							2						**4**
				2	116-117	2							2					1	**5**
				2	118	1			1				2						**4**
				2	118	2		1					2					1	**6**
	15. Brøkligning	15.1	Brøk	4	128								4						**4**
				2	129-130								4	4				2	**10**
				3	131	1							3					1	**5**
				2	132	1							2					2	**5**
		15.2	Brøkregning	2	136								2					1	**3**
				2	136								2					1	**3**
				1	136-137s				3		2			1	1			1	**8**
				1	138								1					1	**2**
				2	139								2					1	**3**
				2	140								2					1	**3**
				1	141								1					1	**2**
				2	141-142								2						**2**
				4	144								4					1	**5**
				1	145										1			1	**2**
		15.3	Brøkligning	2	151								1						**1**
				1	151				1				1					1	**3**
				1	152	1		1			1			1	1			1	**6**
				1	153	1		1			1			1	1			2	**7**
				100	**SUM**	**24**	**0**	**9**	**30**	**0**	**11**	**0**	**88**	**32**	**9**	**2**	**0**	**43**	**248**
				2s eks.	**SUM(%)**	**9.7%**	**0.0%**	**3.6%**	**12.1%**	**0.0%**	**4.4%**	**0.0%**	**35.5%**	**13%**	**4%**	**0.8%**	**0.0%**	**17.3%**	**100.0%**

Vedlegg 7. Analyseskjemaet - «Matematikk» 8B

						"Matematikk" 8B													
						Heuristiske metoder													
						1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Delkap	undertema	Eksempel	Side	Analys og forstå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell eller/og list	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpe midler	Se tilbake og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
														A	B				
Tall, algebra og funksjon	16.Kvadratisk radikal	16.1	Kvadratisk radikal	1	2								1					1	**2**
				2	3-4								2					1	**3**
				2	4								2					1	**3**
		16.2	Multiplikasjon og divisjon av kvadratisk radikal	2	6								2						**2**
				2	7								2					1	**3**
				3	7								3						**3**
				2	8								2					2	**4**
				2	8								2					1	**3**
				3	9								3			1		2	**6**
				1	9	1									1				**2**
		16.3	Addisjon og subtraksjon av kvadratisk radikal	2	13								2					1	**3**
				2	13								2					2	**4**
				2	14								2					1	**3**
				2	14				1				2					3	**6**
Geometti og måling	17. Pytagoras setning	17.1	Pytagoras setning	1	25	1			1						1				**3**
				1	25				1		1			1	1				**4**
		17.2	Omvendt teori av pythagorasetning	2	32	1						2			2			1	**6**
				1	33	1			1		1				1				**4**
	18.Parallellogram	18.1	Parallellogram	1	42				1				1	1					**3**
				1	44				1				1	1	1				**4**
				1	46				1				1	1				1	**4**
				1	47				1				1	1					**3**
		18.2	Spesielle parallellogrammer	1	53				1				1	1					**3**
				1	54				1				1	1					**3**
				1	56s				1		1			2	2				**6**
				1	57				1					1				1	**3**
				1	58-59				1					1				1	**3**
Tall, algebra og funksjon	19. Lineær funksjon	19. 1	Funksjon	1	73-74s								3					3	**6**
				1	76-77s	1			2					5					**8**
				1	77-78k	1		2	2									5	**10**
				1	80-81s			1	2					3				1	**7**
		19.2	Lineær funksjon	4	87-89k2			4	4									5	**13**
				2	91-92k			2	2									2	**6**
				2	92-93k	1		2	2							1		3	**9**
				1	93-94	1			1					1	1			3	**7**
				1	94-95s	1		1	1					1	1			2	**7**
Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet	20. Dataanalyse	20.1	Vekts tendens av data	1	112-113	1		1			1		2					1	**6**
				1	113-114								1						**1**
				1	115	1		1					1					1	**4**
				1	117s			1					1	1				1	**4**
				1	118	1		1					1					1	**4**
				1	119-120s	2		2	1				3	2			1	1	**12**
		20.2	Varians av data	1	125			1					1				1		**3**
				1	127			1					1						**2**
				64	**SUM**	**14**	**0**	**19**	**30**	**0**	**4**	**2**	**46**	**24**	**11**	**2**	**2**	**49**	**203**
				4k og 7s eks.	**SUM(%)**	**6.9%**	**0.0%**	**9.4%**	**14.8%**	**0.0%**	**2.0%**	**1.0%**	**22.7%**	**11.8%**	**5.4%**	**1.0%**	**1.0%**	**24.1%**	**100.0%**

Vedlegg 8. Analyseskjemaet - «Matematikk» 9A

"Matematikk" 9A																			
						Heuristiske metoder													
						1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Delkap	undertema	Eksempel	Side	Analys og forstå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list eller/og tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpemidler	Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
														A	B				
Tall, algebra og funksjon	21. Kvadratiske ligninger	21.1	Kvadratiske ligninger	1	3								1						**1**
		21.2	Løs kvadratiske ligninger	3	7-9	3							3					1	**7**
				4	11-12								4					1	**5**
				2	14								2			1		1	**4**
				3	16								3						**3**
	22. Kvadratisk funksjon	22.1	Grafen og naturen av kvadratisk funksjon	2	30-32k			2	4		2		2					3	**13**
				2	32-33k			2	3		2		2					2	**11**
				1	35-36s			1	3				2					3	**9**
				1	36-37				1		1			1	1				**4**
		22.2	Kvadratiske funksjoner og kvadratiske ligninger i en ukjent	1	46				1	1				1		1	1	1	**6**
Geometti og måling	23. Rotasjon	23.1	Sirkulær rotasjon	1	60	1			2				1	1				1	**6**
		23.2	Sentral symmetri	1	65-66				2				2						**4**
				1	68				2				1						**3**
Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet	24. sirkel	24.1	Relaterte karakter av sirkel	1	80				1					1					**2**
				1	82-83	1			2		1			1	1				**6**
				1	84				1					1				1	**3**
				1	87s				1		1			1	1				**4**
		24 2	Posisjonsforholdet mellom linjen og sirkelen,og mellom punkt og sirkel	1	98	1			2					1				1	**5**
				1	100s				1				1	1					**3**
		24.3	Vanlige polygoner og sirkler	1	106s				2		1		1	1	1			1	**7**
		24.4	Buelengde og vifteområde	1	111				1		1		1	1					**4**
				1	112-113				2		1		1	1	1				**6**
				1	114				2		1		1	1	2				**7**
	25. Grunnleggende sannsynlighet	25.1	Tilfeldig begivenhet og sannsynlighet	1	131-132s								3						**3**
				1	132s	1			1				3					1	**6**
				1	133	1			1		1			1	2				**6**
		25.2	Bruk opptellingsmetoden til å finne sannsynligheten	1	136s			1							3			1	**5**
				1	136-137s	1		1							3			1	**6**
				1	138-139s	1		1	1						4			1	**8**
				39	SUM	**10**	**0**	**8**	**36**	**1**	**12**	**0**	**34**	**14**	**19**	**2**	**1**	**20**	**157**
				2k og 9s eks.	SUM(%)	**6.4%**	**0.0%**	**5.1%**	**22.9%**	**0.6%**	**7.6%**	**0.0%**	**21.7%**	**9%**	**12%**	**1.3%**	**0.6%**	**12.7%**	**100.0%**

Vedlegg 9. Analyseskjemaet - «Matematikk» 9B

"Matematikk" 9B																			
						Heuristiske metoder													
						1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Delkap	Undertema	Eksempel	Side	Analys og forstå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list eller/og tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpemidler	Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
														A	B				
Tall, algebra og funksjon	26. Invers proporsjonal funksjon	26.1	Invers proporsjonal funksjon	1	3s	1								1	1				**3**
				2	4-6k			2	2		2			2			1	3	**12**
				1	7s									1	1			1	**3**
				1	7-8s				1					2					**3**
		26.2	Praktiske problemmer og invers proporsjonal funksjon	1	12s				1						3				**4**
				1	13s	1								1	2				**4**
				1	14s									2	2			1	**5**
				1	15s				1					1	2			1	**5**
Geometri og måling	27. Likheten	27.1	Lignende figurer	1	26s	1			1					3					**5**
		27.2	Lignende trekant	2	33-34										2			1	**3**
				1	35				1		1			1	1			1	**5**
				1	38s				1		1			1	1				**4**
				1	39-40				1					1	1				**3**
				1	40				1		1			1	1				**4**
				1	40-41	1			2					1	1				**5**
		27.3	Homotetiske figurer	1	49-50	1			1				1					1	**4**
	28. Trigonometrisk funksjon av spisse vinkel	28.1	Trigonometrisk funksjon av spisse vinkel	1	63s				2		2		2					1	**7**
				1	65s				1		1		1						**3**
				2	66								2						**2**
				2	66-67				2						2			1	**5**
		28.2	Løs rettvinklet trekant og dens anvendelse	1	73s				1					1	1				**3**
				1	73s				1					1	2			1	**5**
				1	74-75s	1			2		1			1	2			1	**8**
				1	75s	1			1		1			1	2				**6**
				1	76-77				1		1				2			1	**5**
	29. Projeksjon og visning	29.1	Projeksjon	1	90-91s	2			2					2		1		1	**8**
		29.2	Tre visning	1	96-97	1			4					3				3	**11**
				1	97s	1			2					1				1	**5**
				1	98s	1			4					2					**7**
				1	98-99s				2					1					**3**
				1	99-100	1			3		1			1	1				**7**
				35	SUM	**13**	**0**	**2**	**41**	**0**	**12**	**0**	**6**	**32**	**30**	**1**	**1**	**19**	**157**
			1k og 9s eks.		SUM(%)	**8.3%**	**0.0%**	**1.3%**	**26.1%**	**0.0%**	**7.6%**	**0.0%**	**3.8%**	**20%**	**19%**	**0.6%**	**0.6%**	**12.1%**	**100.0%**

Vedlegg 10. Analyseskjemaet - «Faktor» 8

					"Faktor" 8													
					Heuristiske metoder													
					1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Undertema	Eksempel	Side	Analys og forstå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list, ligning eller tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpe midler	Se tilbake eller(og) fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
													A	B				
Tall, algebra og funksjon	1. Tall og tallforståelse	Naturlige tall	1	9								1						**1**
			1	11								1						**1**
			1	15s								2						**2**
		Desimaltall	1	25								1						**1**
		Overslagsregning	1	29								1						**1**
		Regnerekkefølge	1	37								1						**1**
	2. Brøk	Utviding og forkorting av brøker	2	54								2						**2**
		Vi sammenlikner brøker	1	56						1		1						**2**
		Addsjon og subtraksjon av brøker med lik nevner	2	59								2						**2**
		Addsjon og subtraksjon av brøker med ulik nevner	2	62								2						**2**
		Minste felles multiplum	1	64			1			1		1						**3**
			1	64				1		1		1						**3**
		Uekte brøk og blandet tall	2	67								2						**2**
		Brøk og desimaltall	2	70								2						**2**
			3	71								3						**3**
			1	72								1						**1**
			4	73								4						**4**
		Brøk og multiplikasjon	2	75								2						**2**
			1	76								1						**1**
		Brøk og divisjon	2	78								2						**2**
	3. Prosent	Prosentbegrepet	1	87								1						**1**
		Prosent som brøk	2	91				1				2						**3**
		Prosent av et tall	1	96								1						**1**
		A finne prosenten	1	100								1						**1**
Geometri og måling	4. Geometri	Omkrets	1	123				1				1						**2**
		Omkretsen av en sirkel	1	126				1				1						**2**
		Konstruksjon av trekanter	1	142			1	2				1						**4**
Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet	5. Statistikk	Frekvens	1	155s			1	1				2						**4**
		Stolpediagram	1	158s			1	2				2						**5**
			1	158			1	2				1						**4**
		Ulike sentralmål og variasjonsbredde	1	162			1					1						**2**
			2	163			2	1				2					1	**6**
			1	164			1	1				1					1	**4**
			1	165			1					1						**2**
		Linjediagram	1	169			1	2				1					1	**5**
Tall, algebra og funksjon	6. Tall og algebra	Talluttrykk	2	183								2						**2**
		Uttrykk med variabler	1	186								2						**2**
			1	186								1						**1**
		Setti tall inn i uttrykk	1	189s				1				2						**3**
		Regning med bokstavutrykk	2	191								2						**2**
		Likninger	2	194								2						**2**
			2	195								2					2	**4**
			2	197								2						**2**
			1	199			1					1						**2**
Geometri og måling	7. Måling og enheter	Målestokk	1	213				1				1						**2**
			1	215s				1				2						**3**
		Volum	1	224								2						**2**
		Masse	2	227						1		3						**4**
		Tid	1	230	1					1		1						**3**
		Vei, fart, tid	3	234								3						**3**
			72	SUM	**1**	**0**	**12**	**18**	**0**	**5**	**0**	**80**	**0**	**0**	**0**	**0**	**5**	**121**
			4s eks.		**0.8%**	**0.0%**	**9.9%**	**14.9%**	**0.0%**	**4.1%**	**0.0%**	**66.1%**	**0%**	**0%**	**0.0%**	**0.0%**	**4.1%**	**100.0%**

Vedlegg 11. Analyseskjemaet - «Faktor» 9

Faktor 9																		
					Heuristiske metoder													
					1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Undertema	Eksempel	Side	Analys og forstå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list eller/og tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpe midler	Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
													A	B				
Tall, algebra og funksjon	1. Tall og tallforståelse	Potenser	4	10								4						**4**
			2	12						1		1						**2**
		Kvadrattall	1	14								1						**1**
		Regning med forttegnstall	1	18								1					1	**2**
			6	21								6						**6**
		Forhold	1	24								1					1	**2**
			1	25	1		1			1		1					1	**5**
	2. Algebra	Bokstavuttrykk	1	38								1						**1**
			1	41								1						**1**
			2	43								2						**2**
			5	44								5						**5**
			3	46								3						**3**
		Likninger	4	48								4					1	**5**
			2	49								2					1	**3**
			2	51								2						**2**
			2	53								2				1	1	**4**
		Ulikheter	1	58								1						**1**
Geometri og måling	3. Geometri	Mangekanter	1	71	1					1		1						**3**
		Omkrets og areal av mangekanter	1	73s				1				2						**3**
			1	76s				2				2					1	**5**
			1	78s				1				2						**3**
			1	82s				1				2						**3**
		Omkrets og areal av en sirkel	1	85				2				2					1	**5**
		Pytagoras-setningen	1	90				1				1						**2**
			1	93				1				1						**2**
		Konstruksjon og beregninger	1	97			1	2		1		1	1					**6**
			1	99-100s			1	2		1		3	1					**8**
Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet	4. Statistikk og sannsynlighetsregning	Relativ frekvens	1	125			1	1				1						**3**
			1	128				1				1						**2**
		Sektordiagram	1	131-132s			1	2				1						**4**
		Sentralmål og variasjonsbredde	1	144s								4						**4**
		Antall mulige utfall	1	149	1			1				1						**3**
		Å finne sannaynligheten	1	152s	1			1				3					1	**6**
		Å finne sannaynligheten ved flere hendelser	1	156s	1			1				2						**4**
		Å finne sannaynligheten ved hjelp av multiplikasjon	1	159	1							1						**2**
			1	159	1							1						**2**
Geometri og måling	5. Måling og beregninger	Målestokk	1	177	1			1				1						**3**
			1	180	1			1				1						**3**
			1	182	1			1		1		1						**4**
			1	182	1			1		1		1						**4**
		Volum og overflate	1	186s	1			1				2						**4**
			1	188				1		1		1						**3**
			2	191s				2				2			1		1	**6**
			1	194	1			1		1		1						**4**
Tall, algebra og funksjon	6. Funksjoner	Koordinatsystemet	1	204s				3				4					1	**8**
			1	205s				1				2						**3**
		Formler og funksjoner	1	208s				1				3						**4**
			1	212-213s			1	3		1		2					1	**8**
	7. Økonomi	Prosent og promille	1	227				1				1						**2**
			1	229	1					1		1						**3**
		Merverdiavgift	1	232	1					1		1						**3**
		Rabatt	1	234	1			1		1			1				1	**5**
		Tlbud	1	236	1					1			1					**3**
		Renteregning	1	239				1				1	1				1	**4**
			1	242	1		1											**2**
			1	244						1		1			1			**3**
		Kredittkort	1	246						1								**1**
			80	SUM	**18**	**0**	**7**	**40**	**0**	**16**	**0**	**96**	**5**	**0**	**2**	**1**	**14**	**199**
			15s eks.	SUM (%)	**9.0%**	**0.0%**	**3.5%**	**20.1%**	**0.0%**	**8.0%**	**0.0%**	**48.2%**	**3%**	**0%**	**1.0%**	**0.5%**	**7.0%**	**100.0%**

