Bodil Kleve
Førsteamanuensis, Avdeling for lærerutdanning og internasjonale studier, Høgskolen i Oslo

Brøkundervisning på barnetrinnet
- aspekter av en lærers matematikkunnskap

Sammendrag
Dette er en kasusstudie av en matematikktime som omhandlet brøk med en lærer, her kalt Berit. Formålet med studien var å undersøke hvordan lærere drar veksler på sine kunnskaper i matematikk og matematikkdidaktikk i undervisningen. Som teoretisk rammeverk og analyseverktøy har jeg brukt blant annet "The Knowledge Quartet" (Rowland, Huckstep, & Thwaites, 2005). Jeg diskuterer gjennomføringen av timen og drøfter hvorfor læreren fikk vanskeligheter med å illustrere brøker større enn en hel. På bakgrunn av analysen av denne timen, diskuterer jeg til slutt hvilke aspekter av en lærers matematikkkunnskaper det er viktig å vektlegge i lærerutdanningen.

Problemstilling og metode

I tidligere studie av hvordan matematikklærere på ungdomstrinnet tolket og implementerte matematikkplanen i L97 (Kleve, 2007a, 2007b, 2008), undersøkte jeg sammenhengen mellom lærernes forestillinger (beliefs) om god matematikkundervisning og deres klasseromspraksis. Jeg antydet at læreplanen har lite å si for matematikkundervisningen, men at det er lærerens kompetanse som er avgjørende for hvilken matematikkundervisning elevene møter i skolen.

I denne artikkelen ønsker jeg å utdype hva slags kunnskaper i matematikk som kan utgjøre en matematikklærers kompetanse, og hvordan ulike aspekter av lærerens matematikkunnskap kommer til uttrykk i matematikkundervisningen. Læreres matematikkunnskap for undervisning må studeres i klasserommet fordi slik kunnskap er situert i undervisningssituasjonen. I en måned fulgte jeg matematikkundervisningen som omhandlet brøk hos fire lærere i fire parallelle 5.klasser på en skole. Undervisningen ble tatt opp på video, og siden transkribert. Jeg har valgt ut en sekvens fra en av disse timene. Transkripsjonen sammen med feltnotater fra timen er blitt analysert for å kunne diskutere følgende problemstillinger:

- Hvordan kom ulike aspekter av lærerens matematikkunnskap til uttrykk?
- Kan man på bakgrunn av å identifisere disse aspektene forklare hvorfor læreren fikk problemer med å illustrere brøker større enn en?

- Hva har dette å si for hva man bør vektlegge i matematikklærerutdanningen?

Dette er en kasusstudie, dvs en ”studie som har en forskningsdesign som innebærer en detaljert og intensiv analyse av et enkelt kasus” (Bryman, 2001, s. 501, min oversettelse). En kasusstudie er en studie av et enkelttilfelle, med oppmerksomhet også rettet mot konteksten. Yin (1994) legger vekt på at en kasusstudie undersøker et fenomen i dets virkelige kontekst, og at grensene mellom konteksten og fenomenet ikke er klar. I denne studien velger jeg å foreta en detaljert analyse av en sekvens av en leksjon som igjen er en del av flere observerte leksjoner. Denne sekvensen ble valgt ut fordi den tydeliggjør et problem som uventet dukket opp. Ved å fokusere på kun en liten sekvens, maksimeres leserens mulighet til å sette seg inn i denne konkrete sekvensen, ”bli kjent med” læreren og elevene som deltok, og med matematikken som det handlet om. En slik kasusstudie har også begrensninger, idet man ikke kan generalisere fra den.

Som teoretisk bakgrunn i denne studien har jeg støttet meg til Shulman (1986), Ball, Thames og Phelps (2008) og Rowland, Huckstep og Thwaites (2005). Kategoriene som brukes i analysen er hentet fra Rowland m. fl. (2005), og har således virket styrende på hvilke aspekter av lærerens undervisnings-kunnskap i matematikk det er blitt fokusert på, og kan ikke sies å ha oppstått gjennom en induktiv analysetilnærming av dataene i denne studien.

Før jeg beskriver undervisningssekvensen, vil jeg presentere det teoretiske rammeverket, matematikkunnskap for undervisning, som jeg har lagt til grunn i studien. Her omtales også de teoretiske kategoriene som er brukt i analysen. Videre viser jeg kort til forskning omkring hva som har vist seg å være noen årsaker til at brøkbegrepet ofte bare blir delvis utviklet hos elever.

Matematikkunnskap for undervisning

I sin artikkel ”Those who understand: Knowledge growth in teaching“ omtaler Shulman (1986) den manglende forskning omkring hvordan kunnskaper i et fag (f. eks matematikk) blir omformet fra å være lærerens kunnskap til noe som skal undervises, som ”The missing Paradigm”. Forskning omkring faginnholdet som skal undervises ble etterlyst: Hvor kommer læreres spørsmål fra? Hvordan bestemmer lærere det som skal undervises? Hvordan presentere det for elevene? Hvordan drar læreren veksler på sine egne kunnskaper i faget?