Vedlegg 12. Analyseskjemaet - «Faktor» 10

									Faktor 10									
					Heuristiske metoder													
					1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	undertema	Eksempel	Side	Forstår og Analyse forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list eller/og tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjøre problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpemidler	Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
													A	B				
Tall, algebra og funksjon	**1. Tall og algebra**	Tallsystemer	2	10								2						**2**
			1	13								1						**1**
		Problemløsning	1	16	1							1						**2**
		Proporsjoner	1	20	1							1		1				**3**
		Regning med variabler	1	24								1						**1**
			2	25								2						**2**
			3	26								3						**3**
		Bokstavuttrykk	3	28								3						**3**
			3	28								3						**3**
			3	29								3						**3**
			3	30-31	3							1		2				**6**
			1	34s								2						**2**
Geometri og måling	**2. Geometri og beregninger**	Pytagoras-setningen	1	45				1				1	1					**3**
			1	46				1				1	1					**3**
		Spesielle trekanter	1	50	1			1				1	1					**4**
			1	51s				1				2	1				1	**5**
			1	52s				1				2	1					**4**
		Konstruksjon og beregninger	1	55-56s			1	2				2	1					**6**
			1	56-58s	2			2		1		2	2	1				**10**
		Formlikhet og kongrugens	1	65	1			2				1	1					**5**
		Kongrugensavbildninger	1	74				2				1						**3**
			1	77			1	2		1		1	1					**6**
			1	80			1	2		1		1	1					**6**
			1	82s				2				2						**4**
Tall, algebra og funksjon	**3. Funksjoner**	Funksjoner i dagliglivet	1	108s	1		1	3				2					1	**8**
		Lineære funksjoner	2	112	2			2		2		2						**8**
			1	115	1			1		1		1						**4**
			1	116				1		1		1						**3**
		Grafen til kvadratiske funksjoner	1	121			1	1		1		1						**4**
		Proporsjonale størrelser	1	125-126s			2	2		2		2	2		1			**11**
	4. Ligning og ulikhet	Å løse likninger	1	143			1					1						**2**
			1	144										1				**1**
			1	146								1						**1**
			1	147										1				**1**
		Problemløsing og likninger	1	150	1									1				**2**
		Grafisk læsing av likninger	1	154	1		1	1				1						**4**
			1	155				2		1			1					**4**
			1	159						1		1						**2**
		To likninger med to ukjente	2	162-163	1		2	2		1		1				1		**8**
		Ulikheter	1	166								1						**1**
			1	169								1						**1**
		Omforming av formler	1	171s				1						2				**3**
Geometri og måling	**5. Romgeometri og massetetthet**	Rett prisme og sylinder	1	184s				1		1		2						**4**
			1	185s				1		1		2						**4**
		Volumet til en pyramide	1	188s	1			3		1		1			1			**7**
		Volumet til en kjegle	1	191				1		1		1						**3**
		Volumet og arealet av overflaten til en kule	1	196s				1				2						**3**
		Massetetthet	1	201			1	1				1					1	**4**
			1	202										1				**1**
			1	202										1				**1**
		Bruk av formler til problemløsing	1	207				1						1				**2**
			1	207										1				**1**
Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet	**6. Statistikk. kombinatorikk og sannsynlighet**	Kombinatorikk	2	234	2			1				2						**5**
			2	241	2			1				2						**5**
		Vanlige feil i sannsynlighetsregning	1	251								1						**1**
Tall, algebra og funksjon	**7. Økonomi**	Lønn og skatt	1	265								1						**1**
			1	267	1		1					1						**3**
			1	268			1			1		1						**3**
		Lån og kredittkort	1	272-273s						1		4	1					**6**
			1	274	1					1		1						**3**
			1	274	1					1			1					**3**
		Valuta	1	284								1						**1**
			1	286								1						**1**
			79	SUM	**24**	**0**	**14**	**46**	**0**	**21**	**0**	**80**	**16**	**13**	**2**	**1**	**3**	**220**
			14s eks.	SUM(%)	**10.9%**	**0.0%**	**6.4%**	**20.9%**	**0.0%**	**9.5%**	**0.0%**	**36.4%**	**7%**	**6%**	**0.9%**	**0.5%**	**1.4%**	**100.0%**

Vedlegg 13. Metodbruk i «Tall, algebra og funksjoner» fra «Faktor»

Metodebruk i Tall, algebra og funksjon i "Faktor"																		
					Heuristiske metoder													
					1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	undertema	Eksempel	Side	Forstår og Analyse forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list eller/og tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjøre problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpemidler	Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
													A	B				
Tall, algebra og funksjon	1. Tall og tallforståelse	Naturlige tall	1	9								1						**1**
			1	11								1						**1**
			1	15s								2						**2**
		Desimaltall	1	25								1						**1**
		Overslagsregning	1	29								1						**1**
		Regnerekkefølge	1	37								1						**1**
	2. Brøk	Utviding og forkorting av brøker	2	54								2						**2**
		Vi sammenlikner brøker	1	56						1		1						**2**
		Addsjon og subtraksjon av brøker	2	59								2						**2**
		Addsjon og subtraksjon av brøker	2	62								2						**2**
		Minste felles multiplum	1	64			1			1		1						**3**
			1	64				1		1		1						**3**
		Uekte brøk og blandet tall	2	67								2						**2**
		Brøk og desimaltall	2	70								2						**2**
			3	71								3						**3**
			1	72								1						**1**
			4	73								4						**4**
		Brøk og multiplikasjon	2	75								2						**2**
			1	76								1						**1**
		Brøk og divisjon	2	78								2						**2**
	3. Prosent	Prosentbegrepet	1	87								1						**1**
		Prosent som brøk	2	91				1				2						**3**
		Prosent av et tall	1	96								1						**1**
		A finne prosenten	1	100								1						**1**
	6. Tall og algebra	Talluttrykk	2	183								2						**2**
		Uttrykk med variabler	1	186								2						**2**
			1	186								1						**1**
		Setti tall inn i uttrykk	1	189s				1				2						**3**
		Regning med bokstavutrykk	2	191								2						**2**
		Likninger	2	194								2						**2**
			2	195								2					2	**4**
			2	197								2						**2**
			1	199			1					1						**2**
	1. Tall og tallforståelse	Potenser	4	10								4						**4**
			2	12						1		1						**2**
		Kvadrattall	1	14								1						**1**
		Regning med forttegnstall	1	18								1					1	**2**
			6	21								6						**6**
		Forhold	1	24								1					1	**2**
			1	25	1		1			1		1					1	**5**
	2. Algebra	Bokstavuttrykk	1	38								1						**1**
			1	41								1						**1**
			2	43								2						**2**
			5	44								5						**5**
			3	46								3						**3**
		Likninger	4	48								4					1	**5**
			2	49								2					1	**3**
			2	51								2						**2**
			2	53								2				1	1	**4**
		Ulikheter	1	58								1						**1**
	6. Funksjoner	Koordinatsystemet	1	204s				3				4					1	**8**
			1	205s				1				2						**3**
		Formler og funksjoner	1	208s				1				3						**4**
			1	212-213s			1	3		1		2					1	**8**
	7. Økonomi	Prosent og promille	1	227				1				1						**2**
			1	229	1					1		1						**3**
		Merverdiavgift	1	232	1					1		1						**3**
		Rabatt	1	234	1			1		1			1				1	**5**
		Tlbud	1	236	1					1			1					**3**
		Renteregning	1	239				1				1	1				1	**4**
			1	242	1		1											**2**
			1	244						1		1			1			**3**
		Kredittkort	1	246						1								**1**
	1. Tall og algebra	Tallsystemer	2	10								2						**2**
			1	13								1						**1**
		Problemløsning	1	16	1							1						**2**
		Proporsjoner	1	20	1							1		1				**3**
		Regning med variabler	1	24								1						**1**
			2	25								2						**2**
			3	26								3						**3**
		Bokstavuttrykk	3	28								3						**3**
			3	28								3						**3**
			3	29								3						**3**
			3	30-31	3							1		2				**6**
			1	34s								2						**2**
	3. Funksjoner	Funksjoner i dagliglivet	1	108s	1		1	3				2					1	**8**
		Lineære funksjoner	2	112	2			2		2		2						**8**
			1	115	1			1		1		1						**4**
			1	116				1		1		1						**3**
		Grafen til kvadratiske funksjoner	1	121			1	1		1		1						**4**
		Proporsjonale størrelser	1	125-126s			2	2		2		2	2		1			**11**
	4. Ligning og ulikhet	Å løse likninger	1	143			1					1						**2**
			1	144										1				**1**
			1	146								1						**1**
			1	147										1				**1**
		Problemløsing og likninger	1	150	1									1				**2**
		Grafisk læsing av likninger	1	154	1		1	1				1						**4**
			1	155				2		1			1					**4**
			1	159						1		1						**2**
		To likninger med to ukjente	2	162-163	1		2	2		1		1				1		**8**
		Ulikheter	1	166								1						**1**
			1	169								1						**1**
		Omforming av formler	1	171s				1						2				**3**
	7. Økonomi	Lønn og skatt	1	265								1						**1**
			1	267	1		1					1						**3**
			1	268			1			1		1						**3**
		Lån og kredittkort	1	272-273s						1		4	1					**6**
			1	274	1					1		1						**3**
			1	274	1					1			1					**3**
		Valuta	1	284								1						**1**
			1	286								1						**1**
			155	SUM	**21**	**0**	**15**	**30**	**0**	**26**	**0**	**157**	**8**	**8**	**2**	**2**	**13**	**282**
			14s eks.	SUM(%)	**7.4%**	**0.0%**	**5.3%**	**10.6%**	**0.0%**	**9.2%**	**0.0%**	**55.7%**	**3%**	**3%**	**0.7%**	**0.7%**	**4.6%**	**100.0%**

Vedlegg 14. Metodbruk av «Geometri og måling» i «Fator»

Metodebruk i Geometri og måling i "Faktor"																		
					Heuristiske metoder													
					1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	undertema	Eksempel	Side	Forstår og Analyse forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list eller/og tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjøre problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpemidler	Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
													A	B				
Geometri og måling	**2. Geometri og beregninger**	Pytagoras-setningen	1	45				1				1	1					**3**
			1	46				1				1	1					**3**
		Spesielle trekanter	1	50	1			1				1	1					**4**
			1	51s				1				2	1				1	**5**
			1	52s				1				2	1					**4**
		Konstruksjon og beregninger	1	55-56s			1	2				2	1					**6**
			1	56-58s	2			2		1		2	2	1				**10**
		Formlikhet og kongrugens	1	65	1			2				1	1					**5**
		Kongrugensavbildninger	1	74				2				1						**3**
			1	77			1	2		1		1	1					**6**
			1	80			1	2		1		1	1					**6**
			1	82s				2				2						**4**
	5. Romgeometri og massetetthet	Rett prisme og sylinder	1	184s				1		1		2						**4**
			1	185s				1		1		2						**4**
		Volumet til en pyramide	1	188s	1			3		1		1			1			**7**
		Volumet til en kjegle	1	191				1		1		1						**3**
		Volumet og arealet av overflaten til en kule	1	196s				1				2						**3**
		Massetetthet	1	201			1	1				1					1	**4**
			1	202										1				**1**
			1	202										1				**1**
		Bruk av formler til problemløsing	1	207				1						1				**2**
			1	207										1				**1**
	3. Geometri	Mangekanter	1	71	1					1		1						**3**
		Omkrets og areal av mangekanter	1	73s				1				2						**3**
			1	76s				2				2					1	**5**
			1	78s				1				2						**3**
			1	82s				1				2						**3**
		Omkrets og areal av en sirkel	1	85				2				2					1	**5**
		Pytagoras-setningen	1	90				1				1						**2**
			1	93				1				1						**2**
		Konstruksjon og beregninger	1	97			1	2		1		1	1					**6**
			1	99-100s			1	2		1		3	1					**8**
	5. Måling og beregninger	Målestokk	1	177	1			1				1						**3**
			1	180	1			1				1						**3**
			1	182	1			1		1		1						**4**
			1	182	1			1		1		1						**4**
		Volum og overflate	1	186s	1			1				2						**4**
			1	188				1		1		1						**3**
			2	191s				2				2			1		1	**6**
			1	194	1			1		1		1						**4**
	7. Måling og enheter	Målestokk	1	213				1				1						**2**
			1	215s				1				2						**3**
		Volum	1	224								2						**2**
		Masse	2	227						1		3						**4**
		Tid	1	230	1					1		1						**3**
		Vei, fart, tid	3	234								3						**3**
	4. Geometri	Omkrets	1	123				1				1						**2**
		Omkretsen av en sirkel	1	126				1				1						**2**
		Konstruksjon av trekanter	1	142			1	2				1						**4**
			53	SUM	**13**	**0**	**7**	**56**	**0**	**16**	**0**	**68**	**13**	**5**	**2**	**0**	**5**	**185**
			14s eks.	SUM(%)	**7.0%**	**0.0%**	**3.8%**	**30.3%**	**0.0%**	**8.6%**	**0.0%**	**36.8%**	**7%**	**3%**	**1.1%**	**0.0%**	**2.7%**	**100.0%**

Vedlegg 15. Metodbruk av «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet» i «Fator»

Metodebruk i statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet i "Faktor" 8																		
					statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet i													
					1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Undertema	Eksempel	Side	Analys og forstå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list, ligning eller tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpe midler	Se tilbake eller(og) fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
													A	B				
Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet	5. Statistikk	Frekvens	1	155s			1	1				2						**4**
		Stolpediagram	1	158s			1	2				2						**5**
			1	158			1	2				1						**4**
		Ulike sentralmål og variasjonsbredde	1	162			1					1						**2**
			2	163			2	1				2					1	**6**
			1	164			1	1				1					1	**4**
			1	165			1					1						**2**
		Linjediagram	1	169			1	2				1					1	**5**
	4. Statistikk og sannsynlighetsregning	Relativ frekvens	1	125			1	1				1						**3**
			1	128				1				1						**2**
		Sektordiagram	1	131-132s			1	2				1						**4**
		Sentralmål og variasjonsbredde	1	144s								4						**4**
		Antall mulige utfall	1	149	1			1				1						**3**
		Å finne sannaynligheten	1	152s	1			1				3					1	**6**
		Å finne sannaynligheten ved flere hendelser	1	156s	1			1				2						**4**
		Å finne sannaynligheten ved hjelp av multiplikasjon	1	159	1							1						**2**
			1	159	1							1						**2**
	6. Statistikk. kombinatorikk og sannsynlighe	Kombinatorikk	2	234	2			1				2						**5**
			2	241	2			1				2						**5**
		Vanlige feil i sannsynlighetsregning	1	251								1						**1**
			23	SUM	**9**	**0**	**11**	**18**	**0**	**0**	**0**	**31**	**0**	**0**	**0**	**0**	**4**	**73**
			4s eks.		**12.3%**	**0.0%**	**15.1%**	**24.7%**	**0.0%**	**0.0%**	**0.0%**	**42.5%**	**0%**	**0%**	**0.0%**	**0.0%**	**5.5%**	**100.0%**

Vedlegg 16. Metodbruk i «Tall, algebra og funksjoner» fra «Matematikk»