Dermed brakte Shulman fagdidaktikken inn i undervisningsforskningen. Han understrekte nødvendigheten av et teoretisk rammeverk når det gjaldt områder og kategorier for kunnskaper om faginnhold. Hva tenker lærerne på når det gjelder innholdskunnskap, og hvordan tenker lærerne på det i forhold til pedagogisk kunnskap? Shulman skilte mellom tre kategorier av det han kaller “Content knowledge”: “Subject Matter Content Knowledge” – kunnskap i faget, "Pedagogical Content Knowledge"- fagpedagogisk kunnskap eller undervisningskunnskap knyttet til faget og "Curricular Knowledge " – kunnskap om læreplaner.

Subject Matter Content Knowledge (SMCK), kunnskap om faginnhold, refererer både til faktakunnskap og organiseringen av denne som læreren har i tankene.

Pedagogical Content Knowledge (PCK) går utover fagkunnskap som sådan og over til undervisningskunnskap i faget. PCK representerer blandingen av fag og pedagogikk til en forståelse av hvordan spesielle emner og problemer er organisert, representert, tilpasset elevenes ulike interesser og evner og presentert i undervisningen. Hva er relevant kunnskap for læreren i undervisningssammenheng?

Curricular knowledge handler om å vite hva som finnes av undervisningsmateriell, lærerveiledninger, læreplan, osv. Det innbefatter også lærerens evne til å relatere det som undervises i hans/hennes fag til det som undervises i andre fag (tverrfaglighet). Videre handler det om å vite hva som er blitt undervist i faget tidligere og hva studier i faget inneholder på høyere klassertrinn.

Ball, Thames og Phelps (2008) bygget på Shulman's "Pedagogical Content Knowledge" - undervisningskunnskap, og gjennomførte en studie der de undersøkte matematikkunnskap *for* undervisning basert på analyser av matematiske utfordringer som oppsto i undervisningssituasjoner. Med utgangspunkt i "Content Knowledge" skilte de mellom "Common Content Knowledge", vanlige matematikkunnskaper, – det mange kan i matematikk selv om de ikke er lærere og skal undervise stoffet, og "Specialised Content Knowledge for Teaching" – matematikkunnskaper og ferdigheter som er relevante kun for undervisning. Denne typen kunnskap innbefatter blant annet å kunne se etter mønstre i elevers feilsvar og å kunne finne ut om en fremgangsmåte gjelder generelt. Videre innebærer det å kunne vite hvordan ulike matematiske emner i læreplanen henger sammen. Lærernes arbeid med et matematisk emne i en undervisningssituasjon innebærer å kunne 'pakke ut' matematikken på en måte som det verken er nødvendig, og heller ikke ønskelig, for andre å kunne gjøre.

Når det gjelder Shulman's "Pedagogical content knowledge" (PCK), undervisningskunnskap i matematikk, foreslår Ball, Thames og Phelps å dele den i "Knowledge of Content and Students", KCS, kunnskaper i matematikk og elever, og "Knowledge of Content and Teaching", KCT, kunnskaper i matematikk og undervisning. Å vite hvilke feil av mange mulige det er mest sannsynlig at elever gjør, er eksempel på KCS. Lærere må kunne lytte til og tolke elevenes ofte ufullstendige tenkning. Det krever en interaksjon mellom matematisk forståelse, elever og deres matematiske tenkning. Den andre komponenten, "Knowledge of Content and Teaching", KCT, kombinerer kunnskap om undervisning og kunnskaper i matematikk. Dette innebærer å kunne vurdere fordeler og ulemper ved ulike tilnærmingsmåter og eksempler innenfor et emne.

Med bakgrunn i Shulman's tre kunnskapskategorier, og Ball m. fl. sin utvidelse og utdyping av disse, vil jeg bruke "The Knowledge Quartet", utviklet av Rowland m. fl. (2005) som teoretisk rammeverk i analysen av dataene fra min klasseromsforskning. Rowland m. fl. tok også utgangspunkt i Shulman's kategorier for kunnskap, Subject matter knowledge (SMK) og Pedagogical Content Knowledge (PCK). I motsetning til Ball m. fl, som videreutviklet Shulman's kunnskapskategorier, for igjen å utvikle et instrument for å måle læreres kunnskaper (både SMK og PCK), argumenterer Turner og Rowland (2008) at i kunnskapskvartetten som et teoretisk rammeverk er

> the distinction between different kinds of mathematical knowledge [is] of lesser significance than the classification of the situations in which mathematical knowledge surfaces in teaching. In this sense the two theories may each have useful perspectives to offer to the other. (s .2)

De tok utgangspunkt i videostudier av matematikkundervisningen til lærer-studenter mot slutten av deres utdanning. Målet med studien var å få fram hvordan lærerne dro veksler på sine kunnskaper i matematikk og 'matematisk pedagogikk' i undervisningen. Gjennom en "grounded" tilnærming og be-arbeiding av dataene, ble kunnskapskvartetten identifisert. De studerte måten ferske læreres 'content knowledge', både SMK (matematikkunnskap) og PCK (undervisningskunnskap i matematikk) lå til grunn for undervisningen. Målet var å utvikle et empirisk basert begrepsapparat for at lærerstudenten (den ferske læreren), øvingslæreren og lærerutdanneren kunne diskutere ulike aspekter av matematikkunnskaper som kom til uttrykk i denne undervisningen. Kunnskaps-kvartetten som de kom fram til, ser de på som et hjelpemiddel til å kunne reflektere over hvordan lærerens matematikkunnskaper kom til uttrykk i under-visningen. "The Knowledge Quartet", eller kunnskapskvartetten har fire brede dimensjoner; "foundation", "transformation", "connection" og "contingency".

Foundation eller grunnlaget, er den kunnskapen i matematikk som læreren har tilegnet seg blant annet gjennom egen utdanning; det som er forankret i lærerens teoretiske bakgrunn og forestillinger. Det er den kunnskapen man har, selv om denne ikke blir brukt til andre formål. Innenfor denne kunnskapen ligger det et potensial til å påvirke pedagogiske valg og strategier på en grunn-leggende måte. Nøkkelkomponenter i denne teoretiske bakgrunnen er kunnskap og forståelse av matematikk som sådan. Kunnskaper om forskningsresultater innenfor matematikkdidaktikk hører også hjemme i denne kategorien

Transformation, eller omdanning, er hvordan læreren "re-presenterer" lære-stoffet for elevene i form av eksempler, demonstrasjoner, aktiviteter og spørsmålsstillinger. Rowland, Huckstep og Thwaites (2005) viser til Shulman (1987): …"the capacity of a teacher to transform the content knowledge he or she possesses into forms that are pedagogically powerful" (s. 15). De refererer også til Ball og Bass (2003) som skiller mellom det å kunne noe for en selv og det å hjelpe andre til å lære seg denne kunnskapen. Shulman (1986) indikerer at dette er å kunne re-presentere lærestoffet i form av analogier, illustrasjoner, eksempler, forklaringer og demonstrasjoner. Denne kategorien fokuserer på handlinger rettet mot eleven og følger fra overveielser basert på grunnleggende kunnskap (Foundation).

Connection, eller sammenheng, er hvordan helheten i matematikkfaget og lærestoffet ivaretas. Denne kategorien binder sammen valg og avgjørelse som blir gjort for de adskilte delene av matematikkinnholdet, f.eks læringen av en prosedyre. Det handler også om sammenhengen mellom leksjoner. Matematikk er kjent for sin indre sammenheng, og det som binder den sammen, er begrunnelser og bevisføring. Innenfor denne kategorien er også rekkefølgen av matematikkemner, oppgaver og øvelser. Dette reflekterer overveielser og valg ikke bare av kunnskap om strukturelle sammenhenger, men også bevissthet om de kognitive utfordringer ulike emner og oppgaver gir.

I en undervisningssituasjon kommer det mange innspill fra elever som det ikke er mulig for en lærer å kunne forutse. *Contingency* handler om slike uplanlagte innspill og lærerens beredskap og evne til å kunne svare på disse. Lærerens evne til å kunne avvike fra det som var planlagt for å kunne følge opp innspill fra elevene, spiller stor rolle innenfor ”Contingency”-aspektet.

Basert på denne beskrivelsen fant jeg kunnskapskvartetten nyttig som et analyseverktøy for å kategorisere situasjoner i klasserommet der ulike aspekter av lærerens matematikkunnskaper kom til uttrykk. Rowland, Huckstep & Thwaites (2004b) viser hvordan kunnskapskvartetten kan anvendes med detaljert referanse til en undervisningssekvens med læreren Laura i 5. klasse, som omhandlet skriftlige multiplikasjonsmetoder. Rowland m. fl. (2005) brukte kunnskapskvartetten som analyseverktøy av en matematikktime som omhandlet subtraksjon i første klasse med læreren Naomi, til å identifisere utfordringer som oppsto i timen for senere diskusjon og utviklingsarbeid. Hvordan en time med læreren Chloe kunne oppfattes gjennom kunnskapskvartettens linser, er beskrevet i Rowland, Huckstep & Thwaites (2004a). Timen med Chloe handlet om hoderegningsstrategier i forbindelse med subtraksjon. Turner & Rowland (2008) brukte kunnskapskvartetten både da de identifiserte læreres matematikkunnskaper i undervisningssituasjoner, og som et refleksjonsverktøy for utviklingsarbeid.

Brøk

I likhet med desimaltall og prosent forekommer brøk med ulike betydninger som også møter oss i dagliglivet. Brøk kan være en del av et hele, et punkt på tall-linjen, svar på et divisjonsstykke eller en måte å sammenligne to mengder eller mål på (Anghileri, 2000; Breiteig & Venheim, 1999; Keijzer, 2003).