Metodebruk i tall, algebra og funksjoner

Heuristiske metoder

Hovedtema	Kapittel	Delkap.	Undertema	Eksempel	Side	1 Analys og forstå forutsetninger	2 Se etter et mønster	3 Lag en systematisk list eller/og tabell	4 Lag en illustrasjon	5 Prøv og feil	6 Løs deler av problemet	7 Jobb baklengs	8 Tenk på et lignende problem	9 Gjør problemet enklere A	9 B	10 Se problemet fra en annen side	11 Bruk av digitale hjelpemidler	12 Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
Tall, algebra og funksjoner	1. Rasjonelle tall	1.1	Positiv og negativ tall	2	3								2					1	**3**
		1.2	Rasjonelle tall	3	13								3	3				1	**7**
		1.3	Addisjon og subtraksjon av rasjonelle tall	2	18								2					1	**3**
				1	19								1		1			2	**4**
				1	20				1		2				2	1		1	**7**
				4	22								4						**4**
				1	23	1							1					2	**4**
		1.4	Multiplikasjon og divisjon av rasjonelle tall	3	30								3					2	**5**
				1	30								1	1					**2**
				2	31										2			1	**3**
				1	33								1		1	1		2	**5**
				2	34								2						**2**
				2	35								2					1	**3**
				2	35								2						**2**
				2	36								2						**2**
				1	36-37				2				1	1		1	1		**6**
		1.5	Involusjon av rasjonelle tall	3	42								3						**3**
				1	42				1								2		**3**
				2	43								2						**2**
				1	43-44	1	3												**4**
				3	45								3						**3**
				4	46				1				4					1	**6**
	2. Algebraisk addition and subtraction	2.1	Algabra utrykk	4	54								4						**4**
				4	55	1			2						4			1	**8**
				5	56-57								5					1	**6**
				1	58	1			1		1				2				**5**
		2.2	Algebraisk addition and subtraction	3	64								3						**3**
				2	64	1							2			1		1	**5**
				2	65	2							2						**4**
				2	66								2						**2**
				1	67	1									2				**3**
				2	67	2							2						**4**
				1	68	2							2			1			**5**
				1	68	2		1			2		2		2			1	**10**
				1	69								1					1	**2**
	3. Engangsligning	3.1	Fra regningsstykker til ligninger	3	79-80	3								3				3	**9**
				3	82	1							3					2	**6**
		3.2	løs enganligning 1	2	87								2						**2**
				1	87	1	1						1					1	**4**
				2	89-90								2						**2**
				1	90	1							1					1	**3**
		3.3	løs enganligning 2	2	94								2						**2**
				1	94-95	1		1					1						**3**
				2	97-98								2						**2**
		3-4	Praktiske problemer og engangligning	1	100	1								1	1			2	**5**
				1	100-101	1		1						1	1			2	**6**
	6. Ekte nummer	6.1	Kvadratroten	3	40								3					1	**4**
				2	42												2	2	**4**
				1	43-44	1					1			1	1			1	**5**
				3	45-46								3					3	**6**
				3	46								3					1	**4**
		6.2	Kubikkrot	3	50								3						**3**
		6.3	Ekte nummer	4	55								5						**5**
				2	56								2						**2**
				2	56								2						**2**
	8. System av lineære ligninger i to ukjente	8.2	Løs binære ligninger - eliminasjonsmetode	1	91-92	1					1		1					2	**5**
				1	92-93	1			1		1		1	1				2	**7**
				1	95	1					1		1					2	**5**
				1	95-96	1			1		1		1					1	**5**
		8.4	Løsning ternær likning	1	104-105	1					1		1					1	**4**
				1	105	1					1		1						**3**
	9. Ulikhet og ulikhet gruppe	9.1	Ulikhet	4	117-118	1			2				4			2			**9**
				1	119				2					1	1	1		1	**6**
		9.2	Lineær ulikhet i en ukjent	2	122-123				2				2			2		2	**8**
				1	124	1								1	1				**3**
				1	125	1		1			1			1	1				**5**
		9.3	System av lineær ulikhet i en ukjent	2	128				2		2		2	2		2		1	**11**
				1	129	1					1		2		2			1	**7**
	14. Multiplikasjon og faktorisering av integraluttrykk		Multiplikasjon av integraluttrykk	4	96								4					1	**5**
				4	96-97								4						**4**
				4	97-98								4						**4**
				2	98-99								2						**2**
				2	100								2					1	**3**
				3	101								3						**3**
				2	103								2						**2**
				3	103-104	1							3						**4**
			Formler for multiplikasjon	2	108	1			1				2					1	**5**
				2	108								2					1	**3**
				2	110								2						**2**
				2	110								2					1	**3**
				2	111								2					1	**3**
			Faktorisering	1	115	1							1					1	**3**
				1	115	1							1					1	**3**
				2	116	2							2						**4**
				2	116-117	2							2					1	**5**
				2	118	1			1				2						**4**
				2	118	2		1					2					1	**6**
	15. Brøkligning		Brøk	4	128								4						**4**
				2	129-130								4	4				2	**10**
				3	131	1							3					1	**5**
				2	132	1							2					2	**5**
			Brøkregning	2	136								2					1	**3**
				2	136								2					1	**3**
				1	136-137				3		2			1	1			1	**8**
				1	138								1					1	**2**
				2	139								2					1	**3**
				2	140								2					1	**3**
				1	141								1					1	**2**
				2	141-142								2						**2**
				4	144								4					1	**5**
				1	145										1			1	**2**
			Brøkligning	2	151								1						**1**
				1	151				1				1					1	**3**
				1	152	1		1			1			1	1			1	**6**
				1	153	1		1			1			1	1			2	**7**
	16.Kvadratisk radikal	16.1	Kvadratisk radikal	1	2								1					1	**2**
				2	3-4								2					1	**3**
				2	4								2					1	**3**
		16.2	Multiplikasjon og divisjon av kvadratisk radikal	2	6								2						**2**
				2	7								2					1	**3**
				3	7								3						**3**
				2	8								2					2	**4**
				2	8								2					1	**3**
				3	9								3			1		2	**6**
				1	9	1									1				**2**
		16.3	Addisjon og subtraksjon av kvadratisk radikal	2	13								2					1	**3**
				2	13								2					2	**4**
				2	14								2					1	**3**
				2	14				1				2					3	**6**
	19. Lineær funksjon	19. 1	Funksjon	1	73-74								3					3	**6**
				1	76-77	1			2					5					**8**
				2	77-78	1		2	2									5	**10**
				1	80-81			1	2					3				1	**7**
		19.2	Lineær funksjon	4	87-89			4	4									5	**13**
				2	91-92			2	2									2	**6**
				2	92-93	1		2	2							1		3	**9**
				1	93-94	1			1					1	1			3	**7**
				1	94-95	1		1	1					1	1			2	**7**
	21. Kvadratiske ligninger	21.1	Kvadratiske ligninger	1	3								1						**1**
		21.2	Løs kvadratiske ligninger	3	7-9	3							3					1	**7**
				4	11-12								4					1	**5**
				2	14								2			1		1	**4**
				3	16								3						**3**
	22. Kvadratisk funksjon	22.1	Grafen og naturen av kvadratisk funksjon	2	30-32			2	4		2		2					3	**13**
				2	32-33			2	3		2		2					2	**11**
				1	35-36			1	3				2					3	**9**
				1	36-37				1		1			1	1				**4**
		22.2	Kvadratiske funksjoner og kvadratiske ligninger i en ukjent	1	46				1	1				1		1	1	1	**6**
	26. Invers proporsjonal funksjon	26.1	Invers proporsjonal funksjon	1	3	1								1	1				**3**
				2	4-6			2	2		2			2			1	3	**12**
				1	7									1	1			1	**3**
				1	7-8				1					2					**3**
		26.2	Praktiske problemmer og invers proporsjonal funksjon	1	12				1						3				**4**
				1	13	1								1	2				**4**
				1	14									2	2			1	**5**
				1	15				1					1	2			1	**5**
				283	SUM	**60**	**4**	**26**	**58**	**1**	**27**	**0**	**239**	**46**	**43**	**16**	**7**	**138**	**665**
					SUM(%)	**9.0%**	**0.6%**	**3.9%**	**8.7%**	**0.2%**	**4.1%**	**0.0%**	**35.9%**	**6.9%**	**6.5%**	**2.4%**	**1.1%**	**20.8%**	**100.0%**

Vedlegg 17. Metodbruk av «Geometri og måling» i «Matematikk»

						Metodebruk i geometri og måling													
						Heuristiske metoder													
						1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Delkap.	Undertema	Eksempel	Side	Analys og fostå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list eller/og tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpemidler	Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
7A														**A**	**B**				
Geometri og måling	4. Grunnleggende geometriske figurer	4.2		1	136	1			1					1	1			1	**5**
			Rett linje, ray, linjesegment	1	136										1			1	**2**
				1	137-138				1					1	1				**3**
				1	138				2					1				1	**4**
7B		5.1	Kryssende linjer	1	3				1				3						**4**
				1	7				1				1	1					**3**
	5. Kryssende- og parallelle linjer	5.2	Parallelle linjer og deres vurdering	1	14	1			1		1			1				2	**6**
		5.3	Egenskapene til parallelle linjer	1	19				1				1	1					**3**
				1	21	1			1		1			1				1	**5**
		5.4	Translasjon	1	29	1			2				1	1				1	**6**
	7. Rektangulært koordinatsystem	7.1	Rektangulært koordinatsystem	1	67-68				1				5					1	**7**
		7.2	Enkel anvendelse av koordinatmetode	2	76-77				3				2	2				3	**10**
8A	11. Trekanten	11.1	Segmenter relatert til trekant	1	3-4						1			2	2				**5**
		11.2		1	12				1					1					**2**
			Vinkler relatert til trekanten	1	12	1			1					2	2			1	**7**
				1	14				1					1					**2**
				1	15				1				1	1				1	**4**
		11.3	Polygoner og deres interne sum	1	22				1				1	1					**3**
				1	22-23	1			2					1	1	1		2	**8**
	12. Kongruent trekant	12.2		1	36	1			1					1				1	**4**
			Å bestemme en kongruent trekant	1	38	1			1				1	1				2	**6**
				1	40	1			1				1	1					**4**
				1	40-41	1			1				1	1				2	**6**
				1	42				1				1	1					**3**
		12.3	Naturen til vinkel bisector	1	50				1				1	1				1	**4**
	13. Aksesymmetrisk	13.1	Aksesymmetrisk	1	62			1	1		1			1				1	**5**
				1	63	1		1	1		1		1	1				1	**7**
		13.2	Tegn aksisymmetriske	1	67-68	1		1	2		1			1		1		1	**8**
				1	70			2	2		2		2	2				1	**11**
		13.3		1	76-77				1				1	1					**3**
				1	78	1			1				1	1					**4**
			Likebent trekant	1	78			1	1		1			1					**4**
				1	80				1					1				1	**3**
				1	81				1				1	1					**3**
8B	17. Pytagoras setning	17.1	Pytagoras setning	1	25	1			1						1				**3**
				1	25				1		1			1	1				**4**
		17.2	Omvendt teori av pythagorasetning	1	32	1						2			2			1	**6**
				1	33	1			1		1				1				**4**
	18.Parallellogram	18.1	Parallellogram	1	42				1				1	1					**3**
				1	44				1				1	1	1				**4**
				1	46				1				1	1				1	**4**
				1	47				1				1	1					**3**
		18.2	Spesielle parallellogrammer	1	53				1				1	1					**3**
				1	54				1				1	1					**3**
				1	56				1		1			2	2				**6**
				1	57				1					1				1	**3**
				1	58-59				1					1				1	**3**
9A	23. Rotasjon	23.1	Sirkulær rotasjon	1	60	1			2				1	1				1	**6**
		23.2	Sentral symmetri	1	65-66				2				2						**4**
				1	68				2				1						**3**
		24.1	Relaterte karakter av sirkel	1	80				1					1					**2**
				1	82-83	1			2		1			1	1				**6**
				1	84				1					1				1	**3**
				1	87s				1		1			1	1				**4**
		24 2	Posisjonsforholdet mellom linjen og	1	98	1			2					1				1	**5**
	24. sirkel			1	100s				1				1	1					**3**
		24.3	Vanlige polygoner og sirkler	1	106s				2		1		1	1	1			1	**7**
		24.4	Buelengde og vifteområde	1	111				1		1		1	1					**4**
				1	112-113				2		1		1	1	1				**6**
				1	114				2		1		1	1	2				**7**
9B	27. Likheten	27.1	Lignende figurer	1	26	1			1					3					**5**
		27.2		2	33-34										2			1	**3**
			Lignende trekant	1	35				1		1			1	1			1	**5**
				1	38				1		1			1	1				**4**
				1	39-40				1					1	1				**3**
				1	40				1		1			1	1				**4**
				1	40-41	1			2					1	1				**5**
		27.3	Homotetiske figurer	1	49-50	1			1				1					1	**4**
	28. Trigonometrisk funksjon av spisse vinkel	28.1	Trigonometrisk funksjon av spisse vinkel	1	63				2		2		2					1	**7**
				1	65				1		1		1						**3**
				2	66								2						**2**
				2	66-67				2						2			1	**5**
		28.2		1	73				1					1	1				**3**
			Løs rettvinklet trekant og dens anvendelse	1	73				1					1	2			1	**5**
				1	74-75	1			2		1			1	2			1	**8**
				1	75	1			1		1			1	2				**6**
				1	76-77				1		1				2			1	**5**
	29. Projeksjon og visning	29.1	Projeksjon	1	90-91	2			2					2		1		1	**8**
		29.2		1	96-97	1			4					3				3	**11**
				1	97	1			2					1				1	**5**
			Tre visning	1	98	1			4					2					**7**
				1	98-99				2					1					**3**
				1	99-100	1			3		1			1	1				**7**
				87	SUM	**30**	**0**	**6**	**108**	**0**	**28**	**2**	**47**	**79**	**41**	**3**	**0**	**47**	**391**
				3s eks.	SUM(%)	**7.7%**	**0.0%**	**1.5%**	**27.6%**	**0.0%**	**7.2%**	**0.5%**	**12.0%**	**20.2%**	**10%**	**0.8%**	**0.0%**	**12.0%**	**100.0%**

Vedlegg 18. Metodbruk av «Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet» i «Matematikk»

Metodebruk i Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet

						Heuristiske metoder													
						1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	
Hovedtema	Kapittel	Delkap	undertema	Eksempel	Side	Analys og forstå forutsetninger	Se etter et mønster	Lag en systematisk list eller/og tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem	Gjør problemet enklere		Se problemet fra en annen side	Bruk av digitale hjelpemidler	Se tilbake eller/og fremover	Antall metoder brukt av eksemplet
														A	B				
	10.Datainnsamling, sortering og beskrivelse	10.2	Histogram	1	148-149s			2	1		1		1					1	**6**
Statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet	20. Dataanalyse	20.1	Vekts tendens av data	1	112-113	1		1			1		2					1	**6**
				1	113-114								1						**1**
				1	115	1		1					1					1	**4**
				1	117s			1					1	1				1	**4**
				1	118	1		1					1					1	**4**
				1	119-120s	2		2	1				3	2			1	1	**12**
		20.2	Varians av data	1	125			1					1				1		**3**
				1	127			1					1						**2**
	25. Grunnleggende sannsynlighet	25.1	Tilfeldig begivenhet og sannsynlighet	1	131-132s								3						**3**
				1	132s	1			1				3					1	**6**
				1	133	1			1		1			1	2				**6**
		25.2	Bruk opptellingsmetoden til å finne sannsynligheten	1	136s			1							3			1	**5**
				1	136-137s	1		1							3			1	**6**
				1	138-139s	1		1	1						4			1	**8**
				15	SUM	**9**	**0**	**13**	**5**	**0**	**3**	**0**	**18**	**4**	**12**	**0**	**2**	**10**	**76**
				10s eks.	SUM(%)	**11.8%**	**0.0%**	**17.1%**	**6.6%**	**0.0%**	**3.9%**	**0.0%**	**23.7%**	**5%**	**16%**	**0.0%**	**2.6%**	**13.2%**	**100.0%**

Vedlegg 19. Heuristiske metoder i «Faktor» 8, 9 og 10

Heuristiske metoder	**«Faktor» 8**		**«Faktor» 9**		**«Faktor» 10**		**Antall og Gjennomsnitt %**	
Antall av eksempler	**72**		**80**		**79**		**231**	
1. Analyser og forstå forutsetninger	1	1%	18	9%	24	11 %	**43**	**7%**
2. Se etter et mønster	0	0%	0	0%	0	0%	**0**	**0%**
3. Lag en systematisk liste og/eller tabell	12	10 %	7	4%	14	6%	33	6%
4. Lag en illustrasjon	18	15 %	32	17 %	46	21 %	96	17%
5. Prøv og feil	0	0%	0	0%	0	0%	**0**	**0%**
6. Løs deler av problemet	5	5%	16	8%	21	10 %	42	8%
7. Jobb baklengs	0	0%	0	0%	0	0%	**0**	**0%**

8.Tenk på et liknende problem		80	66 %	96	50 %	80	36 %	256	51%
9. Gjør problemet enklere	ved bruk av resonnering	0	0%	5	3%	16	7%	21	3%
	ved bruk av formler/regler	0	0%	0	0%	13	6%	13	2%
10. Se problemet fra en annen side		0	0	2	1%	2	1%	4	1%
11. Bruk digitale hjelpemidler		0	0%	1	1%	1	1%	2	**1%**
12.Se tilbake og /eller fremover		5	4%	14	7%	3	1%	22	4%
Antall metoder		121	100 %	191	100 %	220	100 %	532	**100 %**

Vedlegg 20. Heuristiske metoder i «Matematikk» 7AB, 8AB og 9AB

Heuristiske metoder	**«Matematikk» 7AB**		**«Matematikk» 8AB**		**«Matematikk» 9AB**		**Antall**
Antall av eksempler	**7A** 96	**7B** 51	**8A** 100	**8B** 64	**9A** 39	**9B** 35	385
1. Analyser og forstå forutsetninger	24	14	24	14	10	13	99
2. Se etter et mønster	4	0	0	0	0	0	4
3. Lag en systematisk liste og/eller tabell	3	3	9	19	8	2	44
4. Lag en illustrasjon	12	22	30	30	36	41	171
5. Prøv og feil	0	0	0	0	1	0	1
6. Løs deler av problemet	5	14	11	4	12	12	58

7. Jobb baklengs		0	0	0	2	0	0	2
8.Tenk på et liknende problem		78	51	88	46	34	6	303
9. Gjør problemet enklere	ved bruk av resonnering	13	14	32	24	14	32	129
	ved bruk av formler/regler	21	6	9	11	19	30	96
10. Se problemet fra en annen side		5	7	2	2	2	1	19
11. Bruk digitale hjelpemidler		3	2	0	2	1	1	9
12.Se tilbake og /eller fremover		34	30	43	49	20	19	195
Antall metoder		202	163	248	203	157	157	1130

Vedlegg 21. Heuristiske metoder i «Matematikk» 7AB, 8AB og 9AB (prosentvise)

Heuristiske metoder	**«Matematikk» 7AB %**		**«Matematikk» 8AB%**		**«Matematikk» 9AB%**		**Antall**
Antall av eksempler	**7A** 25%	**7B** 13%	**8A** 26%	**8B** 17%	**9A** 10%	**9B** 9%	**Gjennomsnitt**
1. Analyser og forstå forutsetninger	12%	8%	10%	7%	6%	8%	8%
2. Se etter et mønster	2%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
3. Lag en systematisk liste og/eller tabell	2%	2%	4%	9%	5%	1%	4%
4. Lag en illustrasjon	6%	14%	12%	15%	23%	26%	16%
5. Prøv og feil	0%	0%	0%	0%	1%	0%	0%
6. Løs deler av problemet	2%	9%	4%	2%	8%	8%	6%

7. Jobb baklengs		0%	0%	0%	1%	0%	0%	0%
8.Tenk på et liknende problem		39%	31%	35%	23%	22%	4%	27%
9. Gjør problem et enklere	ved bruk av resonnering	6%	9%	13%	12%	9%	20%	11%
	ved bruk av formler/regler	10%	4%	4%	5%	12%	19%	9%
10. Se problemet fra en annen side		3%	4%	1%	1%	1%	1%	1%
11. Bruk digitale hjelpemidler		1%	1%	0%	1%	1%	1%	1%
12.Se tilbake og /eller fremover		17%	18%	17%	24%	13%	12%	17%
Antall metoder		100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100%

Vedlegg 22. Bildene av de to eksemplene som kommer direkte til svaret (Figurene 9-10)

Figur 9. Eksempelet (1) som kommer direkte til svaret

例 4　计算：

（1）$\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$；　　（2）$\sqrt{\dfrac{3}{2}}\div\sqrt{\dfrac{1}{18}}$.

解：（1）$\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{24}{3}}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$；

（2）$\sqrt{\dfrac{3}{2}}\div\sqrt{\dfrac{1}{18}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}\div\dfrac{1}{18}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}\times18}=\sqrt{3\times9}=3\sqrt{3}$.

把$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$反过来，就得到

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant0,\ b>0),$$

利用它可以进行二次根式的化简.

例 5　化简：

（1）$\sqrt{\dfrac{3}{100}}$；　　（2）$\sqrt{\dfrac{75}{27}}$.

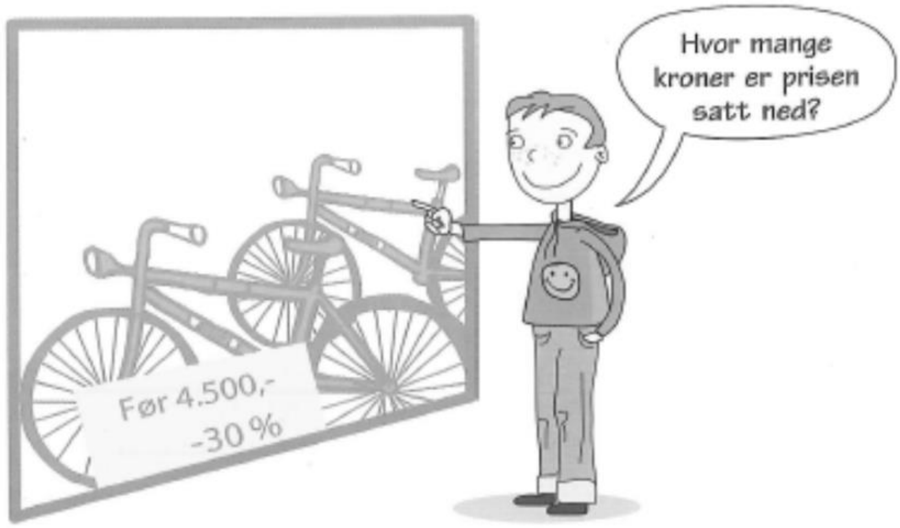
解：（1）$\sqrt{\dfrac{3}{100}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}}=\dfrac{\sqrt{3}}{10}$；

（2）$\sqrt{\dfrac{75}{27}}=\sqrt{\dfrac{5^2\times3}{3^2\times3}}=\dfrac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{3^2}}=\dfrac{5}{3}$.

8　第十六章　二次根式

Figur 10. Eksempelet (2) som kommer direkte til svaret

Prosent av et tall



Hvordan regner vi ut prosenten av et tall?

Når vi skal regne ut 30 % av 4500, går vi fram på denne måten:

$30\ \% = \frac{30}{100} = 0{,}30$

$0{,}30 \cdot 4500\ \text{kr} = 1350\ \text{kr}$

Det vil si at 30 % av 4500 kr er 1350 kr.

Eksempel 3.3

Regn ut 35 % av 1400 kr.

Løsning

$35\ \% = 0{,}35$

$0{,}35 \cdot 1400\ \text{kr} = 490\ \text{kr}$

35 % av 1400 kr er 490 kr.

Vedlegg 23. Bildene av de eksemplene på klassifisering (Figurene 11-21)

Figur 11. To eksempler på metode 1

例 1　某车间有 22 名工人，每人每天可以生产 1 200 个螺钉或 2 000 个螺母. 1 个螺钉需要配 2 个螺母，为使每天生产的螺钉和螺母刚好配套，应安排生产螺钉和螺母的工人各多少名？

Analyse →分析：每天生产的螺母数量是螺钉数量的 2 倍时，它们刚好配套.

解：设应安排 x 名工人生产螺钉，$(22-x)$ 名工人生产螺母.

根据螺母数量应是螺钉数量的 2 倍，列出方程

$$2\,000(22-x)=2\times1\,200x.$$

解方程，得

$$5(22-x)=6x,$$
$$110-5x=6x,$$
$$11x=110,$$
$$x=10.$$
$$22-x=12.$$

答：应安排 10 名工人生产螺钉，12 名工人生产螺母.

如果设 x 名工人生产螺母，怎样列方程？

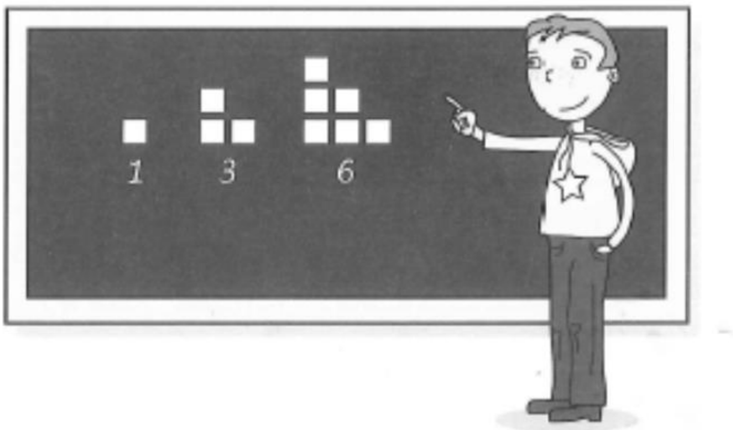
这类问题中配套的物品之间具有一定的数量关系，这可以作为列方程的依据.

例 2　整理一批图书，由一个人做要 40 h 完成. 现计划由一部分人先做 4 h,然后增加 2 人与他们一起做 8 h，完成这项工作. 假设这些人的工作效率相同，具体应先安排多少人工作？

Analyse→分析：如果把总工作量设为 1，则人均效率（一个人 1 h 完成的工作量）为$\frac{1}{40}$，x 人先做 4 h 完成的工作量为$\frac{4x}{40}$，增加 2 人后再做 8 h 完成的工作量为$\frac{8(x+2)}{40}$，这两个工作量之和应等于总工作量.

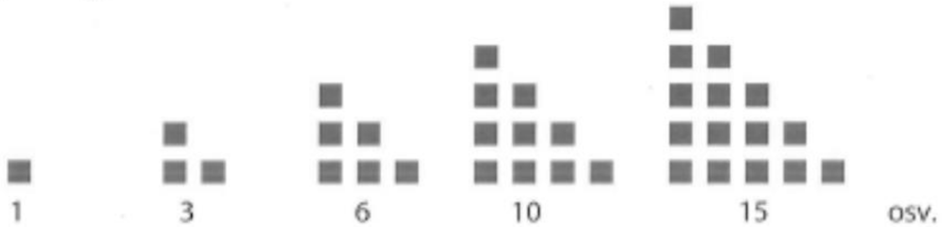
Figur 12. Eksempelet (1) på «Se etter et mønster»

Figurtall og tallrekker



Hvilke tall får vi videre etter dette mønsteret?

Hvis vi fortsetter å legge ut brikker etter det samme mønsteret, får vi følgende figurer og tall:



Antall brikker er:

1 brikke
3 brikker (1 + 2)
6 brikker (1 + 2 + 3)
10 brikker (1 + 2 + 3 + 4)
15 brikker (1 + 2 + 3 + 4 + 5)
osv.

Tallene 1, 3, 6, 10, 15 osv. kaller vi *trekanttall* fordi vi kan illustrere disse tallene i et geometrisk trekantet mønster.

Tallene 1, 3, 6, 10 og 15 er de fem første trekanttallene.

Figur 13. Eksempelet (2) på «Se etter et mønster»

例 4　观察下面三行数：

$-2,\quad 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ 64,\ \cdots;$　①

$0,\quad 6,\ -6,\ 18,\ -30,\ 66,\ \cdots;$　②

$-1,\quad 2,\ -4,\ 8,\ -16,\ 32,\ \cdots.$　③

（1）第①行数按什么规律排列？

（2）第②③行数与第①行数分别有什么关系？

（3）取每行数的第 10 个数，计算这三个数的和.

分析：观察①，发现各数均为 2 的倍数．联系数的乘方，从符号和绝对值两方面考虑，可发现排列的规律.

解：（1）第①行数是

$$-2,\ (-2)^2,\ (-2)^3,\ (-2)^4,\ \cdots.$$

（2）对比①②两行中位置对应的数，可以发现：

第一章　有理数　43

Figur 14. Eksempelet på metode 3. og metode 4

例 6　某商场服装部为了调动营业员的积极性，决定实行目标管理，根据目标完成的情况对营业员进行适当的奖励. 为了确定一个适当的月销售目标，商场服装部统计了每位营业员在某月的销售额（单位：万元），数据如下：

17	18	16	13	24	15	28	26	18	19
22	17	16	19	32	30	16	14	15	26
15	32	23	17	15	15	28	28	16	19

（1）月销售额在哪个值的人数最多？中间的月销售额是多少？平均月销售额是多少？

（2）如果想确定一个较高的销售目标，你认为月销售额定为多少合适？说明理由.

（3）如果想让一半左右的营业员都能达到销售目标，你认为月销售额定为多少合适？说明理由.

确定一个适当的月销售目标是一个关键问题. 如果目标定得太高，多数营业员完不成任务，会使营业员失去信心；如果目标定得太低，不能发挥营业员的潜力.

分析：商场服装部统计的每位营业员在某月的销售额组成一个样本，通过分析样本数据的平均数、中位数、众数来估计总体的情况，从而解决问题.

解：整理上面的数据得到表 20-7 和图 20.1-1.

表 20-7

销售额/万元	13	14	15	16	17	18	19	22	23	24	26	28	30	32
人数	1	1	5	4	3	2	3	1	1	1	2	3	1	2

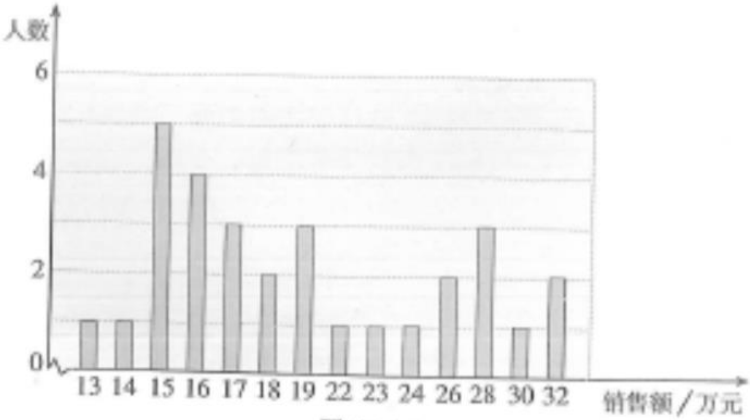


图 20.1-1

用图表整理和描述样本数据，有助于我们分析数据解决问题.

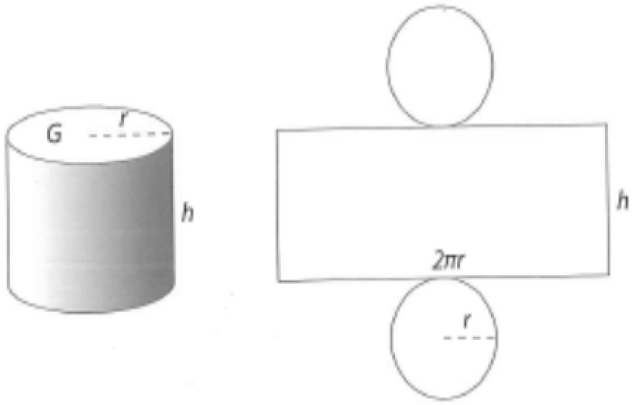
第二十章　数据的分析　119

Figur 15. Eksempelet på metode 6

Regel

Volumet V til en sylinder med grunnflaten G og høyden h er:

$V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$



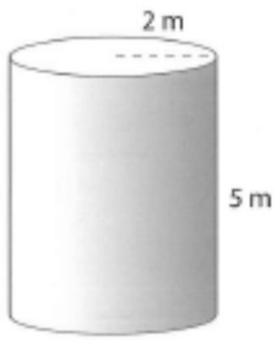
Arealet A av overflaten til en sylinder med radius r og høyde h er:

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

Eksempel 5.1

Eksempel 5.2

Regn ut
a) volumet til sylinderen
b) arealet av overflaten til sylinderen



a)
$V = G \cdot h$
$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot r \cdot r \cdot h$
$V = 3{,}14 \cdot 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 62{,}8 \text{ m}^3$

Volumet til sylinderen er $62{,}8 \text{ m}^3$.