Novillis (1976) studerte den hierarkiske utviklingen av aspekter ved brøk-begrepet blant amerikanske barn. Hun fant at modeller av brøk som del av en helhet eller sammenligning av grupper, var betydelig lettere for barna å forstå enn som et punkt på tallinjen. Hennes studie henviste til arbeid med brøker som ikke var større enn én. I motsetning til del av en helhet eller sammenligning av grupper, innlemmer ikke tallinjen som modell at en brøk kan betraktes som et konkret objekt. Men ifølge Dickson, Brown og Gibson (1984), anskueliggjør tallinjen *uekte brøker* mer naturlig. De hevdet at representasjoner av brøker som del av en hel ikke egnet seg som representasjon av uekte brøker og at aksept av definisjonen av en brøk som en del av en helhet, er uforenlig med selve eksistensen av uekte brøker.

I følge Anghileri fokuseres det mye i brøkundervisningen på å kunne identifisere brøk som del av en helhet. Hun hevdet at å lykkes med brøk er avhengig av at man er i stand til å se brøken både som et tall og et forhold som kan være et resultat av en regneoperasjon. $\frac{3}{4}$ representerer et tall mellom $\frac{1}{2}$ og 1 på tallinjen og tre deler av fire når helheten er delt i fire. I tillegg er $\frac{3}{4}$ et resultat av en regneoperasjon. Å være i stand til å se brøken som et resultat av en regneoperasjon er avgjørende for å kunne forstå at $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ og $\frac{15}{20}$ representerer samme tall og for å kunne identifisere $\frac{3}{4}$ med 0,75 og med 75%. Videre skriver hun:

> Research suggests that an approach to fractions which identifies each as numbers to be located on a number line, without emphasizing the way of partitioning a whole, will help to establish the equivalence with decimals and percentages.
>
> *(Anghileri 2000, s. 115)*

Anghileri foreslo altså å unngå vektleggingen av brøk som del av en helhet.
Askew (2000) hevder at hvis man hovedsakelig fokuserer på brøk som del av en hel slik at det blir en slags sosial konvensjon, kan dette faktisk hindre mulighetene for utviklingen av et solid brøkbegrep. For å understreke dette, hevder han at hvis du spør lærere eller elever hva en figur (rektangel delt i fem deler, 3 av disse er skravert) illustrerer, vil de fleste si $\frac{3}{5}$ eller noen kanskje $\frac{2}{5}$. Men, sier han, det er mulig også å "lese" diagrammet på mange andre måter: 1 $\frac{2}{3}$, 2 $\frac{1}{2}$, 1 $\frac{1}{2}$ eller $\frac{2}{3}$. Han skriver:

> The reason it is almost universally read as $\frac{3}{5}$ is not to do with the diagram per se, nor to do with pupils' ability to perceive the fraction within the diagram. Three-fifths is taken as the common reading because this is a well established common practice: everyone else from textbook writers to teachers to parents 'reads' the diagram as three-fifths. A social practice is at the heart of reading the diagram.
>
> *(Askew 2000, s. 139)*

Han advarer altså mot å fokusere på brøk som del av en hel slik at det blir en sosial konvensjon.

Studien

Med utgangspunkt i komponentene av matematikkunnskap som inngår i kunnskapskvartetten, og hva som i følge forskning har vist seg å være problematisk i forhold elevers utvikling av brøkbegrepet, vil jeg nå presentere en matematikktime fra 5. klasse med en lærer, her kalt Berit. Hensikten er å bruke kunnskapskvartetten til å analysere hva matematikklæreren kan, og hvordan man kan identifisere muligheter til å utvikle denne kunnskapen. Mål for timen var skrevet på smartboard, og læreren startet med å lese det:

- Å kunne sammenligne brøker med ulik nevner
- Å kunne finne ut hvilken brøk som er størst og minst av brøker der telleren er 1

Berit presiserte at det var det første målet de skulle konsentrere seg om i dag. Deretter startet hun en videosnutt som "en liten oppfriskning" av det de hadde holdt på med nå i snart tre uker. Videoen viste både med tall og med figur (sirkel) at $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, altså en illustrasjon av likeverdige brøker.

Deretter skrev hun opp nummer på oppgaver fra læreboka som elevene skulle jobbe med. Det var først en oppgave hvor de skulle sammenligne brøker ved å sette inn <, > eller =. Deretter var det tallfølger med brøk. Oppgaven som diskuteres her var:

- Hvilke er de tre neste i tallrekken? $\frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}$

Elevene startet med å jobbe med oppgavene på egenhånd mens læreren gikk rundt og hjalp. Etter ca 15 minutter avbrøt hun dem og sa:

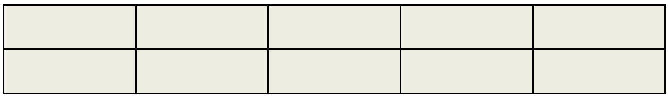
> "Da skal vi ta litt felles. Nå skal vi tenke sammen her dere, på tavlen. For plutselig er det mange av dere som oppdaget at nå er vi på teller større enn en, er vi på nå. Hva er det som skjer når vi kommer over et helt tall? Nå skal vi tenke sammen på det. Noen har oppdaget det da de kom til b, 6.50 b. Vi tenker litt sammen på oppgave 6.51b. og der står det:
> $\frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}$." (Lærer skrev på tavla)

Deretter spurte hun elevene om de neste, og om hvorfor. Hun godtok at elevene svarte at de plusset på to til på telleren, og at de ikke forandrer nevneren fordi "det er det samme".

For å illustrere foreslo Berit å vise i en figur, og hun tegnet et rektangel på tavla. Deretter spurte hun elevene om innspill til hvordan den ville se ut. Nina foreslo: "Du kan først dele den i to og så deler du hver av de i to og så hver av de igjen i to og så hver igjen i to".
Berit delte rektanglet i to med en vannrett linje og sa:

> ”Ja, hvordan er, nå har jeg delt den i to. *Hvordan er helheten min*? Hvordan kan jeg vite det? Jeg har lyst til å tegne nesten en sånn tegneseriefigur nå som viser hvordan det går fra to tideler til fire tideler (Pekte på brøkene over). Hvordan vet jeg hvordan første figuren min skal se ut?”

Etter forslag fra Sigrid delte hun det i 10 deler ved hjelp av loddrette linjer og poengterte igjen at det måtte være ti deler, for det var *helheten*. Deretter fargela hun to og to ruter samtidig som hun viste til tallrekka som nå så slik ut: $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{10}{10} = 1$, og hun vektla at $\frac{10}{10}$ var det samme som en hel. Figuren så slik ut:



Datautdraget under viser hvordan dialogen mellom lærer og elevene utviklet seg videre når de skulle komme frem til neste tall i tallrekken, og problemene som oppstod når dette skulle illustreres i figuren.

1	Berit:	Hjelp, hva gjør jeg nå? Hvor skal jeg farge, hva skal jeg gjøre nå? Er det noen som kan hjelpe meg litt? Martin?
2	Martin:	Sånn som når vi skulle lære om dette her, så hadde vi det i klassen med hettegensere, og så kom det flere og flere inn. Da ble nevneren mer og mer når vi ble flere. [Han refererte til en aktivitet uken før der de skulle uttrykke hvor stor del av klassen som hadde hettegenser, og så kom det to elever inn (en hadde vært hos tannlegen, en hos spesialpedagog osv) som også hadde hettegenser, og da forandret helheten seg. Først var det $\frac{10}{17}$, så ble det $\frac{11}{18}$ og så ble det $\frac{12}{19}$]
3	Berit:	mmm. Husker du det?
4	Martin:	Så ble nevneren mer og mer fordi vi ble flere, så det er på den måten, hvis nevneren blir større, eller hvis telleren blir større så blir også nevneren større. Hvis telleren er over nevneren...
5	Berit:	mmm..mmm. Da var det helheten vår som forandret seg. Har egentlig helheten vår forandrer den seg nå? Snakker vi, begynner vi å snakke om noe annet enn tideler tror dere? Vi har snakket om ti tideler nå (peker på 10/10). Magnus?
6	Magnus:	Tolv tolvdeler!
7	Berit:	Tolv tolvdeler, ja. Hvis jeg setter opp tolv tolvdeler (Hun skrev $\frac{12}{12}$ etter $\frac{10}{10} = 1$, så nå sto det: $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{10}{10} = 1$, $\frac{12}{12}$ på tavla)
8	Berit:	Hva må jeg gjøre her da? (pekte på figuren som nå hadde alle ti rutene skravert) eh Sigrid?
9	Sigrid:	Legge til to

10	Berit:	Ja, kan jeg gjøre det? Kan jeg forandre den sånn da? (Tegnet svakt to sammenslåtte ruter på figuren)

11	Elev:	Ja
12	Berit:	Okay?
13	Elever:	Kan ikke bare gjøre det!
14	Berit:	Nei? Nå er vi litt uenige her … Hva tenker du, Marius?
15	Marius:	Hvis det hadde vært en kake, kan du ikke bare komme med et kakestykke til!
16	Berit:	Nei, man kan jo ikke det. Nå snakker vi om deler av en helhet. Det vi snakket om når vi hadde på caper (hetter), da var det på en måte hele mengden, hele helheten, det kunne godt komme inn ekstra mennesker. Det var et veldig godt eksempel, Marius. Vi kan ikke bare legge på kakestykker på den. Vi kan ikke forandre kaken sånn. Thora? (Thora hadde hånden oppe)
17	Thora:	Kan dele den i flere biter.
18	Berit:	Jaa.., men vil brøk*biten* da bli den samme? Hvis jeg begynner å dele denne i flere biter. Hvorfor blir ikke det riktig, Thora?
19	Thora:	Fordi det blir telleren som blir større.
20	Berit:	Ja, da blir alt større, ikke sant. Hvis, hvis to tideler (peker på to tideler), hvis jeg hadde begynt å dele den enda en gang (peker på rektangelet og tegner loddrette streker i luften) sånn at jeg får tjue biter, så blir jo ikke to tideler det samme. (pause) lenger kanskje? Nei? (Pekte på en elev).
21	Elev:	Du må forminske de bitene, eller gjøre de mindre
22	Berit:	jaaaaa...
23	Elev:	Sånn at du får plass, eller du kan lage en sånn til (peker på rektanglet)
24	Berit:	Eller kan jeg begynne å snakke om enda en helhet (tegnet et nytt rektangel og delte det i ti), som består av ti, hvis vi tenker oss at jeg får mer, men jeg vil ikke forandre dette her (pekte på tallrekka). Hvis vi tenker dette som eksempel, hvordan skulle det blitt det neste tallet vårt da. Nå er vi oppe i en hel. Neste tallet. Hvis jeg vil ha ti i nevneren min? Sigurd?
25	Sigurd:	Nei.
26	Berit:	Nina?
27	Nina:	Jeg tror kanskje to av tjue eller tolv av tjue eller ti eller noe sånt
28	Berit:	Neeeeii... Sigrid?
29	Sigrid:	Hvis du skulle fortsette å ha nevneren, så blir det tolv tideler
30	Berit:	Da blir det tolv tideler, ja (skraverte to ruter i det nye rektanglet). Er dere enige i det?