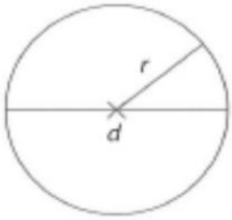
b)
$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \text{ m} \cdot 5 \text{ m}$
$A = 25{,}12 \text{ m}^2 + 62{,}8 \text{ m}^2 = 87{,}92 \text{ m}^2$

Arealet av overflaten til sylinderen er 88 m^2.

Figur 16. Eksempelet på metode 7

Regel

Omkretsen O av en sirkel er $\pi \cdot$ *diameter*



$O = \pi \cdot d$

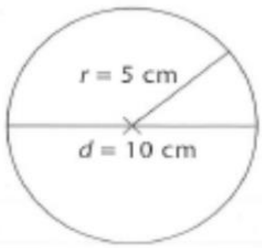
Arealet A av en sirkel er $\pi \cdot$ *radius* $\cdot$ *radius*

$A = \pi \cdot r^2$

Geometri

Eksempel 3.6

Regn ut omkretsen og arealet av sirkelen.



Løsning

Omkrets:

$O = \pi \cdot d$

$O = 3{,}14 \cdot 10$ cm

$O = \underline{\underline{31{,}4 \text{ cm}}}$

Areal:

$A = \pi \cdot r^2$

$A = 3{,}14 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}$

$A = \underline{\underline{78{,}5 \text{ cm}^2}}$

Figur 17. Eksempelet på metode 9 underkategori A

例 1 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O. 求证：A，B，C，D 四个点在以点 O 为圆心的同一个圆上.

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore$ $OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$.

$\therefore$ $OA=OC=OB=OD$.

$\therefore$ A，B，C，D 四个点在以点 O 为圆心，OA 为半径的圆上（图 24.1-4）.

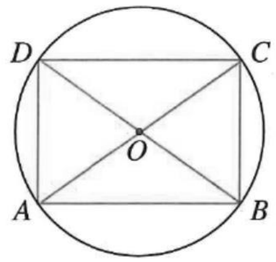
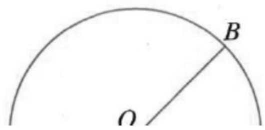


图 24.1-4



Figur 18. To eksempler på metode 9 underkategori B

Eksempel 5.9

En sylinder har volumet 2 liter og radien 5 cm.
Regn ut høyden til sylinderen.

Løsning

$$V = \pi r^2 \cdot h$$
$$2000 = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 5 \cdot h$$
$$2000 = 78{,}5 \cdot h$$
$$\frac{2000}{78{,}5} = \frac{78{,}5 \cdot h}{78{,}5}$$

Vi dividerer begge leddene med 78,5.

$$25{,}5 \approx h$$
$$h \approx 25{,}5$$

Høyden i sylinderen er 25,5 cm.

Eksempel 5.10

En kjegle har volumet 50 cm^3 og radien 2 cm.
Regn ut høyden til kjeglen.

Løsning

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$
$$50 = \frac{3{,}14 \cdot 2 \cdot 2 \cdot h}{3}$$
$$50 = \frac{12{,}55 \cdot h}{3}$$
$$50 = 4{,}19 \cdot h$$
$$\frac{50}{4{,}19} = \frac{4{,}19 \cdot h}{4{,}19}$$

Vi dividerer begge leddene med 4,19.

$$11{,}94 \approx h$$
$$h \approx 11{,}9$$

Høyden i kjeglen er 11,9 cm.

Romgeometri og massetetthet

207

Figur 19. Eksempelet på metode 10

重要作用，它是解决许多数学问题的基础.

例 4　用两种方法计算$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\times 12$.

解法 1：

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\times 12$$
$$=\left(\frac{3}{12}+\frac{2}{12}-\frac{6}{12}\right)\times 12$$
$$=-\frac{1}{12}\times 12=-1.$$

解法 2：

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\times 12$$
$$=\frac{1}{4}\times 12+\frac{1}{6}\times 12-\frac{1}{2}\times 12$$
$$=3+2-6=-1.$$

思考

比较上面两种解法，它们在运算顺序上有什么区别？解法 2 用了什么运算律？哪种解法运算量小？

Figur 20. Eksempelet på metode 12

Eksempel 3.1

Sara sykler med farten 20 km/h.
Hvis hun sykler i x timer, vil strekningen y i kilometer være:

$y = 20x$ eller $f(x) = 20x$

a) Lag en verditabell og framstill sammenhengen mellom x og y i en graf.

b) Forklar hvorfor y er en funksjon av x.

Løsning

a) Vi velger tre verdier for x, regner ut tilhørende verdier av y og setter tallene inn i en tabell.

x	0	1	2
y	0	20	40

Vi merker av punktene (0, 0), (1, 20) og (2, 40) i et koordinatsystem og trekker en rett linje mellom punktene.

Vedlegg 24. Bildene av de eksemplene på introduksjon av kapittel (Figurene 21-24)

Figur 21. Introduksjonen av kapittel 21 «Kvadratiske ligninger» i «Matematikk 9A»

第二十一章　一元二次方程

在设计人体雕像时，使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部（全身）的高度比，可以增加视觉美感. 按此比例，如果雕像的高为 2 m，那么它的下部应设计为多高？

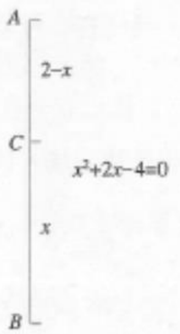
如图，雕像的上部高度 AC 与下部高度 BC 应有如下关系：

$$AC:BC=BC:2，即 BC^2=2AC.$$

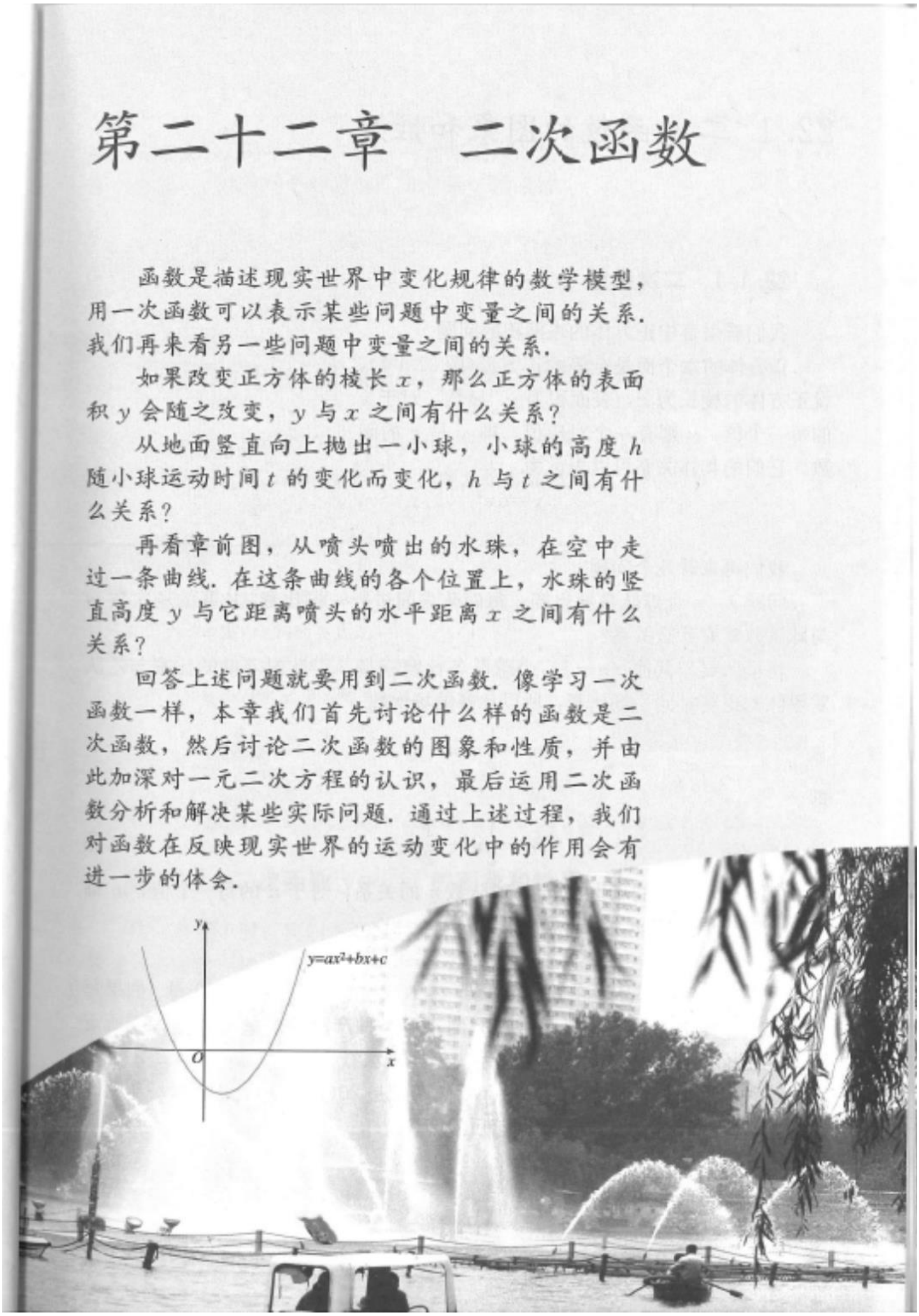
设雕像下部高 x m，可得方程 $x^2=2(2-x)$，整理得

$$x^2+2x-4=0.$$

这个方程与我们学过的一元一次方程不同，其中未知数 x 的最高次数是 2. 如何解这类方程？如何用这类方程解决一些实际问题？这就是本章要学习的主要内容.



Figur 22. Introduksjonen av kapittel 22 «Kvadratisk funksjon» i «Matematikk 9A»



第二十二章　二次函数

函数是描述现实世界中变化规律的数学模型，用一次函数可以表示某些问题中变量之间的关系．我们再来看另一些问题中变量之间的关系．

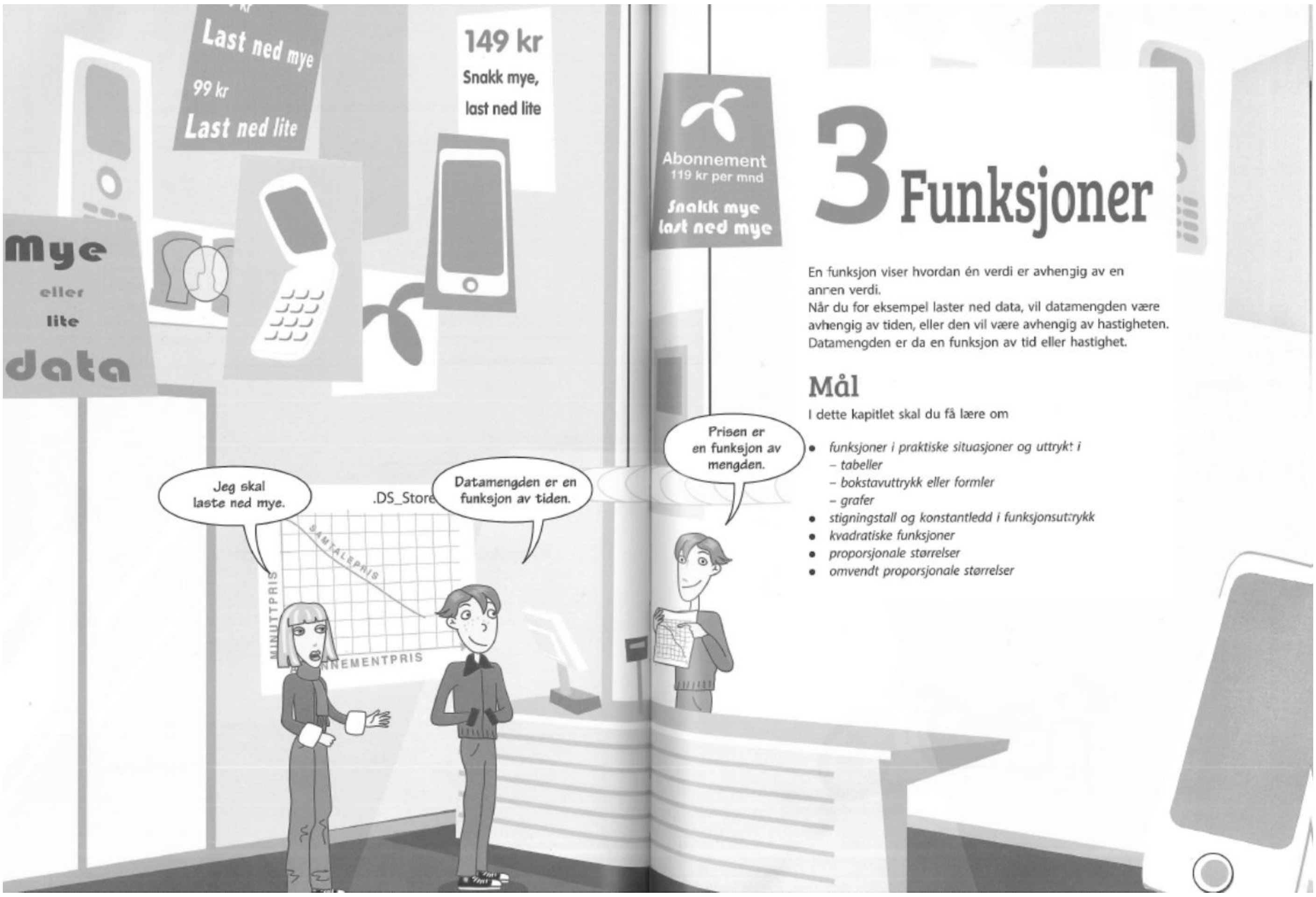
如果改变正方体的棱长 x，那么正方体的表面积 y 会随之改变，y 与 x 之间有什么关系？

从地面竖直向上抛出一小球，小球的高度 h 随小球运动时间 t 的变化而变化，h 与 t 之间有什么关系？

再看章前图，从喷头喷出的水珠，在空中走过一条曲线．在这条曲线的各个位置上，水珠的竖直高度 y 与它距离喷头的水平距离 x 之间有什么关系？

回答上述问题就要用到二次函数．像学习一次函数一样，本章我们首先讨论什么样的函数是二次函数，然后讨论二次函数的图象和性质，并由此加深对一元二次方程的认识，最后运用二次函数分析和解决某些实际问题．通过上述过程，我们对函数在反映现实世界的运动变化中的作用会有进一步的体会．

Figur 23. Introduksjonen av kapittel 3 «Funksjoner» i «Faktor»