Analyse

Først vil jeg med utgangspunkt i kunnskapskvartetten analysere aspekter av lærerens matematikkunnskaper for å identifisere muligheter for utvikling av disse. Deretter vil jeg diskutere hvilke aspekter ved brøkbegrepet som ble vektlagt, og hvordan dette vil kunne påvirke utviklingen av elevenes brøkbegrep. Dette danner så en bakgrunn for en diskusjon om hva slags matematikkunnskap man bør vektlegge i lærerutdanningen.

”Foundation”
– hvordan kom Berits grunnleggende kunnskaper i matematikk til uttrykk?

Dette aspektet ved lærerens matematikkunnskaper kom blant annet til uttrykk i utsagn 24 (etter at en av elevene hadde initiert det i utsagn 23) da hun foreslo å snakke om enda en helhet bestående av ti. Hun understrekte i tillegg at nevneren ikke forandres, noe som hadde vært diskutert tidligere. Denne understrekningen ble repetert av Sigrid, som endelig kom med det riktige svaret. I utsagn 16 viste Berit også til at det de nå snakket om, var deler av en helhet, og at det var forskjellig fra øvelsen de hadde første dagen med brøk (hettegensereksemplet). Hun viste dermed kunnskap om forskjellen mellom hettegensereksemplet og denne oppgaven, hvor nevneren ikke ble forandret. Da vi diskuterte denne sekvensen med Berit og de tre andre matematikklærerne i 5.klasse i en fokusgruppesamtale etterpå, sa hun:

> ”Kort fortalt så var jeg litt dårlig forberedt, at det skulle komme en oppgave hvor svaret var mer enn en hel og ikke hadde tenkt en tanke om hvordan jeg skulle legge dette frem for elevene. Hvor jeg begynte å tegne opp, og begynte da bare med en enhet og så ville jeg trengt flere. Der tror jeg mye av feilen var, og at jeg da tok med elevene som da gikk over til tolv tolvdeler i stedet for tolv tideler og sånt.”

Dette indikerer at hun hadde kunnskap om at hun trengte flere enheter, men at det var planleggingen av undervisningen som ikke hadde vært godt nok gjennomtenkt. Gjennom dialogen med elevene gikk det opp for henne at tolv tolvdeler ikke kunne være riktig. Dette til tross for at hun først syntes å svare bekreftende på forslaget (utsagn 7), men senere trakk det tilbake (utsagn 24). Dette kan tyde på en usikkerhet hos læreren når det gjaldt grunnlagsaspektet av matematikkunnskapen. Til tross for at Berit visste, og til slutt ga uttrykk for at tolv tolvdeler ikke var et riktig svar, virket det som om hun ikke var i stand til å formidle til elevene *hvorfor* tolv tolvdeler var galt.

”Transformation”
- hvordan gjorde Berit kunnskaper om brøk tilgjengelig for elevene?
Berit oppmuntret elevene til å ta del i undervisningen og til å komme med forslag til løsninger. Hun valgte også å illustrere brøkene med figur, noe oppgaven, som var hentet fra læreboka, ikke ba om. Men hva med måten hun illustrerte brøkene på? Hun valgte å illustrere brøkene som deler av en helhet, og hun tegnet et rektangel som hun delte inn i 10 deler. Ved å illustrere på denne måten, fikk hun vanskeligheter når brøken ble større enn en. Forskningen det er referert til tidligere i artikkelen, fremhever nettopp at det å illustrere brøker som del av en helhet ikke er konsistent med eksistensen av uekte brøk, og at andre måter å illustrere brøker på (for eksempel bruk av tallinjen) er bedre egnet.

”Connection”
– hvordan var sammenhengen innen matematikk, i timen, og mellom denne timen og tidligere matematikktimer?
Videosnutten som ble vist i begynnelsen av timen satte nok elevene inn i ”brøk-modus”, og elevene fikk repetert noe av det de til nå hadde hatt om brøk. Dermed ble sammenhengen mellom tidligere matematikktimer med brøk og denne matematikktimen synliggjort.

Berit valgte å illustrere brøkene med et(t) rektangel og pekte hele tiden på hvilken brøk som til enhver tid var illustrert på figuren (rektanglet). På den måten viste hun sammenhengen mellom brøk som et tall og brøk som deler av et hele. Sammenhengen mellom tallene i denne oppgaven og andre måter å representere brøk på, f. eks som et punkt på tallinjen, eller som et resultat av en regneoperasjon ble ikke foretatt. Hva så med sammenhengen innen denne matematikktimen? Målene for timen var å kunne sammenligne brøker med ulike nevnere, og å kunne finne ut hvilken brøk som var størst og minst av brøker der telleren er en. Bare oppgaven som de jobbet med de første 5-10 minuttene av timen, omhandlet sammenligning av brøker med ulike nevnere. I resten av timen jobbet de med tallrekken av brøker som oversteg en hel og hvordan det kunne illustreres. Heller ikke de andre oppgavene som var skrevet på tavla, handlet om målene for timen. Dette viser at læreren tok tak i utfordringene hun møtte underveis, og at hun så nødvendigheten av å måtte avvike fra sin opprinnelige plan for timen.

”Contingency”
- hvordan svarte Berit på elevenes innspill?
I utsagn 2 kom Martins innspill om hettegenserne. Dermed fikk læreren en mulighet, som hun benyttet seg av, til å si noe om hvordan hettegensereksemplet var i forhold til oppgaven de nå jobbet med. I utsagn 5 viste hun til at i det eksemplet forandret helheten seg. Måten hun refererte til det på, (”begynner vi å snakke om noe annet enn tideler tror dere?”) gjør muligens sitt til at forslaget om 12-deler kom opp, som hun først bekreftet (utsagn 7). Magnus sitt forslag om

$^{12}/_{12}$ som neste tall i tallrekken kom nok litt overraskende på Berit. Forvirret det henne? Hvorfor foreslo Magnus $^{12}/_{12}$? Hun ignorerte det ikke, men responderte på det og ga tilbakemelding på forslaget. Hun forsøkte imidlertid ikke å rettferdiggjøre at det kunne ha vært riktig, og ga ikke Magnus mulighet til å begrunne forslaget. I utsagn 9 foreslo Sigrid å legge på to ruter til. Dette fulgte Berit først opp ved å skissere to ruter til, men så visket hun dem ut igjen etter at elevene protesterte (utsagn 13). Thoras forslag om å dele figuren inn i mindre biter, svarte hun på ved å spørre hvorfor ikke det kunne bli riktig. Til tross for at Berit uttrykte at hun ikke følte seg godt nok forberedt, eller at hun simpelthen ikke kunne nok matematikk til å besvare elevenes innspill på en faglig solid måte, viste hun evne til å lytte til elevenes innspill, noe som igjen førte til at de våget å komme med forslag til løsninger.

Diskusjon

Måten læreren i dette tilfelle kommuniserte med elevene på, spesielt når hun selv ble ”faglig satt ut” (i fokusgruppesamtalen etterpå sa hun: ”i ti minutter følte jeg at, hjelp, nå mister jeg kontrollen”) avdekker denne lærerens evne til å undervise. Hun administrerte klassen og kommenterte elevenes innspill på en måte som oppmuntret dem til å bidra. Dermed viste hun at hun hadde mye undervisningskunnskap. Hun brukte tiden mens elevene kom med ulike innspill til å tenke på hvordan hun skulle løse dette. I fokusgruppesamtalen etterpå sa hun: ”Det gikk i hundre og tjue oppi her (pekte på hodet), mens jeg svarte elevene ja, mmm,…”. Det kan ha vært elevens forslag i utsagn 23 om å lage et rektangel til, som gjorde at hun innså at hun måtte tegne et rektangel til. Aspekter ved lærerens matematikkunnskaper kom lite til uttrykk i de ti minuttene hun refererte til å ha mistet kontroll. Hvis vi ser på Ball m. fl. sin måte å dele opp Pedagogical Content Knowledge (PCK), i “knowledge of content and students” og “knowledge of content and teaching”, viste Berit at hun hadde mye kunnskap både om elever og om undervisning. Hun viste at hun var en erfaren lærer som administrerte klassen på en god måte, noe som gjorde at elevene fikk komme med forslag til løsninger. Og selv brukte hun det til å komme ut av den ”faglige klemma” hun følte hun var kommet i.