3 Funksjoner

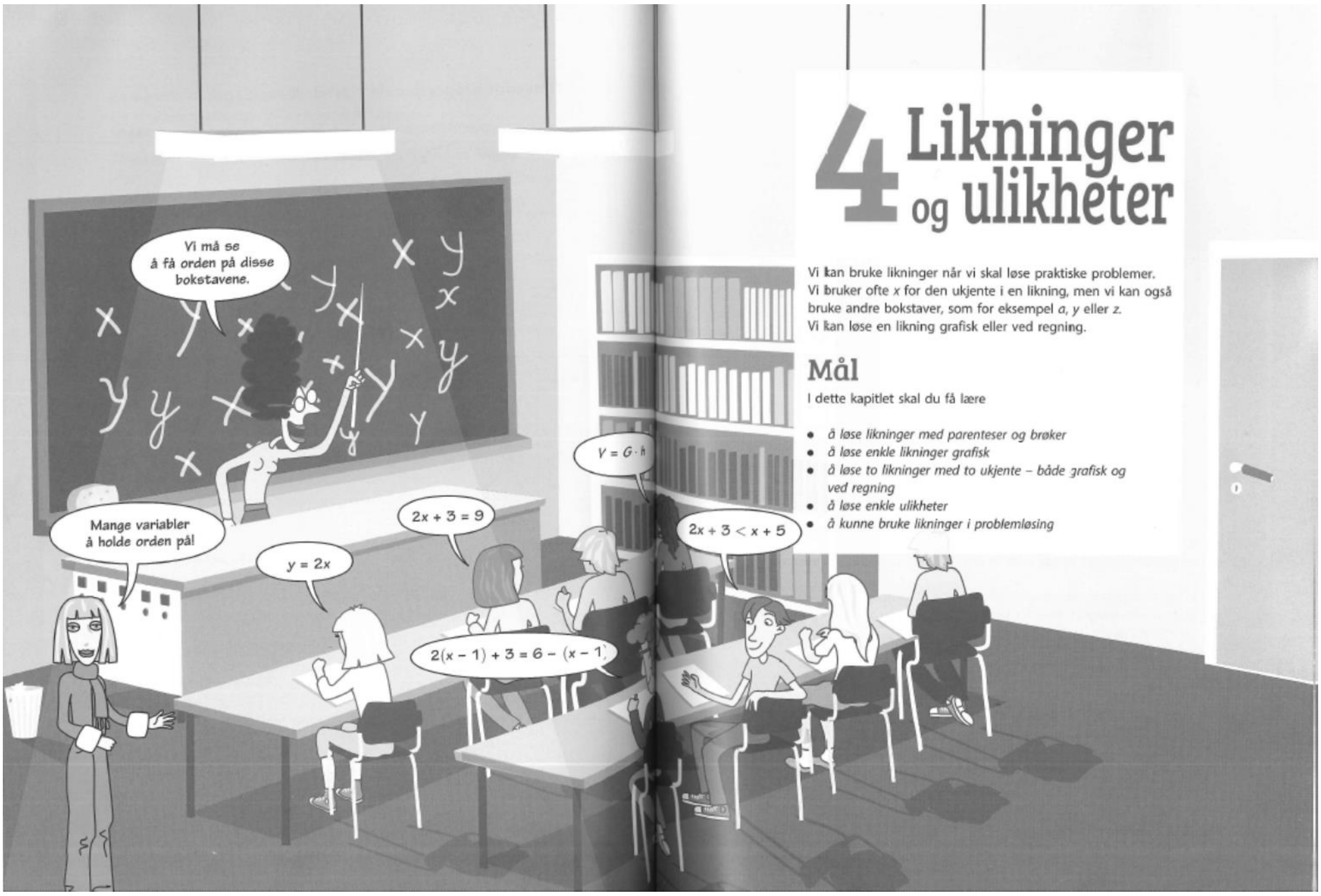
En funksjon viser hvordan én verdi er avhengig av en annen verdi.
Når du for eksempel laster ned data, vil datamengden være avhengig av tiden, eller den vil være avhengig av hastigheten.
Datamengden er da en funksjon av tid eller hastighet.

Mål

I dette kapitlet skal du få lære om

- *funksjoner i praktiske situasjoner og uttrykt i*
  - *– tabeller*
  - *– bokstavuttrykk eller formler*
  - *– grafer*
- *stigningstall og konstantledd i funksjonsuttrykk*
- *kvadratiske funksjoner*
- *proporsjonale størrelser*
- *omvendt proporsjonale størrelser*

Figur 24. Introduksjonen av kapittel 4 «Likninger og ulikheter»



Vedlegg 25. Bildene av eksemplene som brukes i diskusjon i kapittel 6.4 (figurene 32-46)

Figur 32. Eksempel A med et tverrfaglig informativt bilde

Eksempel 5.1

Bakteriene på dette bildet er omtrent 3 cm lange. Målestokken er 10 000 : 1. Hvor lange er bakteriene i virkeligheten?

Pestbakterier (forårsaket svartedauden i middelalderen)

Løsning

Bakteriene er 10 000 ganger så korte som lengden på bildet.

$$\frac{3\text{ cm}}{10\,000} = 0{,}0003\text{ cm} = 0{,}003\text{ mm}$$

Bakteriene er 0,003 mm i virkeligheten.

Figur 33. Eksempel B med et tverrfaglig informativt bilde

例 4　一个用电器的电阻是可调节的，其范围为 110～220 Ω. 已知电压为 220 V，这个用电器的电路图如图 26.2-2 所示.

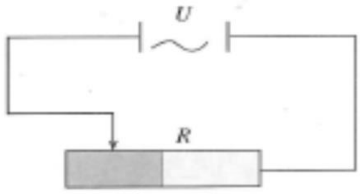


图 26.2-2

（1）功率 P 与电阻 R 有怎样的函数关系？

（2）这个用电器功率的范围是多少？

解：（1）根据电学知识，当 $U=220$ 时，得

$$P=\frac{220^2}{R}. \qquad ①$$

（2）根据反比例函数的性质可知，电阻越大，功率越小.

把电阻的最小值 $R=110$ 代入①式，得到功率的最大值

$$P=\frac{220^2}{110}=440(\mathrm{W});$$

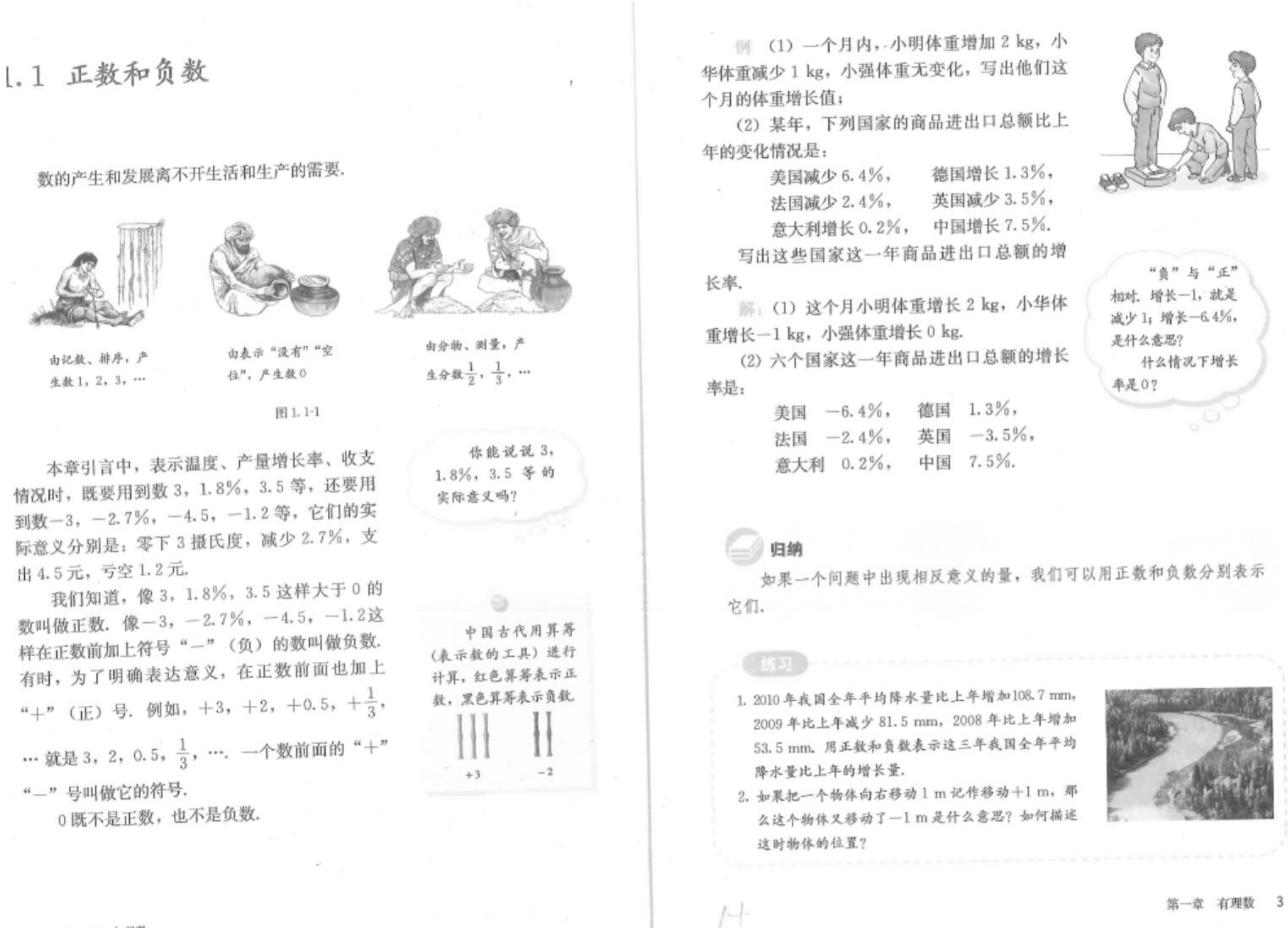
把电阻的最大值 $R=220$ 代入①式，得到功率的最小值

$$P=\frac{220^2}{220}=220(\mathrm{W}).$$

因此用电器功率的范围为 220～440 W.

结合例 4，想一想，为什么收音机的音量、某些台灯的亮度以及电风扇的转速可以调节？

Figur 34. Eksempel C med historisk kilde



1.1 正数和负数

数的产生和发展离不开生活和生产的需要.

由记数、排序，产生数1，2，3，…

由表示“没有”“空位”，产生数0

由分物、测量，产生分数$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…

图 1.1-1

本章引言中，表示温度、产量增长率、收支情况时，既要用到数 3，1.8%，3.5 等，还要用到数−3，−2.7%，−4.5，−1.2 等，它们的实际意义分别是：零下 3 摄氏度，减少 2.7%，支出 4.5 元，亏空 1.2 元.

我们知道，像 3，1.8%，3.5 这样大于 0 的数叫做正数. 像−3，−2.7%，−4.5，−1.2这样在正数前加上符号“−”（负）的数叫做负数. 有时，为了明确表达意义，在正数前面也加上“+”（正）号. 例如，+3，+2，+0.5，$+\frac{1}{3}$，… 就是 3，2，0.5，$\frac{1}{3}$，…. 一个数前面的“+”“−”号叫做它的符号.

0 既不是正数，也不是负数.

你能说说 3，1.8%，3.5 等的实际意义吗？

中国古代用算筹（表示数的工具）进行计算，红色算筹表示正数，黑色算筹表示负数.

+3　−2

例　(1) 一个月内，小明体重增加 2 kg，小华体重减少 1 kg，小强体重无变化，写出他们这个月的体重增长值；

(2) 某年，下列国家的商品进出口总额比上年的变化情况是：

美国减少 6.4%，　德国增长 1.3%，
法国减少 2.4%，　英国减少 3.5%，
意大利增长 0.2%，　中国增长 7.5%.

写出这些国家这一年商品进出口总额的增长率.

解：(1) 这个月小明体重增长 2 kg，小华体重增长−1 kg，小强体重增长 0 kg.

(2) 六个国家这一年商品进出口总额的增长率是：

美国　−6.4%，　德国　1.3%，
法国　−2.4%，　英国　−3.5%，
意大利　0.2%，　中国　7.5%.

“负”与“正”相对. 增长−1，就是减少 1；增长−6.4%，是什么意思？

什么情况下增长率是 0？

归纳

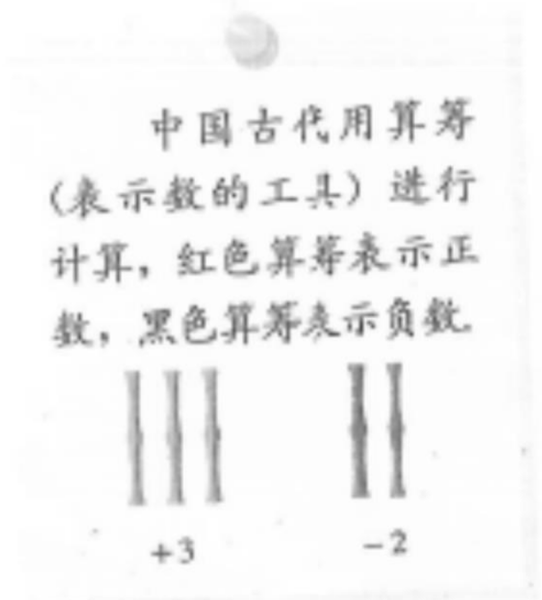
如果一个问题中出现相反意义的量，我们可以用正数和负数分别表示它们.

练习

1. 2010 年我国全年平均降水量比上年增加108.7 mm，2009 年比上年减少 81.5 mm，2008 年比上年增加 53.5 mm. 用正数和负数表示这三年我国全年平均降水量比上年的增长量.
2. 如果把一个物体向右移动 1 m 记作移动+1 m，那么这个物体又移动了−1 m 是什么意思？如何描述这时物体的位置？

14

第一章　有理数　3



Figur 35. Eksempel D med historisk kilde

例 2　赵州桥（图 24.1-7）是我国隋代建造的石拱桥，距今约有 1 400 年的历史，是我国古代人民勤劳与智慧的结晶. 它的主桥拱是圆弧形，它的跨度（弧所对的弦的长）为 37 m，拱高（弧的中点到弦的距离）为 7.23 m，求赵州桥主桥拱的半径（结果保留小数点后一位）.

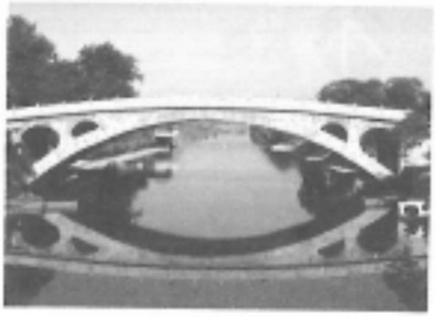


图 24.1-7

分析：解决此问题的关键是根据赵州桥的实物图画出几何图形.

解：如图 24.1-8，用$\overset{\frown}{AB}$表示主桥拱，设$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心为 O，半径为 R.

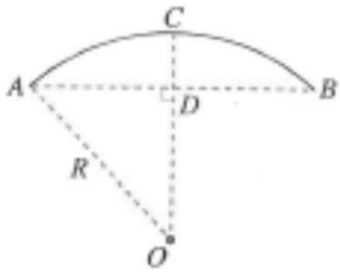


图 24.1-8

经过圆心 O 作弦 AB 的垂线 OC，D 为垂足，OC 与$\overset{\frown}{AB}$相交于点 C，连接 OA. 根据垂径定理，D 是 AB 的中点，C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，CD 就是拱高.

由题设可知

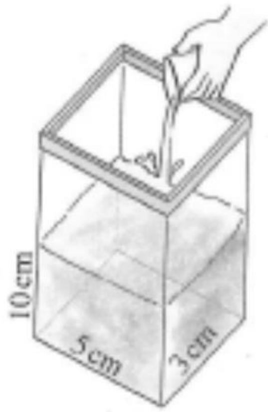
$$AB=37,\ CD=7.23,$$

所以

$$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 37=18.5,$$

Figur 36. Eksempel E med effektiv metodekombinasjon

例 2　某长方体形状的容器长 5 cm，宽3 cm，高 10 cm. 容器内原有水的高度为 3 cm，现准备向它继续注水. 用 V（单位：cm^3）表示新注入水的体积，写出 V 的取值范围.



解：新注入水的体积 V 与原有水的体积的和不能超过容器的容积，即

$$V+3\times5\times3\leqslant3\times5\times10,$$

$$V\leqslant105.$$

又由于新注入水的体积 V 不能是负数，因此，V 的取值范围是

$$V\geqslant0 \text{ 并且 } V\leqslant105.$$

在数轴上表示 V 的取值范围如图 9.1-4 所示.