Dette aspektet, klasseledelse, er ikke en egen komponent i kunnskaps-kvartetten, men likevel en viktig del av lærerens undervisningskunnskap. Det å administrere og organisere klassen, klasseledelse, kunne kanskje vært lagt til som en femte komponent i en kunnskapskvintett. Ved å bruke kunnskaps-kvartetten, med de fire aspektene den inneholder som et analyseverktøy av en lærer som underviste brøk, ble dette viktige aspektet av lærerens undervisnings-kunnskap synlig. Hvis vi går tilbake til Shulman og hans ”missing paradigm”, syntes det som om læreren hadde mye kunnskaper om klasseledelse, men at ulike aspekter ved hennes matematikkunnskaper med fordel kunne styrkes. Når det gjaldt lærerens valg av eksempler og illustrasjoner (”transformation”-aspektet), viste det seg at disse valgene ikke var godt nok gjennomtenkt. Hennes valg å illustrere brøk som del av en helhet gjorde at hun fikk vanskeligheter. Som matematikklærerutdanner ser jeg her et mulig tema for faglig utviklingsarbeid. Samtidig understreker dette viktigheten av å studere forskning og forskningsresultater i lærerutdanningen.

Gjennom hele denne episoden ble det fokusert på brøk som deler av en helhet både fra lærerens side og elevenes side. Dette kan være en av grunnene til at problemet med å fortsette tallrekken utover en hel og illustrere denne i figuren, dukket opp. Berit brukte ikke tallinjen til å illustrere, ei heller kom hun inn på brøk som svar på et divisjonsstykke. Anghileri (2000) hevdet at for å lykkes i arbeidet med brøk, er det viktig å være i stand til å se brøk, ikke bare som del av et hele, men også som svar på et divisjonsstykke og som et punkt på tallinjen. Askew (2000) går enda lenger ved å hevde at ved å jobbe med brøk, uten å fokusere på brøk som del av en helhet, vil man være med å utvikle et mer solid brøkbegrep enn om man også ser på brøken som del av en helhet, og Dickson m. fl. (1984) uttrykte at det å se på brøk som del av en helhet, er uforenelig med eksistensen av uekte brøker. På denne bakgrunn kan Berits valg om så sterkt kun å fokusere på brøk som del av en helhet, ha vært noe av årsaken til de vanskelighetene hun og elevene kom opp i når de skulle finne neste brøk i tallrekken (12/10) og så illustrere denne. Hadde f.eks. tallinjen vært brukt, ville problemet med å mangle en helhet ikke ha dukket opp, selv om det ikke hadde løst alle didaktiske utfordringer i forbindelse med brøkundervisning. Interessant for videre matematikkdidaktisk forskning vil være å undersøke hvordan bruk av flere representasjoner av brøk, innbefattet bruk av tallinjen, vil kunne påvirke elevers begrepsforståelse av uekte brøker. For viktige ingredienser i matematikklærerutdanningen er forskningsbaserte kunnskaper om hva som kan øke (og hindre) utviklingen av matematiske begreper hos elever.

Referanser

Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. London: Continuum.

Askew, M. (2000). What does it mean to learn? What is effective teaching? In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic teaching*. Buckingham Open University Press.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based thory of mathematical knowledge for teaching. . In B. Davis & E. Simmit (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, Alberta, Canada: Canadian Mathematics Education Study Group.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching? What makes it special? *Journal of Teacher Education 59*(5), 389-407.

Breiteig, T., & Venheim, R. (1999). *Matematikk for lærere 1* (3. utg., 2. [rev.] oppl. ed.). Oslo: Tano Aschehoug.

Bryman, A. (2001). *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher's guide to recent research*: The Alden Press Ltd, Oxford.

Keijzer, R. (2003). *Teaching formal mathematics in primary education, fraction learning as mathematising process*. Utrecht: Wilco, Amersfort.
Kleve, B. (2007a). *Mathematics teachers' interpretation of the curriculum reform, L97, in Norway.* Doctoral Thesis, Høgskolen i Agder, Kristiansand.
Kleve, B. (2007b). A study of teachers' views on the teaching and learning of mathematics, their intention and their instructional practice. In C. Bergsten, B. Grevholm, H. S. Måsøval & F. Rønning (Eds.), *Norma 05: Relating Practices and Research in Mathematics Education* (pp. 361-374). Trondheim, Norway: Tapir academic press.
Kleve, B. (2008). Mathematics teachers' beliefs about teaching and learning mathematics and constraints influencing their teaching practice. In C. Winsløw (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education, Proceedings from NORMA08 in Copenhagen, April 21-April 25, 2008*. Rotterdam: Sense.
Novillis, C. (1976). An analysis of the fraction conept into a hierarchy of selected sub-concepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for research in Mathematics education, 7*, 131-144.
Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2004a). *The Knowledge Quartet: Considering Chloe.* Paper presented at the Cerme 4, European Research in Mathematics Education IV, Sant Feliu de Guixols, Spain.
Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2004b). *Reflecting on Prospective Elementary Teachers' Mathematics Content Knowledge: The Case of Laura*: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.
Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.
Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1).
Turner, F., & Rowland, T. (2008). The Knowledge Quartet: A Means of Developing and Deepening Mathematical Knowledge in Teaching? Tilgjengelig fra: *http://www.maths-ed.org.uk/mkit/MKiT5_Turner&Rowland.pdf*