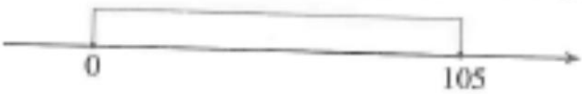


图 9.1-4

在表示 0 和 105 的点上画实心圆点，表示取值范围包含这两个数.

Figur 37. Eksempel F med effektiv metodekombinasjon

Eksempel 5.7

En boks fiskeboller har radius 5 cm og høyde 12 cm.

a) Regn ut arealet av grunnflaten i boksen.

b) Regn ut volumet av boksen.

Løsning

a) Arealet G av grunnflaten er

$$G = \pi \cdot r \cdot r = 3{,}14 \cdot 5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 78{,}5\text{ cm}^2$$

Arealet av grunnflaten i boksen er $78{,}5\text{ cm}^2$.

b) Volumet V av boksen er

$$V = G \cdot h = 78{,}5\text{ cm}^2 \cdot 12\text{ cm} = 942\text{ cm}^3$$

Volumet av boksen er 942 cm^3.

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot r \cdot r \cdot h = 3{,}14 \cdot 5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = 942\text{ cm}^3$$

Oppgaver

5.29 Regn ut volumet av sylindrene

Figur 38. Eksempel G på grafisk løsning av kvadratiske funksjon

例 利用函数图象求方程 $x^2-2x-2=0$ 的实数根（结果保留小数点后一位）.

解：画出函数 $y=x^2-2x-2$ 的图象（图 22.2-3），它与 x 轴的公共点的横坐标大约是 -0.7，2.7.

所以方程 $x^2-2x-2=0$ 的实数根为

$$x_1\approx-0.7，x_2\approx2.7.$$

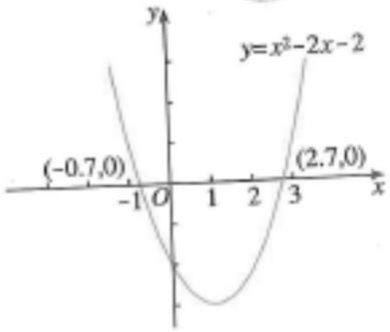


图 22.2-3

我们还可以通过不断缩小根所在的范围估计一元二次方程的根.

观察函数 $y=x^2-2x-2$ 的图象，可以发现，当自变量为 2 时的函数值小于 0（点 $(2, -2)$ 在 x 轴的下方），当自变量为 3 时的函数值大于 0（点 $(3, 1)$ 在 x 轴的上方）. 因为抛物线 $y=x^2-2x-2$ 是一条连续不断的曲线，所以抛物线 $y=x^2-2x-2$ 在 $2<x<3$ 这一段经过 x 轴. 也就是说，当自变量取 2，3 之间的某个值时，函数值为 0，即方程 $x^2-2x-2=0$ 在 2，3 之间有根.

我们可以通过取平均数的方法不断缩小根所在的范围. 例如，取 2，3 的平均数 2.5，用计算器算得自变量为 2.5 时的函数值为 -0.75，与自变量为 3 时的函数值异号，所以这个根在 2.5，3 之间. 再取 2.5，3 的平均数 2.75，用计算器算得自变量为 2.75 时的函数值为 0.062 5，与自变量为 2.5 时的函数值异号，所以这个根在 2.5，2.75 之间.

重复上述步骤，我们逐步得到：这个根在 2.625，2.75 之间，在 2.687 5，2.75 之间……可以看到：根所在的范围越来越小，根所在范围的两端的值越来越接近根的值，因而可以作为根的近似值. 例如，当要求根的近似值与根的准确值的差的绝对值小于 0.1 时，由于 $|2.6875-2.75|=0.0625<0.1$，我们可以将 2.687 5 作为根的近似值.

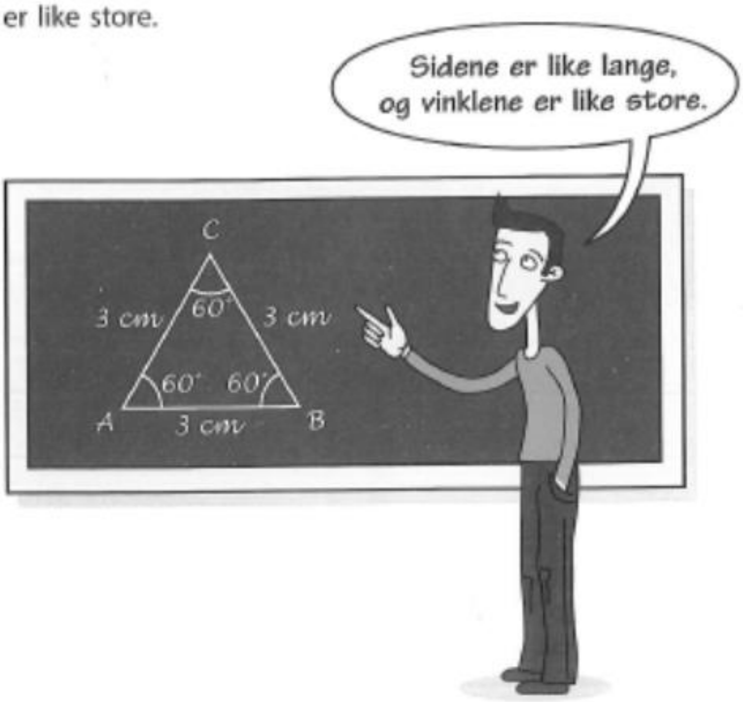
你能用这种方法得出方程 $x^2-2x-2=0$ 的另一个根的近似值吗（要求根的近似值与根的准确值的差的绝对值小于 0.1）?

这种求根的近似值的方法也适用于更高次的一元方程.

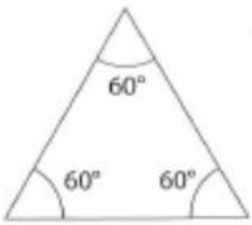
Figur 39. Eksempel H på regning vinklene i en regulær femkant

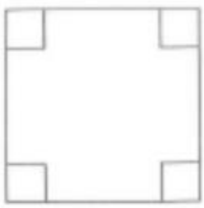
Regulære mangekanter

En regulær mangekant er en mangekant der sidene er like lange og vinklene er like store.



To eksempler på regulære mangekanter er en likesidet trekant og et kvadrat.





I en regulær trekant er alle vinkler lik 60°. I en regulær firkant er alle vinkler lik 90°. I begge figurene er alle sidene like lange.

Regel

I regulære mangekanter er sidene like lange og vinklene like store.

Eksempel 3.1

Hvor store er vinklene i en regulær femkant?

Løsning
En femkant består av tre trekanter.

Vinkelsummen blir da:

$3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$

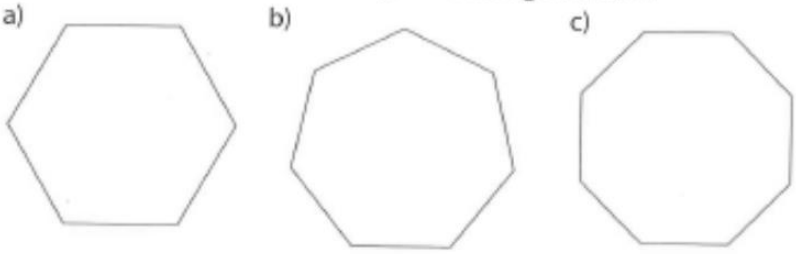
Det er fem vinkler i en femkant.
Hver vinkel blir da:

$540^\circ : 5 = \underline{\underline{108^\circ}}$

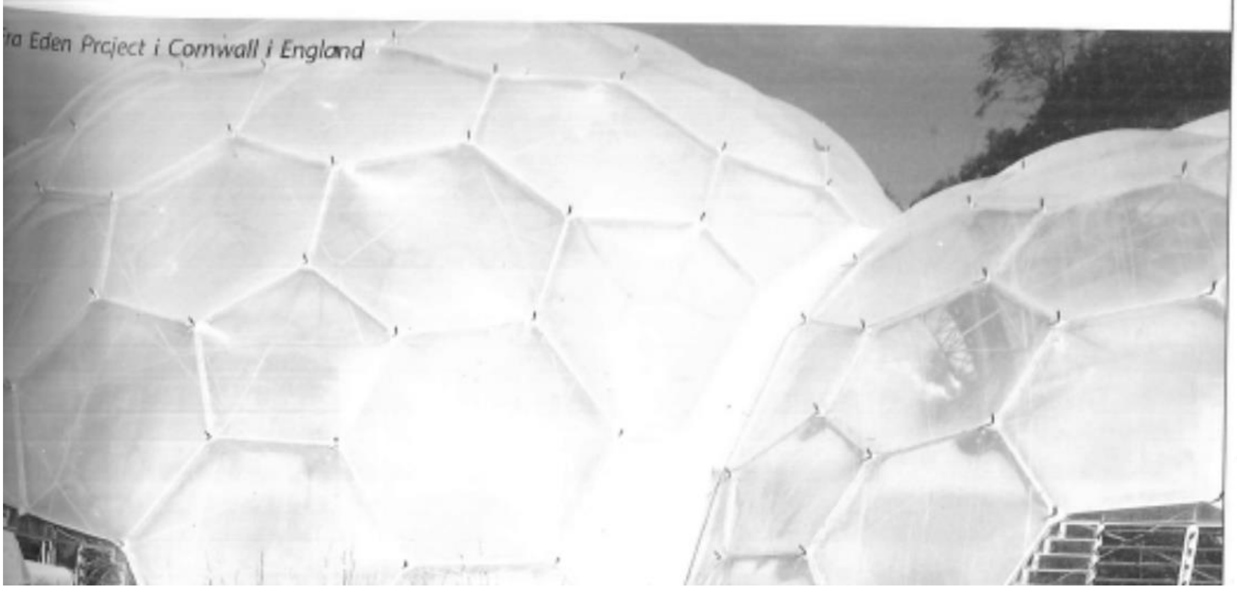
Oppgaver

3.4 Hvor store er vinklene i disse regulære mangekantene?

a) b) c)



★ **3.5** Hvor store er vinklene i en regulær
a) tikant b) tolvkant c) hundrekant



ra Eden Project i Cornwall i England

Figur 40. Eksempel K som beviseksempel

例 3　如图 18.1-11，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 是 AC 上的两点，并且 $AE=CF$. 求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

证明：∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$AO=CO$，$BO=DO$.

∵　$AE=CF$，

∴　$AO-AE=CO-CF$，即 $EO=FO$.

又　$BO=DO$，

∴　四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

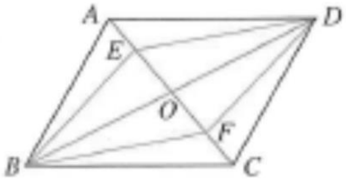


图 18.1-11

你还有其他证明方法吗？

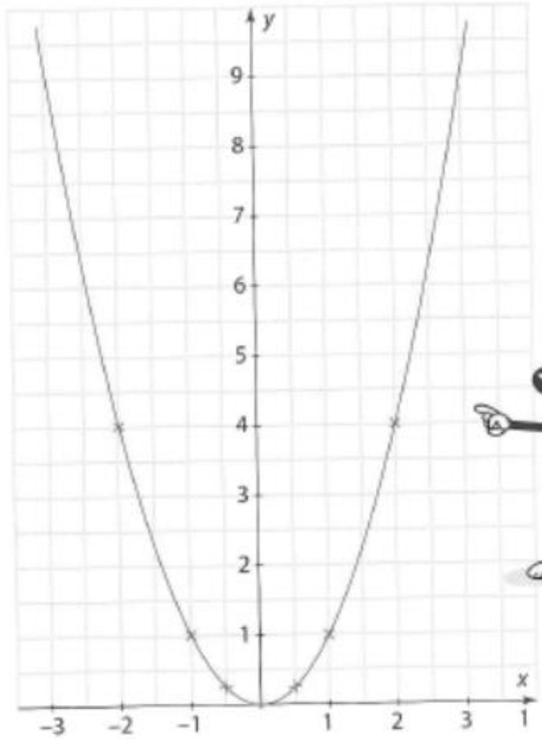
Figur 41. Eksemplet L – løsning ved å kopiere direkte fra boka

Dette gir oss denne tabellen:

x	–2	–1	–0,5	0	0,5	1	2
y	4	1	0,25	0	0,25	1	4

Vi får punktene (–2, 4), (–1, 1), (–0,5, 0,25), (0, 0), (0,5, 0,25), (1, 1) og (2, 4).

Vi lager et koordinatsystem og setter inn punktene fra tabellen. Da får vi denne grafen:



Grafen til funksjonen $y = x^2$ kaller vi en *parabel*. Grafen er symmetrisk om andreaksen. Det kommer av at to x-verdier gir én og samme y-verdi. Du ser at både $x = -2$ og $x = 2$ gir $y = 4$. Tilsvarende får vi to løsninger når vi løser kvadratiske likninger:

$x^2 = 4$

$x = -\sqrt{4} = -2$ eller $x = \sqrt{4} = 2$

Funksjoner

Eksempel 3.5

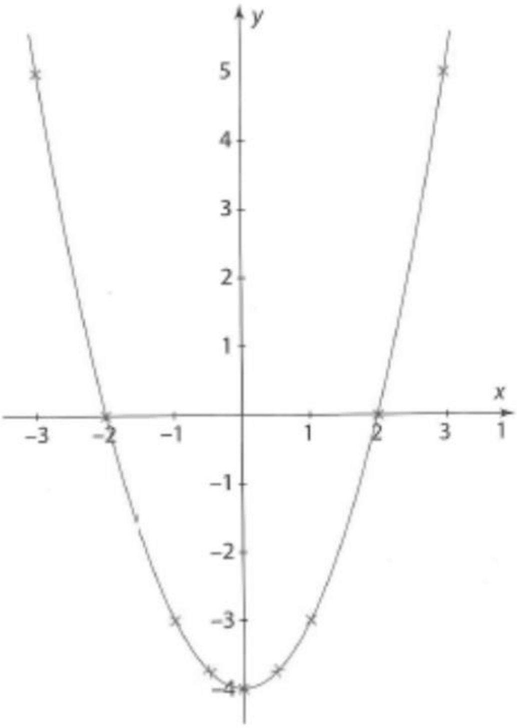
Tegn grafen til funksjonen: $y = x^2 - 4$

Løsning

Vi setter inn forskjellige verdier for x, og regner ut de tilhørende verdiene for y.

x	–3	–2	–1	–0,5	0	0,5	1	2	3
y	5	0	–3	–3,75	–4	–3,75	–3	0	5

Vi merker av punktene i et koordinatsystem og trekker en jevn kurve gjennom punktene.



121

Figur 42. Eksemplet M - løsning med «komparativ studie»

根据表中 x，y 的数值在坐标平面中描点 $(x,\ y)$(图 22.1-2)，再用平滑曲线顺次连接各点，就得到 $y=x^2$ 的图象(图 22.1-3).

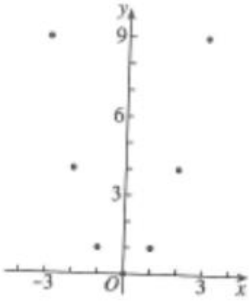


图 22.1-2

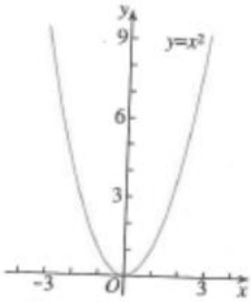


图 22.1-3

还记得如何用描点法画一个函数的图象吗?

可以看出，二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条曲线，它的形状类似于投篮时或掷铅球时球在空中所经过的路线，只是这条曲线开口向上. 这条曲线叫做抛物线 $y=x^2$. 实际上，二次函数的图象都是抛物线，它们的开口或者向上或者向下. 一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象叫做抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

还可以看出，y 轴是抛物线 $y=x^2$ 的对称轴，抛物线 $y=x^2$ 与它的对称轴的交点 $(0,\ 0)$ 叫做抛物线 $y=x^2$ 的顶点，它是抛物线 $y=x^2$ 的最低点. 实际上，每条抛物线都有对称轴，抛物线与对称轴的交点叫做抛物线的顶点. 顶点是抛物线的最低点或最高点.

在抛物线 $y=x^2$ 上任取一点 $(m,\ m^2)$，因为它关于 y 轴的对称点 $(-m,\ m^2)$ 也在抛物线 $y=x^2$ 上，所以抛物线 $y=x^2$ 关于 y 轴对称.

从二次函数 $y=x^2$ 的图象可以看出：在对称轴的左侧，抛物线从左到右下降；在对称轴的右侧，抛物线从左到右上升. 也就是说，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

例 1　在同一直角坐标系中，画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$ 的图象.

解：分别列表，再画出它们的图象(图 22.1-4).

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	…

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
$y=2x^2$	…	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	…

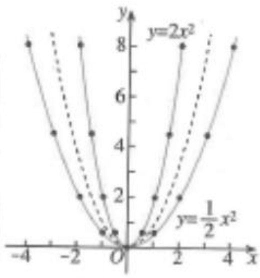


图 22.1-4

思考

（1）函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$ 的图象与函数 $y=x^2$（图 22.1-4 中的虚线图形）的图象相比，有什么共同点和不同点？

（2）当 $a>0$ 时，二次函数 $y=ax^2$ 的图象有什么特点？

一般地，当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 的开口向上，对称轴是 y 轴，顶点是原点，顶点是抛物线的最低点，a 越大，抛物线的开口越小.

类似地，我们可以研究当 $a<0$ 时，二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质.

探究

（1）在同一直角坐标系中，画出函数 $y=-x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=-2x^2$ 的图象，并考虑这些抛物线有什么共同点和不同点.

（2）当 $a<0$ 时，二次函数 $y=ax^2$ 的图象有什么特点？

你画出的图象与图 22.1-5 中的图象相同吗？

一般地，当 $a<0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 的开口向下，对称轴是 y 轴，顶点是原点，顶点是抛物线的最高点，a 越小，抛物线的开口越小.

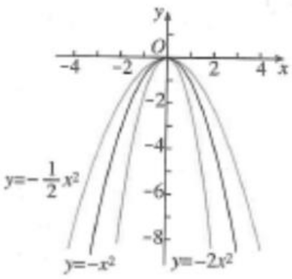


图 22.1-5

归纳

一般地，抛物线 $y=ax^2$ 的对称轴是 y 轴，顶点是原点. 当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下，顶点是抛物线的最高点. 对于抛物线 $y=ax^2$，$|a|$ 越大，抛物线的开口越小.

从二次函数 $y=ax^2$ 的图象可以看出：如果 $a>0$，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；如果 $a<0$，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

练习

说出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点：

(1) $y=3x^2$；　　(2) $y=-3x^2$；

(3) $y=\frac{1}{3}x^2$；　　(4) $y=-\frac{1}{3}x^2$.

22.1.3 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

例 2　在同一直角坐标系中，画出二次函数 $y=2x^2+1$，$y=2x^2-1$ 的图象.

解：先列表：

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
$y=2x^2+1$	…	9	5.5	3	1.5	1	1.5	3	5.5	9	…
$y=2x^2-1$	…	7	3.5	1	-0.5	-1	-0.5	1	3.5	7	…

然后描点画图，得 $y=2x^2+1$，$y=2x^2-1$ 的图象（图 22.1-6）.

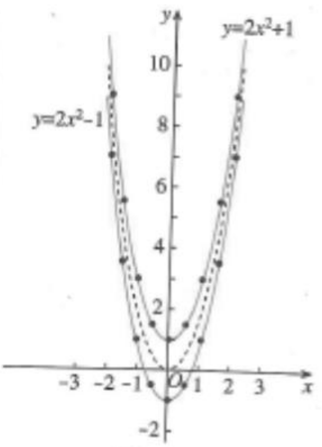
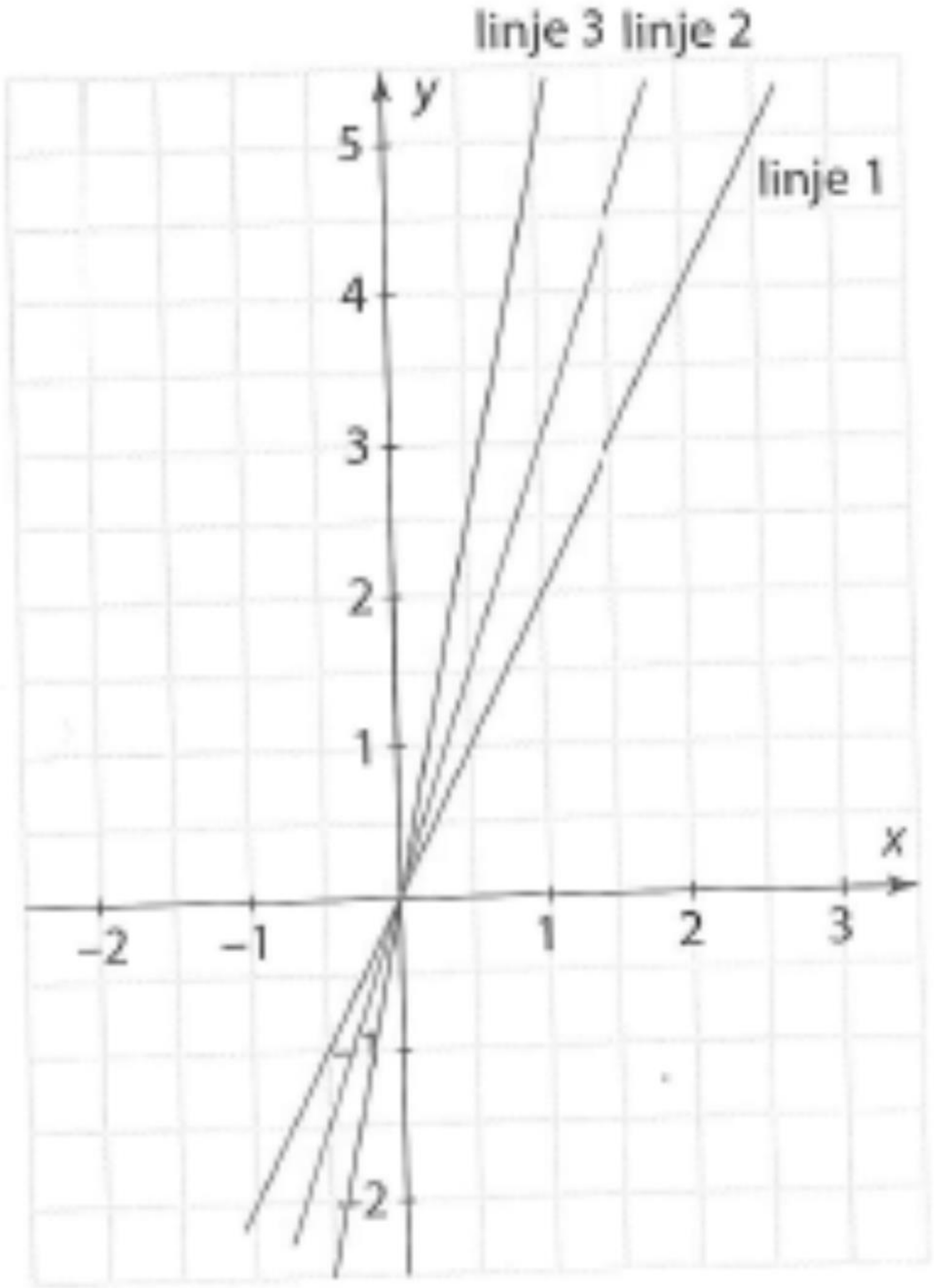


图 22.1-6

Figur 43-46. «Komparativ studie» eksempler fra oppgavedelen i «Faktor 10»

3.7 Hvi ken av linjene har størst stigningstall?



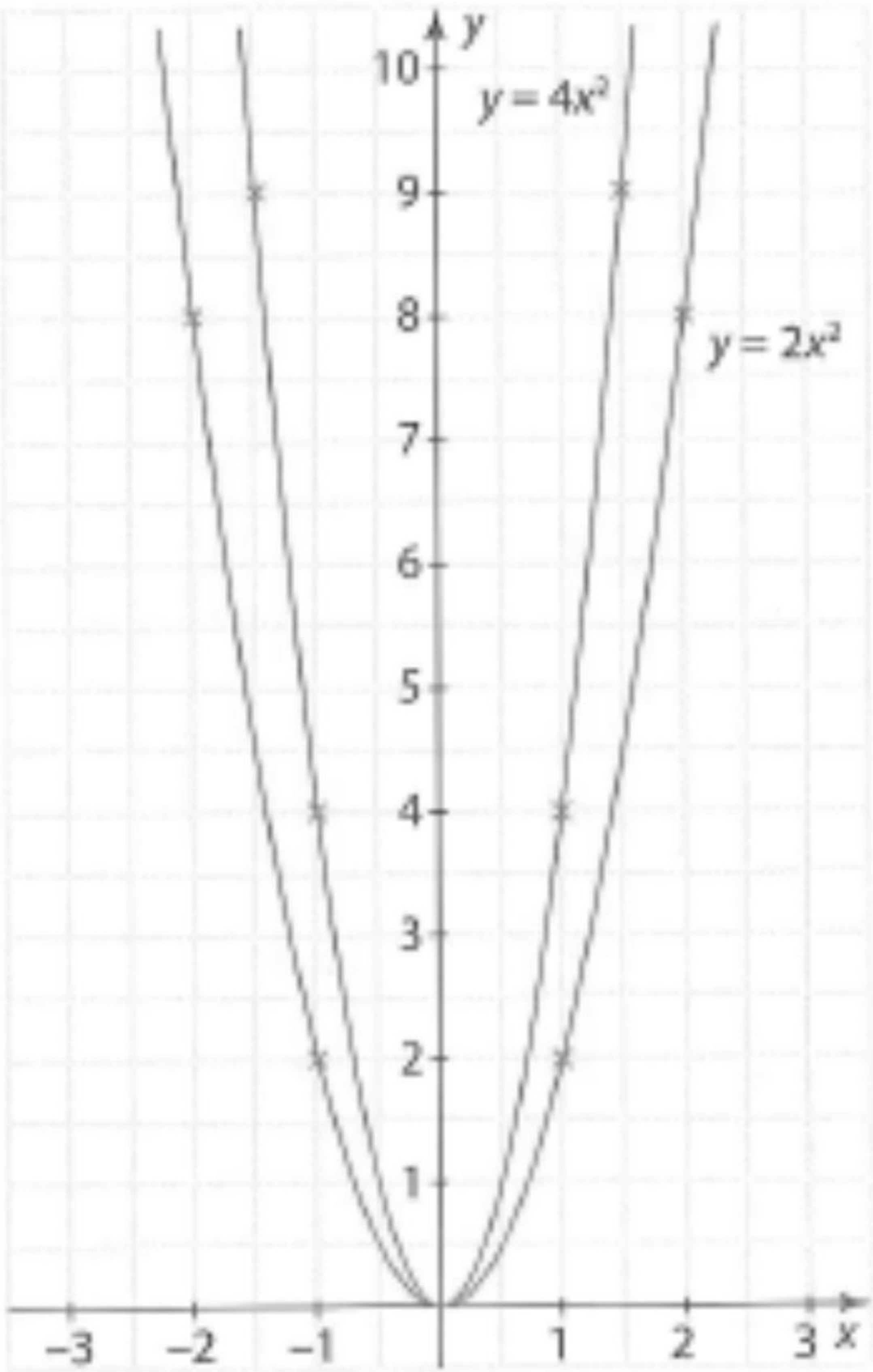
3.22 Tegn grafen til begge funksjonene i det samme koordinatsystemet.
a) $y = 2x^2$ b) $y = 4x^2$

3.23 Tegn grafen til begge funksjonene i det samme koordinatsystemet.
a) $y = -2x^2$ b) $y = -3x^2$

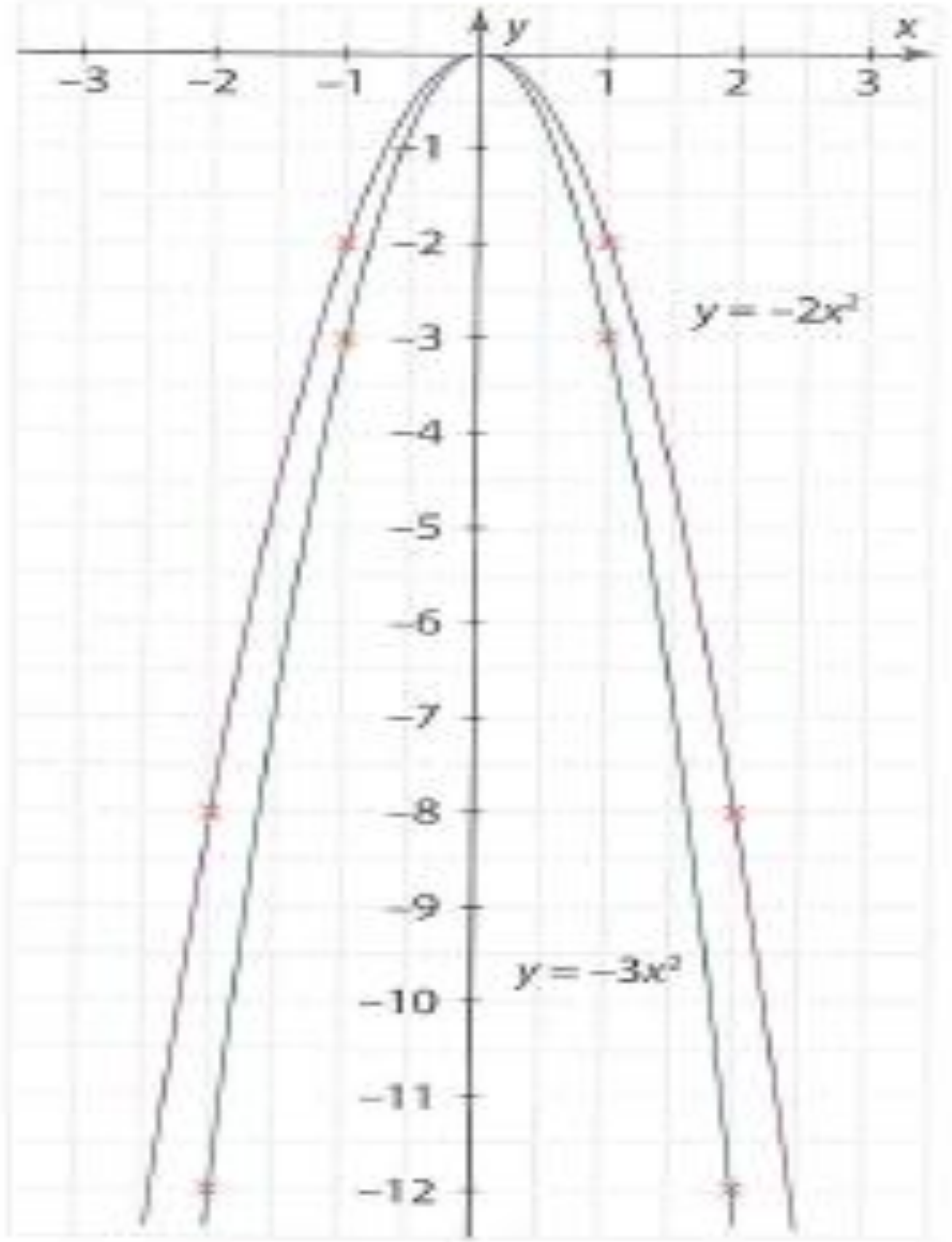
3.24 Sammenlikn grafene i oppgavene 3.22 og 3.23.
Hva har tallet foran x^2 å si for grafen?

? Hva vil du si at kvadrater, kvadrattall og kvadratiske likninger har til felles?

3.22 a) b)



3.23 a) b)



3.24 Tallet foran x^2 har noe å si for stigningen til grafen.